Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Γιάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV

25 Σεπτεμβρίου 2015

Θέμα 1. [0.5] Έστω $A = [0,1] \times [0,1]$ και $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
Εξετάστε αν η f είναι ολοκληρώσιμη και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

Θέμα 2. [0.5] Για ένα μη κενό και φραγμένο $V \subset \mathbb{R}^n$ γνωρίζετε ότι υπάρχει το $\int_V 1 \, d\bar{x}$.
Ποιές ιδιότητες πρέπει να έχει το σύνολο V και γιατί;

Θέμα 3. [2] Αν $V_n(R)$ ο όγκος της μπάλας κέντρου $\bar{0}$ και ακτίνας $R > 0$ στον $\mathbb{R}^n$, δείξτε ότι για $n \geq 3$ ισχύει $V_n(1) = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}(1)$. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε δυό φορές την Αρχή του Cavalieri και, αφού δείξτε ότι $V_n(R) = R^n V_n(1)$, πολικές συντεταγμένες.]

Θέμα 4. [1] Εξετάστε αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει κατά σημείο και δώστε το όριό της, αν αυτό υπάρχει. Στην περίπτωση αυτή εξετάστε αν η ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα.

Θέμα 5. [6] Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = y$ και το σύνολο

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1],\ x^2 \leq y\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\right\}.$$

(α΄) **[0.4+0.4]** Σχεδιάστε το B και, στο επίπεδο 0yz, την τομή του γραφήματος της $f|_B : B \to \mathbb{R}$ με το επίπεδο αυτό.

(β΄) **[0.2+0.4]** Δείξτε ότι το B είναι κανονικό χωρίο ως προς τους άξονες 0x και 0y.

(γ΄) **[0.4+0.4]** Αν Γ_1, Γ_2 τα θετικά προσανατολισμένα τμήματα του ∂B, έτσι ώστε $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial B$ και Γ_1 το τμήμα από το $(1,1)$ στο $(-1,1)$, υπολογίστε το μήκος του Γ_1 και το ολοκλήρωμα

$$\int_{\Gamma_2} (y,x) \cdot d(x,y).$$

(δ΄) **[0.4]** Υπολογίστε το $\int_{\partial B} \left(x^3, (x-y)y\right) \cdot d(x,y)$, όπου ∂B θετικά προσανατολισμένο.

(ε΄) **[0.4]** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_B f(x,y) d(x,y)$.

(στ΄) **[1]** Αν

$$B' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [-1,1] : y \leq -x^2\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 2\right\},$$

αποδείξτε <u>χωρίς να υπολογίσετε</u> ότι

$$\int_{B'} f(x,y) d(x,y) = -\int_B f(x,y) d(x,y).$$

(ζ΄) **[0.4+0.2]** Δείξτε ότι το σύνολο $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ είναι ένα κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο 0xy και υπολογίστε τον όγκο του V.

(η΄) **[0.4]** Υπολογίστε το $\int_{\partial V} (x,y,z) \cdot \bar{n} \, d\sigma$, όπου $\bar{n}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο ∂V.

(θ΄) **[0.6]** Υπολογίστε το εμβαδό της επιφάνειας $D = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B\}$.

(ι΄) **[0.4]** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial D} (x^2, y^2 z, y z^2) \cdot d(x,y,z)$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας!
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!