Απειροστικός Λογισμός Ι

Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΧΕ 2024/25

πρόχειρες, σύντομες σημειώσεις

Ιωάννης Γιαννούλης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

22 Οκτωβρίου 2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Όρια συναρτήσεων

Ορισμός 1.1. *Έστω μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$ *με* $D \subset \mathbb{R}$[1] *και* $a \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* D.[2] *Λέμε ότι* **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $\ell \in \mathbb{R}$ **κοντά στο** a,[3] *αν*[4]

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Γράφουμε τότε: $f(x) \to \ell$ *για* $x \to a$.

Ένα ℓ *με την παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται* **όριο της** f **κοντά στο** a.[5]

Θεώρημα 1.1. *Αν μία* f *συγκλίνει σε ένα όριο* ℓ *κοντά στο* a, *τότε το όριο αυτό είναι μοναδικό και γράφουμε:* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Απόδειξη: Έστω ότι $f(x) \to \ell$ και $f(x) \to m$ για $x \to a$ με $\ell \neq m$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχουν σύμφωνα με τον ορισμό, αφενός, ένα $\delta_1 > 0$ έτσι ώστε

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta_1 : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

---

[1] Στις παρούσες σημειώσεις το σύμβολο $\subset$ σημαίνει απλώς υποσύνολο, όχι απαραίτητα γνήσιο. Θα μπορούσε δηλαδή να ισχύει και $D = \mathbb{R}$.

[2] Ένα $a \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης του** $D \subset \mathbb{R}$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $((a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)) \cap D \neq \emptyset$. Να προσεχθεί ότι ένα σημείο συσσώρευσης $a \in \mathbb{R}$ ενός $D \subset \mathbb{R}$ δεν είναι απαραίτητο να ανήκει στο D. Π.χ., το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $D = (0, \infty)$.

[3] Η έκφραση «κοντά στο a» χρησιμοποιείται στην ελληνική μετάφραση του βιβλίου του Spivak [1]. Θα μπορούσαμε να την αντικαταστήσουμε με την έκφραση «όταν το x τείνει ή συγκλίνει στο a».

[4] Η ακόλουθη συνθήκη (1.1) είναι ισοδύναμη με αυτές που προκύπτουν αν σε αυτήν αντικαταστήσουμε τις ανισότητες «$< \delta$» ή/και «$< \varepsilon$» με τις «$\leq \delta$» ή/και «$\leq \varepsilon$», αντίστοιχα.

Πράγματι, αν ισχύει η (1.1) για κάποιο $\varepsilon > 0$, τότε θα ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $0 < \delta' < \delta$ και κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| \leq \delta'$. Αντίστροφα, αν ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| \leq \delta'$, τότε αυτό θα ισχύει και για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta'$.

Επίσης, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, τότε προφανώς για αυτά τα x θα ισχύει και $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, ενώ, αντίστροφα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για τα πιο πάνω x να ισχύει $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, τότε για κάθε δοσμένο $\varepsilon' > 0$ μπορούμε να θεωρήσουμε το $\varepsilon = \varepsilon'/2 > 0$ και να βρούμε για αυτό το $\varepsilon > 0$ ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για τα αντίστοιχα x να ισχύει $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon = \varepsilon'/2 < \varepsilon'$.

Βλέπουμε εδώ τη σημασία των καλούμενων ποσοδεικτών $\forall$ και $\exists$ στη συνθήκη (1.1), η οποία θα πρέπει να ισχύει *μαζί με αυτούς τους ποσοδείκτες*.

[5] Να σημειωθεί ότι ο ορισμός που δίνεται εδώ είναι λίγο γενικότερος από τον ορισμό που δίνεται στο [1, σελ. 94-95], όπου απαιτείται το πεδίο ορισμού D της f να είναι τέτοιο ώστε $((a - \delta_0, a) \cup (a, a + \delta_0)) \subset D$ για κάποιο $\delta_0 > 0$. Στην πράξη, σε ό,τι δούμε στο μάθημα, αυτό σχεδόν πάντα θα ικανοποιείται, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι αντίθετο.

και, αφετέρου, ένα $\delta_2 > 0$ έτσι ώστε

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta_2 : \quad |f(x) - m| < \varepsilon.$$

Συνεπώς, αν επιλέξουμε το μικρότερο από αυτά τα δύο $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$, δηλαδή, αν θέσουμε $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, θα έχουμε

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{και} \quad |f(x) - m| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Αφού τα παραπάνω θα πρέπει να ισχύουν για κάθε $\varepsilon > 0$, και αφού $m \neq \ell$, οι ανισότητες στην (1.2) θα πρέπει να ισχύουν και για την επιλογή $\varepsilon := \frac{|m-\ell|}{2} > 0$. Τότε όμως θα έχουμε, από την τριγωνική ανισότητα,

$$|m - \ell| = |m - f(x) - (\ell - f(x))| \leq |m - f(x)| + |\ell - f(x)| < \frac{|m - \ell|}{2} + \frac{|m - \ell|}{2} = |m - \ell|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, δεν μπορεί η f κοντά στο a να συγκλίνει σε δυο διαφορετικά όρια ℓ και m, και άρα το όριό της, αν υπάρχει, θα είναι μοναδικό. □

Παρατήρηση 1.1. *Από τον Ορισμό 1.1 του ορίου $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ μέσω της συνθήκης (1.1) προκύπτει ότι το όριο αυτό είναι, όπως λέμε, μία τοπική ιδιότητα της $f : D \to \mathbb{R}$ κοντά στο σημείο συσσώρευσης a του D. Με αυτό εννοούμε ότι αν αλλάξουμε τις τιμές της f σε σημεία του D που βρίσκονται μακριά από το a, δηλαδή, σε $x \in D$ με $|x - a| \geq \delta_0$ για ένα οσοδήποτε μικρό $\delta_0 > 0$, τότε και η «αλλαγμένη» f θα έχει το ίδιο όριο. Με άλλα λόγια, για να προσδιορίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ της f μας αρκεί να γνωρίζουμε τις τιμές της f μόνο «κοντά στο a», δηλαδή μόνο στον περιορισμό $f|_U$ της f στο $U := D \cap (a - \delta_0, a + \delta_0)$ για ένα οσοδήποτε μικρό $\delta_0 > 0$.*[6]

Πράγματι, αν $\lim\limits_{x\to a} f|_U(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε σύμφωνα με την (1.1) θα ισχύει

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in U,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f|_U(x) - \ell| = |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Αυτό θα ισχύει και αν αντικαταστήσουμε το $\delta > 0$ με οποιοδήποτε $0 < \delta' < \min\{\delta, \delta_0\}$. Τότε όμως τα $x \in U$ με $0 < |x - a| < \delta'$ είναι ακριβώς τα $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta'$ και συνεπώς θα έχουμε

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta' > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta' : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

δηλαδή, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. Αντίστροφα, αν ισχύει η προηγούμενη συνθήκη, τότε, αφού $U \subset D$, θα ισχύει και

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta' > 0 \quad \forall\ x \in U,\ 0 < |x - a| < \delta' : \quad |f(x) - \ell| = |f|_U(x) - \ell| < \varepsilon,$$

δηλαδή, $\lim\limits_{x\to a} f|_U(x) = \ell$.

Ας δούμε μερικές στοιχειώδεις εφαρμογές του Ορισμού 1.1, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν πιο κάτω για τον υπολογισμό ορίων μιας μεγάλης κατηγορίας συναρτήσεων, αυτής των ρητών συναρτήσεων.

[6] Ο **περιορισμός της** $f : D \to \mathbb{R}$ **στο** $U \subset D$ ορίζεται ως η συνάρτηση $f|_U : U \to \mathbb{R}$ με $f|_U(x) := f(x)$ για $x \in U \subset D$.

Παραδείγματα 1.1. *(α′) Έστω η σταθερή συνάρτηση* $f(x) = c$ *με πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}$*. Τότε, σε κάθε σημείο* $a \in \mathbb{R}$ *ισχύει* $\lim_{x\to a} f(x) = c$*. Πράγματι, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *και κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει*

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να επιλέξουμε στη συνθήκη (1.1) οποιοδήποτε $\delta > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x - a| < \delta$ θα ισχύει η πιο πάνω ανισότητα.

(β′) Έστω η ταυτοτική συνάρτηση $g(x) = x$, πάλι με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Τότε, σε κάθε σημείο $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x\to a} g(x) = a$, αφού για κάθε δοσμένο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta = \varepsilon > 0$ έτσι ώστε να έχουμε

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - a| < \delta = \varepsilon : \quad |f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon.$$

Ας δούμε και ένα λιγότερο τετριμμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1. *Θέλουμε να δείξουμε ότι*

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \quad a \geq 0.$$

Θέλουμε, δηλαδή, να βρούμε για κάθε $a \geq 0$*, το οποίο θεωρούμε στα επόμενα σταθερό, και κάθε δοσμένο* $\varepsilon > 0$ *ένα* $\delta > 0$ *έτσι ώστε για κάθε* $x \geq 0$ *με* $0 < |x - a| < \delta$ *να ισχύει* $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$*.*[7]

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $a > 0$*. Τότε, παρατηρούμε ότι για κάθε* $x \geq 0$ *ισχύει*

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

και συνεπώς, αφού $\sqrt{x} \geq 0$*,*

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} \quad \forall\, x \geq 0.$$

Άρα, αν θέσουμε $\delta = \varepsilon\sqrt{a} > 0$*, θα έχουμε για κάθε* $x \geq 0$ *με* $|x - a| < \delta = \varepsilon\sqrt{a}$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

Ειδικότερα, αυτό θα ισχύει για κάθε $x \geq 0$ *με* $0 < |x - a| < \delta = \varepsilon\sqrt{a}$*. Αφού αυτό μπορούμε να το κάνουμε για κάθε* $\varepsilon > 0$*, δείξαμε ότι για* $a > 0$ *ισχύει* $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$*, σύμφωνα με τη συνθήκη* (1.1)*.*[8]

[7] Η πρώτη συνθήκη, $x \geq 0$, μπαίνει για να ορίζεται το $\sqrt{x}$.

[8] Να προσεχθεί ότι το σύνολο $A := \{x \geq 0 : |x - a| < \delta\} = [0, \infty) \cap (a - \delta, a + \delta)$, για το οποίο αποδείξαμε ότι ισχύει $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$, δεν είναι απαραίτητα ίσο με το σύνολο $B := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$. Έχουμε ισότητα αν και μόνο αν $\delta \leq a$. Συνεπώς, αν θέλουμε να εκφράσουμε το A, που χρησιμοποιείται στη συνθήκη (1.1) ως $A \setminus \{a\}$, στη μορφή ενός ανοικτού διαστήματος γύρω από το a (δηλαδή, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την τομή με το πεδίο ορισμού $[0, \infty)$ της $\sqrt{x}$) και αφού η συνθήκη (1.1) απαιτεί μόνο την ύπαρξη ενός $\delta > 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta := \min\{\varepsilon\sqrt{a}, a\} > 0$, έτσι ώστε να ισχύει *και* $\delta \leq \varepsilon\sqrt{a}$ *και* $\delta \leq a$. Για αυτό το $\delta > 0$ έχουμε $A = B$ και η συνθήκη (1.1) συνεχίζει να ισχύει, αφού αν ισχύει για ένα $\delta > 0$, θα ισχύει και για κάθε μικρότερό του $0 < \delta' < \delta$. (Ουσιαστικά εδώ χρησιμοποιούμε την τετριμμένη - αλλά βασική! - ιδιότητα, ότι για $0 < \delta' < \delta$ ισχύει $(a - \delta', a + \delta') \subsetneq (a - \delta, a + \delta)$.)

Αν $a = 0$, θέλουμε να δείξουμε ότι $\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \geq 0$ με $0 < |x - 0| = |x| = x < \delta$ να ισχύει $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon$. Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας $\delta = \varepsilon^2 > 0$.[9]

Για τα όρια συναρτήσεων κοντά σε ένα a ισχύει το ακόλουθο πολύ χρήσιμο θεώρημα.[10]

Θεώρημα 1.2. *Έστω $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ και $\lim_{x\to a} g(x) = m$. Τότε*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \ell + m, \qquad \lim_{x\to a}(fg)(x) = \ell m$$

και

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}, \quad \text{αν} \quad m \neq 0.$$

Παράδειγμα 1.2. *Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.2 στα Παραδείγματα 1.1, προκύπτει ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $c \in \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\lim_{x\to a}(cx) = ca, \quad \lim_{x\to a}(cx^n) = ca^n.$$

Συνεπώς, πάλι με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.2, για κάθε πολυώνυμο $p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ έχουμε

$$\lim_{x\to a} p(x) = \alpha_n a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0.$$

Ακόμα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ στο οποίο το πολυώνυμο $q(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$ δεν μηδενίζεται, δηλαδή, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ με $q(a) \neq 0$, έχουμε

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\alpha_n a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0}{\beta_m a^m + \beta_{m-1}a^{m-1} + \cdots + \beta_1 a + \beta_0}.$$

Πολλές φορές, για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ είναι χρήσιμες οι ακόλουθες ισοδύναμες εκφράσεις.

Πρόταση 1.1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) = \ell &\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell \\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to a}(f(x) - \ell) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to a}|f(x) - \ell| = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}|f(a+h) - \ell| = 0.\end{aligned}$$

[9] Αφού, αν $0 < x = (\sqrt{x})^2 < \varepsilon^2$, τότε $\sqrt{x} < \varepsilon$, βλ. [1, Πρόβλημα 1-5(x)].

[10] Για την απόδειξή του παραπέμπουμε στο [1, Κεφάλαιο 5, Θεώρημα 2].

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε την πρώτη ισοδυναμία θέτουμε $x = a + h$. Τότε η συνθήκη (1.1) για το όριο $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ γίνεται

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, h \in \mathbb{R},\ a + h \in D,\ 0 < |h| < \delta : \quad |f(a + h) - \ell| < \varepsilon.$$

Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $g(h) := f(a + h)$ με πεδίο ορισμού $D_g := \{h \in \mathbb{R} : a + h \in D\}$,[11] έχουμε δηλαδή

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, h \in D_g,\ 0 < |h| < \delta : \quad |g(h) - \ell| < \varepsilon,$$

και άρα, σύμφωνα με τη συνθήκη (1.1), $\lim_{h \to 0} g(h) = \lim_{h \to 0} f(a + h) = \ell$.

Η δεύτερη ισοδυναμία προκύπτει αν αντί για τη συνάρτηση f θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g_1(x) := f(x) - \ell$ με το ίδιο πεδίο ορισμού D όπως η f, αφού, χρησιμοποιώντας την g_1, η συνθήκη (1.1) γίνεται

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |g_1(x)| < \varepsilon, \tag{1.3}$$

που σημαίνει, πάλι σύμφωνα με τον ορισμό (1.1), $\lim_{x \to a} g_1(x) = \lim_{x \to a} (f(x) - \ell) = 0$.

Η τρίτη ισοδυναμία προκύπτει από την προηγούμενη αν παρατηρήσουμε ότι για τη συνάρτηση $g_2(x) := |g_1(x)|$ που έχει πάλι πεδίο ορισμού D, έχουμε $|g_2(x)| = |g_1(x)|$ και άρα η (1.3) γίνεται

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |g_2(x)| < \varepsilon,$$

που σημαίνει $\lim_{x \to a} g_2(x) = \lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$.

Η τέταρτη ισοδυναμία προκύπτει από την τρίτη αν εφαρμόσουμε σε αυτήν την πρώτη.[12] □

Παρατήρηση 1.2. *Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι* **η f δεν συγκλίνει στο ℓ κοντά στο a**, *δηλαδή, συμβολικά, $f(x) \not\to \ell$ για $x \to a$, τότε θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει η άρνηση της συνθήκης (1.1), δηλαδή, ότι ισχύει*

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| \geq \varepsilon. \tag{1.4}$$

Αν για κάθε $\ell \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \not\to \ell$ για $x \to a$, δηλαδή, αν η f δεν συγκλίνει σε κανένα $\ell \in \mathbb{R}$ κοντά στο a, λέμε ότι **το όριο $\lim_{x \to a} f(x)$ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$**, *συμβολικά $\nexists \lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$.*

Πριν περάσουμε σε ένα παράδειγμα συνάρτησης, η οποία δεν έχει όριο κοντά σε ένα σημείο, θα δώσουμε τους ακόλουθους ορισμούς που αφορούν μία βασική και απλή ιδιότητα συνόλων ή συναρτήσεων, η οποία θα μας χρειαστεί συχνά σε διάφορα επιχειρήματα.

Ορισμός 1.2. *Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ ονομάζεται*

(α΄) **άνω φραγμένο**, *αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $x \leq M$ για κάθε $x \in A$. Κάθε τέτοιο $M \in \mathbb{R}$ ονομάζεται* **άνω φράγμα** *του A.*

[11] Τα h που ανήκουν στο σύνολο $\{h \in \mathbb{R} : a + h \in D\}$ είναι αυτά για τα οποία $x = a + h \in D$. Είναι, δηλαδή, τα h που ανήκουν στο σύνολο $\{h = x - a = (-a) + x : x \in D\} =: (-a) + D$. Παρατηρούμε ακόμα, ότι αν το a είναι σημείο συσσώρευσης του D, τότε το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $(-a) + D$. Πράγματι, $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap D$ αν και μόνο αν $h = x - a \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap ((-a) + D)$.

[12] Με $|f(x) - \ell|$ αντί για $f(x)$ στα αριστερά των ισοτήτων της πρώτης ισοδυναμίας και 0 αντί για ℓ στα δεξιά των ισοτήτων

(β′) **κάτω φραγμένο**, *αν υπάρχει* $m \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $m \leq x$ *για κάθε* $x \in A$. *Κάθε τέτοιο* $m \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **κάτω φράγμα** *του* A.

(γ′) **φραγμένο**, *αν είναι άνω και κάτω φραγμένο ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει ένα* $C > 0$ *έτσι ώστε* $|x| \leq C$ *για κάθε* $x \in A$.[13]

Ορισμός 1.3. *Μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, *ονομάζεται*

(α′) **άνω φραγμένη**, *αν υπάρχει* $M \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $f(x) \leq M$ *για κάθε* $x \in D$. *Κάθε τέτοιο* $M \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **άνω φράγμα** *της* f.

(β′) **κάτω φραγμένη**, *αν υπάρχει* $m \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $m \leq f(x)$ *για κάθε* $x \in D$. *Κάθε τέτοιο* $m \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **κάτω φράγμα** *της* f.

(γ′) **φραγμένη**, *αν είναι άνω και κάτω φραγμένη ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει ένα* $C > 0$ *έτσι ώστε* $|f(x)| \leq C$ *για κάθε* $x \in D$.

Παράδειγμα 1.3. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f(x) = \sin(1/x)$ *με πεδίο ορισμού* $D = \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Παρατηρούμε ότι η* $f : D \to \mathbb{R}$ *είναι φραγμένη, αφού* $|f(x)| \leq 1$ *για κάθε* $x \in D$.

Θα δείξουμε ότι η f *δεν έχει κάποιο όριο* $\ell \in \mathbb{R}$ *κοντά στο* 0.

Καταρχάς, δεν μπορεί να ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$ *για κάποιο* $\ell \in \mathbb{R}$ *με* $|\ell| > 1$, *δηλαδή, για κάποιο* $\ell \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. *Πράγματι, για να ίσχυε αυτό, θα έπρεπε*[14] *για* $\varepsilon = |\ell| - 1 > 0$ *να υπάρχει κάποιο* $\delta > 0$ *έτσι ώστε για κάθε* $x \in (0, \delta)$ *να έχουμε* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. *Τότε όμως θα είχαμε*[15]

$$||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| < \varepsilon = |\ell| - 1 \quad \textit{και άρα} \quad |f(x)| > |\ell| - (|\ell| - 1) = 1$$

το οποίο όμως δεν ισχύει για κάνενα $x \in D$, *όπως είδαμε πιο πάνω.*

Επίσης, δεν μπορεί να ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$ *για κάποιο* $\ell \in (-1, 1]$, *αφού για* $x_k = 1/(2k\pi - \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{N}$, *έχουμε* $f(x_k) = \sin(1/x_k) = \sin(2k\pi - \frac{\pi}{2}) = -1$ *και συνεπώς για κάθε* $\varepsilon \in (0, \ell + 1)$ *θα έχουμε*

$$|f(x_k) - \ell| = \ell + 1 > \varepsilon$$

ενώ για κάθε $\delta > 0$ *υπάρχει κάποιο* $k \in \mathbb{N}$ *έτσι ώστε* $x_k < \delta$ *ή, ισοδύναμα,* $k > \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\delta}\right)$.[16] *Συνεπώς, για* $\ell \in (-1, 1]$ *ισχύει η άρνηση της* (1.1), *δηλαδή η* (1.4).

Αντίστοιχα, αν $\ell = -1$, *επιλέγουμε τα σημεία* $\tilde{x}_k = 1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$, *για τα οποία έχουμε* $f(\tilde{x}_k) = 0$ *και συνεπώς,* $|f(\tilde{x}_k) - \ell| = 1$, *έτσι ώστε για* $\varepsilon = 1$ *να ισχύει πάλι η* (1.4), *αφού για κάθε* $\delta > 0$ *υπάρχει* $k \in \mathbb{N}$ *με* $\tilde{x}_k < \delta \Leftrightarrow k > \frac{1}{\pi\delta}$.

Πολύ χρήσιμη για τον υπολογισμό ορίων είναι η ακόλουθη πρόταση.[17]

---

[13] Απόδειξη της ισοδυναμίας: Άσκηση.

[14] σύμφωνα με τη συνθήκη (1.1)

[15] αντίστροφη τριγωνική ανισότητα

[16] Αυτό προκύπτει από την καλούμενη **Αρχιμήδεια Ιδιότητα** των πραγματικών αριθμών, η οποία λέει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k > x$. Αυτή την ιδιότητα θα τη γνωρίσουμε «επισήμως» λίγο αργότερα, βλ. και [1, Κεφάλαιο 8, Θεώρημα 3].

[17] Αυτή αναφέρεται πολλές φορές άτυπα και ως «μηδενική επί φραγμένη ίσον μηδενική». Βλέπε και [1, Πρόβλημα 3-21(β)].

Πρόταση 1.2. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του D και $f, g : D \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ και g φραγμένη. Τότε, $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$.*

Απόδειξη: Αφού η g είναι φραγμένη, υπάρχει κάποιο $C > 0$ με $|g(x)| \leq C$ για κάθε $x \in D$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε προφανώς και $\frac{\varepsilon}{C} > 0$ και αφού $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, θα υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}$. Τότε όμως για τα ίδια x θα ισχύει και $|(fg)(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$.[18] □

Παράδειγμα 1.4. *Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση έχουμε $\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$.*[19]

Ακόμα, αξίζει να παρατηρήσουμε και την ακόλουθη ιδιότητα του ορίου μιας συνάρτησης.

Πρόταση 1.3. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ σε ένα σημείο συσσώρευσης a του D. Αν υπάρχει $\delta_0 > 0$ έτσι ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_0$, τότε $\ell \geq 0$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή σε άτοπο. Αν ίσχυε $\ell < 0$, τότε σύμφωνα με τη συνθήκη (1.1) θα υπήρχε για το $\varepsilon = -\ell > 0$ ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Αυτό θα ισχύει και για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta' := \min\{\delta, \delta_0\}$. Συνεπώς, για αυτά τα x θα ισχύει $f(x) < \ell + \varepsilon = 0$, το οποίο είναι όμως άτοπο προς την υπόθεση ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_0$, η οποία συνεπάγεται και ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta' = \min\{\delta, \delta_0\}$. □

Επίσης, ιδιαίτερα χρήσιμο είναι και το ακόλουθο αποτέλεσμα.[20]

Πρόταση 1.4. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του D και έστω $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ με $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για $x \in D \cap ((a - \delta_0, a) \cup (a + \delta_0))$ και κάποιο $\delta_0 > 0$. Τότε, αν $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, θα έχουμε και $\lim_{x \to a} h(x) = \ell$.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta \in (0, \delta_0)$ έτσι ώστε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$.[21] Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ έχουμε

$$g(x) - \ell \leq h(x) - \ell < \varepsilon \quad \text{και} \quad -\varepsilon < f(x) - \ell \leq g(x) - \ell$$

και άρα $-\varepsilon < g(x) - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow |g(x) - \ell| < \varepsilon$. □

Όταν μιλάμε για όρια συναρτήσεων που ορίζονται στο $\mathbb{R}$, καθώς αυτό είναι ένα διατεταγμένο σύνολο (σώμα), μπορούμε να ορίσουμε και τα καλούμενα πλευρικά όρια, από πάνω (ή από τα θετικά ή από τα δεξιά) και από κάτω (ή από τα αρνητικά ή από τα αριστερά).

[18] Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ προκύπτει $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.

[19] *Άσκηση:* Βρείτε ποια είναι τα f και g στα οποία εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.2 και που δείξαμε τις απαιτούμενες ιδιότητες που πρέπει να έχουν τα f και g αυτά.

[20] Ονομάζεται και Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Συναρτήσεων ή Κριτήριο Παρεμβολής.

[21] Για λόγους επανάληψης ας δούμε και εδώ λίγο πιο λεπτομερώς πως προκύπτει αυτό: Η ύπαρξη των ορίων $\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ μας δίνει αρχικά την ύπαρξη δύο $\delta_1, \delta_2 > 0$ έτσι ώστε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_1$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_2$. Συνεπώς, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta' := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Αν, αρχικά, $\delta' \geq \delta_0 > 0$, επιλέγουμε έπειτα κάποιο $0 < \delta < \min\{\delta', \delta_0\}$ έτσι ώστε τελικά να έχουμε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ όπου $\delta \in (0, \delta_0)$. (Ο λόγος που επιμένουμε να βρούμε ένα $\delta < \delta_0$ είναι προφανώς για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$.)

Ορισμός 1.4. *Έστω μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$ *με* $D \subset \mathbb{R}$.

(α′) *Έστω* $a \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* $D \cap (a, \infty)$. *Λέμε ότι* **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο όριο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** a **από πάνω**, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < x - a < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{1.5}$$

και γράφουμε $f(x) \to \ell$ *για* $x \to a^+$ *ή για* $x \downarrow a$ *ή* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ *ή* $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = \ell$.

(β′) *Έστω* $a \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* $D \cap (-\infty, a)$. *Λέμε ότι* **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο όριο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** a **από κάτω**, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ -\delta < x - a < 0 : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{1.6}$$

και γράφουμε $f(x) \to \ell$ *για* $x \to a^-$ *ή για* $x \uparrow a$ *ή* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ *ή* $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \ell$.[22] [23]

Πρόταση 1.5. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *σημείο συσσώρευσης και του* $D \cap (a, +\infty)$ *και του* $D \cap (-\infty, a)$ *και* $\ell \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Προκύπτει άμεσα από τις συνθήκες (1.1), (1.5), (1.6), αφού για κάθε $\delta > 0$ ισχύει

$$\{x \in D : 0 < |x - a| < \delta\} = \{x \in D : 0 < x - a < \delta\} \cup \{x \in D : -\delta < x - a < 0\}.$$

$\Leftarrow$: Από τις συνθήκες (1.5), (1.6) προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \forall\ x \in D,\ 0 < x - a < \delta_1 : &\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon, \\ \forall\ x \in D,\ -\delta_2 < x - a < 0 : &\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ ισχύει

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

και από τη συνθήκη (1.1) προκύπτει το αποδεικτέο. □

Παράδειγμα 1.5. *Έστω η συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} \alpha, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \beta, & x < 0, \end{cases}$ *για* $x \in \mathbb{R}$ *και σταθερά* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Εξετάστε υπό ποιες προϋποθέσεις στα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *υπάρχουν τα όρια* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ *και* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *και δώστε τις τιμές τους.*

Απάντηση: *Είναι* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \alpha$ *και* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \beta$. *Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό των ορίων αυτών.*[24] *Το όριο* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *υπάρχει αν και μόνο αν* $\alpha = \beta$ *και τότε* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \alpha = \beta$, *σύμφωνα με την Πρόταση 1.5.*

(Παρατηρούμε ότι η τιμή $f(0)$ *δεν έχει καμία σημασία για τα όρια αυτά.)*

[22] Τα όρια $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, αν υπάρχουν, είναι μοναδικά. Αυτό προκύπτει από μια απλή προσαρμογή της απόδειξης του Θεωρήματος 1.1.

[23] Να σημειωθεί και εδώ οι ορισμοί που δίνονται για πλευρικά όρια είναι λίγο γενικότεροι από αυτούς που δίνονται στο [1, σελ. 95], όπου απαιτείται το πεδίο ορισμού D της f να είναι τέτοιο ώστε $(a, a + \delta_1) \subset D$ και $(a - \delta_2, a) \subset D$, αντίστοιχα, για κάποια $\delta_1, \delta_2 > 0$.

[24] Πβ. *[= παράβαλε = σύγκρινε]* με το Παράδειγμα 1.1 (1).

Κλείνουμε το κεφάλαιο περί ορίων συναρτήσεων με τους ορισμούς των ορίων στα οποία εμφανίζονται τα $\pm\infty$, όταν το $f(x)$ ή το x τείνουν ή συγκλίνουν προς τα $\pm\infty$.

Ορισμός 1.5. *Έστω μία συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ με $D \subset \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του D. Λέμε ότι*

(α΄) **η f τείνει ή συγκλίνει στο ∞ κοντά στο a**, *συμβολικά: $f(x) \to \infty$ για $x \to a$ ή $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon},$$

(β΄) **η f τείνει ή συγκλίνει στο $-\infty$ κοντά στο a**, *συμβολικά: $f(x) \to -\infty$ για $x \to a$ ή $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Παρατήρηση 1.3. *Αντίστοιχα ορίζονται και τα όρια $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \infty$ και $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = -\infty$, αν στις συνθήκες που εμφανίζονται στον προηγούμενο ορισμό αντικαταστήσουμε την έκφραση «$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta$» με «$\forall\ x \in D,\ 0 < x - a < \delta$» για το $x \to a^+$ και «$\forall\ x \in D,\ -\delta < x - a < 0$» για το $x \to a^-$.*[25]

Παράδειγμα 1.6. *(α΄) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.*

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{R}^* \cap (0, \infty) = (0, \infty)$, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $((-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)) \cap (0, \infty) = (0, \varepsilon)$ είναι μη κενό (περιέχει, π.χ., το $\varepsilon/2$).

Τώρα, για κάθε $\varepsilon > 0$, θέτοντας $\delta = \varepsilon > 0$, έχουμε $\frac{1}{x} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < \varepsilon$ για κάθε $0 < x < \delta = \varepsilon$.

(β΄) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Και εδώ, το 0 ειναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{R}^* \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, θέτοντας $\delta = \varepsilon > 0$, έχουμε $\frac{1}{x} < -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow -x < \varepsilon \Leftrightarrow x > -\varepsilon$ για κάθε $0 > x > -\delta = -\varepsilon$.

Ορισμός 1.6. *Έστω μία συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$.*

(α΄) Αν το $D \subset \mathbb{R}$ δεν είναι άνω φραγμένο, λέμε ότι

[25]Φυσικά, για να ορίζονται αυτά τα πλευρικά όρια από πάνω και από κάτω θα πρέπει το a να είναι σημείο συσσώρευσης του $D \cap (a, \infty)$ και του $D \cap (-\infty, a)$, αντίστοιχα. Βλ. και τον Ορισμό 1.4.

(i) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞, *συμβολικά:* $f(x) \to \ell$ *για* $x \to \infty$ *ή* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x > \frac{1}{\delta}: \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

(ii) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞, *συμβολικά:* $f(x) \to \infty$ *για* $x \to \infty$ *ή* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x > \frac{1}{\delta}: \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon},$$

(iii) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞, *συμβολικά:* $f(x) \to -\infty$ *για* $x \to \infty$ *ή* $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x > \frac{1}{\delta}: \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

(β′) Αντίστοιχα, αν το $D \subset \mathbb{R}$ *δεν είναι κάτω φραγμένο, λέμε ότι*

(i) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$, *συμβολικά:* $f(x) \to \ell$ *για* $x \to -\infty$ *ή* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x < -\frac{1}{\delta}: \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

(ii) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$, *συμβολικά:* $f(x) \to \infty$ *για* $x \to -\infty$ *ή* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x < -\frac{1}{\delta}: \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon},$$

(iii) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$, *συμβολικά:* $f(x) \to -\infty$ *για* $x \to -\infty$ *ή* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x < -\frac{1}{\delta}: \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon},$$

Παράδειγμα 1.7. *(α′)* $\lim_{x\to\infty} x = \infty$ *και* $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$.

Η $f(x) = x$ *έχει πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}$, *που δεν είναι ούτε άνω φραγμένο, ούτε κάτω φραγμένο.*

Έστω $\varepsilon > 0$. *Τότε, για* $\delta = \varepsilon > 0$ *έχουμε* $x > \frac{1}{\varepsilon}$ *για κάθε* $x > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon}$ *και* $x < -\frac{1}{\varepsilon}$ *για κάθε* $x < -\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{\varepsilon}$.

(β′) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ *έχει πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$*, που δεν είναι ούτε άνω φραγμένο, ούτε κάτω φραγμένο.*

Έστω $\varepsilon > 0$*. Τότε, θέτοντας* $\delta = \varepsilon > 0$*, βλέπουμε ότι για κάθε* $x > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ *έχουμε* $x = |x| = |x - 0| < \varepsilon$ *και για κάθε* $x < -\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{\varepsilon} < 0$ *έχουμε* $-x = |x| = |x - 0| < \varepsilon$*.*

1.0.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 5]:
(Κάποιες περιέχονται στις παρούσες σημειώσεις.)
"SUPER SOS": 1, 2, 4, 9, 33, 34, 36, 37, 38
"SOS": 8, 10(α,β), 12, 13, 16(α), 17, 18, 21, 29, 39
Συνιστώμενες: 11, 15, 27, 32, 35

Βιβλιογραφία

[1] Michael Spivak, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (μετάφραση της 4ης αγγλικής έκδοσης). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015.