Ομοιόμορφη σύγκλιση και όρια

Notiztitel 11.04.2013

Θεώρημα 1 : $E \subset \mathbb{R}$, $f_n, f : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \to f$ ομοιόμορφα, x σημείο συσσώρευσης του E, $\forall n \in \mathbb{N}$: $\lim_{t \to x} f_n(t) = \alpha_n \in \mathbb{R}$.

$$\Longrightarrow \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lim_{t\to x} f(t) \in \mathbb{R} \quad \left[\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) \right]$$

Απόδειξη : Έστω $\varepsilon > 0$. $f_n \to f$ ομοιόμορφα

$$\underset{\text{Κριτ. Cauchy}}{\Longrightarrow} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_0 \; \forall t \in E : |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

$$\underset{t\to x}{\Longrightarrow} |\alpha_n - \alpha_m| \leq \varepsilon \Rightarrow (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \text{ ακολ. Cauchy} \Longrightarrow \alpha_n \to \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad |\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t \in E$$

$$\text{και} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in E \cap \big((x-\delta, x) \cup (x, x+\delta) \big) : |f_n(t) - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \; \forall t \in E \cap \big((x-\delta, x) \cup (x, x+\delta) \big) :$$

$$|f(t) - \alpha| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon \qquad \square$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια

Θεώρημα 2: $E \subset \mathbb{R}$, $f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow f : E \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Απόδειξη: Πόρισμα του Θεωρήματος 1 $\square$

Παρατήρηση: Η ομοιομορφία της σύγκλισης $f_n \to f$ των συνεχών f_n είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για την συνέχεια της f.

Παράδειγμα: $f_n(x) = n^2 x (1-x^2)^n \longrightarrow 0 \quad \forall x \in [0,1]$

(βλ. Σημ. IV 9, Παράδειγμα 4)

Από το προηγούμενο Θεώρημα 2 συνεπάγεται άμεσα το ακόλουθο πόρισμα που χρησιμεύει ως κλασικό παράδειγμα στην Συναρτησιακή Ανάλυση: 10.3

Πόρισμα: Έστω $E \subset \mathbb{R}$ συμπαγές,

$$C(E) := \{ f : E \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ συνεχής} \},$$

ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο E.

Ο $C(E)$ είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος και η

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in E} |f(x)|, \quad f \in C(E),$$

ορίζει μια στάθμη στον $C(E)$, κάνοντάς τον έναν σταθμητό χώρο, ο οποίος είναι πλήρης ως προς την επαγόμενη μετρική, δηλαδή χώρος Banach.

10.4

Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκληρωσιμότητα

Θεώρημα: Έστω $f_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ολοκληρώσιμες, $f_n \to f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow$ $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx .$$

Απόδειξη: Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα και f_n φραγμένες, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $\varepsilon_n := \| f_n - f \|_\infty < \infty$ και $\varepsilon_n \to 0$.

$\Rightarrow f_n - \varepsilon_n \leq f \leq f_n + \varepsilon_n$, αφού $-\varepsilon_n \leq f_n(x) - f(x) \leq \varepsilon_n$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$

$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f_n - \varepsilon_n(\beta - \alpha) \leq L_f \leq U_f \leq \int_\alpha^\beta f_n + \varepsilon_n(\beta - \alpha)$

$\Rightarrow 0 \leq U_f - L_f \leq 2\varepsilon_n(\beta - \alpha) \longrightarrow 0 \Longrightarrow U_f = L_f = \int_\alpha^\beta f$

και $\left| \int_\alpha^\beta f - \int_\alpha^\beta f_n \right| \leq \varepsilon_n(\beta - \alpha) \to 0$ $\quad\blacksquare$

Πόρισμα: Έστω $f_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ολοκληρώσιμες και $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow$ $\int_\alpha^\beta f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n$.

Παρατήρηση: Η ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας διαφορίσιμων συναρτήσεων δεν συνεπάγεται τίποτα για την σύγκλιση της ακολουθίας των παραγώγων των όρων της – ούτε καν την κατά σημείο σύγκλισή της, βλ. Σημ. IV 9, Παράδειγμα 3.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και διαφορισιμότητα

Θεώρημα: Έστω $f_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες, $\exists\, x_0 \in [\alpha, \beta]$: $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει, και η $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

$\Rightarrow$ $f_n \to f$ ομοιόμορφα και $f' = \lim\limits_{n \to \infty} f_n'$.

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ συγκλίνει, είναι ακολουθία Cauchy, και αφού η $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα, ισχύει για αυτήν το κριτήριο Cauchy $\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \geq n_0$:

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad |f_n'(t) - f_m'(t)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \quad \forall\, t \in [\alpha, \beta].$$

$$\underset{\text{ΘΜΤ}}{\Rightarrow} \quad |f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} |x - t| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

$$\forall\, x, t \in [\alpha, \beta], \ \forall\, n, m \geq n_0$$

$\underset{t=x_0}{\Longrightarrow}$ $\forall n,m \geq n_0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$: $|f_n(x) - f_m(x)|$

$\leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \varepsilon$

$\underset{\text{Κριτ. Cauchy}}{\Longrightarrow}$ $f_n \to f := \lim\limits_{n\to} f_n$ ομοιόμορφα.

Έστω τώρα $x \in [\alpha,\beta]$ αυθαίρετο αλλά σταθερό και

$$\varphi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x}, \quad \varphi(t) := \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \quad \forall\, t \in [\alpha,\beta]\setminus\{x\}$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{t\to x} \varphi_n(t) = f_n'(x)$ (2)

και απ' την πρώτη ανισότητα στο (1) έχουμε

$\forall n,m \geq n_0$ $\forall\, t \in [\alpha,\beta]\setminus\{x\}$ $|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}$ $\underset{\text{Κριτ. Cauchy}}{\Longrightarrow}$

$\varphi_n \to \varphi$ ομοιόμορφα στο $[\alpha,\beta]\setminus\{x\}$, αφού $f_n \to f$ στο $[\alpha,\beta]$.

$\underset{\text{Θεώρημα 1 + (2)}}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{t\to x} \varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$. $\square$