Απειροστικός Λογισμός Ι

Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΧΕ 2024/25

πρόχειρες, σύντομες σημειώσεις

Ιωάννης Γιαννούλης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

29 Οκτωβρίου 2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Όρια συναρτήσεων

Ορισμός 1.1. *Έστω μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$ *με* $D \subset \mathbb{R}$[1] *και* $a \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* D.[2] *Λέμε ότι* **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $\ell \in \mathbb{R}$ **κοντά στο** a,[3] *αν*[4]

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Γράφουμε τότε: $f(x) \to \ell$ *για* $x \to a$.

Ένα ℓ *με την παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται* **όριο της** f **κοντά στο** a.[5]

Θεώρημα 1.1. *Αν μία* f *συγκλίνει σε ένα όριο* ℓ *κοντά στο* a, *τότε το όριο αυτό είναι μοναδικό και γράφουμε:* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Απόδειξη: Έστω ότι $f(x) \to \ell$ και $f(x) \to m$ για $x \to a$ με $\ell \neq m$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχουν σύμφωνα με τον ορισμό, αφενός, ένα $\delta_1 > 0$ έτσι ώστε

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta_1 : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

[1] Στις παρούσες σημειώσεις το σύμβολο $\subset$ σημαίνει απλώς υποσύνολο, όχι απαραίτητα γνήσιο. Θα μπορούσε δηλαδή να ισχύει και $D = \mathbb{R}$.

[2] Ένα $a \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης του** $D \subset \mathbb{R}$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $((a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)) \cap D \neq \emptyset$. Να προσεχθεί ότι ένα σημείο συσσώρευσης $a \in \mathbb{R}$ ενός $D \subset \mathbb{R}$ δεν είναι απαραίτητο να ανήκει στο D. Π.χ., το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $D = (0, \infty)$.

[3] Η έκφραση «κοντά στο a» χρησιμοποιείται στην ελληνική μετάφραση του βιβλίου του Spivak [1]. Θα μπορούσαμε να την αντικαταστήσουμε με την έκφραση «όταν το x τείνει ή συγκλίνει στο a».

[4] Η ακόλουθη συνθήκη (1.1) είναι ισοδύναμη με αυτές που προκύπτουν αν σε αυτήν αντικαταστήσουμε τις ανισότητες «$< \delta$» ή/και «$< \varepsilon$» με τις «$\leq \delta$» ή/και «$\leq \varepsilon$», αντίστοιχα.

Πράγματι, αν ισχύει η (1.1) για κάποιο $\varepsilon > 0$, τότε θα ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $0 < \delta' < \delta$ και κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| \leq \delta'$. Αντίστροφα, αν ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| \leq \delta'$, τότε αυτό θα ισχύει και για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta'$.

Επίσης, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, τότε προφανώς για αυτά τα x θα ισχύει και $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, ενώ, αντίστροφα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για τα πιο πάνω x να ισχύει $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, τότε για κάθε δοσμένο $\varepsilon' > 0$ μπορούμε να θεωρήσουμε το $\varepsilon = \varepsilon'/2 > 0$ και να βρούμε για αυτό το $\varepsilon > 0$ ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για τα αντίστοιχα x να ισχύει $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon = \varepsilon'/2 < \varepsilon'$.

Βλέπουμε εδώ τη σημασία των καλούμενων ποσοδεικτών $\forall$ και $\exists$ στη συνθήκη (1.1), η οποία θα πρέπει να ισχύει *μαζί με αυτούς τους ποσοδείκτες*.

[5] Να σημειωθεί ότι ο ορισμός που δίνεται εδώ είναι λίγο γενικότερος από τον ορισμό που δίνεται στο [1, σελ. 94-95], όπου απαιτείται το πεδίο ορισμού D της f να είναι τέτοιο ώστε $((a - \delta_0, a) \cup (a, a + \delta_0)) \subset D$ για κάποιο $\delta_0 > 0$. Στην πράξη, σε ό,τι δούμε στο μάθημα, αυτό σχεδόν πάντα θα ικανοποιείται, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι αντίθετο.

και, αφετέρου, ένα $\delta_2 > 0$ έτσι ώστε

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta_2 : \quad |f(x) - m| < \varepsilon.$$

Συνεπώς, αν επιλέξουμε το μικρότερο από αυτά τα δύο $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$, δηλαδή, αν θέσουμε $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, θα έχουμε

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{και} \quad |f(x) - m| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Αφού τα παραπάνω θα πρέπει να ισχύουν για κάθε $\varepsilon > 0$, και αφού $m \neq \ell$, οι ανισότητες στην (1.2) θα πρέπει να ισχύουν και για την επιλογή $\varepsilon := \frac{|m-\ell|}{2} > 0$. Τότε όμως θα έχουμε, από την τριγωνική ανισότητα,

$$|m - \ell| = |m - f(x) - (\ell - f(x))| \leq |m - f(x)| + |\ell - f(x)| < \frac{|m - \ell|}{2} + \frac{|m - \ell|}{2} = |m - \ell|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, δεν μπορεί η f κοντά στο a να συγκλίνει σε δυο διαφορετικά όρια ℓ και m, και άρα το όριό της, αν υπάρχει, θα είναι μοναδικό. □

Παρατήρηση 1.1. *Από τον Ορισμό 1.1 του ορίου $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ μέσω της συνθήκης (1.1) προκύπτει ότι το όριο αυτό είναι, όπως λέμε, μία τοπική ιδιότητα της $f : D \to \mathbb{R}$ κοντά στο σημείο συσσώρευσης a του D. Με αυτό εννοούμε ότι αν αλλάξουμε τις τιμές της f σε σημεία του D που βρίσκονται μακριά από το a, δηλαδή, σε $x \in D$ με $|x - a| \geq \delta_0$ για ένα οσοδήποτε μικρό $\delta_0 > 0$, τότε και η «αλλαγμένη» f θα έχει το ίδιο όριο. Με άλλα λόγια, για να προσδιορίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ της f μας αρκεί να γνωρίζουμε τις τιμές της f μόνο «κοντά στο a», δηλαδή μόνο στον περιορισμό $f|_U$ της f στο $U := D \cap (a - \delta_0, a + \delta_0)$ για ένα οσοδήποτε μικρό $\delta_0 > 0$.*[6]

Πράγματι, αν $\lim\limits_{x\to a} f|_U(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε σύμφωνα με την (1.1) θα ισχύει

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in U,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f|_U(x) - \ell| = |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Αυτό θα ισχύει και αν αντικαταστήσουμε το $\delta > 0$ με οποιοδήποτε $0 < \delta' < \min\{\delta, \delta_0\}$. Τότε όμως τα $x \in U$ με $0 < |x - a| < \delta'$ είναι ακριβώς τα $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta'$ και συνεπώς θα έχουμε

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta' > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta' : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

δηλαδή, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. Αντίστροφα, αν ισχύει η προηγούμενη συνθήκη, τότε, αφού $U \subset D$, θα ισχύει και

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta' > 0 \quad \forall\ x \in U,\ 0 < |x - a| < \delta' : \quad |f(x) - \ell| = |f|_U(x) - \ell| < \varepsilon,$$

δηλαδή, $\lim\limits_{x\to a} f|_U(x) = \ell$.

Ας δούμε μερικές στοιχειώδεις εφαρμογές του Ορισμού 1.1, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν πιο κάτω για τον υπολογισμό ορίων μιας μεγάλης κατηγορίας συναρτήσεων, αυτής των ρητών συναρτήσεων.

[6] Ο **περιορισμός της $f : D \to \mathbb{R}$ στο $U \subset D$** ορίζεται ως η συνάρτηση $f|_U : U \to \mathbb{R}$ με $f|_U(x) := f(x)$ για $x \in U \subset D$.

Παραδείγματα 1.1. *(α′) Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Τότε, σε κάθε σημείο $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \to a} f(x) = c$. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να επιλέξουμε στη συνθήκη (1.1) οποιοδήποτε $\delta > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x - a| < \delta$ θα ισχύει η πιο πάνω ανισότητα.

(β′) Έστω η ταυτοτική συνάρτηση $g(x) = x$, πάλι με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Τότε, σε κάθε σημείο $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \to a} g(x) = a$, αφού για κάθε δοσμένο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta = \varepsilon > 0$ έτσι ώστε να έχουμε

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - a| < \delta = \varepsilon : \quad |f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon.$$

Ας δούμε και ένα λιγότερο τετριμμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1. *Θέλουμε να δείξουμε ότι*

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \quad a \geq 0.$$

Θέλουμε, δηλαδή, να βρούμε για κάθε $a \geq 0$, το οποίο θεωρούμε στα επόμενα σταθερό, και κάθε δοσμένο $\varepsilon > 0$ ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \geq 0$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$.[7]

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $a > 0$. Τότε, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

και συνεπώς, αφού $\sqrt{x} \geq 0$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} \quad \forall\, x \geq 0.$$

Άρα, αν θέσουμε $\delta = \varepsilon\sqrt{a} > 0$, θα έχουμε για κάθε $x \geq 0$ με $|x - a| < \delta = \varepsilon\sqrt{a}$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

Ειδικότερα, αυτό θα ισχύει για κάθε $x \geq 0$ με $0 < |x - a| < \delta = \varepsilon\sqrt{a}$. Αφού αυτό μπορούμε να το κάνουμε για κάθε $\varepsilon > 0$, δείξαμε ότι για $a > 0$ ισχύει $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, σύμφωνα με τη συνθήκη (1.1).[8]

[7] Η πρώτη συνθήκη, $x \geq 0$, μπαίνει για να ορίζεται το $\sqrt{x}$.

[8] Να προσεχθεί ότι το σύνολο $A := \{x \geq 0 : |x - a| < \delta\} = [0, \infty) \cap (a - \delta, a + \delta)$, για το οποίο αποδείξαμε ότι ισχύει $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$, δεν είναι απαραίτητα ίσο με το σύνολο $B := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$. Έχουμε ισότητα αν και μόνο αν $\delta \leq a$. Συνεπώς, αν θέλουμε να εκφράσουμε το A, που χρησιμοποιείται στη συνθήκη (1.1) ως $A \setminus \{a\}$, στη μορφή ενός ανοικτού διαστήματος γύρω από το a (δηλαδή, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την τομή με το πεδίο ορισμού $[0, \infty)$ της $\sqrt{x}$) και αφού η συνθήκη (1.1) απαιτεί μόνο την ύπαρξη ενός $\delta > 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta := \min\{\varepsilon\sqrt{a}, a\} > 0$, έτσι ώστε να ισχύει *και* $\delta \leq \varepsilon\sqrt{a}$ *και* $\delta \leq a$. Για αυτό το $\delta > 0$ έχουμε $A = B$ και η συνθήκη (1.1) συνεχίζει να ισχύει, αφού αν ισχύει για ένα $\delta > 0$, θα ισχύει και για κάθε μικρότερό του $0 < \delta' < \delta$. (Ουσιαστικά εδώ χρησιμοποιούμε την τετριμμένη - αλλά βασική! - ιδιότητα, ότι για $0 < \delta' < \delta$ ισχύει $(a - \delta', a + \delta') \subsetneq (a - \delta, a + \delta)$.)

Αν $a = 0$, θέλουμε να δείξουμε ότι $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \geq 0$ με $0 < |x - 0| = |x| = x < \delta$ να ισχύει $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon$. Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας $\delta = \varepsilon^2 > 0$.[9]

Για τα όρια συναρτήσεων κοντά σε ένα a ισχύει το ακόλουθο πολύ χρήσιμο θεώρημα.[10]

Θεώρημα 1.2. *Έστω $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ και $\lim_{x \to a} g(x) = m$. Τότε*

$$\lim_{x \to a}(f+g)(x) = \ell + m, \qquad \lim_{x \to a}(fg)(x) = \ell m$$

και

$$\lim_{x \to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}, \quad \text{αν} \quad m \neq 0.$$

Παράδειγμα 1.2. *Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.2 στα Παραδείγματα 1.1, προκύπτει ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $c \in \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\lim_{x \to a}(cx) = ca, \quad \lim_{x \to a}(cx^n) = ca^n.$$

Συνεπώς, πάλι με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.2, για κάθε πολυώνυμο $p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ έχουμε

$$\lim_{x \to a} p(x) = \alpha_n a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0.$$

Ακόμα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ στο οποίο το πολυώνυμο $q(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$ δεν μηδενίζεται, δηλαδή, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ με $q(a) \neq 0$, έχουμε

$$\lim_{x \to a}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\alpha_n a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0}{\beta_m a^m + \beta_{m-1}a^{m-1} + \cdots + \beta_1 a + \beta_0}.$$

Πολλές φορές, για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ είναι χρήσιμες οι ακόλουθες ισοδύναμες εκφράσεις.

Πρόταση 1.1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) = \ell &\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(a+h) = \ell \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \to a}(f(x) - \ell) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \to a}|f(x) - \ell| = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{h \to 0}|f(a+h) - \ell| = 0.\end{aligned}$$

[9] Αφού, αν $0 < x = (\sqrt{x})^2 < \varepsilon^2$, τότε $\sqrt{x} < \varepsilon$, βλ. [1, Πρόβλημα 1-5(x)].
[10] Για την απόδειξή του παραπέμπουμε στο [1, Κεφάλαιο 5, Θεώρημα 2].

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε την πρώτη ισοδυναμία θέτουμε $x = a + h$. Τότε η συνθήκη (1.1) για το όριο $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ γίνεται

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ h \in \mathbb{R},\ a + h \in D,\ 0 < |h| < \delta: \quad |f(a + h) - \ell| < \varepsilon.$$

Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $g(h) := f(a + h)$ με πεδίο ορισμού $D_g := \{h \in \mathbb{R} : a + h \in D\}$,[11] έχουμε δηλαδή

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ h \in D_g,\ 0 < |h| < \delta: \quad |g(h) - \ell| < \varepsilon,$$

και άρα, σύμφωνα με τη συνθήκη (1.1), $\lim_{h\to 0} g(h) = \lim_{h\to 0} f(a + h) = \ell$.

Η δεύτερη ισοδυναμία προκύπτει αν αντί για τη συνάρτηση f θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g_1(x) := f(x) - \ell$ με το ίδιο πεδίο ορισμού D όπως η f, αφού, χρησιμοποιώντας την g_1, η συνθήκη (1.1) γίνεται

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta: \quad |g_1(x)| < \varepsilon, \tag{1.3}$$

που σημαίνει, πάλι σύμφωνα με τον ορισμό (1.1), $\lim_{x\to a} g_1(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - \ell) = 0$.

Η τρίτη ισοδυναμία προκύπτει από την προηγούμενη αν παρατηρήσουμε ότι για τη συνάρτηση $g_2(x) := |g_1(x)|$ που έχει πάλι πεδίο ορισμού D, έχουμε $|g_2(x)| = |g_1(x)|$ και άρα η (1.3) γίνεται

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta: \quad |g_2(x)| < \varepsilon,$$

που σημαίνει $\lim_{x\to a} g_2(x) = \lim_{x\to a} |f(x) - \ell| = 0$.

Η τέταρτη ισοδυναμία προκύπτει από την τρίτη αν εφαρμόσουμε σε αυτήν την πρώτη.[12] □

Παρατήρηση 1.2. *Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι* **η f δεν συγκλίνει στο ℓ κοντά στο a**, *δηλαδή, συμβολικά, $f(x) \not\to \ell$ για $x \to a$, τότε θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει η άρνηση της συνθήκης* (1.1)*, δηλαδή, ότι ισχύει*

$$\exists\ \varepsilon > 0 \quad \forall\ \delta > 0 \quad \exists\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta: \quad |f(x) - \ell| \geq \varepsilon. \tag{1.4}$$

Αν για κάθε $\ell \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \not\to \ell$ για $x \to a$, δηλαδή, αν η f δεν συγκλίνει σε κανένα $\ell \in \mathbb{R}$ κοντά στο a, λέμε ότι **το όριο $\lim_{x\to a} f(x)$ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$**, *συμβολικά $\nexists \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$.*

Πριν περάσουμε σε ένα παράδειγμα συνάρτησης, η οποία δεν έχει όριο κοντά σε ένα σημείο, θα δώσουμε τους ακόλουθους ορισμούς που αφορούν μία βασική και απλή ιδιότητα συνόλων ή συναρτήσεων, η οποία θα μας χρειαστεί συχνά σε διάφορα επιχειρήματα.

Ορισμός 1.2. *Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ ονομάζεται*

(α΄) **άνω φραγμένο**, *αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $x \leq M$ για κάθε $x \in A$. Κάθε τέτοιο $M \in \mathbb{R}$ ονομάζεται* **άνω φράγμα** *του A.*

[11] Τα h που ανήκουν στο σύνολο $\{h \in \mathbb{R} : a + h \in D\}$ είναι αυτά για τα οποία $x = a + h \in D$. Είναι, δηλαδή, τα h που ανήκουν στο σύνολο $\{h = x - a = (-a) + x : x \in D\} =: (-a) + D$. Παρατηρούμε ακόμα, ότι αν το a είναι σημείο συσσώρευσης του D, τότε το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $(-a) + D$. Πράγματι, $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap D$ αν και μόνο αν $h = x - a \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap ((-a) + D)$.

[12] Με $|f(x) - \ell|$ αντί για $f(x)$ στα αριστερά των ισοτήτων της πρώτης ισοδυναμίας και 0 αντί για ℓ στα δεξιά των ισοτήτων

(β′) **κάτω φραγμένο**, *αν υπάρχει* $m \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $m \leq x$ *για κάθε* $x \in A$. *Κάθε τέτοιο* $m \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **κάτω φράγμα** *του* A.

(γ′) **φραγμένο**, *αν είναι άνω και κάτω φραγμένο ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει ένα* $C > 0$ *έτσι ώστε* $|x| \leq C$ *για κάθε* $x \in A$.[13]

Ορισμός 1.3. *Μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, *ονομάζεται*

(α′) **άνω φραγμένη**, *αν υπάρχει* $M \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $f(x) \leq M$ *για κάθε* $x \in D$. *Κάθε τέτοιο* $M \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **άνω φράγμα** *της* f.

(β′) **κάτω φραγμένη**, *αν υπάρχει* $m \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $m \leq f(x)$ *για κάθε* $x \in D$. *Κάθε τέτοιο* $m \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **κάτω φράγμα** *της* f.

(γ′) **φραγμένη**, *αν είναι άνω και κάτω φραγμένη ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει ένα* $C > 0$ *έτσι ώστε* $|f(x)| \leq C$ *για κάθε* $x \in D$.

Παράδειγμα 1.3. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f(x) = \sin(1/x)$ *με πεδίο ορισμού* $D = \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Παρατηρούμε ότι η* $f : D \to \mathbb{R}$ *είναι φραγμένη, αφού* $|f(x)| \leq 1$ *για κάθε* $x \in D$.

Θα δείξουμε ότι η f *δεν έχει κάποιο όριο* $\ell \in \mathbb{R}$ *κοντά στο* 0.

Καταρχάς, δεν μπορεί να ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell$ *για κάποιο* $\ell \in \mathbb{R}$ *με* $|\ell| > 1$, *δηλαδή, για κάποιο* $\ell \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. *Πράγματι, για να ίσχυε αυτό, θα έπρεπε*[14] *για* $\varepsilon = |\ell| - 1 > 0$ *να υπάρχει κάποιο* $\delta > 0$ *έτσι ώστε για κάθε* $x \in (0, \delta)$ *να έχουμε* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. *Τότε όμως θα είχαμε*[15]

$$||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| < \varepsilon = |\ell| - 1 \quad \textit{και άρα} \quad |f(x)| > |\ell| - (|\ell| - 1) = 1$$

το οποίο όμως δεν ισχύει για κάνενα $x \in D$, *όπως είδαμε πιο πάνω.*

Επίσης, δεν μπορεί να ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell$ *για κάποιο* $\ell \in (-1, 1]$, *αφού για* $x_k = 1/(2k\pi - \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{N}$, *έχουμε* $f(x_k) = \sin(1/x_k) = \sin(2k\pi - \frac{\pi}{2}) = -1$ *και συνεπώς για κάθε* $\varepsilon \in (0, \ell + 1)$ *θα έχουμε*

$$|f(x_k) - \ell| = \ell + 1 > \varepsilon$$

ενώ για κάθε $\delta > 0$ *υπάρχει κάποιο* $k \in \mathbb{N}$ *έτσι ώστε* $x_k < \delta$ *ή, ισοδύναμα,* $k > \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\delta}\right)$.[16] *Συνεπώς, για* $\ell \in (-1, 1]$ *ισχύει η άρνηση της* (1.1), *δηλαδή η* (1.4).

Αντίστοιχα, αν $\ell = -1$, *επιλέγουμε τα σημεία* $\tilde{x}_k = 1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$, *για τα οποία έχουμε* $f(\tilde{x}_k) = 0$ *και συνεπώς,* $|f(\tilde{x}_k) - \ell| = 1$, *έτσι ώστε για* $\varepsilon = 1$ *να ισχύει πάλι η* (1.4), *αφού για κάθε* $\delta > 0$ *υπάρχει* $k \in \mathbb{N}$ *με* $\tilde{x}_k < \delta \Leftrightarrow k > \frac{1}{\pi\delta}$.

Πολύ χρήσιμη για τον υπολογισμό ορίων είναι η ακόλουθη πρόταση.[17]

[13] Απόδειξη της ισοδυναμίας: Άσκηση.

[14] σύμφωνα με τη συνθήκη (1.1)

[15] αντίστροφη τριγωνική ανισότητα

[16] Αυτό προκύπτει από την καλούμενη **Αρχιμήδεια Ιδιότητα** των πραγματικών αριθμών, η οποία λέει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k > x$. Αυτή την ιδιότητα θα τη γνωρίσουμε «επισήμως» λίγο αργότερα, βλ. και [1, Κεφάλαιο 8, Θεώρημα 3].

[17] Αυτή αναφέρεται πολλές φορές άτυπα και ως «μηδενική επί φραγμένη ίσον μηδενική». Βλέπε και [1, Πρόβλημα 3-21(β)].

Πρόταση 1.2. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του D και $f, g : D \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ και g φραγμένη. Τότε, $\lim_{x\to a}(fg)(x) = 0$.*

Απόδειξη: Αφού η g είναι φραγμένη, υπάρχει κάποιο $C > 0$ με $|g(x)| \le C$ για κάθε $x \in D$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε προφανώς και $\frac{\varepsilon}{C} > 0$ και αφού $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, θα υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}$. Τότε όμως για τα ίδια x θα ισχύει και $|(fg)(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \le C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$.[18] □

Παράδειγμα 1.4. *Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση έχουμε $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$.*[19]

Ακόμα, αξίζει να παρατηρήσουμε και την ακόλουθη ιδιότητα του ορίου μιας συνάρτησης.

Πρόταση 1.3. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ σε ένα σημείο συσσώρευσης a του D. Αν υπάρχει $\delta_0 > 0$ έτσι ώστε $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_0$, τότε $\ell \ge 0$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή σε άτοπο. Αν ίσχυε $\ell < 0$, τότε σύμφωνα με τη συνθήκη (1.1) θα υπήρχε για το $\varepsilon = -\ell > 0$ ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Αυτό θα ισχύει και για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta' := \min\{\delta, \delta_0\}$. Συνεπώς, για αυτά τα x θα ισχύει $f(x) < \ell + \varepsilon = 0$, το οποίο είναι όμως άτοπο προς την υπόθεση ότι $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_0$, η οποία συνεπάγεται και ότι $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta' = \min\{\delta, \delta_0\}$. □

Επίσης, ιδιαίτερα χρήσιμο είναι και το ακόλουθο αποτέλεσμα.[20]

Πρόταση 1.4. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του D και έστω $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ με $f(x) \le g(x) \le h(x)$ για $x \in D \cap ((a - \delta_0, a) \cup (a + \delta_0))$ και κάποιο $\delta_0 > 0$. Τότε, αν $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, θα έχουμε και $\lim_{x\to a} h(x) = \ell$.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta \in (0, \delta_0)$ έτσι ώστε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$.[21] Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ έχουμε

$$g(x) - \ell \le h(x) - \ell < \varepsilon \quad \text{και} \quad -\varepsilon < f(x) - \ell \le g(x) - \ell$$

και άρα $-\varepsilon < g(x) - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow |g(x) - \ell| < \varepsilon$. □

Όταν μιλάμε για όρια συναρτήσεων που ορίζονται στο $\mathbb{R}$, καθώς αυτό είναι ένα διατεταγμένο σύνολο (σώμα), μπορούμε να ορίσουμε και τα καλούμενα πλευρικά όρια, από πάνω (ή από τα θετικά ή από τα δεξιά) και από κάτω (ή από τα αρνητικά ή από τα αριστερά).

[18] Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ προκύπτει $\lim_{x\to a}(fg)(x) = 0$, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.

[19] *Άσκηση:* Βρείτε ποια είναι τα f και g στα οποία εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.2 και που δείξαμε τις απαιτούμενες ιδιότητες που πρέπει να έχουν τα f και g αυτά.

[20] Ονομάζεται και Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Συναρτήσεων ή Κριτήριο Παρεμβολής.

[21] Για λόγους επανάληψης ας δούμε και εδώ λίγο πιο λεπτομερώς πως προκύπτει αυτό: Η ύπαρξη των ορίων $\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ μας δίνει αρχικά την ύπαρξη δύο $\delta_1, \delta_2 > 0$ έτσι ώστε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_1$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_2$. Συνεπώς, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta' := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Αν, αρχικά, $\delta' \ge \delta_0 > 0$, επιλέγουμε έπειτα κάποιο $0 < \delta < \min\{\delta', \delta_0\}$ έτσι ώστε τελικά να έχουμε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ όπου $\delta \in (0, \delta_0)$. (Ο λόγος που επιμένουμε να βρούμε ένα $\delta < \delta_0$ είναι προφανώς για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $f(x) \le g(x) \le h(x)$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$.)

Ορισμός 1.4. *Έστω μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$ *με* $D \subset \mathbb{R}$.

(α′) *Έστω* $a \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* $D \cap (a, \infty)$. *Λέμε ότι* **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο όριο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** a **από πάνω**, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < x - a < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{1.5}$$

και γράφουμε $f(x) \to \ell$ *για* $x \to a^+$ *ή για* $x \downarrow a$ *ή* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$ *ή* $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \ell$.

(β′) *Έστω* $a \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* $D \cap (-\infty, a)$. *Λέμε ότι* **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο όριο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** a **από κάτω**, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ -\delta < x - a < 0 : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{1.6}$$

και γράφουμε $f(x) \to \ell$ *για* $x \to a^-$ *ή για* $x \uparrow a$ *ή* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$ *ή* $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \ell$.[22] [23]

Πρόταση 1.5. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *σημείο συσσώρευσης και του* $D \cap (a, +\infty)$ *και του* $D \cap (-\infty, a)$ *και* $\ell \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Προκύπτει άμεσα από τις συνθήκες (1.1), (1.5), (1.6), αφού για κάθε $\delta > 0$ ισχύει

$$\{x \in D : 0 < |x - a| < \delta\} = \{x \in D : 0 < x - a < \delta\} \cup \{x \in D : -\delta < x - a < 0\}.$$

$\Leftarrow$: Από τις συνθήκες (1.5), (1.6) προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \forall\ x \in D,\ 0 < x - a < \delta_1 : &\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon, \\ \forall\ x \in D,\ -\delta_2 < x - a < 0 : &\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ ισχύει

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

και από τη συνθήκη (1.1) προκύπτει το αποδεικτέο. $\square$

Παράδειγμα 1.5. *Έστω η συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} \alpha, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \beta, & x < 0, \end{cases}$ *για* $x \in \mathbb{R}$ *και σταθερά* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Εξετάστε υπό ποιες προϋποθέσεις στα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *υπάρχουν τα όρια* $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ *και* $\lim_{x \to 0} f(x)$ *και δώστε τις τιμές τους.*
Απάντηση: *Είναι* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \alpha$ *και* $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \beta$. *Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό των ορίων αυτών.*[24] *Το όριο* $\lim_{x \to 0} f(x)$ *υπάρχει αν και μόνο αν* $\alpha = \beta$ *και τότε* $\lim_{x \to 0} f(x) = \alpha = \beta$, *σύμφωνα με την Πρόταση 1.5.*

(Παρατηρούμε ότι η τιμή $f(0)$ *δεν έχει καμία σημασία για τα όρια αυτά.)*

[22] Τα όρια $\lim_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim_{x \to a^-} f(x)$, αν υπάρχουν, είναι μοναδικά. Αυτό προκύπτει από μια απλή προσαρμογή της απόδειξης του Θεωρήματος 1.1.

[23] Να σημειωθεί και εδώ οι ορισμοί που δίνονται για πλευρικά όρια είναι λίγο γενικότεροι από αυτούς που δίνονται στο [1, σελ. 95], όπου απαιτείται το πεδίο ορισμού D της f να είναι τέτοιο ώστε $(a, a + \delta_1) \subset D$ και $(a - \delta_2, a) \subset D$, αντίστοιχα, για κάποια $\delta_1, \delta_2 > 0$.

[24] Πβ. *[= παράβαλε = σύγκρινε]* με το Παράδειγμα 1.1 (1).

Κλείνουμε το κεφάλαιο περί ορίων συναρτήσεων με τους ορισμούς των ορίων στα οποία εμφανίζονται τα $\pm\infty$, όταν το $f(x)$ ή το x τείνουν ή συγκλίνουν προς τα $\pm\infty$.

Ορισμός 1.5. *Έστω μία συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ με $D \subset \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του D. Λέμε ότι*

(α′) **η f τείνει ή συγκλίνει στο ∞ κοντά στο a**, *συμβολικά: $f(x) \to \infty$ για $x \to a$ ή $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon},$$

(β′) **η f τείνει ή συγκλίνει στο $-\infty$ κοντά στο a**, *συμβολικά: $f(x) \to -\infty$ για $x \to a$ ή $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Παρατήρηση 1.3. *Αντίστοιχα ορίζονται και τα όρια $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \infty$ και $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = -\infty$, αν στις συνθήκες που εμφανίζονται στον προηγούμενο ορισμό αντικαταστήσουμε την έκφραση «$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta$» με «$\forall\ x \in D,\ 0 < x - a < \delta$» για το $x \to a^+$ και «$\forall\ x \in D,\ -\delta < x - a < 0$» για το $x \to a^-$.*[25]

Παράδειγμα 1.6. *(α′)* $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{R}^* \cap (0, \infty) = (0, \infty)$, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $((-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)) \cap (0, \infty) = (0, \varepsilon)$ είναι μη κενό (περιέχει, π.χ., το $\varepsilon/2$).

Τώρα, για κάθε $\varepsilon > 0$, θέτοντας $\delta = \varepsilon > 0$, έχουμε $\frac{1}{x} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < \varepsilon$ για κάθε $0 < x < \delta = \varepsilon$.

(β′) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

Και εδώ, το 0 ειναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{R}^* \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, θέτοντας $\delta = \varepsilon > 0$, έχουμε $\frac{1}{x} < -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow -x < \varepsilon \Leftrightarrow x > -\varepsilon$ για κάθε $0 > x > -\delta = -\varepsilon$.

Ορισμός 1.6. *Έστω μία συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$.*

(α′) Αν το $D \subset \mathbb{R}$ δεν είναι άνω φραγμένο, λέμε ότι

[25]Φυσικά, για να ορίζονται αυτά τα πλευρικά όρια από πάνω και από κάτω θα πρέπει το a να είναι σημείο συσσώρευσης του $D \cap (a, \infty)$ και του $D \cap (-\infty, a)$, αντίστοιχα. Βλ. και τον Ορισμό 1.4.

(i) **η f τείνει ή συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R}$ όταν το x τείνει ή συγκλίνει στο ∞**, *συμβολικά:* $f(x) \to \ell$ *για* $x \to \infty$ *ή* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x > \frac{1}{\delta}: \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

(ii) **η f τείνει ή συγκλίνει στο ∞ όταν το x τείνει ή συγκλίνει στο ∞**, *συμβολικά:* $f(x) \to \infty$ *για* $x \to \infty$ *ή* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x > \frac{1}{\delta}: \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon},$$

(iii) **η f τείνει ή συγκλίνει στο $-\infty$ όταν το x τείνει ή συγκλίνει στο ∞**, *συμβολικά:* $f(x) \to -\infty$ *για* $x \to \infty$ *ή* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x > \frac{1}{\delta}: \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

(β′) Αντίστοιχα, αν το $D \subset \mathbb{R}$ δεν είναι κάτω φραγμένο, λέμε ότι

(i) **η f τείνει ή συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R}$ όταν το x τείνει ή συγκλίνει στο $-\infty$**, *συμβολικά:* $f(x) \to \ell$ *για* $x \to -\infty$ *ή* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x < -\frac{1}{\delta}: \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

(ii) **η f τείνει ή συγκλίνει στο ∞ όταν το x τείνει ή συγκλίνει στο $-\infty$**, *συμβολικά:* $f(x) \to \infty$ *για* $x \to -\infty$ *ή* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x < -\frac{1}{\delta}: \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon},$$

(iii) **η f τείνει ή συγκλίνει στο $-\infty$ όταν το x τείνει ή συγκλίνει στο $-\infty$**, *συμβολικά:* $f(x) \to -\infty$ *για* $x \to -\infty$ *ή* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x < -\frac{1}{\delta}: \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon},$$

Παράδειγμα 1.7. *(α′)* $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ *και* $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$.

Η $f(x) = x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, που δεν είναι ούτε άνω φραγμένο, ούτε κάτω φραγμένο.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, για $\delta = \varepsilon > 0$ έχουμε $x > \frac{1}{\varepsilon}$ για κάθε $x > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon}$ και $x < -\frac{1}{\varepsilon}$ για κάθε $x < -\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{\varepsilon}$.

(β′) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ *έχει πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, *που δεν είναι ούτε άνω φραγμένο, ούτε κάτω φραγμένο.*

Έστω $\varepsilon > 0$. *Τότε, θέτοντας* $\delta = \varepsilon > 0$, *βλέπουμε ότι για κάθε* $x > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ *έχουμε* $x = |x| = |x - 0| < \varepsilon$ *και για κάθε* $x < -\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{\varepsilon} < 0$ *έχουμε* $-x = |x| = |x - 0| < \varepsilon$.

1.0.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 5]:
(Κάποιες περιέχονται στις παρούσες σημειώσεις.)
"SUPER SOS": 1, 2, 4, 9, 33, 34, 36, 37, 38
"SOS": 8, 10(α,β), 12, 13, 16(α), 17, 18, 21, 29, 39
Συνιστώμενες: 11, 15, 27, 32, 35

Κεφάλαιο 2

Συνέχεια συναρτήσεων

2.1 Συνέχεια σε σημείο

Ορισμός 2.1. *Έστω* $D \subset \mathbb{R}$ *ένα διάστημα*[1] *και* $f : D \to \mathbb{R}$. *Λέμε ότι η* f **είναι συνεχής στο** $a \in D$, *αν* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Παρατήρηση 2.1. *(α΄) Αφού το όριο της* f *κοντά στο* a *είναι μία τοπική ιδιότητα,*[2] *ο παραπάνω ορισμός μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού* $D \subset \mathbb{R}$ *της* $f : D \to \mathbb{R}$ *δεν είναι (ολόκληρο) διάστημα, αρκεί να υπάρχει ένα διάστημα* $I \subset D$ *με* $a \in I$.[3]

(β΄) Από τον Ορισμό 1.1 του ορίου, προκύπτει ότι η $f : D \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $a \in D$ *αν και μόνο αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

δηλαδή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ |x - a| < \delta : \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Παράδειγμα 2.1. *Από τα παραδείγματα ορίων που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο προκύπτει άμεσα ότι η σταθερή συνάρτηση, η ταυτοτική συνάρτηση, οι πολυωνυμικές συναρτήσεις, οι ρητές συναρτήσεις και η συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας είναι όλες συνεχείς συναρτήσεις σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.*

Από το Θεώρημα 1.2 προκύπτει άμεσα το ακόλουθο θεώρημα.[4]

[1] Δηλαδή, το D είναι της μορφής (a, b) ή $(a, b]$ ή $[a, b)$ ή $[a, b]$ με $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$ ή είναι της μορφής $(-\infty, a)$ ή $(-\infty, a]$ ή (a, ∞) ή $[a, \infty)$ με $a \in \mathbb{R}$ ή είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$. (Αν $a = b \in \mathbb{R}$, έχουμε $(a, b) = (a, b] = [a, b) = \emptyset$ και $[a, b] = \{a\} = \{b\}$. Αυτά δεν θεωρούνται διαστήματα.) Στα επόμενα όταν θα μιλάμε για συνέχεια μιας f σε ένα a θα θεωρούμε ότι η f ορίζεται σε ένα διάστημα που περιέχει το a. Βλ. σχετικά και την Παρατήρηση 2.1.

[2] Βλ. Παρατήρηση 1.1

[3] Ας σημειωθεί ότι αν το $I \subset D$ είναι διάστημα με $a \in I$, τότε το a είναι σημείο συσσώρευσης του I και άρα και του D. (Θα μπορούσαμε να ορίσουμε τη συνέχεια της $f : D \to \mathbb{R}$ στο $a \in D$ μέσω του ορίου της f κοντά στο a, όπως κάναμε στον Ορισμό 2.1, ακόμα και για πεδία ορισμού D που έχουν μόνο την ιδιότητα το $a \in D$ να είναι σημείο συσσώρευσης του D, αφού για τέτοια πεδία ορισμού και σημεία a ορίσαμε το όριο της f. Επειδή στην πράξη αυτό δεν θα μας χρειαστεί στο μάθημα, επιλέγουμε εδώ και στα επόμενα την απλούστερη εκδοχή του Ορισμού 2.1, όπου η f [ή ένας κατάλληλος περιορισμός της] ορίζονται σε ένα διάστημα.)

[4] Για την απόδειξη βλ. και [1, Κεφάλαιο 6, Θεώρημα 1].

Θεώρημα 2.1. *Έστω* $D \subset \mathbb{R}$ *διάστημα,* $a \in D$ *και* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *συνεχείς στο* a. *Τότε η* $f+g$ *και η* fg *είναι συνεχείς στο* a *και, αν* $g(a) \neq 0$, *και η* $1/g$ *είναι συνεχής στο* a.

Θεώρημα 2.2. *Έστω* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *συνεχής στο* $a \in D_g$ *και η* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *συνεχής στο* $g(a) \in g(D_g) \subset D_f$.[5] *Τότε η* $f \circ g : D_g \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* a.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη συνθήκη (2.1). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $g(a)$, θα υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $y \in D_f$ με $|y - g(a)| < \delta$ να ισχύει $|f(y) - f(g(a))| < \varepsilon$. Όμως, αφού η g είναι συνεχής στο a, θα υπάρχει $\gamma > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D_g$ με $|x - a| < \gamma$ να ισχύει $|g(x) - g(a)| < \delta$, και συνεπώς, αφού $g(x) \in D_f$, από το πιο πάνω συμπέρασμα για την f προκύπτει $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$. □

Στα επόμενα θα χρειαστούμε δύο απλές συνέπειες της συνέχειας σε ένα σημείο, οι οποίες προκύπτουν από τον ορισμό της και την τριγωνική ανισότητα.

Πρόταση 2.1. *Έστω* $D \subset \mathbb{R}$ *διάστημα και* $f : D \to \mathbb{R}$ *συνεχής στο* $a \in D$. *Αν* $f(a) > 0$, *τότε υπάρχει* $\delta > 0$ *έτσι ώστε* $f(x) > 0$ *για κάθε* $x \in D$ *με* $|x - a| < \delta$. *Αντίστοιχα, αν* $f(a) < 0$, *τότε υπάρχει* $\delta > 0$ *έτσι ώστε* $f(x) < 0$ *για κάθε* $x \in D$ *με* $|x - a| < \delta$.

Απόδειξη: Αν $f(a) > 0$, αφού η f είναι συνεχής στο a, έχουμε από τη συνθήκη (2.1) ότι για $\varepsilon = f(a) > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $|x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(a)| < f(a)$, δηλαδή, ισοδύναμα, $0 = f(a) - f(a) < f(x) < f(a) + f(a)$.[6] Αν $f(a) < 0$, εφαρμόζουμε το πρώτο αποτέλεσμα στην $-f$. □

Πρόταση 2.2. *Έστω* $D \subset \mathbb{R}$ *διάστημα και* $f : D \to \mathbb{R}$ *συνεχής στο* $a \in D$. *Τότε υπάρχει* $\delta > 0$ *έτσι ώστε η* f *είναι φραγμένη στο* $D \cap (a - \delta, a + \delta)$.[7]

Απόδειξη: Αφού $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, υπάρχει π.χ. για $\varepsilon = 1$ κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $|x - a| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(a)| < 1 \Leftrightarrow f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1$.[8] □

2.1.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 6]:
"SOS": 1, 2(μόνο για το [1, Πρόβλημα 4-17]), 3(α,γ),
Συνιστώμενες: 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 17(α-γ)

2.2 Πληρότητα των πραγματικών αριθμών

Πρίν περάσουμε στη μελέτη συνεχών συναρτήσεων σε ένα κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$, αναφέρουμε εδώ εμβόλιμα την τελευταία θεμελιώδη ιδιότητα (αξίωμα) των πραγματικών αριθμών,

[5] Υπενθυμίζουμε ότι θεωρούμε ότι τα D_g και D_f είναι διαστήματα του $\mathbb{R}$, βλ. Υποσημείωση 1.

[6] Επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$ βρίσκουμε ανάλογα ένα $\delta' > 0$ για το οποίο για κάθε $x \in D$ με $|x - a| < \delta'$ ισχύει $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$.

[7] Με αυτό εννοούμε προφανώς ότι ο περιορισμός της f στο $D \cap (a - \delta, a + \delta)$ είναι φραγμένη συνάρτηση. Βλ. τον Ορισμό 1.3 και την Υποσημείωση 6.

[8] Συνεπώς, $-|f(a)| - 1 < f(x) < |f(a)| + 1 \Leftrightarrow |f(x)| < |f(a)| + 1$.

η οποία καθιστά το $\mathbb{R}$ «πλήρες» (σε σχέση με το $\mathbb{Q}$ που δεν έχει αυτή την ιδιότητα). Η ιδιότητα αυτή θα μας χρειαστεί για να αποδείξουμε κάποια θεμελιώδη αποτελέσματα για συνεχείς συναρτήσεις και για αυτόν τον λόγο την αναφέρουμε εδώ.

Από τον Ορισμό 1.2 γνωρίζουμε τι σημαίνει άνω φράγμα ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}$: Είναι ένας πραγματικός αριθμός $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $x \leq M$ για κάθε $x \in A$. Προφανώς, αν το M είναι άνω φράγμα του A, τότε και κάθε $M' \geq M$ θα είναι άνω φράγμα του A. Επίσης προφανώς, αν $A \neq \emptyset$, δηλαδή αν υπάρχει έστω και ένα $x_0 \in A$, τότε δεν θα είναι *κάθε* $M \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A, αφού αν επιλέξουμε $M < x_0$ δεν θα ισχύει $x \leq M$ για *κάθε* $x \in A$.

Αναρωτιόμαστε αν υπάρχει και ποιο είναι το ελάχιστο (μικρότερο) άνω φράγμα ενός μη κενού συνόλου $A \subset \mathbb{R}$. Δίνουμε καταρχάς τον προφανή ορισμό ενός τέτοιου άνω φράγματος.

Ορισμός 2.2. *Ένας αριθμός $M \in \mathbb{R}$ λέγεται* **ελάχιστο άνω φράγμα ή supremum** *ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}$, αν (i) το M είναι άνω φράγμα του A και (ii) για κάθε άνω φράγμα M' του A ισχύει $M' \geq M$.*

Ο αριθμός αυτός, αν υπάρχει, είναι μοναδικός,[9] *και συμβολίζεται με* $\sup A$.

Αντίστοιχα, ορίζεται μοναδικά το μέγιστο (μεγαλύτερο) κάτω φράγμα ενός συνόλου A.[10]

Ορισμός 2.3. *Ένας αριθμός $m \in \mathbb{R}$ λέγεται* **μέγιστο κάτω φράγμα ή infimum** *ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}$, αν (i) το m είναι κάτω φράγμα του A και (ii) για κάθε κάτω φράγμα m' του A ισχύει $m' \leq m$.*

Ο αριθμός αυτός, αν υπάρχει, είναι μοναδικός, και συμβολίζεται με $\inf A$.[11]

Επειδή οι ιδιότητες του μέγιστου κάτω φράγματος προκύπτουν κατά κάποιον τρόπο «κατοπτρικά» από αυτές του ελάχιστου άνω φράγματος, εστιάζουμε συνήθως στο τελευταίο.

Η, τελευταία κατά σειρά, ιδιότητα των πραγματικών αριθμών που τους κάνει να ξεχωρίζουν από τους ρητούς και κάνει το $\mathbb{R}$ «πλήρες» είναι η ακόλουθη:

(Ι13) (Ιδιότητα του ελάχιστου άνω φράγματος ή Αξίωμα Πληρότητας του $\mathbb{R}$):
Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα ή supremum $\sup A \in \mathbb{R}$.[12]

Ενώ όλες οι άλλες ιδιότητες (Ι1-Ι12) ισχύουν και στο $\mathbb{Q}$, το Αξίωμα Πληρότητας (Ι13) δεν ισχύει στο $\mathbb{Q}$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής.

---

[9] Η μοναδικότητα του ελάχιστου άνω φράγματος, αν υπάρχει, προκύπτει από τον ίδιο τον ορισμό του. Πράγματι, αν M και $\tilde{M}$ είναι δύο ελάχιστα άνω φράγματα για ένα δοσμένο σύνολο A, τότε τα M και $\tilde{M}$ είναι, ειδικότερα, άνω φράγματα του A. Αφού το M είναι ελάχιστο άνω φράγμα, θα ισχύει συνεπώς $\tilde{M} \geq M$ και, αντίστοιχα, αφού το $\tilde{M}$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα, θα ισχύει $M \geq \tilde{M}$. Συνεπώς, $M = \tilde{M}$.

[10] Για τον, εν τω μεταξύ μάλλον προφανή, ορισμό ενός κάτω φράγματος, βλ. τον Ορισμό 1.2.

[11] Η μοναδικότητα του μέγιστου κάτω φράγματος αποδεικνύεται ανάλογα με αυτήν του ελάχιστου άνω φράγματος.

[12] Αν το $\neq \emptyset$ δεν είναι άνω φραγμένο, θεωρούμε ότι το μόνο «άνω φράγμα» του είναι το $+\infty$ και συνεπώς (αφού είναι το μόνο είναι και το ελάχιστο) θέτουμε $\sup A = +\infty$. Επίσης, αφού κάθε αριθμός $M \in \mathbb{R}$ μπορεί να θεωρηθεί άνω φράγμα του κενού συνόλου (αφού δεν υπάρχουν $x \in \emptyset$ η ιδιότητα «$x \leq M$ για κάθε $x \in \emptyset$» θεωρείται ότι ισχύει· αν και φαινομενικά παράδοξο, αυτό ανήκει στα θεμέλια της Λογικής [π.χ. η πρόταση «κάθε ψάρι που φοράει γυαλιά μυωπίας, είναι κάτοχος μιας Ferrari» θεωρείται σωστή, μιας και δεν υπάρχει τέτοιο ψάρι για να την ελέγξουμε]) ορίζουμε $\sup \emptyset := -\infty$.

Αντίστοιχα, κάθε μη κενό σύνολο A που είναι κάτω φραγμένο έχει μέγιστο κάτω φράγμα $\inf A \in \mathbb{R}$, ενώ αν δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε $\inf A = -\infty$, και $\inf \emptyset := +\infty$

Πρόταση 2.3. *Το σύνολο των ρητών αριθμών δεν ικανοποιεί το Αξίωμα Πληρότητας (I13).*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει έστω και ένα μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{Q}$, το οποίο δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\sup A \in \mathbb{Q}$.[13] Θα δείξουμε ότι το σύνολο $S := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 2\}$, το οποίο είναι μη κενό (αφού, π.χ., $1 \in S$) και άνω φραγμένο (π.χ. από το 2, αφού, αν για κάποιο $x \in S$ είχαμε $x > 2$, τότε, μιας και $x > 0$, θα είχαμε $x^2 = x \cdot x > 2 \cdot x > 2 \cdot 2 = 4 \geq 2$, το οποίο είναι άτοπο [αφού $x \in S$ και άρα $x^2 < 2$]), δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\mu = \sup S \in \mathbb{Q}$.

Έστω ότι υπάρχει ένα τέτοιο ελάχιστο άνω φράγμα $\mu \in \mathbb{Q}$ του S. Από τον νόμο της τριχοτομίας (I10')[14] γνωρίζουμε ότι, αν υπάρχει τέτοιος αριθμός, τότε είτε $\mu^2 < 2$ είτε $\mu^2 > 2$ είτε $\mu^2 = 2$. Θα δείξουμε ότι τίποτα από αυτά δεν ισχύει και συνεπώς ότι η υπόθεσή μας είναι εσφαλμένη, δηλαδή ότι δεν υπάρχει τέτοιο $\mu \in \mathbb{Q}$.

Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε τον αριθμό

$$y := \frac{4+3\mu}{3+2\mu}.$$

Αφού $1 \in S$ και το μ είναι άνω φράγμα του S, θα ισχύει $\mu \geq 1 > 0$ και άρα ο y ορίζεται καλώς, είναι θετικός και ανήκει στο $\mathbb{Q}$.[15] Επίσης

$$\mu - y = \frac{2(\mu^2-2)}{3+2\mu} \quad \text{και} \quad 2 - y^2 = \frac{2-\mu^2}{(3+2\mu)^2}.$$

Έστω $\mu^2 < 2$. Τότε, $\mu < y$ και $y \in S$, το οποίο είναι άτοπο, αφού το μ έχει υποτεθεί ότι είναι άνω φράγμα του S. Έστω $\mu^2 > 2$. Τότε, $\mu > y$ και $y^2 > 2 > x^2$ για κάθε $x \in S$ που συνεπάγεται $y > x$ για κάθε $x \in S$,[16] το οποίο είναι άτοπο προς την υπόθεση ότι το μ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του S (αφού τώρα δείξαμε ότι το y είναι άνω φράγμα του S, *γνήσια μικρότερο* του μ). Άρα, για το $\mu \in \mathbb{Q}$ θα πρέπει να ισχύει $\mu^2 = 2$, το οποίο είναι άτοπο, αφού δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.[17] □

Σημείωση:
Στις παρούσες σημειώσεις δεν θα εντρυφήσουμε περαιτέρω στον θεμελιώδη ρόλο του Αξιώματος Πληρότητας (I13) για τον ορισμό των πραγματικών αριθμών και στις πολλές συνέπειές του.

Αντ' αυτού, παραπέμπουμε κάθε ενδιαφερόμενο

[13] Προσοχή: Το «$\in \mathbb{Q}$» είναι το σημαντικό εδώ. Το ότι ένα μη κενό άνω φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ έχει άνω φράγμα στο $\mathbb{R}$ μας το δίνει το Αξίωμα Πληρότητας του $\mathbb{R}$.

[14] Βλ. και [1, Κεφάλαιο 1, Πρόβλημα 8]

[15] Αυτά προκύπτουν από τις ιδιότητες (I1-I12) και αφήνονται ως Άσκηση. (Για το ότι $y \in \mathbb{Q}$, αρκεί να δειχθεί ότι για $\mu = p/q$ με $p, q \in \mathbb{N}$ έχουμε $y = p'/q'$ για κάποια $p', q' \in \mathbb{N}$.)

[16] Βλ. [1, Κεφάλαιο 1, Πρόβλημα 5(x)].

[17] Έστω $\mu = p/q$ με $p, q \in \mathbb{N}$ χωρίς κοινό διαιρέτη. (Το μ είδαμε ότι είναι θετικό.) Τότε $\mu^2 = p^2/q^2 = 2$ και άρα $p^2 = 2q^2$, όπου $q^2 \in \mathbb{N}$, δηλαδή ο p^2 είναι άρτιος. Συνεπώς και ο p θα είναι άρτιος, δηλαδή $p = 2m$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. (Αν ήταν περιττός, δηλαδή αν $p = 2k+1$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε και ο $p^2 = 2(2k^2+2k)+1$ θα ήταν περιττός. [Εδώ χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη ότι κάθε φυσικός είναι είτε άρτιος είτε περιττός, βλ. και [1, Κεφάλαιο 2, Πρόβλημα 8].]) Τότε όμως, $p^2 = 4m^2 = 2q^2$ και άρα $q^2 = 2m^2$, όπου $m^2 \in \mathbb{N}$, δηλαδή ο q^2 είναι άρτιος και άρα και ο q είναι άρτιος. Συνεπώς, και ο p και ο q είναι άρτιοι και άρα έχουν κοινό διαιρέτη το 2, που είναι άτοπο προς την υπόθεση.

- για μία συνοπτική ανακεφαλαίωση των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών, και ειδικότερα κάποιων βασικών στοιχείων αναφορικά με τα supremum και infimum και κάποιες άμεσες συνέπειες του Αξιώματος Πληρότητας (όπως η Αρχιμήδεια Ιδιότητα την οποία ήδη αναφέραμε στην Υποσημείωση 16), στις παλαιότερες χειρόγραφες σημειώσεις του διδάσκοντα http://users.uoi.gr/giannoul/ICI/1_2.pdf, οι οποίες, όπως και όλες που θα βρείτε στις ιστοσελίδες http://users.uoi.gr/giannoul/ICI/ICI.html και http://users.uoi.gr/giannoul/ICII/ICII.html, αποτελούν μία συλλογή των σημαντικότερων εννοιών και αποτελεσμάτων του Απειροστικού Λογισμού πραγματικών συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής, που επιλέχθηκαν από τα βιβλία [2] και [3] του Ομότιμου Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, κ. Σωτήρη Ντούγια, με πρωτοβουλία του ίδιου, για τη συνδιδασκαλία των δύο εξαμηνιαίων μαθημάτων Απειροστικού Λογισμού Ι και ΙΙ στο πρώτο έτος του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων το ακαδημαϊκό έτος 2011-2012,
- σε αυτά που αναφέρονται στο [1, Κεφάλαιο 8] μετά την απόδειξη του Θεωρήματος 7.3 εκεί (τα οποία περιλαμβάνουν επίσης την απόδειξη της Αρχιμήδειας Ιδιότητας), καθώς και στα Προβλήματα του κεφαλαίου αυτού, όπως επίσης και στα Κεφάλαια 28-30 στο [1] που περιγράφουν διεξοδικά την κατασκευή και τη μοναδικότητα του $\mathbb{R}$.[18]

Κατά τα λοιπά, στις παρούσες σημειώσεις θα εστιάσουμε σε ό,τι χρειαζόμαστε για την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού πραγματικών συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής με κατά το δυνατόν ακριβείς αναφορές για ό,τι δεν αποδεικνύεται εδώ.

2.2.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 8]:
"SOS": 1, 2
Συνιστώμενες: 12, 13

2.3 Συνέχεια σε διάστημα

Ορισμός 2.4. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα. Λέμε ότι* **η** $f : D \to \mathbb{R}$ **είναι συνεχής (στο** D**)**, *αν η* f *είναι συνεχής σε κάθε* $x \in D$.

Παρατήρηση 2.3.1. *Για* $D = [a, b]$ *αυτό σημαίνει ότι (i) για κάθε* $x_0 \in (a, b)$ *ισχύει* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *και (ii)* $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ *και* $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

Το Αξίωμα Πληρότητας (Ι13) είναι απαραίτητο για να αποδειχθούν τα ακόλουθα αποτελέσματα για *συνεχείς συναρτήσεις* που ορίζονται *σε κλειστά και φραγμένα (δηλαδή,* ***συμπαγή****) διαστήματα*.[19] Τα αποτελέσματα αυτά δίνουν *ολικές ιδιότητες* τέτοιων συναρτήσεων, δηλαδή

[18] Παρεμπιπτόντως, σημειώνουμε ότι και η «Προτεινόμενη βιβλιογραφία» στο [1] περιέχει πολύ ενδιαφέρουσες πληροφορίες σχετικά με διάφορα θέματα που θίγονται στο βιβλίο και τις προεκτάσεις τους στα Μαθηματικά.

[19] Ένα σύνολο $D \subset \mathbb{R}$ ονομάζεται **συμπαγές** αν είναι κλειστό και φραγμένο. Η κλειστότητα είναι μία *τοπολογική έννοια* συνόλων, την οποία δεν θα αναλύσουμε εδώ. Αναφορικά με διαστήματα του $\mathbb{R}$, τα κλειστά είναι τα $[a, b]$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) και το $\mathbb{R}$. Συνεπώς, τα συμπαγή διαστήματα είναι μόνο τα $[a, b]$.

αναφέρονται στη (και απαιτούν τη) συνέχεια των συναρτήσεων σε *ολόκληρο* το συμπαγές διάστημα, δηλαδή *σε κάθε σημείο* του, σε αντιδιαστολή με τις τοπικές ιδιότητες συναρτήσεων που είναι συνεχείς *σε κάποιο σημείο* και ισχύουν *κοντά* στο σημείο αυτό, τις βασικότερες των οποίων γνωρίσαμε στην Ενότητα 2.1. Η ολικότητα αυτή είναι ο λόγος για τον οποίο απαιτείται η χρήση του Αξιώματος Πληρότητας.

Θεώρημα 2.3. (Θεώρημα Bolzano)
Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής με* $f(a)f(b) < 0$*, τότε υπάρχει* $x \in (a, b)$ *με* $f(x) = 0$*.*

Απόδειξη: Η υπόθεση $f(a)f(b) < 0$ σημαίνει ότι είτε $f(a) < 0 < f(b)$ είτε $f(a) > 0 > f(b)$. Θα υποθέσουμε εδώ το πρώτο, καθώς το αποτέλεσμα για το δεύτερο προκύπτει από το πρώτο θέτοντας $g = -f$. Έστω λοιπόν $f(a) < 0 < f(b)$ και έστω το σύνολο

$$A := \{x \in [a, b] : f(y) < 0 \ \forall \ y \in [a, x]\},$$

το οποίο είναι μη κενό (αφού $a \in A$) και άνω φραγμένο (αφού για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \in [a, b]$ και συνεπώς $x \leq b$). Συνεπώς, από την ιδιότητα του ελάχιστου άνω φράγματος (I13) προκύπτει ότι το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω $\lambda := \sup A \in [a, b]$.[20]

Μάλιστα, από την Πρόταση 2.1 προκύπτει ότι $\lambda \in (a, b)$.

Πράγματι, αφού η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχουμε $f(a) < 0 < f(b)$, θα υπάρχουν $\delta, \delta' > 0$ με $a + \delta \leq b - \delta'$ έτσι ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, a + \delta)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (b - \delta', b]$.[21] Συνεπώς, $[a, a + \delta) \subset A \subset [a, b - \delta']$.[22] Άρα, αφού το λ είναι άνω φράγμα του A, θα ισχύει $\lambda \geq a + \delta$,[23] δηλαδή $\lambda > a$, και αφού το $b - \delta'$ είναι άνω φράγμα του A και το λ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, θα ισχύει $\lambda \leq b - \delta'$, δηλαδή $\lambda < b$.

Θα δείξουμε τώρα ότι για το $\lambda = \sup A \in (a, b)$ ισχύει $f(\lambda) = 0$.[24] Θα επιχειρηματολογήσουμε με απαγωγή σε άτοπο.

Πράγματι, αν $f(\lambda) < 0$, η Πρόταση 2.1 μας δίνει ότι υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset (a, b)$.[25] Αφού το λ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, θα υπάρχει κάποιο $x_0 \in A$ που ανήκει στο $(\lambda - \delta, \lambda]$.[26] Αφού $x_0 \in A$, έχουμε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, x_0]$. Όμως, επειδή $x_0 \in (\lambda - \delta, \lambda]$, έχουμε $f(x) < 0$ και στο $[x_0, x_1]$ για οποιοδήποτε $x_1 \in (\lambda, \lambda + \delta)$,

[20] Αφού το b είναι άνω φράγμα του A, θα ισχύει $\lambda \leq b$ και αφού $a \in A$, θα ισχύει $a \leq \lambda$.

[21] Η Πρόταση 2.1 μας δίνει καταρχάς την ύπαρξη δύο $\delta, \delta' > 0$ έτσι ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ με $x \in (a - \delta, a + \delta)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ με $x \in (b - \delta', b + \delta')$. Αυτά συνεπάγονται $a + \delta \leq b - \delta'$ και κατά μείζονα λόγο (*a fortiori*) $[a, a + \delta) \subset [a, b)$ και $(b - \delta', b] \subset (a, b]$.

[22] Πράγματι, αφού για κάθε $y \in [a, a + \delta)$ ισχύει $f(y) < 0$ και αφού για κάθε $x \in [a, a + \delta)$ έχουμε $[a, x] \subset [a, a + \delta)$, προκύπτει ότι για κάθε $x \in [a, a + \delta)$ ισχύει: $f(y) < 0 \ \forall \ y \in [a, x]$, δηλαδή, από τον ορισμό του A, $x \in A$. Άρα, $[a, a + \delta) \subset A$. (Υπενθυμίζουμε ότι για να δείξουμε $A \subset B$ πρέπει και αρκεί να δείξουμε $x \in A \Rightarrow x \in B$.)

Από την άλλη, αφού $x \in A$ συνεπάγεται ειδικότερα ότι $f(x) < 0$ και αφού για κάθε $x \in (b - \delta', b]$ έχουμε $f(x) > 0$, αυτό σημαίνει ότι κανένα $x \in (b - \delta', b]$ δεν ανήκει στο A. Αφού το A έχει μόνο στοιχεία από το $[a, b]$ και όπως μόλις είδαμε κανένα από το $(b - \delta', b]$, όλα τα στοιχεία του θα είναι από το $[a, b - \delta']$, δηλαδή θα έχουμε $A \subset [a, b - \delta']$.

[23] Αν ήταν $\lambda < a + \delta$, θα υπήρχε $x \in (\lambda, a + \delta) \subset A$ και άρα το λ δεν θα ήταν άνω φράγμα του A.

[24] Το x του ισχυρισμού θα είναι τότε αυτό το λ.

[25] Αφού $\lambda \in (a, b)$, μπορούμε πάντα να επιλέξουμε ένα μικρότερο $\delta > 0$ από αυτό που μας δίνει καταρχάς η Πρόταση 2.1, τέτοιο ώστε να ισχύει $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset (a, b)$, και προφανώς το αποτέλεσμα της πρότασης θα συνεχίσει να ισχύει στο μικρότερο αυτό διάστημα.

[26] Αφού το λ είναι άνω φράγμα του A, για όλα τα $x \in A$ ισχύει $x \leq \lambda$. Αν τώρα δεν υπήρχε $x_0 \in A$ με $x_0 \in (\lambda - \delta, \lambda]$ αυτό θα σήμαινε ότι για όλα τα $x \in A$ ισχύει $x \leq \lambda - \delta$ και συνεπώς το $\lambda - \delta$ θα ήταν ένα άνω φράγμα του A *γνήσια μικρότερο* του λ, το οποίο όμως έρχεται σε αντίφαση με το ότι το λ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, δηλαδή με το ότι όλα τα άλλα άνω φράγματα του A είναι *μεγαλύτερα ή ίσα* του λ.

αφού $[x_0, x_1] \subset (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$. Συνεπώς έχουμε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, x_1]$, δηλαδή έχουμε $x_1 \in A$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το ότι το λ είναι άνω φράγμα του A, αφού $\lambda < x_1$. Άρα, οδηγούμαστε σε άτοπο, που σημαίνει ότι το $f(\lambda) < 0$ δεν μπορεί να ισχύει.

Από την άλλη, αν $f(\lambda) > 0$, θα υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset (a, b)$. Όμως, όπως είδαμε πριν, υπάρχει $x_0 \in A \cap (\lambda - \delta, \lambda]$, που σημαίνει (από τον ορισμό του A) ότι $f(x_0) < 0$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι $f(x_0) > 0$ (αφού $x_0 \in (\lambda - \delta, \lambda])$. Άρα και η υπόθεση $f(\lambda) > 0$ οδηγεί σε άτοπο και άρα ούτε αυτό ισχύει.

Συνεπώς, $f(\lambda) = 0$. □

Από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει άμεσα το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.4. (Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής)
Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $[c, d] \subset [a, b]$ με $f(c) \neq f(d)$. Τότε για κάθε $y \in \mathbb{R}$ γνήσια μεταξύ των $f(c)$ και $f(d)$ υπάρχει ένα $x \in (c, d)$ έτσι ώστε $f(x) = y$.

Απόδειξη: Από τις υποθέσεις προκύπτει ότι $a \leq c < d \leq b$. Ο περιορισμός $g := f|_{[c,d]}$ της συνεχούς $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ στο $[c, d] \subset [a, b]$ είναι συνεχής συνάρτηση.[27] Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) := g(x) - y$, $x \in [c, d]$, με $y \in \mathbb{R}$ γνήσια μεταξύ των $g(c)$ και $g(d)$. Η h είναι συνεχής, και αν $g(c) < g(d)$ και $y \in (g(c), g(d))$, έχουμε $h(c) < 0 < h(d)$, ενώ αν $g(c) > g(d)$ και $y \in (g(d), g(c))$, έχουμε $h(c) > 0 > h(d)$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $h(c)h(d) < 0$, και άρα από το Θεώρημα του Bolzano (Θεώρημα 2.3) παίρνουμε ότι υπάρχει $x \in (c, d)$ με $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = f(x) = y$. □

Θεώρημα 2.5. (Ύπαρξη μεγίστου και ελαχίστου)
Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f **λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο (στο** $[a, b]$**)**, *δηλαδή, υπάρχουν* **σημείο μεγίστου** $x_1 \in [a, b]$ *και* **σημείο ελαχίστου** $x_2 \in [a, b]$,[28] *έτσι ώστε*

$$\min f := f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1) =: \max f \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Παρατήρηση 2.3.2. *(α΄) Τα σημεία ακροτάτων δεν πρέπει να είναι μοναδικά. Αρκεί να σκεφτεί κανείς μία σταθερή συνάρτηση.*

(β΄) Η ύπαρξη ολικών ακροτάτων συνεπάγεται ότι η f είναι φραγμένη, βλέπε τον Ορισμό 1.3.

Απόδειξη Θεωρήματος 2.5: Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο μεγίστου $x_1 \in [a, b]$. Τότε, αφού και η $-f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, θα έχει και αυτή σημείο μεγίστου $x_2 \in [a, b]$ έτσι ώστε $-f(x) \leq -f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και άρα το x_2 θα είναι σημείο ελαχίστου της f.

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η f είναι άνω φραγμένη στο $[a, b]$. Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε το σύνολο

$$A := \{x \in [a, b] : \text{η } f \text{ είναι άνω φραγμένη στο } [a, x]\}.$$

[27] Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της συνέχειας συνάρτησης σε ένα διάστημα και αφήνεται ως άσκηση. Για τον ορισμό του περιορισμού μιας συνάρτησης σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, βλ. Υποσημείωση 6.

[28] Το μέγιστο και το ελάχιστο της $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ λέγονται **ακρότατα της** f. Επειδή αφορούν τις τιμές της f σε *ολόκληρο* το πεδίο ορισμού της, ονομάζονται και **ολικά ακρότατα**. Ακόμα, λέγονται και **μέγιστη τιμή** και **ελάχιστη τιμή**, αντίστοιχα.

Έχουμε $A \neq \emptyset$ (αφού $a \in A$) και ότι το A είναι άνω φραγμένο (από το b). Συνεπώς, από το Αξίωμα Πληρότητας, το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\lambda = \sup A \in [a, b]$.

Μάλιστα, $\lambda = b$.

Πράγματι, αφού η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και άρα, ειδικότερα, στο a, η Πρόταση 2.2 μας δίνει ένα $0 < \delta < b - a$ έτσι ώστε η f είναι φραγμένη στο $[a, a+\delta)$. Συνεπώς, $[a, a+\delta) \subset A$ και άρα $\lambda \geq a + \delta$, δηλαδή $\lambda > a$, και ειδικότερα $\lambda \in (a, b]$. Ας υποθέσουμε ότι $\lambda < b$. Τότε, αφού η f είναι συνεχής στο $\lambda \in (a, b)$, η Πρόταση 2.2 μας δίνει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε η f είναι φραγμένη στο $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset (a, b)$. Αφού $\lambda = \sup A$, θα υπάρχει κάποιο $x_0 \in A \cap (\lambda - \delta, \lambda]$.[29] Αυτό σημαίνει ότι η f είναι άνω φραγμένη στο $[a, x_0]$. Από την άλλη η f είναι άνω φραγμένη και στο $[x_0, x_1]$ για κάθε $x_1 \in (\lambda, \lambda + \delta)$, αφού $[x_0, x_1] \subset (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$. Συνεπώς, επιλέγοντας το μεγαλύτερο από τα δύο άνω φράγματα της f στο $[a, x_0]$ και στο $[x_0, x_1]$, έχουμε ότι η f είναι άνω φραγμένη στο $[a, x_1]$ και άρα $x_1 \in A$, όπου $x_1 > \lambda$. Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει αφού το λ είναι άνω φράγμα του A. Άρα, δεν ισχύει η υπόθεση $\lambda < b$ και συνεπώς $\lambda = b$.

Έχουμε λοιπόν ότι το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Αυτό θα ίσχυε και αν $A = [0, b)$, ενώ εμείς θέλουμε να δείξουμε ότι $A = [a, b]$. 'Ομως, αφού η f είναι συνεχής και στο b, η Πρόταση 2.2 μας δίνει ένα $0 < \delta < b - a$ έτσι ώστε η f είναι φραγμένη στο $(b - \delta, b]$, δηλαδή σε κάθε $[x, b]$ για $x \in (b - \delta, b]$. Από την άλλη, αφού το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, θα υπάρχει ένα $x_0 \in A \cap (b - \delta, b]$.[30] Άρα, η f είναι άνω φραγμένη στα $[a, x_0]$ και $[x_0, b]$ και συνεπώς, επιλέγοντας το μεγαλύτερο από τα δύο άνω φράγματα, και στο $[a, b]$.

Δείξαμε λοιπόν μέχρι τώρα ότι η συνεχής $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένη στο $[a, b]$, δηλαδή ότι το σύνολο τιμών της, $f([a, b]) := \{f(x) : x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}$, είναι άνω φραγμένο. Αφού το σύνολο αυτό είναι μη κενό, θα έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \geq f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, σύμφωνα με το Αξίωμα Πληρότητας. Μένει να δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο $x_1 \in [a, b]$ με $f(x_1) = \lambda$. Το x_1 θα είναι τότε σημείο μεγίστου της f.

Έστω ότι $f(x) < \lambda$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε ορίζεται η συνεχής, θετική $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := 1/(\lambda - f(x))$, η οποία συνεπώς είναι άνω φραγμένη, όπως δείξαμε μόλις.[31] Από την άλλη, αφού το λ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $f([a, b])$ θα υπάρχει για κάθε $\varepsilon > 0$ ένα $x \in [a, b]$ με $f(x) > \lambda - \varepsilon \Leftrightarrow \lambda - f(x) < \varepsilon$.[32] Αυτό ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $x \in [a, b]$ με $g(x) > 1/\varepsilon$ και αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι η g δεν είναι άνω φραγμένη στο $[a, b]$ και οδηγούμαστε σε άτοπο. □

[29] Αν δεν υπήρχε τέτοιο $x_0 \in A$, και αφού γνωρίζουμε ότι $x \leq \lambda$ για κάθε $x \in A$ (αφού το λ είναι άνω φράγμα του A), θα είχαμε $x \leq \lambda - \delta$ για όλα τα $x \in A$ και συνεπώς το $\lambda - \delta < \lambda$ θα ήταν άνω φράγμα του A, που αντιφάσκει στο ότι το λ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A.

[30] Όπως και πριν, αν δεν υπήρχε τέτοιο $x_0 \in A$ θα είχαμε $x \leq b - \delta$ για κάθε $x \in A$ και συνεπώς το $b - \delta < b$ θα ήταν άνω φράγμα του A σε αντίφαση με το ότι το b είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A.

[31] Στο πρώτο μέρος της απόδειξης δείξαμε ότι *κάθε* συνεχής $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένη. Αυτό το αποτέλεσμα είναι διατυπωμένο στο [1] ξεχωριστά (βλ. [1, Θεώρημα 7.2]) και αποδεικνύεται όπως πιο πάνω.

[32] Ένας πολύ πρακτικός ισοδύναμος χαρακτηρισμός του $\sup A \in \mathbb{R}$ ενός μη κενού, άνω φραγμένου $A \subset \mathbb{R}$, τον οποίο έχουμε χρησιμοποιήσει ήδη αρκετές φορές στην πράξη, είναι ο ακόλουθος:

$$\lambda = \sup A \quad \Leftrightarrow \quad \text{(i) } x \leq \lambda \quad \forall\, x \in A \quad \text{και} \quad \text{(ii) } \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, x \in A : \quad x > \lambda - \varepsilon.$$

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Το (i) σημαίνει απλώς ότι το λ είναι άνω φράγμα του A. Για το (ii), παρατηρούμε ότι αν για κάποιο $\varepsilon > 0$ δεν υπήρχε $x \in A$ με $x > \lambda - \varepsilon$, θα ίσχυε $x \leq \lambda - \varepsilon$ για όλα τα $x \in A$ και συνεπώς το $\lambda - \varepsilon < \lambda$ θα ήταν άνω φράγμα του A, γνήσια μικρότερο του λ, σε αντίφαση με το ότι το λ είναι το *ελάχιστο* (δηλαδή, το μικρότερο άνω φράγμα του A. $\Leftarrow$: Το (i), όπως είπαμε, ισοδυναμεί με το ότι το λ είναι άνω φράγμα του A. Αν το λ δεν είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, θα υπάρχει ένα $\lambda' < \lambda$ έτσι ώστε $x \leq \lambda'$ για κάθε $x \in A$, το οποίο όμως δεν ισχύει, αφού σύμφωνα με το (ii), για $\varepsilon = \lambda - \lambda' > 0$ υπάρχει κάποιο $x \in A$ με $x > \lambda - (\lambda - \lambda') = \lambda'$. □

Παρατήρηση 2.3.3. *Οι υποθέσεις των προηγούμενων θεωρημάτων δεν μπορούν να εξασθενισθούν. Αυτό επιβεβαιώνεται από τα ακόλουθα αντιπαραδείγματα*

(α′) *Η* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1 & , x < 0, \end{cases}$ *είναι ασυνεχής μόνο στο* $x = 0$, *αλλά δεν έχει σημείο* $x_0 \in [-1, 1]$ *με* $f(x_0) = 0$.

(β′) *Η* $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, *είναι συνεχής, αλλά δεν είναι άνω φραγμένη. (Το* $(0, 1]$ *ενώ είναι φραγμένο, δεν είναι κλειστό, άρα δεν είναι συμπαγές.) Ούτε η* $g(x) = x$, $x \geq 0$, *είναι άνω φραγμένη, ενώ είναι συνεχής και το πεδίο ορισμού της* $[0, \infty)$ *κλειστό, αλλά όχι φραγμένο, συνεπώς όχι συμπαγές.*

(γ′) *Η* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = x$ *για* $x \in [0, 1)$ *και* $f(1) = 0$, *είναι φραγμένη, το* $[0, 1]$ *είναι συμπαγές, αλλά η* f *δεν λαμβάνει μέγιστο, αφού για κάθε* $x \in [0, 1)$ *μπορούμε να επιλέξουμε ένα* $x + \varepsilon \in (0, 1)$ *με* $\varepsilon \in (0, 1 - x)$ *έτσι ώστε* $f(x + \varepsilon) = x + \varepsilon > x$. *Δεν υπάρχει συνεπώς κάποιο* $x_0 \in [0, 1)$ *έτσι ώστε το* $f(x_0)$ *να είναι μεγαλύτερο από όλα τα* $x \in [0, 1)$. *(Η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο* $x = 1$.)

2.3.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 7]:
"SOS": 1, 11, [1, Κεφάλαιο 7, Θεώρημα 8]
ΣΥΝΙΣΤΩΜΕΝΕΣ: 8, 10

Βιβλιογραφία

[1] Michael Spivak, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (μετάφραση της 4ης αγγλικής έκδοσης). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015.

[2] Σωτήρης Κ. Ντούγιας, *Απειροστικός Λογισμός I* (γ' έκδοση). Leader Books, 2007.

[3] Σωτήρης Κ. Ντούγιας, *Απειροστικός Λογισμός II* (β' έκδοση). Leader Books, 2007.