Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV

22 Σεπτεμβρίου 2016

Θέμα 1. [1] Επαληθεύστε το Θεώρημα του Green για την $\bar{f}(x,y) = (2x^3 - y^3, x^3 + y^3)$ και τον μοναδιαίο κυκλικό δίσκο.

Θέμα 2. [1.5] Έστω $S \subset \mathbb{R}^3$ το τμήμα του επιπέδου $2x + 3y + z = 5$ που περικλείεται από την πολυγωνική γραμμή η οποία ενώνει τα σημεία $(-1,1,4)$, $(2,1,-2)$, $(2,3,-8)$ και $(-1,3,-2)$, και έστω $\bar{f}(x,y,z) = (y,z,x)$. Επαληθεύστε το Θεώρημα του Stokes.

Θέμα 3. [0.5] Δείξτε ότι το έργο

$$E = -\int_C \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot d(x,y,z)$$

που παράγεται κατά μήκος μιας προσανατολισμένης C^1 καμπύλης C στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ εξαρτάται μόνο από τις αποστάσεις του αρχικού και τελικού σημείου της C από την αρχή των αξόνων.

Θέμα 4. [2] Έστω $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη και C_r ο κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $r > 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} u \, ds = u(0,0).$$

Θέμα 5. [0.2 + 0.8 + 1.6 + 0.8 + 0.6]

(α΄) Υπολογίστε το εμβαδό του κυκλικού δίσκου D κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $R > 0$.

(β΄) Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f(z) \geq 0$, $z \in [0,R]$. Δείξτε με χρήση του (α') και της αρχής του Cavalieri ότι ο όγκος του σώματος $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,R],\ x^2 + y^2 \leq f^2(z)\}$ που προκύπτει από μία πλήρη περιστροφή του γραφήματος της f (το οποίο είναι μια καμπύλη στο επίπεδο zx) γύρω από τον άξονα των z δίνεται από τον τύπο

$$v(M) = \pi \int_0^R f^2(z) \, dz.$$

[*Υπόδειξη:* Μπορείτε να θεωρήσετε χωρίς απόδειξη ότι το M είναι Jordan μετρήσιμο.]

(γ΄) Με χρήση του (β') υπολογίστε τους όγκους στον $\mathbb{R}^3$

(i) ενός κώνου K κάθετου στο επίπεδο xy με βάση D και κορυφή $(0,0,R)$,

(ii) της άνω μισής μπάλας B_+ ακτίνας R,

(iii) ενός κυλίνδρου C κάθετου στο επίπεδο xy με βάση D και ύψος R.

Ποιες αναλογίες παρατηρείτε μεταξύ των όγκων αυτών;

(δ΄) Δείξτε ότι αν η συνάρτηση στο (β') είναι συνεχώς διαφορίσιμη, τότε το εμβαδό της επιφάνειας $S = \{(f(z)\cos\varphi, f(z)\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,R],\ \ \varphi \in [0,2\pi]\}$ που προκύπτει από μία πλήρη περιστροφή του γραφήματος της f γύρω από τον άξονα των z δίνεται από τον τύπο

$$A(S) = 2\pi \int_0^R f(z)\sqrt{1 + (f')^2(z)} \, dz.$$

(ε΄) Με χρήση του (δ') βρείτε το εμβαδό των επιφανειών από περιστροφή των σωμάτων στο (γ'). [*Σημείωση:* Για ένα από αυτά τα σώματα το ολοκλήρωμα στο (δ') υπάρχει, παρόλο που η συνάρτηση f δεν είναι διαφορίσιμη στο άκρο R του διαστήματος $[0,R]$.]

Θέμα 6. [1] Εξετάστε αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει για $n \to \infty$ (i) κατά σημείο και (ii) ομοιόμορφα, και δώστε τα αντίστοιχα όρια, αν υπάρχουν.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!