Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Επίκ. Καθ. Γ. Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV

15 Σεπτεβρίου 2014

Θέμα 1. Έστω $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ x \le y \le 1 + x^2\}$.

(α΄) Σχεδιάστε το A και δείξτε ότι είναι ένα κανονικό χωρίο ως προς τον άξονα των x.

(β΄) Υπολογίστε το εμβαδό του A και το ολοκλήρωμα $\int_A xy \, d(x, y)$.

Θέμα 2. Έστω D ο κυκλικός δίσκος ακτίνας 1 και κέντρου $(0, 0)$ στο επίπεδο $0xy$ και $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D, \ 0 \le z \le x^2 + y^2\}$.

(α΄) Δείξτε ότι το B είναι ένα κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο $0xy$.

(β΄) Υπολογίστε τον όγκο του B και το ολοκλήρωμα $\int_B z \sqrt{x^2 + y^2} \, d(x, y, z)$.

Θέμα 3. Ένα βαρέλι ύψους $2a$ $(a > 0)$ είναι τοποθετημένο έτσι, ώστε η βάση του να βρίσκεται στο επίπεδο $z = -a$. Η τομή του βαρελιού με το επίπεδο $z = \zeta \in [-a, a]$ δίνεται από το σύνολο

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \zeta, \ x^2 + y^2 \le r^2(\zeta)\} \quad \text{με} \quad r(\zeta) = R - (R - r)\left(\frac{\zeta}{a}\right)^2, \quad R > r > 0.$$

Υπολογίστε τον όγκο του βαρελιού.

Θέμα 4. Δείξτε ότι κάθε κλειστή μπάλα στον $\mathbb{R}^3$ είναι ένα Jordan-μετρήσιμο σύνολο.

Θέμα 5. Έστω $G \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και συνεκτικό, $f : G \to \mathbb{R}^n$ ένα πεδίο κλίσεων και φ μια αντιπαράγωγός του. Δείξτε ότι κάθε αντιπαράγωγος ψ του f γράφεται ως $\varphi + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Θέμα 6. Βρείτε μια κλάση επιφανειών για τις οποίες να δείξετε ότι το Θεώρημα του Stokes ισοδυναμεί με το Θεώρημα του Green.

Θέμα 7. (α΄) Έστω S το άνω μοναδιαίο ημισφαίριο στον $\mathbb{R}^3$, $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ με $n_3 \ge 0$ και $\bar{F}(x, y, z) = (1, xz, xy)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Υπολογίστε το $\int_S \operatorname{curl} F \cdot \bar{n} \, d\sigma$.

(β΄) Υπολογίστε το εμβαδό της επιφάνειας $z = x^2 - y^2$, $(x, y) \in B((0, 0), \sqrt{2})$.

(γ΄) Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $\bar{\gamma}(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$, $t \in [0, 2\pi]$, $r, h > 0$, καθώς και το ολοκλήρωμα $\int_{\bar{\gamma}} (xy + z) \, ds$.

Θέμα 8. Έστω $V \subset \mathbb{R}^3$ το σύνολο μεταξύ των δύο σφαιρών κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνων $R > r > 0$, $\bar{n}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο σύνορο ∂V και $u, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ δύο δυο φορές συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι:

$$\int_V (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u \, \Delta v) \, d(x, y, z) = \int_{\partial V} u \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} \, d\sigma$$

και υπολογίστε την τιμή αυτή όταν $u(x, y, z) = 1$ και $v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \ \forall \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Θέμα 9. (α΄) Έστω f_n, f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ ομοιόμορφα και g φραγμένη. Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} g f_n = g f$ ομοιόμορφα.

(β΄) Δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}$ συγκλίνει στο $[0, a]$ με $a > 0$ ομοιόμορφα σε μια αύξουσα συνάρτηση.

Θέμα 10. (α΄) Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = 0$.

(β΄) Αναπτύξτε το $\sin x$ στο $[0, \pi]$ σε σειρά συνημιτόνων.

Κάθε θέμα αντιστοιχεί σε μία μονάδα. Μπορείτε να τα λύσετε με όποιο τρόπο θέλετε, αρκεί να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!