Βασικές εφαρμογές της ομοιόμορφης σύγκλισης

Θεώρημα Weierstrass:

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχει ακολουθία πραγματικών πολυωνύμων $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $P_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για $[\alpha,\beta]=[0,1]$, αφού αν $\|\tilde{f}-\tilde{P}_n\| = \sup_{y\in[0,1]} |\tilde{f}(y)-\tilde{P}_n(y)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ για $\tilde{f}(y):=f(\alpha+(\beta-\alpha)y)$ και πολυώνυμα $\tilde{P}_n$, τότε για $P_n(x):=\tilde{P}_n\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$, $x\in[\alpha,\beta]$, έχουμε

$$\|f-P_n\| = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)-P_n(x)| = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} \left|\tilde{f}\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)-\tilde{P}_n\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)\right|$$

$$= \sup_{y\in[0,1]} |\tilde{f}(y)-\tilde{P}_n(y)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Επίσης, αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα στην περίπτωση $\tilde{f}:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $\tilde{f}(0)=\tilde{f}(1)=0$, αφού αν ισχύει σε αυτήν, τότε για $\tilde{f}(x)=f(x)-f(0)-x\,(f(1)-f(0))$, υπάρχουν πολυώνυμα $\tilde{P}_n$ με $\|\tilde{f}-\tilde{P}_n\|=\|f-P_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, όπου $P_n:=f-\tilde{f}+\tilde{P}_n$ πολυώνυμα.

Έστω λοιπόν ότι $\tilde{f}:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $\tilde{f}(0)=\tilde{f}(1)=0$.
Θεωρούμε την επέκταση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της $\tilde{f}$ με $f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus[0,1]$ η οποία είναι ομοιόμορφα συνεχής (δηλ. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta$: $|f(x)-f(y)|<\delta$ [αυτό ισχύει $\forall x,y\in[0,1]$ και αφού $f(0)=f(1)=0$ και $\forall x,y\in\mathbb{R}$] και θέτουμε για $n\in\mathbb{N}$, $x\in[0,1]$

$$Q_n(x):=c_n\,(1-x^2)^n \quad \text{με} \quad \frac{1}{c_n}:=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx \quad\Rightarrow\quad \int_{-1}^{1}Q_n(x)\,dx=1$$

Με την ανισότητα Bernoulli $(1-x^2)^n \geq 1-nx^2$ $(x\in[-1,1])$ έχουμε

$$\frac{1}{c_n} = 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-x^2)^n dx \geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-nx^2)dx = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow c_n < \sqrt{n} \Rightarrow Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{για } 0<\delta\leq|x|\leq 1,$$

δηλ. $Q_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[-1,-\delta]\cup[\delta,1]$ για $\delta\in(0,1]$.

Θέτουμε για $n\in\mathbb{N}$, $x\in[0,1]$ $P_n(x) := \int_{-1}^{1} f(x+t)\,Q_n(t)\,dt =$

$$= \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\,Q_n(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,Q_n(t-x)\,dt.$$

$\boxed{10a.3}$

Έστω τώρα $\varepsilon>0$, $\delta>0$ τέτοιο ώστε $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta : |f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Τότε $\forall\, x\in[0,1]$: $|P_n(x)-f(x)| = \left|\int_{-1}^{1}\left(f(x+t)-f(x)\right)Q_n(t)dt\right|$

$$\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t)-f(x)|\,Q_n(t)\,dt \leq 2\sup f\left(\int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)dt + \int_\delta^1 Q_n(t)dt\right)$$

$$+\ \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)dt \leq 4\sup f\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{για αρκετά μεγάλα } n. \ \square$$

Άσκηση: Υπάρχει συνεχής και πουθενά διαφορίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Απόδειξη: $\boxed{10a.4}$

Επεκτείνουμε 2-περιοδικά την $\tilde{\varphi}(x)=|x|,\ x\in[-1,1]$ στην $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι (Lipschitz-) συνεχής, αφού

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le|x-y|\quad\forall\, x,y\in\mathbb{R}\quad (*)$$

Θέτουμε $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^n x),\ x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, αφού η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, σύμφωνα με το Κριτήριο Weierstrass.

Έστω τώρα τυχαίο, σταθερό $x\in\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $m\in\mathbb{N}$ θέτουμε $\delta_m:=\pm\frac{1}{2}4^{-m}$ με πρόσημο τέτοιο ώστε να μην υπάρχει ακέραιος (γνήσια) μεταξύ $4^m x$ και $4^m(x+\delta_m)=4^m x\pm\frac{1}{2}$.

Ορίζουμε $\gamma_n := \dfrac{\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}$.

$n > m \Rightarrow 4^n \delta_m = \pm 4^{n-m-1} \cdot 2 = 2\ell,\ \ell \in \mathbb{Z} \Rightarrow \gamma_n = 0,$

$n \in [0,m] \Rightarrow |\gamma_n| \leq 4^n$ και $|\gamma_m| = 2|\varphi(y \pm \frac{1}{2}) - \varphi(y)|\, 4^m = 4^m,$

όπου $y = 4^m x$ και $(y-\frac{1}{2}, y) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, $(y, y+\frac{1}{2}) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, κατά περίπτωση

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : y' = y - 2k \in [-1,1]$ και $[y'-\frac{1}{2}, y'] \subset [-1,0]$ ή $\subset [0,1]$,

$[y', y'+\frac{1}{2}] \subset [-1,0]$ ή $\subset [0,1]$, κατά περίπτωση

$\Rightarrow |\varphi(y \pm \frac{1}{2}) - \varphi(y)| = \big|\, |y' \pm \frac{1}{2}| - |y'| \,\big| = \frac{1}{2}$

Έτσι: $$\left| \frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m} \right| = \left| \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n \right| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{1}{2}(3^m + 1) \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty,$$

ενώ $\delta_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Συνεπώς $\nexists\, f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

[⊛ Αν $|x-y| \geq 1$, προφανές, αφού $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, 10a.6

Αν $|x-y| = 0$, προφανές, Αν $0 < |x-y| < 1$ και $x' := x - 2k \in [-1, 1]$, $k \in \mathbb{Z}$,

αν $y' := y - 2k \in [-1, 1]$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \big|\, |x-2k| - |y-2k| \,\big| \leq |x-y|$,

αν $\bar{y} := y - 2k \in (1, 2) \Rightarrow x' \in (0, 1]$, $y' := \bar{y} - 2 \in (-1, 0) \Rightarrow$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x' + y'| \underset{(*)}{\leq} |x-y| = |x' - \bar{y}| = \bar{y} - x' = 2 + y' - x',$$

αφού $(*)$: αν $x' + y' \geq 0$: $x' + y' \leq 2 + y' - x' \iff x' \leq 1$ ✓

αν $x' + y' < 0$: $-x' - y' \leq 2 + y' - x' \iff y' \geq -1$ ✓

αν $\bar{y} = y - 2k \in (-2, -1) \Rightarrow x' \in [-1, 0)$, $y' = \bar{y} + 2 \in (0, 1)$

$$\Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| = |x' + y'| \underset{(**)}{\leq} |x-y| = x' - \bar{y} = x' - y' + 2,$$

αφού $(**)$: αν $x' + y' \geq 0$: $x' + y' \leq x' - y' + 2 \iff y' \leq 1$ ✓

αν $x' + y' < 0$: $-x' - y' \leq x' - y' + 2 \iff x' \geq -1$ ✓]

Θεώρημα: Έστω $E \subset \mathbb{R}$ $\boxed{\text{αριθμήσιμο}}$ και $f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μια κατά σημείο φραγμένη ακολουθία, δηλ. $\exists\, \varphi: E \to \mathbb{R}\ \forall x \in E\ \forall n \in \mathbb{N}\ |f_n(x)| \leq \varphi(x)$

Τότε $\exists\, (f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}} : (f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο.

Απόδειξη: 10α.7

Έστω $E = (x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Αφού $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη, υπάρχει $(f_{1,n})_{n\in\mathbb{N}} := (f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε η $(f_{1,n}(x_1))_{n\in\mathbb{N}} = (f_{k_n}(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει.

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία ακολουθιών συναρτήσεων

$$\begin{array}{lllllll}
S_1: & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & \cdots & f_{1,n} & \cdots \\
S_2: & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & \cdots & f_{2,n} & \cdots \\
S_3: & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & \cdots & f_{3,n} & \cdots
\end{array}$$

$\vdots$

$S_i : \quad f_{i,1} \quad f_{i,2} \quad f_{i,3} \quad \cdots \quad f_{i,n} \quad \cdots$

$\vdots$

έτσι ώστε $\forall i \in \mathbb{N}$:

α) Η $S_{i+1} = (f_{i+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $S_i = (f_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$

β) Η $(f_{i,n}(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

$\Rightarrow$ η διαγώνιος από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά

$S : \quad f_{1,1} \quad f_{2,2} \quad f_{3,3} \quad \cdots \quad f_{n,n} \quad \cdots$

δηλαδή η $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $\forall n \geq i$ μια υπακολουθία της S_i και συνεπώς η $(f_{n,n}(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει $\forall i \in \mathbb{N}$. $\square$

Ορισμός: Μια οικογένεια συναρτήσεων $\mathcal{F} := \{f_i : E \to \mathbb{R} : i \in I \subset \mathbb{R}\}$, $E \subset \mathbb{R}$, ονομάζεται ισοσυνεχής (equicontinuous), αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in E, \ |x-y| < \delta \ \forall f \in \mathcal{F} : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Θεώρημα: $K \subset \mathbb{R}$ συμπαγές, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$, (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα $\Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ισοσυνεχής

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ \|f_n - f_{n_0}\| < \varepsilon$.
Απ' την άλλη, $\exists \delta > 0 \ \forall x, y \in K, \ |x-y| < \delta \ \forall n = 1, \ldots, n_0 \ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ ενώ $\forall n > n_0 \ |f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f_n(y)| < 3\varepsilon$. Συνεπώς $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in K, \ |x-y| < \delta \ \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_n(y)| < 3\varepsilon$ $\square$

Θεώρημα (Arzela - Ascoli)

Έστω $K \subset \mathbb{R}$ συμπαγές, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K)$ φραγμένη κατά σημείο και ισοσυνεχής. Τότε η (f_n)

α) είναι ομοιόμορφα φραγμένη, δηλ. $\exists M \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \|f_n\| \leq M$

β) έχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη:

α) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists \delta > 0 \ \forall x, y \in K, |x-y| < \delta \ \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$.

Αφού K συμπαγές, $\exists p_1, \dots, p_m \in K \ \forall x \in K \ \exists i = 1, \dots, m : |x - p_i| < \delta$.

Επίσης $\exists M = \max\{M_1, \dots, M_m\} \ \forall i = 1, \dots, m \ \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(p_i)| \leq M$

$\Rightarrow \forall x \in K \ \forall n \in \mathbb{N} \ |f_n(x)| \leq |f_n(p_i)| + |f_n(p_i) - f_n(x)| < M + \varepsilon$.

β) Έστω $E := \mathbb{Q} \cap K$. Τότε E αριθμήσιμο και πυκνό στο K και $\exists\, (g_n) := (f_{k_n}) \subset (f_n)$: (g_n) συγκλίνει κατά σημείο στο E.

Έστω $\varepsilon > 0$ και το $\delta > 0$ του α). Αφού E πυκνό στο K, $\forall y \in K\ \exists x \in E$ με $|x-y| < \delta$, δηλ. $K \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \delta)$, και αφού K συμπαγές $\exists\, x_1, \dots, x_\ell \in E$ με $K \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} B(x_i, \delta)$. Συνεπώς,

$$\forall y \in K\ \exists\, i \in \{1, \dots, \ell\}\ \forall n \in \mathbb{N}\ |g_n(y) - g_n(x_i)| < \varepsilon.$$

Επίσης, αφού η (g_n) συγκλίνει κατά σημείο στο E

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\quad \forall n, m \geq n_0\ \forall\, i = 1, \dots, \ell : |g_n(x_i) - g_m(x_i)| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \forall n, m \geq n_0\ \forall y \in K\ |g_n(y) - g_m(y)| \leq |g_n(y) - g_n(x_i)| + |g_n(x_i) - g_m(x_i)| + |g_m(x_i) - g_m(y)| < 3\varepsilon,$$

το οποίο σύμφωνα με το Κριτήριο Cauchy συνεπάγεται το αποδεικτέο. $\square$

Παρατήρηση : α) Γενικά, αν $(f_n) \subset C(K)$, K συμπαγές, ομοιόμορφα φραγμένη και κατά σημείο συγκλίνουσα

$\not\Rightarrow \exists (f_{k_n}) \subset (f_n) : (f_{k_n})$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Π.χ. η $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$

είναι ομοιόμορφα φραγμένη, αφού $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0,1]\ |f_n(x)| \leq 1$

συγκλίνει κατά σημείο στο $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$,

αλλά αφού $f_n(\frac{1}{n}) = 1 \Rightarrow \|f_n\|_\infty = 1 = \|f_n - f\|_\infty \to 1$,

δεν υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) που να συγκλίνει ομοιόμορφα.

β) Επίσης, αποδεικνύεται ότι, γενικά, αν $(f_n) \subset C(K)$, K συμπαγές, και ομοιόμορφα φραγμένη $\not\Rightarrow \exists (f_{k_n}) \subset (f_n) : (f_{k_n})$ συγκλίνει κατά σημείο

(αλλά $\forall x \in K\ \exists (f_{k_n(x)}) \subset (f_n)$ που συγκλίνει κατά σημείο)