Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV

21 Σεπτεμβρίου 2017

Θέμα 1. **[2]** Έστω $C \subset \mathbb{R}^2$ η καμπύλη που αποτελείται από το τμήμα του κύκλου κέντρου $(0,0)$, το οποίο συνδέει τα σημεία $(1,1)$ και $(-1,1)$[1], και από τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα σημεία αυτά με το $(0,0)$.

(α′) **[0.4]** Υπολογίστε το μήκος της C.

(β′) **[0.4]** Υπολογίστε το $\int_C (12xy + 3,6x^2) \cdot d(x,y)$, όπου C θετικά προσανατολισμένη.

(γ′) **[1.2]** Επαληθεύστε το Θεώρημα του Green για την C και $\bar{f}(x,y) = (y,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Θέμα 2. **[1]** Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και θετική, δείξτε: $\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\right) \geq (b-a)^2$.
[*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε, αφού την αποδείξετε, την ανισότητα $c + 1/c \geq 2$ για $c > 0$.]

Θέμα 3. **[1]** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Θέμα 4. **[1]** Εξετάστε αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$, συγκλίνει (α') κατά σημείο και (β') ομοιόμορφα.

Θέμα 5. **[5]** Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $a, b, c, d > 0$ με $a < b$, $d^2 = \frac{b-a}{2c}$ και

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ a + c(x-x_0)^2 + c(y-y_0)^2 \leq z \leq b - c(x-x_0)^2 - c(y-y_0)^2\},$$

όπου

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq d^2\}.$$

(α′) **[0.4]** Δείξτε ότι το D είναι κανονικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$.

(β′) **[0.4]** Δείξτε ότι το V είναι κανονικό χωρίο στον $\mathbb{R}^3$ ως προς το επίπεδο $0xy$.

(γ′) **[0.4]** Υπολογίστε τον όγκο του V.

(δ′) **[0.6]** Δείξτε ότι το $V \subset \mathbb{R}^3$ είναι Jordan-μετρήσιμο.

(ε′) **[0.6]** Δείξτε ότι τα σύνολα

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \frac{a+b}{2}\right\} \cap \partial V \qquad \text{και} \qquad S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq \frac{a+b}{2}\right\} \cap \partial V$$

είναι επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$.

(στ′) **[0.6]** Υπολογίστε το εμβαδό του ∂V.

(ζ′) **[0.6]** Υπολογίστε το $I = \int_{\partial S_1} \big(-(y-y_0), x-x_0, g(x,y,z)\big) \cdot d(x,y,z)$, όπου ∂S_1 θετικά προσανατολισμένη στο επίπεδο $z = \frac{a+b}{2}$ και $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη.

(η′) **[0.6]** Βρείτε μία $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, έτσι ώστε $\int_{S_1} \bar{F} \cdot \bar{n}\, d\sigma = I$, όπου $I \in \mathbb{R}$ αυτό του (ζ').

(θ′) **[0.8]** Αν η g του (ζ') είναι δυο φορές συνεχώς διαφορίσιμη, βρείτε μία $\bar{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, έτσι ώστε

$$\int_{V \cap \{z = \frac{a+b}{2}\}} \bar{G} \cdot (0,0,-1) d\sigma = -I,$$

όπου $I \in \mathbb{R}$ αυτό του (ζ').

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

[1] *προφορική επισήμανση: και βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο*