Απειροστικός Λογισμός Ι

Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΧΕ 2024/25

πρόχειρες, σύντομες σημειώσεις

Ιωάννης Γιαννούλης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

18 Νοεμβρίου 2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Όρια συναρτήσεων

Ορισμός 1.1. *Έστω μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$ *με* $D \subset \mathbb{R}$[1] *και* $a \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* D.[2] *Λέμε ότι* **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $\ell \in \mathbb{R}$ **κοντά στο** a,[3] *αν*[4]

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Γράφουμε τότε: $f(x) \to \ell$ *για* $x \to a$.

Ένα ℓ *με την παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται* **όριο της** f **κοντά στο** a.[5]

Θεώρημα 1.1. *Αν μία* f *συγκλίνει σε ένα όριο* ℓ *κοντά στο* a*, τότε το όριο αυτό είναι μοναδικό και γράφουμε:* $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Απόδειξη: Έστω ότι $f(x) \to \ell$ και $f(x) \to m$ για $x \to a$ με $\ell \neq m$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχουν σύμφωνα με τον ορισμό, αφενός, ένα $\delta_1 > 0$ έτσι ώστε

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta_1 : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

---

[1] Στις παρούσες σημειώσεις το σύμβολο $\subset$ σημαίνει απλώς υποσύνολο, όχι απαραίτητα γνήσιο. Θα μπορούσε δηλαδή να ισχύει και $D = \mathbb{R}$.

[2] Ένα $a \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης του** $D \subset \mathbb{R}$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $((a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)) \cap D \neq \emptyset$. Να προσεχθεί ότι ένα σημείο συσσώρευσης $a \in \mathbb{R}$ ενός $D \subset \mathbb{R}$ δεν είναι απαραίτητο να ανήκει στο D. Π.χ., το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $D = (0, \infty)$.

[3] Η έκφραση «κοντά στο a» χρησιμοποιείται στην ελληνική μετάφραση του βιβλίου του Spivak [1]. Θα μπορούσαμε να την αντικαταστήσουμε με την έκφραση «όταν το x τείνει ή συγκλίνει στο a».

[4] Η ακόλουθη συνθήκη (1.1) είναι ισοδύναμη με αυτές που προκύπτουν αν σε αυτήν αντικαταστήσουμε τις ανισότητες «$< \delta$» ή/και «$< \varepsilon$» με τις «$\leq \delta$» ή/και «$\leq \varepsilon$», αντίστοιχα.

Πράγματι, αν ισχύει η (1.1) για κάποιο $\varepsilon > 0$, τότε θα ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $0 < \delta' < \delta$ και κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| \leq \delta'$. Αντίστροφα, αν ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| \leq \delta'$, τότε αυτό θα ισχύει και για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta'$.

Επίσης, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, τότε προφανώς για αυτά τα x θα ισχύει και $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, ενώ, αντίστροφα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για τα πιο πάνω x να ισχύει $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, τότε για κάθε δοσμένο $\varepsilon' > 0$ μπορούμε να θεωρήσουμε το $\varepsilon = \varepsilon'/2 > 0$ και να βρούμε για αυτό το $\varepsilon > 0$ ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για τα αντίστοιχα x να ισχύει $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon = \varepsilon'/2 < \varepsilon'$.

Βλέπουμε εδώ τη σημασία των καλούμενων ποσοδεικτών $\forall$ και $\exists$ στη συνθήκη (1.1), η οποία θα πρέπει να ισχύει *μαζί με αυτούς τους ποσοδείκτες*.

[5] Να σημειωθεί ότι ο ορισμός που δίνεται εδώ είναι λίγο γενικότερος από τον ορισμό που δίνεται στο [1, σελ. 94-95], όπου απαιτείται το πεδίο ορισμού D της f να είναι τέτοιο ώστε $((a - \delta_0, a) \cup (a, a + \delta_0)) \subset D$ για κάποιο $\delta_0 > 0$. Στην πράξη, σε ό,τι δούμε στο μάθημα, αυτό σχεδόν πάντα θα ικανοποιείται, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι αντίθετο.

και, αφετέρου, ένα $\delta_2 > 0$ έτσι ώστε

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta_2 : \quad |f(x) - m| < \varepsilon.$$

Συνεπώς, αν επιλέξουμε το μικρότερο από αυτά τα δύο $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$, δηλαδή, αν θέσουμε $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, θα έχουμε

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{και} \quad |f(x) - m| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Αφού τα παραπάνω θα πρέπει να ισχύουν για κάθε $\varepsilon > 0$, και αφού $m \neq \ell$, οι ανισότητες στην (1.2) θα πρέπει να ισχύουν και για την επιλογή $\varepsilon := \frac{|m-\ell|}{2} > 0$. Τότε όμως θα έχουμε, από την τριγωνική ανισότητα,

$$|m - \ell| = |m - f(x) - (\ell - f(x))| \leq |m - f(x)| + |\ell - f(x)| < \frac{|m - \ell|}{2} + \frac{|m - \ell|}{2} = |m - \ell|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, δεν μπορεί η f κοντά στο a να συγκλίνει σε δυο διαφορετικά όρια ℓ και m, και άρα το όριό της, αν υπάρχει, θα είναι μοναδικό. □

Παρατήρηση 1.1. *Από τον Ορισμό 1.1 του ορίου $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ μέσω της συνθήκης (1.1) προκύπτει ότι το όριο αυτό είναι, όπως λέμε, μία τοπική ιδιότητα της $f : D \to \mathbb{R}$ κοντά στο σημείο συσσώρευσης a του D. Με αυτό εννοούμε ότι αν αλλάξουμε τις τιμές της f σε σημεία του D που βρίσκονται μακριά από το a, δηλαδή, σε $x \in D$ με $|x - a| \geq \delta_0$ για ένα οσοδήποτε μικρό $\delta_0 > 0$, τότε και η «αλλαγμένη» f θα έχει το ίδιο όριο. Με άλλα λόγια, για να προσδιορίσουμε το όριο $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ της f μας αρκεί να γνωρίζουμε τις τιμές της f μόνο «κοντά στο a», δηλαδή μόνο στον περιορισμό $f|_U$ της f στο $U := D \cap (a - \delta_0, a + \delta_0)$ για ένα οσοδήποτε μικρό $\delta_0 > 0$.*[6]

Πράγματι, αν $\lim_{x \to a} f|_U(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε σύμφωνα με την (1.1) θα ισχύει

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in U,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f|_U(x) - \ell| = |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Αυτό θα ισχύει και αν αντικαταστήσουμε το $\delta > 0$ με οποιοδήποτε $0 < \delta' < \min\{\delta, \delta_0\}$. Τότε όμως τα $x \in U$ με $0 < |x - a| < \delta'$ είναι ακριβώς τα $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta'$ και συνεπώς θα έχουμε

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta' > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta' : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

δηλαδή, $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$. Αντίστροφα, αν ισχύει η προηγούμενη συνθήκη, τότε, αφού $U \subset D$, θα ισχύει και

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta' > 0 \quad \forall\ x \in U,\ 0 < |x - a| < \delta' : \quad |f(x) - \ell| = |f|_U(x) - \ell| < \varepsilon,$$

δηλαδή, $\lim_{x \to a} f|_U(x) = \ell$.

Ας δούμε μερικές στοιχειώδεις εφαρμογές του Ορισμού 1.1, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν πιο κάτω για τον υπολογισμό ορίων μιας μεγάλης κατηγορίας συναρτήσεων, αυτής των ρητών συναρτήσεων.

[6] Ο **περιορισμός της** $f : D \to \mathbb{R}$ **στο** $U \subset D$ ορίζεται ως η συνάρτηση $f|_U : U \to \mathbb{R}$ με $f|_U(x) := f(x)$ για $x \in U \subset D$.

Παραδείγματα 1.1. *(α′) Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Τότε, σε κάθε σημείο $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x\to a} f(x) = c$. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να επιλέξουμε στη συνθήκη (1.1) οποιοδήποτε $\delta > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x - a| < \delta$ θα ισχύει η πιο πάνω ανισότητα.

(β′) Έστω η ταυτοτική συνάρτηση $g(x) = x$, πάλι με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Τότε, σε κάθε σημείο $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x\to a} g(x) = a$, αφού για κάθε δοσμένο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta = \varepsilon > 0$ έτσι ώστε να έχουμε

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - a| < \delta = \varepsilon : \quad |f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon.$$

Ας δούμε και ένα λιγότερο τετριμμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1. *Θέλουμε να δείξουμε ότι*

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \quad a \geq 0.$$

Θέλουμε, δηλαδή, να βρούμε για κάθε $a \geq 0$, το οποίο θεωρούμε στα επόμενα σταθερό, και κάθε δοσμένο $\varepsilon > 0$ ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \geq 0$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$.[7]

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $a > 0$. Τότε, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

και συνεπώς, αφού $\sqrt{x} \geq 0$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} \quad \forall\ x \geq 0.$$

Άρα, αν θέσουμε $\delta = \varepsilon\sqrt{a} > 0$, θα έχουμε για κάθε $x \geq 0$ με $|x - a| < \delta = \varepsilon\sqrt{a}$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

Ειδικότερα, αυτό θα ισχύει για κάθε $x \geq 0$ με $0 < |x - a| < \delta = \varepsilon\sqrt{a}$. Αφού αυτό μπορούμε να το κάνουμε για κάθε $\varepsilon > 0$, δείξαμε ότι για $a > 0$ ισχύει $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, σύμφωνα με τη συνθήκη (1.1).[8]

[7] Η πρώτη συνθήκη, $x \geq 0$, μπαίνει για να ορίζεται το $\sqrt{x}$.

[8] Να προσεχθεί ότι το σύνολο $A := \{x \geq 0 : |x - a| < \delta\} = [0, \infty) \cap (a - \delta, a + \delta)$, για το οποίο αποδείξαμε ότι ισχύει $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$, δεν είναι απαραίτητα ίσο με το σύνολο $B := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$. Έχουμε ισότητα αν και μόνο αν $\delta \leq a$. Συνεπώς, αν θέλουμε να εκφράσουμε το A, που χρησιμοποιείται στη συνθήκη (1.1) ως $A \setminus \{a\}$, στη μορφή ενός ανοικτού διαστήματος γύρω από το a (δηλαδή, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την τομή με το πεδίο ορισμού $[0, \infty)$ της $\sqrt{x}$) και αφού η συνθήκη (1.1) απαιτεί μόνο την *ύπαρξη* ενός $\delta > 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta := \min\{\varepsilon\sqrt{a}, a\} > 0$, έτσι ώστε να ισχύει *και* $\delta \leq \varepsilon\sqrt{a}$ *και* $\delta \leq a$. Για αυτό το $\delta > 0$ έχουμε $A = B$ και η συνθήκη (1.1) συνεχίζει να ισχύει, αφού αν ισχύει για ένα $\delta > 0$, θα ισχύει και για κάθε μικρότερό του $0 < \delta' < \delta$. (Ουσιαστικά εδώ χρησιμοποιούμε την τετριμμένη - αλλά βασική! - ιδιότητα, ότι για $0 < \delta' < \delta$ ισχύει $(a - \delta', a + \delta') \subsetneq (a - \delta, a + \delta)$.)

Αν $a = 0$, θέλουμε να δείξουμε ότι $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \geq 0$ με $0 < |x - 0| = |x| = x < \delta$ να ισχύει $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon$. Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας $\delta = \varepsilon^2 > 0$.[9]

Για τα όρια συναρτήσεων κοντά σε ένα a ισχύει το ακόλουθο πολύ χρήσιμο θεώρημα.[10]

Θεώρημα 1.2. *Έστω $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ και $\lim_{x\to a} g(x) = m$. Τότε*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \ell + m, \qquad \lim_{x\to a}(fg)(x) = \ell m$$

και

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}, \quad \text{αν} \quad m \neq 0.$$

Παράδειγμα 1.2. *Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.2 στα Παραδείγματα 1.1, προκύπτει ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $c \in \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\lim_{x\to a}(cx) = ca, \quad \lim_{x\to a}(cx^n) = ca^n.$$

Συνεπώς, πάλι με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.2, για κάθε πολυώνυμο $p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ έχουμε

$$\lim_{x\to a} p(x) = \alpha_n a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0.$$

Ακόμα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ στο οποίο το πολυώνυμο $q(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$ δεν μηδενίζεται, δηλαδή, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ με $q(a) \neq 0$, έχουμε

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\alpha_n a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0}{\beta_m a^m + \beta_{m-1}a^{m-1} + \cdots + \beta_1 a + \beta_0}.$$

Πολλές φορές, για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ είναι χρήσιμες οι ακόλουθες ισοδύναμες εκφράσεις.

Πρόταση 1.1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) = \ell &\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell \\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to a}(f(x) - \ell) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to a}|f(x) - \ell| = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}|f(a+h) - \ell| = 0.\end{aligned}$$

[9] Αφού, αν $0 < x = (\sqrt{x})^2 < \varepsilon^2$, τότε $\sqrt{x} < \varepsilon$, βλ. [1, Πρόβλημα 1-5(x)].

[10] Για την απόδειξή του παραπέμπουμε στο [1, Κεφάλαιο 5, Θεώρημα 2].

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε την πρώτη ισοδυναμία θέτουμε $x = a + h$. Τότε η συνθήκη (1.1) για το όριο $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ γίνεται

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ h \in \mathbb{R},\ a + h \in D,\ 0 < |h| < \delta : \quad |f(a + h) - \ell| < \varepsilon.$$

Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $g(h) := f(a + h)$ με πεδίο ορισμού $D_g := \{h \in \mathbb{R} : a + h \in D\}$,[11] έχουμε δηλαδή

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ h \in D_g,\ 0 < |h| < \delta : \quad |g(h) - \ell| < \varepsilon,$$

και άρα, σύμφωνα με τη συνθήκη (1.1), $\lim_{h \to 0} g(h) = \lim_{h \to 0} f(a + h) = \ell$.

Η δεύτερη ισοδυναμία προκύπτει αν αντί για τη συνάρτηση f θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g_1(x) := f(x) - \ell$ με το ίδιο πεδίο ορισμού D όπως η f, αφού, χρησιμοποιώντας την g_1, η συνθήκη (1.1) γίνεται

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |g_1(x)| < \varepsilon, \tag{1.3}$$

που σημαίνει, πάλι σύμφωνα με τον ορισμό (1.1), $\lim_{x \to a} g_1(x) = \lim_{x \to a} (f(x) - \ell) = 0$.

Η τρίτη ισοδυναμία προκύπτει από την προηγούμενη αν παρατηρήσουμε ότι για τη συνάρτηση $g_2(x) := |g_1(x)|$ που έχει πάλι πεδίο ορισμού D, έχουμε $|g_2(x)| = |g_1(x)|$ και άρα η (1.3) γίνεται

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |g_2(x)| < \varepsilon,$$

που σημαίνει $\lim_{x \to a} g_2(x) = \lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$.

Η τέταρτη ισοδυναμία προκύπτει από την τρίτη αν εφαρμόσουμε σε αυτήν την πρώτη.[12] □

Παρατήρηση 1.2. *Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι* ***η f δεν συγκλίνει στο ℓ κοντά στο a****, δηλαδή, συμβολικά, $f(x) \not\to \ell$ για $x \to a$, τότε θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει η άρνηση της συνθήκης (1.1), δηλαδή, ότι ισχύει*

$$\exists\ \varepsilon > 0 \quad \forall\ \delta > 0 \quad \exists\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| \geq \varepsilon. \tag{1.4}$$

Αν για κάθε $\ell \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \not\to \ell$ για $x \to a$, δηλαδή, αν η f δεν συγκλίνει σε κανένα $\ell \in \mathbb{R}$ κοντά στο a, λέμε ότι ***το όριο $\lim_{x \to a} f(x)$ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$****, συμβολικά $\nexists \lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$.*

Πριν περάσουμε σε ένα παράδειγμα συνάρτησης, η οποία δεν έχει όριο κοντά σε ένα σημείο, θα δώσουμε τους ακόλουθους ορισμούς που αφορούν μία βασική και απλή ιδιότητα συνόλων ή συναρτήσεων, η οποία θα μας χρειαστεί συχνά σε διάφορα επιχειρήματα.

Ορισμός 1.2. *Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ ονομάζεται*

(α′) ***άνω φραγμένο****, αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $x \leq M$ για κάθε $x \in A$. Κάθε τέτοιο $M \in \mathbb{R}$ ονομάζεται* ***άνω φράγμα*** *του A.*

[11] Τα h που ανήκουν στο σύνολο $\{h \in \mathbb{R} : a + h \in D\}$ είναι αυτά για τα οποία $x = a + h \in D$. Είναι, δηλαδή, τα h που ανήκουν στο σύνολο $\{h = x - a = (-a) + x : x \in D\} =: (-a) + D$. Παρατηρούμε ακόμα, ότι αν το a είναι σημείο συσσώρευσης του D, τότε το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $(-a) + D$. Πράγματι, $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap D$ αν και μόνο αν $h = x - a \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap ((-a) + D)$.

[12] Με $|f(x) - \ell|$ αντί για $f(x)$ στα αριστερά των ισοτήτων της πρώτης ισοδυναμίας και 0 αντί για ℓ στα δεξιά των ισοτήτων

(β′) **κάτω φραγμένο**, *αν υπάρχει* $m \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $m \leq x$ *για κάθε* $x \in A$. *Κάθε τέτοιο* $m \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **κάτω φράγμα** *του* A.

(γ′) **φραγμένο**, *αν είναι άνω και κάτω φραγμένο ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει ένα* $C > 0$ *έτσι ώστε* $|x| \leq C$ *για κάθε* $x \in A$.[13]

Ορισμός 1.3. *Μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, *ονομάζεται*

(α′) **άνω φραγμένη**, *αν υπάρχει* $M \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $f(x) \leq M$ *για κάθε* $x \in D$. *Κάθε τέτοιο* $M \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **άνω φράγμα** *της* f.

(β′) **κάτω φραγμένη**, *αν υπάρχει* $m \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $m \leq f(x)$ *για κάθε* $x \in D$. *Κάθε τέτοιο* $m \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **κάτω φράγμα** *της* f.

(γ′) **φραγμένη**, *αν είναι άνω και κάτω φραγμένη ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει ένα* $C > 0$ *έτσι ώστε* $|f(x)| \leq C$ *για κάθε* $x \in D$.

Παράδειγμα 1.3. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f(x) = \sin(1/x)$ *με πεδίο ορισμού* $D = \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Παρατηρούμε ότι η* $f : D \to \mathbb{R}$ *είναι φραγμένη, αφού* $|f(x)| \leq 1$ *για κάθε* $x \in D$.

Θα δείξουμε ότι η f *δεν έχει κάποιο όριο* $\ell \in \mathbb{R}$ *κοντά στο* 0.

Καταρχάς, δεν μπορεί να ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell$ *για κάποιο* $\ell \in \mathbb{R}$ *με* $|\ell| > 1$, *δηλαδή, για κάποιο* $\ell \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. *Πράγματι, για να ίσχυε αυτό, θα έπρεπε*[14] *για* $\varepsilon = |\ell| - 1 > 0$ *να υπάρχει κάποιο* $\delta > 0$ *έτσι ώστε για κάθε* $x \in (0, \delta)$ *να έχουμε* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. *Τότε όμως θα είχαμε*[15]

$$||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| < \varepsilon = |\ell| - 1 \quad \textit{και άρα} \quad |f(x)| > |\ell| - (|\ell| - 1) = 1$$

το οποίο όμως δεν ισχύει για κάνενα $x \in D$, *όπως είδαμε πιο πάνω.*

Επίσης, δεν μπορεί να ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell$ *για κάποιο* $\ell \in (-1, 1]$, *αφού για* $x_k = 1/(2k\pi - \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{N}$, *έχουμε* $f(x_k) = \sin(1/x_k) = \sin(2k\pi - \frac{\pi}{2}) = -1$ *και συνεπώς για κάθε* $\varepsilon \in (0, \ell + 1)$ *θα έχουμε*

$$|f(x_k) - \ell| = \ell + 1 > \varepsilon$$

ενώ για κάθε $\delta > 0$ *υπάρχει κάποιο* $k \in \mathbb{N}$ *έτσι ώστε* $x_k < \delta$ *ή, ισοδύναμα,* $k > \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\delta}\right)$.[16] *Συνεπώς, για* $\ell \in (-1, 1]$ *ισχύει η άρνηση της* (1.1), *δηλαδή η* (1.4).

Αντίστοιχα, αν $\ell = -1$, *επιλέγουμε τα σημεία* $\tilde{x}_k = 1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$, *για τα οποία έχουμε* $f(\tilde{x}_k) = 0$ *και συνεπώς,* $|f(\tilde{x}_k) - \ell| = 1$, *έτσι ώστε για* $\varepsilon = 1$ *να ισχύει πάλι η* (1.4), *αφού για κάθε* $\delta > 0$ *υπάρχει* $k \in \mathbb{N}$ *με* $\tilde{x}_k < \delta \Leftrightarrow k > \frac{1}{\pi\delta}$.

Πολύ χρήσιμη για τον υπολογισμό ορίων είναι η ακόλουθη πρόταση.[17]

[13] Απόδειξη της ισοδυναμίας: Άσκηση.

[14] σύμφωνα με τη συνθήκη (1.1)

[15] αντίστροφη τριγωνική ανισότητα

[16] Αυτό προκύπτει από την καλούμενη **Αρχιμήδεια Ιδιότητα** των πραγματικών αριθμών, η οποία λέει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k > x$. Αυτή την ιδιότητα θα τη γνωρίσουμε «επισήμως» λίγο αργότερα, βλ. και [1, Κεφάλαιο 8, Θεώρημα 3].

[17] Αυτή αναφέρεται πολλές φορές άτυπα και ως «μηδενική επί φραγμένη ίσον μηδενική». Βλέπε και [1, Πρόβλημα 3-21(β)].

Πρόταση 1.2. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του D και $f, g : D \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ και g φραγμένη. Τότε, $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$.*

Απόδειξη: Αφού η g είναι φραγμένη, υπάρχει κάποιο $C > 0$ με $|g(x)| \leq C$ για κάθε $x \in D$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε προφανώς και $\frac{\varepsilon}{C} > 0$ και αφού $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, θα υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}$. Τότε όμως για τα ίδια x θα ισχύει και $|(fg)(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$.[18] □

Παράδειγμα 1.4. *Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση έχουμε $\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$.*[19]

Ακόμα, αξίζει να παρατηρήσουμε και την ακόλουθη ιδιότητα του ορίου μιας συνάρτησης.

Πρόταση 1.3. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ σε ένα σημείο συσσώρευσης a του D. Αν υπάρχει $\delta_0 > 0$ έτσι ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_0$, τότε $\ell \geq 0$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή σε άτοπο. Αν ίσχυε $\ell < 0$, τότε σύμφωνα με τη συνθήκη (1.1) θα υπήρχε για το $\varepsilon = -\ell > 0$ ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Αυτό θα ισχύει και για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta' := \min\{\delta, \delta_0\}$. Συνεπώς, για αυτά τα x θα ισχύει $f(x) < \ell + \varepsilon = 0$, το οποίο είναι όμως άτοπο προς την υπόθεση ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_0$, η οποία συνεπάγεται και ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta' = \min\{\delta, \delta_0\}$. □

Επίσης, ιδιαίτερα χρήσιμο είναι και το ακόλουθο αποτέλεσμα.[20]

Πρόταση 1.4. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του D και έστω $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ με $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για $x \in D \cap ((a - \delta_0, a) \cup (a + \delta_0))$ και κάποιο $\delta_0 > 0$. Τότε, αν $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, θα έχουμε και $\lim_{x \to a} h(x) = \ell$.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta \in (0, \delta_0)$ έτσι ώστε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$.[21] Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ έχουμε

$$g(x) - \ell \leq h(x) - \ell < \varepsilon \quad \text{και} \quad -\varepsilon < f(x) - \ell \leq g(x) - \ell$$

και άρα $-\varepsilon < g(x) - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow |g(x) - \ell| < \varepsilon$. □

Όταν μιλάμε για όρια συναρτήσεων που ορίζονται στο $\mathbb{R}$, καθώς αυτό είναι ένα διατεταγμένο σύνολο (σώμα), μπορούμε να ορίσουμε και τα καλούμενα πλευρικά όρια, από πάνω (ή από τα θετικά ή από τα δεξιά) και από κάτω (ή από τα αρνητικά ή από τα αριστερά).

[18] Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ προκύπτει $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.

[19] *Άσκηση:* Βρείτε ποια είναι τα f και g στα οποία εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.2 και που δείξαμε τις απαιτούμενες ιδιότητες που πρέπει να έχουν τα f και g αυτά.

[20] Ονομάζεται και Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Συναρτήσεων ή Κριτήριο Παρεμβολής.

[21] Για λόγους επανάληψης ας δούμε και εδώ λίγο πιο λεπτομερώς πως προκύπτει αυτό: Η ύπαρξη των ορίων $\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ μας δίνει αρχικά την ύπαρξη δύο $\delta_1, \delta_2 > 0$ έτσι ώστε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_1$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_2$. Συνεπώς, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta' := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Αν, αρχικά, $\delta' \geq \delta_0 > 0$, επιλέγουμε έπειτα κάποιο $0 < \delta < \min\{\delta', \delta_0\}$ έτσι ώστε τελικά να έχουμε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ όπου $\delta \in (0, \delta_0)$. (Ο λόγος που επιμένουμε να βρούμε ένα $\delta < \delta_0$ είναι προφανώς για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$.)

Ορισμός 1.4. *Έστω μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$ *με* $D \subset \mathbb{R}$.

(α΄) Έστω $a \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* $D \cap (a, \infty)$. *Λέμε ότι* **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο όριο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** a **από πάνω**, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < x - a < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{1.5}$$

και γράφουμε $f(x) \to \ell$ *για* $x \to a^+$ *ή για* $x \downarrow a$ *ή* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ *ή* $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = \ell$.

(β΄) Έστω $a \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* $D \cap (-\infty, a)$. *Λέμε ότι* **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο όριο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** a **από κάτω**, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ -\delta < x - a < 0 : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{1.6}$$

και γράφουμε $f(x) \to \ell$ *για* $x \to a^-$ *ή για* $x \uparrow a$ *ή* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ *ή* $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \ell$.[22] [23]

Πρόταση 1.5. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *σημείο συσσώρευσης και του* $D \cap (a, +\infty)$ *και του* $D \cap (-\infty, a)$ *και* $\ell \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Προκύπτει άμεσα από τις συνθήκες (1.1), (1.5), (1.6), αφού για κάθε $\delta > 0$ ισχύει

$$\{x \in D : 0 < |x - a| < \delta\} = \{x \in D : 0 < x - a < \delta\} \cup \{x \in D : -\delta < x - a < 0\}.$$

$\Leftarrow$: Από τις συνθήκες (1.5), (1.6) προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ έτσι ώστε

$$\forall\ x \in D,\ 0 < x - a < \delta_1 : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$
$$\forall\ x \in D,\ -\delta_2 < x - a < 0 : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Συνεπώς, για $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ ισχύει

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

και από τη συνθήκη (1.1) προκύπτει το αποδεικτέο. $\square$

Παράδειγμα 1.5. *Έστω η συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} \alpha, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \beta, & x < 0, \end{cases}$ *για* $x \in \mathbb{R}$ *και σταθερά* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Εξετάστε υπό ποιες προϋποθέσεις στα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *υπάρχουν τα όρια* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ *και* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *και δώστε τις τιμές τους.*

Απάντηση: *Είναι* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \alpha$ *και* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \beta$. *Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό των ορίων αυτών.*[24] *Το όριο* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *υπάρχει αν και μόνο αν* $\alpha = \beta$ *και τότε* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \alpha = \beta$, *σύμφωνα με την Πρόταση 1.5.*

(Παρατηρούμε ότι η τιμή $f(0)$ *δεν έχει καμία σημασία για τα όρια αυτά.)*

[22] Τα όρια $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, αν υπάρχουν, είναι μοναδικά. Αυτό προκύπτει από μια απλή προσαρμογή της απόδειξης του Θεωρήματος 1.1.

[23] Να σημειωθεί και εδώ οι ορισμοί που δίνονται για πλευρικά όρια είναι λίγο γενικότεροι από αυτούς που δίνονται στο [1, σελ. 95], όπου απαιτείται το πεδίο ορισμού D της f να είναι τέτοιο ώστε $(a, a + \delta_1) \subset D$ και $(a - \delta_2, a) \subset D$, αντίστοιχα, για κάποια $\delta_1, \delta_2 > 0$.

[24] Πβ. *[= παράβαλε = σύγκρινε]* με το Παράδειγμα 1.1 (1).

Κλείνουμε το κεφάλαιο περί ορίων συναρτήσεων με τους ορισμούς των ορίων στα οποία εμφανίζονται τα $\pm\infty$, όταν το $f(x)$ ή το x τείνουν ή συγκλίνουν προς τα $\pm\infty$.

Ορισμός 1.5. *Έστω μία συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ με $D \subset \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του D. Λέμε ότι*

(α′) **η f τείνει ή συγκλίνει στο ∞ κοντά στο a**, *συμβολικά: $f(x) \to \infty$ για $x \to a$ ή $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon},$$

(β′) **η f τείνει ή συγκλίνει στο $-\infty$ κοντά στο a**, *συμβολικά: $f(x) \to -\infty$ για $x \to a$ ή $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Παρατήρηση 1.3. *Αντίστοιχα ορίζονται και τα όρια $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = \infty$ και $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = -\infty$, αν στις συνθήκες που εμφανίζονται στον προηγούμενο ορισμό αντικαταστήσουμε την έκφραση «$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta$» με «$\forall\ x \in D,\ 0 < x - a < \delta$» για το $x \to a^+$ και «$\forall\ x \in D,\ -\delta < x - a < 0$» για το $x \to a^-$.*[25]

Παράδειγμα 1.6. *(α′) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.*

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{R}^* \cap (0,\infty) = (0,\infty)$, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $((-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)) \cap (0,\infty) = (0, \varepsilon)$ είναι μη κενό (περιέχει, π.χ., το $\varepsilon/2$).

Τώρα, για κάθε $\varepsilon > 0$, θέτοντας $\delta = \varepsilon > 0$, έχουμε $\frac{1}{x} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < \varepsilon$ για κάθε $0 < x < \delta = \varepsilon$.

(β′) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Και εδώ, το 0 ειναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{R}^* \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, θέτοντας $\delta = \varepsilon > 0$, έχουμε $\frac{1}{x} < -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow -x < \varepsilon \Leftrightarrow x > -\varepsilon$ για κάθε $0 > x > -\delta = -\varepsilon$.

Ορισμός 1.6. *Έστω μία συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$.*

(α′) Αν το $D \subset \mathbb{R}$ δεν είναι άνω φραγμένο, λέμε ότι

[25] Φυσικά, για να ορίζονται αυτά τα πλευρικά όρια από πάνω και από κάτω θα πρέπει το a να είναι σημείο συσσώρευσης του $D \cap (a,\infty)$ και του $D \cap (-\infty, a)$, αντίστοιχα. Βλ. και τον Ορισμό 1.4.

(i) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞, *συμβολικά:* $f(x) \to \ell$ *για* $x \to \infty$ *ή* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x > \frac{1}{\delta}: \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

(ii) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞, *συμβολικά:* $f(x) \to \infty$ *για* $x \to \infty$ *ή* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x > \frac{1}{\delta}: \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon},$$

(iii) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞, *συμβολικά:* $f(x) \to -\infty$ *για* $x \to \infty$ *ή* $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x > \frac{1}{\delta}: \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

(β′) Αντίστοιχα, αν το $D \subset \mathbb{R}$ *δεν είναι κάτω φραγμένο, λέμε ότι*

(i) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$, *συμβολικά:* $f(x) \to \ell$ *για* $x \to -\infty$ *ή* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x < -\frac{1}{\delta}: \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

(ii) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$, *συμβολικά:* $f(x) \to \infty$ *για* $x \to -\infty$ *ή* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x < -\frac{1}{\delta}: \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon},$$

(iii) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$, *συμβολικά:* $f(x) \to -\infty$ *για* $x \to -\infty$ *ή* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ x < -\frac{1}{\delta}: \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon},$$

Παράδειγμα 1.7. *(α′)* $\lim_{x\to\infty} x = \infty$ *και* $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$.

Η $f(x) = x$ *έχει πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}$, *που δεν είναι ούτε άνω φραγμένο, ούτε κάτω φραγμένο.*

Έστω $\varepsilon > 0$. *Τότε, για* $\delta = \varepsilon > 0$ *έχουμε* $x > \frac{1}{\varepsilon}$ *για κάθε* $x > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon}$ *και* $x < -\frac{1}{\varepsilon}$ *για κάθε* $x < -\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{\varepsilon}$.

(β') $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ *έχει πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *που δεν είναι ούτε άνω φραγμένο, ούτε κάτω φραγμένο.*

Έστω $\varepsilon > 0$. *Τότε, θέτοντας* $\delta = \varepsilon > 0$, *βλέπουμε ότι για κάθε* $x > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ *έχουμε* $x = |x| = |x - 0| < \varepsilon$ *και για κάθε* $x < -\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{\varepsilon} < 0$ *έχουμε* $-x = |x| = |x - 0| < \varepsilon$.

1.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 5]:
(Κάποιες περιέχονται στις παρούσες σημειώσεις.)
"SUPER SOS": 1, 2, 4, 9, 33, 34, 36, 37, 38
"SOS": 8, 10(α,β), 12, 13, 16(α), 17, 18, 21, 29, 39
Συνιστώμενες: 11, 15, 27, 32, 35

Κεφάλαιο 2

Συνέχεια συναρτήσεων

2.1 Συνέχεια σε σημείο

Ορισμός 2.1. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα*[1] *και $f : D \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f* **είναι συνεχής στο** *$a \in D$, αν $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Παρατήρηση 2.1. *(α΄) Αφού το όριο της f κοντά στο a είναι μία τοπική ιδιότητα,*[2] *ο παραπάνω ορισμός μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού $D \subset \mathbb{R}$ της $f : D \to \mathbb{R}$ δεν είναι (ολόκληρο) διάστημα, αρκεί να υπάρχει ένα διάστημα $I \subset D$ με $a \in I$.*[3]

(β΄) Από τον Ορισμό 1.1 του ορίου, προκύπτει ότι η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $a \in D$ αν και μόνο αν

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

δηλαδή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ |x - a| < \delta : \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Παράδειγμα 2.1. *Από τα παραδείγματα ορίων που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο προκύπτει άμεσα ότι η σταθερή συνάρτηση, η ταυτοτική συνάρτηση, οι πολυωνυμικές συναρτήσεις, οι ρητές συναρτήσεις και η συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας είναι όλες συνεχείς συναρτήσεις σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.*

---

[1] Δηλαδή, το D είναι της μορφής (a, b) ή $(a, b]$ ή $[a, b)$ ή $[a, b]$ με $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$ ή είναι της μορφής $(-\infty, a)$ ή $(-\infty, a]$ ή (a, ∞) ή $[a, \infty)$ με $a \in \mathbb{R}$ ή είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$. (Αν $a = b \in \mathbb{R}$, έχουμε $(a, b) = (a, b] = [a, b) = \emptyset$ και $[a, b] = \{a\} = \{b\}$. Αυτά δεν θεωρούνται διαστήματα.) Στα επόμενα όταν θα μιλάμε για συνέχεια μιας f σε ένα a θα θεωρούμε ότι η f ορίζεται σε ένα διάστημα που περιέχει το a. Βλ. σχετικά και την Παρατήρηση 2.1.

[2] Βλ. Παρατήρηση 1.1

[3] Ας σημειωθεί ότι αν το $I \subset D$ είναι διάστημα με $a \in I$, τότε το a είναι σημείο συσσώρευσης του I και άρα και του D. (Θα μπορούσαμε να ορίσουμε τη συνέχεια της $f : D \to \mathbb{R}$ στο $a \in D$ μέσω του ορίου της f κοντά στο a, όπως κάναμε στον Ορισμό 2.1, ακόμα και για πεδία ορισμού D που έχουν μόνο την ιδιότητα το $a \in D$ να είναι σημείο συσσώρευσης του D, αφού για τέτοια πεδία ορισμού και σημεία a ορίσαμε το όριο της f. Επειδή στην πράξη αυτό δεν θα μας χρειαστεί στο μάθημα, επιλέγουμε εδώ και στα επόμενα την απλούστερη εκδοχή του Ορισμού 2.1, όπου η f [ή ένας κατάλληλος περιορισμός της] ορίζονται σε ένα διάστημα.)

Από το Θεώρημα 1.2 προκύπτει άμεσα το ακόλουθο θεώρημα.[4]

Θεώρημα 2.1. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα, $a \in D$ και $f, g : D \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο a. Τότε η $f + g$ και η fg είναι συνεχείς στο a και, αν $g(a) \neq 0$, και η $1/g$ είναι συνεχής στο a.*

Θεώρημα 2.2. *Έστω $g : D_g \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $a \in D_g$ και η $f : D_f \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $g(a) \in g(D_g) \subset D_f$.[5] Τότε η $f \circ g : D_g \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο a.*

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη συνθήκη (2.1). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $g(a)$, θα υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $y \in D_f$ με $|y - g(a)| < \delta$ να ισχύει $|f(y) - f(g(a))| < \varepsilon$. Όμως, αφού η g είναι συνεχής στο a, θα υπάρχει $\gamma > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D_g$ με $|x - a| < \gamma$ να ισχύει $|g(x) - g(a)| < \delta$, και συνεπώς, αφού $g(x) \in D_f$, από το πιο πάνω συμπέρασμα για την f προκύπτει $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$. □

Στα επόμενα θα χρειαστούμε δύο απλές συνέπειες της συνέχειας σε ένα σημείο, οι οποίες προκύπτουν από τον ορισμό της και την τριγωνική ανισότητα.

Πρόταση 2.1. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $a \in D$. Αν $f(a) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in D$ με $|x - a| < \delta$. Αντίστοιχα, αν $f(a) < 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in D$ με $|x - a| < \delta$.*

Απόδειξη: Αν $f(a) > 0$, αφού η f είναι συνεχής στο a, έχουμε από τη συνθήκη (2.1) ότι για $\varepsilon = f(a) > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $|x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(a)| < f(a)$, δηλαδή, ισοδύναμα, $0 = f(a) - f(a) < f(x) < f(a) + f(a)$.[6] Αν $f(a) < 0$, εφαρμόζουμε το πρώτο αποτέλεσμα στην $-f$. □

Πρόταση 2.2. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $a \in D$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε η f είναι φραγμένη στο $D \cap (a - \delta, a + \delta)$.*[7]

Απόδειξη: Αφού $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, υπάρχει π.χ. για $\varepsilon = 1$ κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $|x - a| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(a)| < 1 \Leftrightarrow f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1$.[8] □

2.1.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 6]:
"SOS": 1, 2(μόνο για το [1, Πρόβλημα 4-17]), 3(α,γ),
Συνιστώμενες: 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 17(α-γ)

[4] Για την απόδειξη βλ. και [1, Κεφάλαιο 6, Θεώρημα 1].

[5] Υπενθυμίζουμε ότι θεωρούμε ότι τα D_g και D_f είναι διαστήματα του $\mathbb{R}$, βλ. Υποσημείωση 1.

[6] Επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$ βρίσκουμε ανάλογα ένα $\delta' > 0$ για το οποίο για κάθε $x \in D$ με $|x - a| < \delta'$ ισχύει $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$.

[7] Με αυτό εννοούμε προφανώς ότι ο περιορισμός της f στο $D \cap (a - \delta, a + \delta)$ είναι φραγμένη συνάρτηση. Βλ. τον Ορισμό 1.3 και την Υποσημείωση 6.

[8] Συνεπώς, $-|f(a)| - 1 < f(x) < |f(a)| + 1 \Leftrightarrow |f(x)| < |f(a)| + 1$.

2.2 Πληρότητα των πραγματικών αριθμών

Πρίν περάσουμε στη μελέτη συνεχών συναρτήσεων σε ένα κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$, αναφέρουμε εδώ εμβόλιμα την τελευταία θεμελιώδη ιδιότητα (αξίωμα) των πραγματικών αριθμών, η οποία καθιστά το $\mathbb{R}$ «πλήρες» (σε σχέση με το $\mathbb{Q}$ που δεν έχει αυτή την ιδιότητα). Η ιδιότητα αυτή θα μας χρειαστεί για να αποδείξουμε κάποια θεμελιώδη αποτελέσματα για συνεχείς συναρτήσεις και για αυτόν τον λόγο την αναφέρουμε εδώ.

Από τον Ορισμό 1.2 γνωρίζουμε τι σημαίνει άνω φράγμα ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}$: Είναι ένας πραγματικός αριθμός $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $x \leq M$ για κάθε $x \in A$. Προφανώς, αν το M είναι άνω φράγμα του A, τότε και κάθε $M' \geq M$ θα είναι άνω φράγμα του A. Επίσης προφανώς, αν $A \neq \emptyset$, δηλαδή αν υπάρχει έστω και ένα $x_0 \in A$, τότε δεν θα είναι *κάθε* $M \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A, αφού αν επιλέξουμε $M < x_0$ δεν θα ισχύει $x \leq M$ για *κάθε* $x \in A$.

Αναρωτιόμαστε αν υπάρχει και ποιο είναι το ελάχιστο (μικρότερο) άνω φράγμα ενός μη κενού συνόλου $A \subset \mathbb{R}$. Δίνουμε καταρχάς τον προφανή ορισμό ενός τέτοιου άνω φράγματος.

Ορισμός 2.2. *Ένας αριθμός $M \in \mathbb{R}$ λέγεται* **ελάχιστο άνω φράγμα ή supremum** *ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}$, αν (i) το M είναι άνω φράγμα του A και (ii) για κάθε άνω φράγμα M' του A ισχύει $M' \geq M$.*

Ο αριθμός αυτός, αν υπάρχει, είναι μοναδικός,[9] *και συμβολίζεται με* $\sup A$.

Αντίστοιχα, ορίζεται μοναδικά το μέγιστο (μεγαλύτερο) κάτω φράγμα ενός συνόλου A.[10]

Ορισμός 2.3. *Ένας αριθμός $m \in \mathbb{R}$ λέγεται* **μέγιστο κάτω φράγμα ή infimum** *ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}$, αν (i) το m είναι κάτω φράγμα του A και (ii) για κάθε κάτω φράγμα m' του A ισχύει $m' \leq m$.*

Ο αριθμός αυτός, αν υπάρχει, είναι μοναδικός, και συμβολίζεται με $\inf A$.[11]

Επειδή οι ιδιότητες του μέγιστου κάτω φράγματος προκύπτουν κατά κάποιον τρόπο «κατοπτρικά» από αυτές του ελάχιστου άνω φράγματος, εστιάζουμε συνήθως στο τελευταίο.

Η, τελευταία κατά σειρά, ιδιότητα των πραγματικών αριθμών που τους κάνει να ξεχωρίζουν από τους ρητούς και κάνει το $\mathbb{R}$ «πλήρες» είναι η ακόλουθη:

(Ι13) (Ιδιότητα του ελάχιστου άνω φράγματος ή Αξίωμα Πληρότητας του $\mathbb{R}$):
Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα ή supremum $\sup A \in \mathbb{R}$.[12]

---

[9] Η μοναδικότητα του ελάχιστου άνω φράγματος, αν υπάρχει, προκύπτει από τον ίδιο τον ορισμό του. Πράγματι, αν M και $\tilde{M}$ είναι δύο ελάχιστα άνω φράγματα για ένα δοσμένο σύνολο A, τότε τα M και $\tilde{M}$ είναι, ειδικότερα, άνω φράγματα του A. Αφού το M είναι ελάχιστο άνω φράγμα, θα ισχύει συνεπώς $\tilde{M} \geq M$ και, αντίστοιχα, αφού το $\tilde{M}$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα, θα ισχύει $M \geq \tilde{M}$. Συνεπώς, $M = \tilde{M}$.

[10] Για τον, εν τω μεταξύ μάλλον προφανή, ορισμό ενός κάτω φράγματος, βλ. τον Ορισμό 1.2.

[11] Η μοναδικότητα του μέγιστου κάτω φράγματος αποδεικνύεται ανάλογα με αυτήν του ελάχιστου άνω φράγματος.

[12] Αν το $\neq \emptyset$ δεν είναι άνω φραγμένο, θεωρούμε ότι το μόνο «άνω φράγμα» του είναι το $+\infty$ και συνεπώς (αφού είναι το μόνο είναι και το ελάχιστο) θέτουμε $\sup A = +\infty$. Επίσης, αφού κάθε αριθμός $M \in \mathbb{R}$ μπορεί να θεωρηθεί άνω φράγμα του κενού συνόλου (αφού δεν υπάρχουν $x \in \emptyset$ η ιδιότητα «$x \leq M$ για κάθε $x \in \emptyset$» θεωρείται ότι ισχύει· αν και φαινομενικά παράδοξο, αυτό ανήκει στα θεμέλια της Λογικής [π.χ. η πρόταση «κάθε ψάρι που φοράει γυαλιά μυωπίας, είναι κάτοχος μιας Ferrari» θεωρείται σωστή, μιας και δεν υπάρχει τέτοιο ψάρι για να την ελέγξουμε]) ορίζουμε $\sup \emptyset := -\infty$.

Αντίστοιχα, κάθε μη κενό σύνολο A που είναι κάτω φραγμένο έχει μέγιστο κάτω φράγμα $\inf A \in \mathbb{R}$, ενώ αν δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε $\inf A = -\infty$, και $\inf \emptyset := +\infty$

Ενώ όλες οι άλλες ιδιότητες (Ι1-Ι12) ισχύουν και στο $\mathbb{Q}$, το Αξίωμα Πληρότητας (Ι13) δεν ισχύει στο $\mathbb{Q}$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής.

Πρόταση 2.3. *Το σύνολο των ρητών αριθμών δεν ικανοποιεί το Αξίωμα Πληρότητας (Ι13).*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει έστω και ένα μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{Q}$, το οποίο δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\sup A \in \mathbb{Q}$.[13] Θα δείξουμε ότι το σύνολο $S := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 2\}$, το οποίο είναι μη κενό (αφού, π.χ., $1 \in S$) και άνω φραγμένο (π.χ. από το 2, αφού, αν για κάποιο $x \in S$ είχαμε $x > 2$, τότε, μιας και $x > 0$, θα είχαμε $x^2 = x \cdot x > 2 \cdot x > 2 \cdot 2 = 4 \geq 2$, το οποίο είναι άτοπο [αφού $x \in S$ και άρα $x^2 < 2$]), δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\mu = \sup S \in \mathbb{Q}$.

Έστω ότι υπάρχει ένα τέτοιο ελάχιστο άνω φράγμα $\mu \in \mathbb{Q}$ του S. Από τον νόμο της τριχοτομίας (Ι10')[14] γνωρίζουμε ότι, αν υπάρχει τέτοιος αριθμός, τότε είτε $\mu^2 < 2$ είτε $\mu^2 > 2$ είτε $\mu^2 = 2$. Θα δείξουμε ότι τίποτα από αυτά δεν ισχύει και συνεπώς ότι η υπόθεσή μας είναι εσφαλμένη, δηλαδή ότι δεν υπάρχει τέτοιο $\mu \in \mathbb{Q}$.

Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε τον αριθμό

$$y := \frac{4+3\mu}{3+2\mu}.$$

Αφού $1 \in S$ και το μ είναι άνω φράγμα του S, θα ισχύει $\mu \geq 1 > 0$ και άρα ο y ορίζεται καλώς, είναι θετικός και ανήκει στο $\mathbb{Q}$.[15] Επίσης

$$\mu - y = \frac{2(\mu^2-2)}{3+2\mu} \quad \text{και} \quad 2 - y^2 = \frac{2-\mu^2}{(3+2\mu)^2}.$$

Έστω $\mu^2 < 2$. Τότε, $\mu < y$ και $y \in S$, το οποίο είναι άτοπο, αφού το μ έχει υποτεθεί ότι είναι άνω φράγμα του S. Έστω $\mu^2 > 2$. Τότε, $\mu > y$ και $y^2 > 2 > x^2$ για κάθε $x \in S$ που συνεπάγεται $y > x$ για κάθε $x \in S$,[16] το οποίο είναι άτοπο προς την υπόθεση ότι το μ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του S (αφού τώρα δείξαμε ότι το y είναι άνω φράγμα του S, *γνήσια μικρότερο* του μ). Άρα, για το $\mu \in \mathbb{Q}$ θα πρέπει να ισχύει $\mu^2 = 2$, το οποίο είναι άτοπο, αφού δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.[17] ☐

Σημείωση:
Στις παρούσες σημειώσεις δεν θα εντρυφήσουμε περαιτέρω στον θεμελιώδη ρόλο του Αξιώματος Πληρότητας (Ι13) για τον ορισμό των πραγματικών αριθμών και στις πολλές συνέπειές του.

[13]Προσοχή: Το «$\in \mathbb{Q}$» είναι το σημαντικό εδώ. Το ότι ένα μη κενό άνω φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ έχει άνω φράγμα στο $\mathbb{R}$ μας το δίνει το Αξίωμα Πληρότητας του $\mathbb{R}$.

[14]Βλ. και [1, Κεφάλαιο 1, Πρόβλημα 8]

[15]Αυτά προκύπτουν από τις ιδιότητες (Ι1-Ι12) και αφήνονται ως Άσκηση. (Για το ότι $y \in \mathbb{Q}$, αρκεί να δειχθεί ότι για $\mu = p/q$ με $p, q \in \mathbb{N}$ έχουμε $y = p'/q'$ για κάποια $p', q' \in \mathbb{N}$.)

[16]Βλ. [1, Κεφάλαιο 1, Πρόβλημα 5(x)].

[17]Έστω $\mu = p/q$ με $p, q \in \mathbb{N}$ χωρίς κοινό διαιρέτη. (Το μ είδαμε ότι είναι θετικό.) Τότε $\mu^2 = p^2/q^2 = 2$ και άρα $p^2 = 2q^2$, όπου $q^2 \in \mathbb{N}$, δηλαδή ο p^2 είναι άρτιος. Συνεπώς και ο p θα είναι άρτιος, δηλαδή $p = 2m$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. (Αν ήταν περιττός, δηλαδή αν $p = 2k+1$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε και ο $p^2 = 2(2k^2+2k)+1$ θα ήταν περιττός. [Εδώ χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη ότι κάθε φυσικός είναι είτε άρτιος είτε περιττός, βλ. και [1, Κεφάλαιο 2, Πρόβλημα 8].]) Τότε όμως, $p^2 = 4m^2 = 2q^2$ και άρα $q^2 = 2m^2$, όπου $m^2 \in \mathbb{N}$, δηλαδή ο q^2 είναι άρτιος και άρα και ο q είναι άρτιος. Συνεπώς, και ο p και ο q είναι άρτιοι και άρα έχουν κοινό διαιρέτη το 2, που είναι άτοπο προς την υπόθεση.

Αντ' αυτού, παραπέμπουμε κάθε ενδιαφερόμενο

- για μία συνοπτική ανακεφαλαίωση των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών, και ειδικότερα κάποιων βασικών στοιχείων αναφορικά με τα supremum και infimum και κάποιες άμεσες συνέπειες του Αξιώματος Πληρότητας (όπως η Αρχιμήδεια Ιδιότητα την οποία ήδη αναφέραμε στην Υποσημείωση 16), στις παλαιότερες χειρόγραφες σημειώσεις του διδάσκοντα http://users.uoi.gr/giannoul/ICI/1_2.pdf, οι οποίες, όπως και όλες που θα βρείτε στις ιστοσελίδες http://users.uoi.gr/giannoul/ICI/ICI.html και http://users.uoi.gr/giannoul/ICII/ICII.html, αποτελούν μία συλλογή των σημαντικότερων εννοιών και αποτελεσμάτων του Απειροστικού Λογισμού πραγματικών συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής, που επιλέχθηκαν από τα βιβλία [2] και [3] του Ομότιμου Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, κ. Σωτήρη Ντούγια, με πρωτοβουλία του ίδιου, για τη συνδιδασκαλία των δύο εξαμηνιαίων μαθημάτων Απειροστικού Λογισμού I και II στο πρώτο έτος του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων το ακαδημαϊκό έτος 2011-2012,
- σε αυτά που αναφέρονται στο [1, Κεφάλαιο 8] μετά την απόδειξη του Θεωρήματος 7.3 εκεί (τα οποία περιλαμβάνουν επίσης την απόδειξη της Αρχιμήδειας Ιδιότητας), καθώς και στα Προβλήματα του κεφαλαίου αυτού, όπως επίσης και στα Κεφάλαια 28-30 στο [1] που περιγράφουν διεξοδικά την κατασκευή και τη μοναδικότητα του $\mathbb{R}$.[18]

Κατά τα λοιπά, στις παρούσες σημειώσεις θα εστιάσουμε σε ό,τι χρειαζόμαστε για την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού πραγματικών συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής με κατά το δυνατόν ακριβείς αναφορές για ό,τι δεν αποδεικνύεται εδώ.

2.2.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 8]:
"SOS": 1, 2
Συνιστώμενες: 12, 13

2.3 Συνέχεια σε διάστημα

Ορισμός 2.4. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα. Λέμε ότι* **η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής (στο D)**, *αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in D$.*

Παρατήρηση 2.3.1. *Για $D = [a, b]$ αυτό σημαίνει ότι (i) για κάθε $x_0 \in (a, b)$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ και (ii) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$ και $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = f(b)$.*

Το Αξίωμα Πληρότητας (I13) είναι απαραίτητο για να αποδειχθούν τα ακόλουθα αποτελέσματα για *συνεχείς συναρτήσεις* που ορίζονται *σε κλειστά και φραγμένα (δηλαδή,* ***συμπαγή****)*

[18] Παρεμπιπτόντως, σημειώνουμε ότι και η «Προτεινόμενη βιβλιογραφία» στο [1] περιέχει πολύ ενδιαφέρουσες πληροφορίες σχετικά με διάφορα θέματα που θίγονται στο βιβλίο και τις προεκτάσεις τους στα Μαθηματικά.

διαστήματα.[19] Τα αποτελέσματα αυτά δίνουν *ολικές ιδιότητες* τέτοιων συναρτήσεων, δηλαδή αναφέρονται στη (και απαιτούν τη) συνέχεια των συναρτήσεων σε *ολόκληρο* το συμπαγές διάστημα, δηλαδή *σε κάθε σημείο* του, σε αντιδιαστολή με τις τοπικές ιδιότητες συναρτήσεων που είναι συνεχείς *σε κάποιο σημείο* και ισχύουν *κοντά* στο σημείο αυτό, τις βασικότερες των οποίων γνωρίσαμε στην Ενότητα 2.1. Η ολικότητα αυτή είναι ο λόγος για τον οποίο απαιτείται η χρήση του Αξιώματος Πληρότητας.

Θεώρημα 2.3. (Θεώρημα Bolzano)
Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής με* $f(a)f(b) < 0$*, τότε υπάρχει* $x \in (a, b)$ *με* $f(x) = 0$.

Απόδειξη: Η υπόθεση $f(a)f(b) < 0$ σημαίνει ότι είτε $f(a) < 0 < f(b)$ είτε $f(a) > 0 > f(b)$. Θα υποθέσουμε εδώ το πρώτο, καθώς το αποτέλεσμα για το δεύτερο προκύπτει από το πρώτο θέτοντας $g = -f$. Έστω λοιπόν $f(a) < 0 < f(b)$ και έστω το σύνολο

$$A := \{x \in [a, b] : f(y) < 0 \ \forall\, y \in [a, x]\},$$

το οποίο είναι μη κενό (αφού $a \in A$) και άνω φραγμένο (αφού για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \in [a, b]$ και συνεπώς $x \leq b$). Συνεπώς, από την ιδιότητα του ελάχιστου άνω φράγματος (Ι13) προκύπτει ότι το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω $\lambda := \sup A \in [a, b]$.[20]

Μάλιστα, από την Πρόταση 2.1 προκύπτει ότι $\lambda \in (a, b)$.

Πράγματι, αφού η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχουμε $f(a) < 0 < f(b)$, θα υπάρχουν $\delta, \delta' > 0$ με $a + \delta \leq b - \delta'$ έτσι ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, a + \delta)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (b - \delta', b]$.[21] Συνεπώς, $[a, a + \delta) \subset A \subset [a, b - \delta']$.[22] Άρα, αφού το λ είναι άνω φράγμα του A, θα ισχύει $\lambda \geq a + \delta$,[23] δηλαδή $\lambda > a$, και αφού το $b - \delta'$ είναι άνω φράγμα του A και το λ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, θα ισχύει $\lambda \leq b - \delta'$, δηλαδή $\lambda < b$.

Θα δείξουμε τώρα ότι για το $\lambda = \sup A \in (a, b)$ ισχύει $f(\lambda) = 0$.[24] Θα επιχειρηματολογήσουμε με απαγωγή σε άτοπο.

Πράγματι, αν $f(\lambda) < 0$, η Πρόταση 2.1 μας δίνει ότι υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset (a, b)$.[25] Αφού το λ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, θα υπάρχει

[19] Ένα σύνολο $D \subset \mathbb{R}$ ονομάζεται **συμπαγές** αν είναι κλειστό και φραγμένο. Η κλειστότητα είναι μία *τοπολογική έννοια* συνόλων, την οποία δεν θα αναλύσουμε εδώ. Αναφορικά με διαστήματα του $\mathbb{R}$, τα κλειστά είναι τα $[a, b]$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) και το $\mathbb{R}$. Συνεπώς, τα συμπαγή διαστήματα είναι μόνο τα $[a, b]$.

[20] Αφού το b είναι άνω φράγμα του A, θα ισχύει $\lambda \leq b$ και αφού $a \in A$, θα ισχύει $a \leq \lambda$.

[21] Η Πρόταση 2.1 μας δίνει καταρχάς την ύπαρξη δύο $\delta, \delta' > 0$ έτσι ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ με $x \in (a - \delta, a + \delta)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ με $x \in (b - \delta', b + \delta')$. Αυτά συνεπάγονται $a + \delta \leq b - \delta'$ και κατά μείζονα λόγο (*a fortiori*) $[a, a + \delta) \subset [a, b)$ και $(b - \delta', b] \subset (a, b]$.

[22] Πράγματι, αφού για κάθε $y \in [a, a + \delta)$ ισχύει $f(y) < 0$ και αφού για κάθε $x \in [a, a + \delta)$ έχουμε $[a, x] \subset [a, a + \delta)$, προκύπτει ότι για κάθε $x \in [a, a + \delta)$ ισχύει: $f(y) < 0 \ \forall\, y \in [a, x]$, δηλαδή, από τον ορισμό του A, $x \in A$. Άρα, $[a, a + \delta) \subset A$. (Υπενθυμίζουμε ότι για να δείξουμε $A \subset B$ πρέπει και αρκεί να δείξουμε $x \in A \Rightarrow x \in B$.)

Από την άλλη, αφού $x \in A$ συνεπάγεται ειδικότερα ότι $f(x) < 0$ και αφού για κάθε $x \in (b - \delta', b]$ έχουμε $f(x) > 0$, αυτό σημαίνει ότι κανένα $x \in (b - \delta', b]$ δεν ανήκει στο A. Αφού το A έχει μόνο στοιχεία από το $[a, b]$ και όπως μόλις είδαμε κανένα από το $(b - \delta', b]$, όλα τα στοιχεία του θα είναι από το $[a, b - \delta']$, δηλαδή θα έχουμε $A \subset [a, b - \delta']$.

[23] Αν ήταν $\lambda < a + \delta$, θα υπήρχε $x \in (\lambda, a + \delta) \subset A$ και άρα το λ δεν θα ήταν άνω φράγμα του A.

[24] Το x του ισχυρισμού θα είναι τότε αυτό το λ.

[25] Αφού $\lambda \in (a, b)$, μπορούμε πάντα να επιλέξουμε ένα μικρότερο $\delta > 0$ από αυτό που μας δίνει καταρχάς η Πρόταση 2.1, τέτοιο ώστε να ισχύει $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset (a, b)$, και προφανώς το αποτέλεσμα της πρότασης θα συνεχίσει να ισχύει στο μικρότερο αυτό διάστημα.

κάποιο $x_0 \in A$ που ανήκει στο $(\lambda-\delta,\lambda]$.[26] Αφού $x_0 \in A$, έχουμε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, x_0]$. Όμως, επειδή $x_0 \in (\lambda-\delta,\lambda]$, έχουμε $f(x) < 0$ και στο $[x_0, x_1]$ για οποιοδήποτε $x_1 \in (\lambda, \lambda+\delta)$, αφού $[x_0, x_1] \subset (\lambda-\delta, \lambda+\delta)$. Συνεπώς έχουμε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, x_1]$, δηλαδή έχουμε $x_1 \in A$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το ότι το λ είναι άνω φράγμα του A, αφού $\lambda < x_1$. Άρα, οδηγούμαστε σε άτοπο, που σημαίνει ότι το $f(\lambda) < 0$ δεν μπορεί να ισχύει.

Από την άλλη, αν $f(\lambda) > 0$, θα υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\lambda-\delta, \lambda+\delta) \subset (a, b)$. Όμως, όπως είδαμε πριν, υπάρχει $x_0 \in A \cap (\lambda-\delta, \lambda]$, που σημαίνει (από τον ορισμό του A) ότι $f(x_0) < 0$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι $f(x_0) > 0$ (αφού $x_0 \in (\lambda-\delta,\lambda]$). Άρα και η υπόθεση $f(\lambda) > 0$ οδηγεί σε άτοπο και άρα ούτε αυτό ισχύει.

Συνεπώς, $f(\lambda) = 0$. □

Από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει άμεσα το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.4. (Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής)
Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $[c, d] \subset [a, b]$ με $f(c) \neq f(d)$. Τότε για κάθε $y \in \mathbb{R}$ γνήσια μεταξύ των $f(c)$ και $f(d)$ υπάρχει ένα $x \in (c, d)$ έτσι ώστε $f(x) = y$.

Απόδειξη: Από τις υποθέσεις προκύπτει ότι $a \leq c < d \leq b$. Ο περιορισμός $g := f|_{[c,d]}$ της συνεχούς $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ στο $[c, d] \subset [a, b]$ είναι συνεχής συνάρτηση.[27] Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) := g(x) - y$, $x \in [c, d]$, με $y \in \mathbb{R}$ γνήσια μεταξύ των $g(c)$ και $g(d)$. Η h είναι συνεχής, και αν $g(c) < g(d)$ και $y \in (g(c), g(d))$, έχουμε $h(c) < 0 < h(d)$, ενώ αν $g(c) > g(d)$ και $y \in (g(d), g(c))$, έχουμε $h(c) > 0 > h(d)$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $h(c)h(d) < 0$, και άρα από το Θεώρημα του Bolzano (Θεώρημα 2.3) παίρνουμε ότι υπάρχει $x \in (c, d)$ με $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = f(x) = y$. □

Θεώρημα 2.5. (Ύπαρξη μεγίστου και ελαχίστου)
Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f **λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο (στο** $[a, b]$**)**, *δηλαδή, υπάρχουν* **σημείο μεγίστου** $x_1 \in [a, b]$ *και* **σημείο ελαχίστου** $x_2 \in [a, b]$,[28] *έτσι ώστε*

$$\min f := f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1) =: \max f \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Παρατήρηση 2.3.2. *(α΄) Τα σημεία ακροτάτων δεν πρέπει να είναι μοναδικά. Αρκεί να σκεφτεί κανείς μία σταθερή συνάρτηση.*

(β΄) Η ύπαρξη ολικών ακροτάτων συνεπάγεται ότι η f είναι φραγμένη, βλέπε τον Ορισμό 1.3.

Απόδειξη Θεωρήματος 2.5: Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο μεγίστου $x_1 \in [a, b]$. Τότε, αφού και η $-f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, θα έχει και αυτή σημείο μεγίστου $x_2 \in [a, b]$ έτσι ώστε $-f(x) \leq -f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και άρα το x_2 θα είναι σημείο ελαχίστου της f.

[26] Αφού το λ είναι άνω φράγμα του A, για όλα τα $x \in A$ ισχύει $x \leq \lambda$. Αν τώρα δεν υπήρχε $x_0 \in A$ με $x_0 \in (\lambda-\delta, \lambda]$ αυτό θα σήμαινε ότι για όλα τα $x \in A$ ισχύει $x \leq \lambda - \delta$ και συνεπώς το $\lambda - \delta$ θα ήταν ένα άνω φράγμα του A *γνήσια μικρότερο* του λ, το οποίο όμως έρχεται σε αντίφαση με το ότι το λ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, δηλαδή με το ότι όλα τα άλλα άνω φράγματα του A είναι *μεγαλύτερα ή ίσα* του λ.

[27] Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της συνέχειας συνάρτησης σε ένα διάστημα και αφήνεται ως άσκηση. Για τον ορισμό του περιορισμού μιας συνάρτησης σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, βλ. Υποσημείωση 6.

[28] Το μέγιστο και το ελάχιστο της $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ λέγονται **ακρότατα της** f. Επειδή αφορούν τις τιμές της f σε *ολόκληρο* το πεδίο ορισμού της, ονομάζονται και **ολικά ακρότατα**. Ακόμα, λέγονται και **μέγιστη και ελάχιστη τιμή της** f, αντίστοιχα.

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η f είναι άνω φραγμένη στο $[a,b]$. Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε το σύνολο

$$A := \{x \in [a,b] : \text{η } f \text{ είναι άνω φραγμένη στο } [a,x]\}.$$

Έχουμε $A \neq \emptyset$ (αφού $a \in A$) και ότι το A είναι άνω φραγμένο (από το b). Συνεπώς, από το Αξίωμα Πληρότητας, το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\lambda = \sup A \in [a,b]$.

Μάλιστα, $\lambda = b$.

Πράγματι, αφού η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και άρα, ειδικότερα, στο a, η Πρόταση 2.2 μας δίνει ένα $0 < \delta < b-a$ έτσι ώστε η f είναι φραγμένη στο $[a,a+\delta)$. Συνεπώς, $[a,a+\delta) \subset A$ και άρα $\lambda \geq a+\delta$, δηλαδή $\lambda > a$, και ειδικότερα $\lambda \in (a,b]$. Ας υποθέσουμε ότι $\lambda < b$. Τότε, αφού η f είναι συνεχής στο $\lambda \in (a,b)$, η Πρόταση 2.2 μας δίνει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε η f είναι φραγμένη στο $(\lambda-\delta,\lambda+\delta) \subset (a,b)$. Αφού $\lambda = \sup A$, θα υπάρχει κάποιο $x_0 \in A \cap (\lambda-\delta,\lambda]$.[29] Αυτό σημαίνει ότι η f είναι άνω φραγμένη στο $[a,x_0]$. Από την άλλη η f είναι άνω φραγμένη και στο $[x_0,x_1]$ για κάθε $x_1 \in (\lambda,\lambda+\delta)$, αφού $[x_0,x_1] \subset (\lambda-\delta,\lambda+\delta)$. Συνεπώς, επιλέγοντας το μεγαλύτερο από τα δύο άνω φράγματα της f στο $[a,x_0]$ και στο $[x_0,x_1]$, έχουμε ότι η f είναι άνω φραγμένη στο $[a,x_1]$ και άρα $x_1 \in A$, όπου $x_1 > \lambda$. Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει αφού το λ είναι άνω φράγμα του A. Άρα, δεν ισχύει η υπόθεση $\lambda < b$ και συνεπώς $\lambda = b$.

Έχουμε λοιπόν ότι το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Αυτό θα ίσχυε και αν $A = [0,b)$, ενώ εμείς θέλουμε να δείξουμε ότι $A = [a,b]$. 'Ομως, αφού η f είναι συνεχής και στο b, η Πρόταση 2.2 μας δίνει ένα $0 < \delta < b-a$ έτσι ώστε η f είναι φραγμένη στο $(b-\delta,b]$, δηλαδή σε κάθε $[x,b]$ για $x \in (b-\delta,b]$. Από την άλλη, αφού το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, θα υπάρχει ένα $x_0 \in A \cap (b-\delta,b]$.[30] Άρα, η f είναι άνω φραγμένη στα $[a,x_0]$ και $[x_0,b]$ και συνεπώς, επιλέγοντας το μεγαλύτερο από τα δύο άνω φράγματα, και στο $[a,b]$.

Δείξαμε λοιπόν μέχρι τώρα ότι η συνεχής $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένη στο $[a,b]$, δηλαδή ότι το σύνολο τιμών της, $f([a,b]) := \{f(x) : x \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}$, είναι άνω φραγμένο. Αφού το σύνολο αυτό είναι μη κενό, θα έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \geq f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, σύμφωνα με το Αξίωμα Πληρότητας. Μένει να δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο $x_1 \in [a,b]$ με $f(x_1) = \lambda$. Το x_1 θα είναι τότε σημείο μεγίστου της f.

Έστω ότι $f(x) < \lambda$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε ορίζεται η συνεχής, θετική $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := 1/(\lambda - f(x))$, η οποία συνεπώς είναι άνω φραγμένη, όπως δείξαμε μόλις.[31] Από την άλλη, αφού το λ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $f([a,b])$ θα υπάρχει για κάθε $\varepsilon > 0$ ένα $x \in [a,b]$ με $f(x) > \lambda - \varepsilon \Leftrightarrow \lambda - f(x) < \varepsilon$.[32] Αυτό ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει

[29] Αν δεν υπήρχε τέτοιο $x_0 \in A$, και αφού γνωρίζουμε ότι $x \leq \lambda$ για κάθε $x \in A$ (αφού το λ είναι άνω φράγμα του A), θα είχαμε $x \leq \lambda - \delta$ για όλα τα $x \in A$ και συνεπώς το $\lambda - \delta < \lambda$ θα ήταν άνω φράγμα του A, που αντιφάσκει στο ότι το λ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A.

[30] Όπως και πριν, αν δεν υπήρχε τέτοιο $x_0 \in A$ θα είχαμε $x \leq b - \delta$ για κάθε $x \in A$ και συνεπώς το $b - \delta < b$ θα ήταν άνω φράγμα του A σε αντίφαση με το ότι το b είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A.

[31] Στο πρώτο μέρος της απόδειξης δείξαμε ότι *κάθε* συνεχής $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένη. Αυτό το αποτέλεσμα είναι διατυπωμένο στο [1] ξεχωριστά (βλ. [1, Θεώρημα 7.2]) και αποδεικνύεται όπως πιο πάνω.

[32] Ένας πολύ πρακτικός ισοδύναμος χαρακτηρισμός του $\sup A \in \mathbb{R}$ ενός μη κενού, άνω φραγμένου $A \subset \mathbb{R}$, τον οποίο έχουμε χρησιμοποιήσει ήδη αρκετές φορές στην πράξη, είναι ο ακόλουθος:

$$\lambda = \sup A \quad \Leftrightarrow \quad \text{(i) } x \leq \lambda \;\; \forall\, x \in A \quad \text{και} \quad \text{(ii) } \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, x \in A : \quad x > \lambda - \varepsilon.$$

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Το (i) σημαίνει απλώς ότι το λ είναι άνω φράγμα του A. Για το (ii), παρατηρούμε ότι αν για κάποιο $\varepsilon > 0$ δεν υπήρχε $x \in A$ με $x > \lambda - \varepsilon$, θα ίσχυε $x \leq \lambda - \varepsilon$ για όλα τα $x \in A$ και συνεπώς το $\lambda - \varepsilon < \lambda$ θα ήταν άνω φράγμα του A, γνήσια μικρότερο του λ, σε αντίφαση με το ότι το λ είναι το *ελάχιστο* (δηλαδή, το μικρότερο άνω φράγμα του A. $\Leftarrow$: Το (i), όπως είπαμε, ισοδυναμεί με το ότι το λ είναι άνω φράγμα του A. Αν το λ δεν είναι το ένα $x \in [a, b]$ με $g(x) > 1/\varepsilon$ και αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι η g δεν είναι άνω φραγμένη στο $[a, b]$ και οδηγούμαστε σε άτοπο. $\square$

Παρατήρηση 2.3.3. *Οι υποθέσεις των προηγούμενων θεωρημάτων δεν μπορούν να εξασθενισθούν. Αυτό επιβεβαιώνεται από τα ακόλουθα αντιπαραδείγματα*

(α′) *Η* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1 & , x < 0, \end{cases}$ *είναι ασυνεχής μόνο στο* $x = 0$, *αλλά δεν έχει σημείο* $x_0 \in [-1, 1]$ *με* $f(x_0) = 0$.

(β′) *Η* $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, *είναι συνεχής, αλλά δεν είναι άνω φραγμένη. (Το* $(0, 1]$ *ενώ είναι φραγμένο, δεν είναι κλειστό, άρα δεν είναι συμπαγές.) Ούτε η* $g(x) = x$, $x \geq 0$, *είναι άνω φραγμένη, ενώ είναι συνεχής και το πεδίο ορισμού της* $[0, \infty)$ *κλειστό, αλλά όχι φραγμένο, συνεπώς όχι συμπαγές.*

(γ′) *Η* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = x$ *για* $x \in [0, 1)$ *και* $f(1) = 0$, *είναι φραγμένη, το* $[0, 1]$ *είναι συμπαγές, αλλά η* f *δεν λαμβάνει μέγιστο, αφού για κάθε* $x \in [0, 1)$ *μπορούμε να επιλέξουμε ένα* $x + \varepsilon \in (0, 1)$ *με* $\varepsilon \in (0, 1 - x)$ *έτσι ώστε* $f(x + \varepsilon) = x + \varepsilon > x$. *Δεν υπάρχει συνεπώς κάποιο* $x_0 \in [0, 1)$ *έτσι ώστε το* $f(x_0)$ *να είναι μεγαλύτερο από όλα τα* $x \in [0, 1)$. *(Η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο* $x = 1$.)

2.3.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 7]:
"SOS": 1, 11, [1, Κεφάλαιο 7, Θεώρημα 8]
ΣΥΝΙΣΤΩΜΕΝΕΣ: 8, 10

ελάχιστο άνω φράγμα του A, θα υπάρχει ένα $\lambda' < \lambda$ έτσι ώστε $x \leq \lambda'$ για κάθε $x \in A$, το οποίο όμως δεν ισχύει, αφού σύμφωνα με το (ii), για $\varepsilon = \lambda - \lambda' > 0$ υπάρχει κάποιο $x \in A$ με $x > \lambda - (\lambda - \lambda') = \lambda'$. $\square$

Κεφάλαιο 3

Παραγώγιση

Στα επόμενα θεωρούμε συναρτήσεις $f : D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subset \mathbb{R}$ *διάστημα*, εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό.[1][2]

3.1 Παράγωγος: Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ορισμός 3.1. *Η* $f : D \to \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο** $a \in D$, *αν υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός)* **η παράγωγος της** f **στο** a

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Η f *ονομάζεται* **παραγωγίσιμη (στο** D**)**, *αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε* $a \in D$. *Τότε, η* $f' : D \to \mathbb{R}$, $D \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$, *ονομάζεται* **η παράγωγος της** f **(στο** D**).**[3][4]

Παρατήρηση 3.1.1. *Ο αριθμός* $f'(a) \in \mathbb{R}$ *δίνει την κλίση της* **εφαπτομένης** *(δηλαδή της εφαπτόμενης ευθείας)* $y(x) = f(a) + (x - a)f'(a)$, $x \in \mathbb{R}$, *στο σημείο* $(a, f(a))$ *του γραφήματος της* f, $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in D\}$.

---

[1]Το ύφος της παρουσίασης της ύλης ενδεχομένως να είναι πιο συνοπτικό στα επόμενα κεφάλαια των παρόντων σημειώσεων. Για μια πιο αναλυτική παρουσίαση παραπέμπουμε στις παραδόσεις του μαθήματος, στις οποίες συνήθως αναφέρονται περισσότερες παρατηρήσεις, επεξηγήσεις και περισσότερα σχόλια και παραδείγματα, και φυσικά στο βιβλίο [1], του οποίου τη σειρά παρουσίασης της ύλης ακολουθούμε στο παρόν μάθημα. Ενίοτε τα παραδείγματα έχουν αναλυθεί και οι προτάσεις και τα θεωρήματα έχουν αποδειχθεί στην τάξη.

[2]Να προσεχθεί ότι τα ακόλουθα αποτελέσματα μπορούν να εφαρμοσθούν και στον περιορισμό $f|_D$ μιας συνάρτησης $f : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ σε ένα διάστημα $D \subset \tilde{D}$ σε περιπτώσεις που το $\tilde{D} \subset \mathbb{R}$ δεν είναι εξ αρχής διάστημα.

[3]Συνηθίζονται και οι συμβολισμοί Leibniz: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{df(x)}{x} = f'(x)$ και $\frac{d}{dx}f = \frac{df}{dx} = f'$, αλλά (λίγο σπανιότερα) και $\frac{df(x)}{x}\big|_{x=a} = f'(a)$.

[4]Να προσεχθεί ότι ο πιο πάνω ορισμός της παραγώγου σε ένα $a \in D$, όπου $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα, ισχύει και όταν το a είναι κάποιο άκρο του διαστήματος D. Αυτό οφείλεται στον Ορισμό 1.1 του ορίου συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $a < b$, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στα a και b, αν υπάρχει η παράγωγος της f στα σημεία αυτά ως πραγματικός αριθμός, δηλαδή αν υπάρχουν τα όρια $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ και $f'(b) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(b+h) - f(b)}{h}$.

Υπό την έννοια αυτή, η εφαπτομένη είναι το όριο όταν $h \to 0$ *των τεμνουσών (ευθειών)* $y_h(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-h}$, $x \in \mathbb{R}$, *που περνάνε από τα σημεία* $(a, f(a))$ *και* $(a+h, f(a+h))$, $h \neq 0$, *και έχουν κλίση* $\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-h}$.

Παράδειγμα 3.1. *Από τον ορισμό προκύπτουν άμεσα:*[5]

(α΄) $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, *όπου* $c \in \mathbb{R}$ *σταθερά,* $\Rightarrow f'(x) = 0$.

(β΄) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow f'(x) = 1$.

(γ΄) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow f'(x) = 2x$.

(δ΄) $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί μέσω του ορισμού, χρησιμοποιώντας τον **διωνυμικό τύπο**[6]

$$(x+h)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} h^j, \quad n \in \mathbb{N},\ x, h \in \mathbb{R},$$

όπου $\binom{n}{j} := \frac{n!}{j!(n-j)!}$, $j = 0, \ldots, n$, *ο* **διωνυμικός συντελεστής** *με* $n! := n(n-1)\cdot 2$ *και* $0! := 1$.

(ε΄) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ *ενώ η παράγωγος* $f'(0)$ *δεν υπάρχει.*

(στ΄) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, $\Rightarrow f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

(ζ΄) $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$, $\Rightarrow f'(x) = -1/x^2$.

Για παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύουν οι ακόλουθες βασικές ιδιότητες.

Θεώρημα 3.1. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη στο* $a \in D$. *Τότε η* f *είναι συνεχής στο* a.

Απόδειξη:[7] Για $h \neq 0$ με $a + h \in D$ έχουμε

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h.$$

Στέλνοντας το $h \to 0$ προκύπτει το αποτέλεσμα από τις ιδιότητες των ορίων.[8] □

Παράδειγμα 3.2. (α΄) *Έστω η* $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ *Δείξτε ότι η* f *είναι συνεχής, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο* $x = 0$.

[5] Άσκηση.

[6] ο τύπος αυτός αναφέρεται και ως **διωνυμικό θεώρημα**

[7] Στα επόμενα θεωρήματα, που μπορείτε να βρείτε και στο [1], θα αναφέρουμε συχνά μόνο τον πυρήνα της απόδειξης. Η συμπλήρωση των λεπτομερειών αφήνεται ως άσκηση.

[8] Άσκηση: Βρείτε τις στις παρούσες σημειώσεις· κοινώς, συμπληρώστε την απόδειξη.

(β′) *Έστω η* $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ *Δείξτε ότι η* g *είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο* $x = 0$ *και βρείτε την παράγωγό της* $g'(0)$.

Θεώρημα 3.2. *Έστω* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμες στο* $a \in D$. *Τότε ισχύουν:*

(α′) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(β′) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

(γ′) $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{1}{g^2(a)}, \quad$ *αν* $g(a) \neq 0$.

Απόδειξη: Για $h \neq a$ με $a + h \in D$ έχουμε

(α′)

$$\frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h},$$

Από τις ιδιότητες των ορίων και τον ορισμό της παραγώγου, στέλνοντας το $h \to 0$ προκύπτει το αποτέλεσμα.

(β′)

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(a+h) - (fg)(a)}{h} &= \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \frac{(f(a+h) - f(a))g(a+h) + f(a)(g(a+h) - g(a))}{h} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a+h) + f(a)\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \end{aligned}$$

Αφού ως παραγωγίσιμη στο a, η g είναι και συνεχής στο a, όπως είδαμε πιο πάνω, έχουμε $g(a+h) \to g(a)$ όταν $h \to 0$. Στέλνοντας το $h \to 0$ στο τελευταίο μέλος της παραπάνω αλυσίδας ισοτήτων, το αποτέλεσμα προκύπτει από τις ιδιότητες των ορίων και τον ορισμό της παραγώγου.

(γ′) Όπως και πριν, αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο a θα είναι και συνεχής, δηλαδή $g(a+h) \to g(a)$ για $h \to 0$. Επίσης, από προηγούμενη πρόταση,[9] αφού $g(a) \neq 0$ θα υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $h \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ και $a + h \in D$ ισχύει $g(a+h) \neq 0$. Για αυτά τα $h \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} \\ &= \frac{g(a) - g(a+h)}{hg(a+h)g(a)} \\ &= -\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \frac{1}{g(a+h)g(a)} \end{aligned}$$

και για $h \to 0$ παίρνουμε το αποτέλεσμα.

[9] Ποια πρόταση στις παρούσες σημειώσεις;

$\square$

Πόρισμα 3.3. *Έστω* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμες στο* $a \in D$ *με* $g(a) \neq 0$. *Τότε:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Παράδειγμα 3.3. *Χρησιμοποιήστε τους παραπάνω κανόνες και τις παραγώγους της σταθερής και της ταυτοτικής συνάρτησης για να δείξετε τα ακόλουθα ή να βρείτε τα ζητούμενα.*

(α') $f : D \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη στο* $a \in D$ *και* $g(x) = cf(x)$, $c \in \mathbb{R}$ *σταθερά,* $\Rightarrow g'(x) = cf'(x)$.

(β') $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$, $\Rightarrow f(x) = kx^{k-1}$.

Χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή και όπου χρειαστεί τη σύμβαση $x^0 := 1$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

(γ') Βρείτε την παράγωγο του πολυωνύμου (ή της πολυωνυμικής συνάρτησης) $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$ *σταθερές για* $i = 0, \ldots, n$ *με* $a_n \neq 0$.

Θεώρημα 3.4. (Κανόνας της Αλυσίδας)
Έστω $g : D \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη στο* $a \in D$ *με* $g(D) \subset \Delta$, *όπου* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *διάστημα, και* $f : \Delta \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη στο* $g(a)$. *Τότε η* $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* a *με* $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$.

Απόδειξη: Πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \to f'(g(a))g'(a) \quad \text{για } h \to 0. \tag{3.1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(h) := g(a+h) - g(a)$ για $h \in \mathbb{R}$ με $a + h \in D$. Αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο a, θα είναι και συνεχής εκεί, δηλαδή θα ισχύει $k(h) \to 0 = k(0)$ για $h \to 0$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$\phi(h) := \begin{cases} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{k(h)}, & k(h) \neq 0, \\ f'(g(a)), & k(h) = 0. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι $\phi(h) \to f'(g(a)) = \phi(0)$ για $h \to 0$, δηλαδή ότι η ϕ είναι συνεχής στο 0.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(a)$, θα υπάρχει κάποιο $\delta' > 0$, έτσι ώστε για κάθε $0 < |k| < \delta'$, $g(a) + k \in \Delta$, ισχύει

$$\left| \frac{f(g(a) + k) - f(g(a))}{k} - f'(g(a)) \right| < \varepsilon.$$

Όμως, για αυτό το $\delta' > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $0 < |h| < \delta$ με $a + h \in D$ να ισχύει $|k(h)| < \delta'$. Αυτό θα ισχύει ειδικότερα για αυτά τα $0 < |h| < \delta$, $a + h \in D$ με $0 < |k(h)|$. Τότε όμως θα έχουμε

$$\left| \frac{f(g(a) + k(h)) - f(g(a))}{k(h)} - f'(g(a)) \right| < \varepsilon,$$

δηλαδή, αφού $g(a) + k(h) = g(a + h)$,

$$\left| \frac{f(g(a + h)) - f(g(a))}{k(h)} - f'(g(a)) \right| = |\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$

Αφού για τα $0 < |h| < \delta$, $a + h \in D$ με $0 = |k(h)|$ έχουμε $\phi(h) = f'(g(a))$, η τελευταία ανισότητα ισχύει τετριμμένα και για αυτά τα h, και έτσι έχουμε τελικά ότι για όλα τα $0 < |h| < \delta$ με $a + h \in D$ ισχύει $|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon$. Αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα τέτοιο $\delta > 0$, δείξαμε $\phi(h) \to f'(g(a))$ για $h \to 0$.

Τώρα το όριο (3.1) προκύπτει εύκολα. Για $h \neq 0$ με $a + h \in D$ και $k(h) = g(a+h) - g(a) \neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(g(a + h)) - f(g(a))}{h} = \frac{f(g(a + h)) - f(g(a))}{k(h)} \frac{k(h)}{h} = \phi(h) \frac{g(a + h) - g(a)}{h}.$$

Αυτή η ισότητα ισχύει όμως και όταν $k(h) = 0$, αφού τότε $g(a + h) = g(a)$, και άρα οι αριθμητές και του αριστερού μέλους και του δεξιού θα ισούνται και οι δύο με το μηδέν. Συνεπώς, για κάθε $h \neq 0$ με $a + h \in D$ ισχύει

$$\frac{f(g(a + h)) - f(g(a))}{h} = \phi(h) \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \to f'(g(a))g'(a),$$

και έχουμε τελειώσει. □

Ορισμός 3.2. (Παράγωγοι ανώτερης τάξης)
Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε η f λέγεται **δυο φορές παραγωγίσιμη στο** $a \in D$ *αν υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός) η* **παράγωγος δεύτερης τάξης της f στο a**

$$f''(a) := (f')'(a).$$

Γενικότερα, αν η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι $k \in \mathbb{N}$ φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο k τάξης $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η f είναι **$k + 1$ φορές παραγωγίσιμη στο** $a \in D$ *αν υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός) η* **παράγωγος $k + 1$ τάξης της f στο a**[10]

$$f^{(k+1)}(a) := \left(f^{(k)}\right)'(a).$$

[10] Έχουμε $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} := f'$, $f^{(2)} := f''$, $f^{(3)} := f'''$. Επίσης γράφουμε $f^{(k)} := \frac{d^k f}{dx^k}$ για $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ (συμβολισμός Leibniz).

Παράδειγμα 3.4. *Για* $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, *έχουμε* $f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdot(n-k+1)x^{n-k}$ *για* $k = 1, \dots, n$ *και* $f^{(k)}(x) = 0$ *για* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n+1$.

Το πρώτο αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή [11] *Το δεύτερο προκύπτει, αφού σύμφωνα με το πρώτο έχουμε* $f^{(n)}(x) = n!x^0 = n!$ *και άρα* $f^{(n+1)}(x) = 0$, *το οποίο ισχύει συνεπώς και για κάθε* $k \geq n+2$.[12]

3.1.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 10]:

1, 2, 4-6, 10-12, 15, 16, 20, 28, 29, 32, 35.

3.2 Εφαρμογές των παραγώγων

Θεώρημα 3.5. (Θεώρημα Fermat)
Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$ *σημείο ακροτάτου της* f *και η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* x. *Τότε* $f'(x) = 0$.[13]

Απόδειξη: Έστω ότι το $x \in (a, b)$ είναι σημείο μεγίστου της f στο (a, b).[14] Τότε ισχύει $f(x+h) \leq f(x)$ για κάθε $x+h \in (a, b)$ και συνεπώς

$$g(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0 \quad \text{για } h \in (0, b-x)$$

και

$$g(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad \text{για } h \in (a-x, 0).$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x, θα υπάρχουν τα πλευρικά όρια της $g(h)$ για $h \to 0^+$ και $h \to 0^-$, αντίστοιχα, και θα είναι ισούνται με την $f'(x)$. Τότε όμως, από την Πρόταση 1.3 έχουμε[15]

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0 \quad \text{και} \quad f'(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

και συνεπώς $f'(x) = 0$. □

Ο ορισμός του μεγίστου και του ελαχίστου (δηλαδή των ακροτάτων), καθώς και των σημείων ακροτάτων $x \in D$ στα οποία αυτά λαμβάνονται, μιας συνάρτησης $f : D \to \mathbb{R}$ δόθηκε στο Θεώρημα 2.5 για την περίπτωση $D = [a, b]$. Ο ορισμός αυτός γενικεύεται με προφανή τρόπο για κάθε υποσύνολο $A \subset D$.

[11] Πράγματι, για $k = 1$ έχουμε $f'(x) = nx^{n-1}$. Έστω ότι ισχύει ο τύπος για κάποιο $k = 1, \dots, n-1$. Τότε $f^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) = \frac{d}{dx}\left(n(n-1)\cdot(n-k+1)x^{n-k}\right) = n(n-1)\cdot(n-k+1)(n-k)x^{n-k-1} = n(n-1)\cdot(n-k+1)(n-(k+1)+1)x^{n-(k+1)}$.

[12] Κάθε φορά προκύπτει ως παράγωγος της προηγούμενης παραγώγου η σταθερή συνάρτηση 0.

[13] Ένα σημείο $x \in D$ μιας $f : D \to \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f'(x) = 0$ ονομάζεται **κρίσιμο σημείο της** f και η αντίστοιχη τιμή $f(x)$ **κρίσιμη τιμή της** f.

[14] Αν το x είναι σημείο ελαχίστου, εφαρμόζουμε το θεώρημα στην $g = -f$.

[15] Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.3 στις συναρτήσεις $(-g)|_{(0,b-x)}$ και $g|_{(a-x,0)}$.

Ορισμός 3.3. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ *όχι απαραίτητα διάστημα, και έστω* $A \subset D$.

(α′) Ένα σημείο $x \in A$ *ονομάζεται* **σημείο μεγίστου (ελαχίστου) της** f **στο** A *αν*

$$f(y) \leq f(x) \quad \forall\ y \in A, \quad (f(y) \geq f(x) \quad \forall\ y \in A).$$

Η τιμή $f(x)$ *ονομάζεται τότε* **μέγιστο (ελάχιστο) ή μέγιστη (ελάχιστη) τιμή της** f **στο** A.

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα της f *στο* A *ονομάζονται και* **ακρότατα της** f **στο** A.

(β′) Ένα σημείο $x \in A$ *ονομάζεται* **σημείο τοπικού μεγίστου (ελαχίστου) της** f **στο** A *αν υπάρχει κάποιο* $\delta > 0$ *έτσι ώστε το* $x \in A \cap (x-\delta, x+\delta)$ *να είναι σημείο μεγίστου (ελαχίστου) του περιορισμού* $f|_{A\cap(x-\delta,x+\delta)} : A \cap (x-\delta, x+\delta) \to \mathbb{R}$ *με* $f|_{A\cap(x-\delta,x+\delta)}(y) := f(y)$, $y \in A \cap (x-\delta, x+\delta)$, *της* f *στο* $A \cap (x-\delta, x+\delta)$.

Η τιμή $f(x)$ *ονομάζεται τότε* **τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) ή τοπική μέγιστη (ελάχιστη) τιμή της** f **στο** A.

Τα τοπικά μέγιστα και τα ελάχιστα της f *στο* A *ονομάζονται και* **τοπικά ακρότατα της** f **στο** A.

Παρατήρηση 3.1. *Το Θεώρημα 3.5 του Fermat ισχύει προφανώς και τοπικά, δηλαδή, αν το* $x \in (a, b)$ *είναι σημείο* τοπικού *ακροτάτου μίας* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *και η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* x, *τότε* $f'(x) = 0$.

Αυτό προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 3.5, αν το εφαρμόσουμε στον περιορισμό $f|_{(x-\delta,x+\delta)}$ *της* f *με* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε* $(x-\delta, x+\delta) \subset (a, b)$ *και το* x *να είναι σημείο ακροτάτου της* $f|_{(x-\delta,x+\delta)}$, *καθώς η παραγωγισιμότητα της* f *στο* x *κληρονομείται στην* $f|_{(x-\delta,x+\delta)}$.

(Αυτό βασίζεται στο ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο είναι ένα όριο, δηλαδή μία τοπική *ιδιότητα. Με απλά λόγια: Για να υπολογίσουμε το όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο* x *πρέπει να ξέρουμε τις τιμές της συνάρτησης μόνο «κοντά» στο σημείο* x, *δηλαδή σε μία, όπως λέμε,* **περιοχή του σημείου** x, $(x-\delta, x+\delta)$, $\delta > 0$, *για οσοδήποτε μικρό* $\delta > 0$. *Το ότι αρκεί να ξέρουμε τις τιμές της συνάρτησης μόνο «κοντά» στο σημείο* x *προκύπτει από τον ορισμό (και είναι η βαθύτερη έννοια του ορισμού) του ορίου.)*

Παρατήρηση 3.2. *(α′) Το αντίστροφο του Θεωρήματος του Fermat δεν ισχύει, δηλαδή, αν έχουμε* $f'(x) = 0$ *σε ένα σημείο* $x \in (a, b)$ *μιας συνάρτησης* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, *αυτό δεν συνεπάγεται ότι η* f *θα πρέπει να έχει ακρότατο εκεί.*

Π.χ., η $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, *δεν έχει ακρότατο στο* 0, *ενώ* $f'(x) = 0$.

(β′) Το Θεώρημα του Fermat δεν ισχύει στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος μιας $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Π.χ., η $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, *έχει μέγιστο στο* 1 *και ελάχιστο στο* 0, *αλλά* $f'(x) = 1$ *για κάθε (*$x \in \mathbb{R}$ *και συνεπώς για κάθε)* $x \in [0, 1]$.

(γ΄) Από την προηγούμενη παρατήρηση προκύπτει ότι αν θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα μίας συνεχούς συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,[16] *τότε αρκεί να βρούμε ποια είναι η μεγαλύτερη (μέγιστη) και ποια η μικρότερη (ελάχιστη) μεταξύ των τιμών της* f, *οι οποίες αντιστοιχούν*

(i) στα κρίσιμα σημεία της f *στο* (a, b), *δηλαδή στα σημεία* $x \in (a, b)$ *για τα οποία η* f *είναι παραγωγίσιμη με* $f'(x) = 0$,

(ii) στα άκρα του διαστήματος $[a, b]$,

(iii) στα σημεία του (a, b). *στα οποία η* f *δεν είναι παραγωγίσιμη.*

Θεώρημα 3.6. (Θεώρημα Rolle)
Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής, παραγωγίσιμη στο* (a, b) *με* $f(a) = f(b)$. *Τότε υπάρχει* $x \in (a, b)$ *τέτοιο ώστε* $f'(x) = 0$.

Απόδειξη: Η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.

Αν η f λαμβάνει την ελάχιστη ή τη μέγιστη τιμή της στο (a, b), θα ισχύει $f'(x) = 0$, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat (Θεώρημα 3.5) και ο ισχυρισμός θα έχει αποδειχθεί.

Αν η f δεν λαμβάνει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο (a, b), τότε θα λαμβάνει αυτές τις τιμές στα a και b. Αφού όμως $f(a) = f(b)$, αυτή η τιμή θα είναι και η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στο $[a, b]$ και συνεπώς θα ισχύει $f(a) = f(b) \leq f(x) \leq f(a) = f(b)$ και άρα $f(x) = f(a) = f(b)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα η f θα είναι σταθερή (και ίση με $f(a) = f(b)$) σε όλο το $[a, b]$ και συνεπώς θα ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. □

Με χρήση του Θεωρήματος του Rolle αποδεικνύεται ένα από τα βασικότερα θεωρήματα αναφορικά με παραγώγους.[17]

Θεώρημα 3.7. (Θεώρημα Μέσης Τιμής)
Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής και παραγωγίσιμη στο* (a, b). *Τότε υπάρχει* $x \in (a, b)$ *τέτοιο ώστε*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

Η $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b) με

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad x \in (a, b)$$

[16] Αν η συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$, τότε είμαστε σίγουροι ότι αυτή θα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή (βλ. Θεώρημα 2.5). Φυσικά, και συναρτήσεις που δεν ορίζονται σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα ή που ορίζονται σε τέτοια, αλλά δεν είναι συνεχείς, μπορούν να έχουν ακρότατα.

[17] Σημειώνουμε ότι το Θεώρημα του Rolle είναι ειδική περίπτωση του ΘΜΤ. Το ότι η γενική περίπτωση αποδεικνύεται με χρήση της ειδικής δεν είναι ασυνήθιστο στα Μαθηματικά. Συνήθως, όπως εδώ, η ειδική περίπτωση περιέχει τον «πυρήνα» του επιχειρήματος σε μια πιο ξεκάθαρη (δηλαδή, ακριβώς, απλούστερη, ειδικότερη) μορφή. Αυτόν τον «πυρήνα» μπορούμε μετά να γενικεύσουμε σε πιο περίπλοκες (δηλαδή, γενικότερες) περιπτώσεις.

και $h(a) = f(a) = h(b)$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle (Θεώρημα 3.6) υπάρχει $x \in (a, b)$ με $h'(x) = 0$, το οποίο ισοδυναμεί με το αποδεικτέο. □

Το ΘΜΤ είναι ειδική περίπτωση του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 3.8. (γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής)[18]
Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς και παραγωγίσιμες στο (a, b). Τότε υπάρχει $x \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$(f(b) - f(a))g'(x) = (g(b) - g(a))f'(x).$$

Απόδειξη:[19] Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) := f(x)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g(x), \quad x \in [a, b].$$

Η $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b) με

$$h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g'(x), \quad x \in (a, b)$$

και $h(a) = f(a)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a) = f(b)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g(b) = h(b)$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle (Θεώρημα 3.6) υπάρχει $x \in (a, b)$ με $h'(x) = 0$, το οποίο ισοδυναμεί με το αποδεικτέο. □

Πόρισμα 3.9. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο διάστημα $D \subset \mathbb{R}$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in D$. Τότε η f είναι σταθερή στο D.*[20]

Απόδειξη: Έστω $a, b \in D$ με $a < b$. Αφού $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in D$ και άρα και για κάθε $x \in (a, b) \subset D$, από το ΘΜΤ προκύπτει $f(b) = f(a)$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $a, b \in D$, η f θα είναι σταθερή στο D.[21] □

Πόρισμα 3.10. *Έστω $f, g : D \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο διάστημα $D \subset \mathbb{R}$ με $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in D$. Τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in D$.*[22]

Απόδειξη: Άσκηση. Βλ. και [1, Κεφάλαιο 11, Πόρισμα 2]. □

Ορισμός 3.4. *Μία $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, λέγεται*

[18] Το θεώρημα αυτό ονομάζεται και **Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy**, βλ. [1, Κεφάλαιο 11, Θεώρημα 8]. Για $g(x) = x$ παίρνουμε το σύνηθες Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θεώρημα 3.7), το οποίο ονομάζεται και **Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange**, βλ. [2, Θεώρημα 5.49].

[19] Όπως το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy είναι μια γενίκευση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, έτσι και η απόδειξή του. Επειδή και τα δύο χρειάζονται για την απόδειξή τους μόνο το Θεώρημα του Rolle (Θεώρημα 3.6), θα μπορούσαμε μάλιστα να αποδείξουμε κατευθείαν το παρόν θεώρημα και να πάρουμε το σύνηθες Θεώρημα Μέσης Τιμής ως πόρισμά του θέτοντας $g(x) = x$.

[20] Ισχύει και το αντίστροφο.

[21] Πιο λεπτομερώς, αυτό προκύπτει αν σταθεροποιήσουμε ένα $x_0 \in D$, αφού τότε, όπως είδαμε, θα έχουμε $f(a) = f(x_0) = f(b)$ για κάθε $a \in D$ με $a < x_0$ και για κάθε $b \in D$ με $b > x_0$. Έτσι θα έχουμε $f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x \in D$.

[22] Ισχύει και το αντίστροφο.

(α΄) **αύξουσα (ή γνησίως αύξουσα)**, *αν για κάθε* $a, b \in D$ *ισχύει:* $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$,

(β΄) **μη φθίνουσα (ή αύξουσα)**, *αν για κάθε* $a, b \in D$ *ισχύει:* $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$,

(γ΄) **φθίνουσα (ή γνησίως φθίνουσα)**, *αν για κάθε* $a, b \in D$ *ισχύει:* $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$,

(δ΄) **μη αύξουσα (ή φθίνουσα)**, *αν για κάθε* $a, b \in D$ *ισχύει:* $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.[23] *Οι (γνησίως) αύξουσες και (γνησίως) φθίνουσες συναρτήσεις ονομάζονται* **γνησίως μονότονες**, *οι μη φθίνουσες και μη αύξουσες* **(μη γνησίως) μονότονες**.[24]

Πόρισμα 3.11. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in D$, τότε η f είναι αύξουσα, και αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in D$, τότε η f είναι φθίνουσα.*[25]

Απόδειξη: Έστω $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in D$. Τότε, για κάθε $a, b \in D$ με $a < b$ έχουμε από το ΘΜΤ $f(b) > f(a)$. Έστω $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in D$. Τότε, για κάθε $a, b \in D$ με $a < b$ έχουμε από το ΘΜΤ $f(b) < f(a)$. □

Πρόταση 3.1. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής και $a \in D$. Αν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f'(x) > 0$ για $x \in (a - \delta, a) \cap D$ και $f'(x) < 0$ για $x \in (a, a + \delta) \cap D$, τότε το $a \in D$ είναι σημείο γνήσιου τοπικού μεγίστου της f.*[26]

Αντίστοιχα, αν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f'(x) < 0$ για $x \in (a - \delta, a) \cap D$ και $f'(x) > 0$ για $x \in (a, a + \delta) \cap D$, τότε το $a \in D$ είναι σημείο γνήσιου τοπικού ελαχίστου της f.

Απόδειξη: Από το ΘΜΤ παίρνουμε ότι για κάθε $x \in (a - \delta, a) \cap D$ υπάρχει κάποιο $\xi_1 \in (x, a)$ με $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi_1) > 0$ και συνεπώς (αφού $x - a < 0$) ισχύει $f(x) < f(a)$ και ότι για κάθε $x \in (a, a + \delta) \cap D$ υπάρχει κάποιο $\xi_2 \in (a, x)$ με $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi_2) < 0$ και συνεπώς (αφού $x - a > 0$) και πάλι $f(x) < f(a)$.

Η απόδειξη του δεύτερου μέρους της πρότασης γίνεται αντίστοιχα. □

Θεώρημα 3.12. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ με $f'(a) = 0$ στο $a \in D$. Αν $f''(a) > 0$, τότε η f έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο a, ενώ αν $f''(a) < 0$, τότε η f έχει γνήσιο τοπικό μέγιστο στο a.*[27]

---

[23]Οι χαρακτηρισμοί στα αριστερά είναι αυτοί που αναφέρονται στο [1] και συνηθίζονται στην αγγλοσαξονική βιβλιογραφία (increasing/non-decreasing και decreasing/non-increasing). Θα τους ακολουθήσουμε εδώ καθώς στις παρούσες σημειώσεις ακολουθούμε το [1], παρ' όλο που στην ελληνική βιβλιογραφία συνηθίζονται περισσότερο οι χαρακτηρισμοί σε παρενθέσεις.

[24]Σημειώνουμε εδώ την τετριμμένη αλλά πολύ χρήσιμη ενίοτε παρατήρηση ότι αν η f είναι αύξουσα (μη φθίνουσα), η $-f$ είναι φθίνουσα (μη αύξουσα). Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

[25]Το αντίστροφο *δεν ισχύει*: Π.χ., η $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, είναι αύξουσα, αλλά $f'(0) = 0$.

[26]Εδώ, όπως και αλλού, όταν αναφέρουμε μια ιδιότητα ενός $f'(x)$ υπονοούμε, χωρίς να το αναφέρουμε ρητά, ότι το $f'(x) \in \mathbb{R}$ υπάρχει, δηλαδή ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x.

Το αποτέλεσμα ισχύει και όταν το $a \in D$ είναι κάποιο άκρο του διαστήματος D, αφού τότε η μία από τις δύο τομές θα είναι κενή. [Υπενθυμίζουμε ότι μια πρόταση «για κάθε $x \in A$ ισχύει η ιδιότητα $P(x)$» είναι πάντα (για οποιαδήποτε ιδιότητα $P(x)$) αληθής, όταν το A είναι κενό.]

Η τιμή $f(a)$ ονομάζεται **γνήσιο μέγιστο** μίας $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ (όχι απαραίτητα διάστημα), αν ισχύει $f(x) < f(a)$ για κάθε $x \in D \setminus \{a\}$. Η $f(a)$ ονομάζεται **γνήσιο τοπικό μέγιστο** αν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε η $f(a)$ να είναι γνήσιο μέγιστο της $f|_{(a-\delta,a+\delta)\cap D}$. Το a ονομάζεται τότε **σημείο γνήσιου (τοπικού) μεγίστου**. Αντίστοιχα ορίζονται και το **γνήσιο (τοπικό) ελάχιστο** και το **σημείο γνήσιου (τοπικού) ελαχίστου**.

[27]Κατά αναλογία με αυτά που αναφέραμε σε προηγούμενη υποσημείωση, εδώ νοείται ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο a. Αυτό σημαίνει ειδικότερα ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή $(a - \delta_0, a + \delta_0) \cap D$ του a για κάποιο $\delta_0 > 0$.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το θεώρημα για την περίπτωση γνήσιου τοπικού ελαχίστου.[28] Από τον ορισμό της $f''(a)$ και αφού $f'(a) = 0$ έχουμε

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)}{h} > 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f'(a+h)/h > 0$ για κάθε $0 < |h| < \delta$.[29] Συνεπώς, θα έχουμε $f'(x) < 0$ για $x \in (a-\delta, a) \cap D$ και $f'(x) > 0$ για $x \in (a, a+\delta) \cap D$ και άρα το a θα είναι σημείο γνήσιου τοπικού ελαχίστου της f, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.[30] □

Παρατήρηση 3.3. *Στο προηγούμενο θεώρημα είδαμε ότι οι συνθήκες $f'(a) = 0$ και $f''(a) > 0$ οδηγούν στην ύπαρξη γνήσιου τοπικού ελαχίστου της f στο a (και αντίστοιχα γνήσιου τοπικού μεγίστου αν $f''(a) < 0$). Αυτό δεν θα πρέπει να μας οδηγήσει στη λανθασμένη εικασία ότι αν $f''(a) \geq 0$ θα έχουμε ενδεχομένως μη γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο a. Αρκεί να σκεφτεί κανείς τις συναρτήσεις $f(x) = x^4$, $f(x) = -x^4$, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Για όλες έχουμε $f'(0) = f''(0) = 0$ ενώ η πρώτη έχει στο 0 γνήσιο ολικό ελάχιστο, η δεύτερη γνήσιο ολικό μέγιστο και η τρίτη ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο.*

Θεώρημα 3.13. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο a,[31] όπου $f'(a) = 0$. Αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a, τότε $f''(a) \geq 0$, ενώ αν η f έχει τοπικό μέγιστο στο a, τότε $f''(a) \leq 0$.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την περίπτωση όπου η f έχει στο a τοπικό ελάχιστο. Η περίπτωση όπου η f έχει στο a τοπικό μέγιστο αποδεικνύεται ανάλογα.

Έστω λοιπόν ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a, $f'(a) = 0$ και $f''(a) < 0$. Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα 3.12, η f θα έχει και γνήσιο τοπικό μέγιστο στο a δηλαδή θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) < f(a)$ για κάθε $x \in D \cap ((a-\delta, a) \cup (a, a+\delta))$, σε αντίφαση με το ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει $\delta' > 0$ έτσι ώστε $f(x) \geq f(a)$ για κάθε $x \in D \cap (a-\delta', a+\delta')$, αφού οσοδήποτε μικρό και να επιλέξουμε το $\delta' > 0$, πάντα θα υπάρχει ένα $x \in D \cap ((a-\delta', a) \cup (a, a+\delta'))$ με $f(x) < f(a)$ και όχι $f(x) \geq f(a)$. □

Παρατήρηση 3.4. *Και σε αυτή την περίπτωση, σε αναλογία με την προηγούμενη παρατήρηση, δεν ισχύει ότι αν το $f(a)$ είναι γνήσιο τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο θα πάρουμε $f''(a) > 0$ ή $f''(a) < 0$ αντίστοιχα. Βλέπε τις συναρτήσεις $f(x) = x^4$ και $g(x) = -x^4$, $x \in \mathbb{R}$, στο $a = 0$.*

Αναφέρουμε τώρα ένα αποτέλεσμα το οποίο είναι πολύ χρήσιμο σε διάφορες καταστάσεις και το οποίο είναι μάλιστα μία ειδική περίπτωση του Κανόνα του L' Hôpital (Θεώρημα 3.15).

[28] Η περίπτωση γνήσιου τοπικού μεγίστου αποδεικνύεται ανάλογα.

[29] Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 2.1, αρκεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(h) := f'(a+h)/h$ για $h \neq 0$, τέτοια ώστε τα $a+h$ να ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f', βλ. Υποσημείωση 27, και $g(0) := f''(a)$, η οποία είναι συνεχής στο $h = 0$.

[30] Η συνέχεια της f στο $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ προκύπτει απο την παραγωγισιμότητά της στα σημεία αυτά, βλ. Υποσημείωση 27 (όπου προφανώς $\delta \leq \delta_0$).

[31] Ξανατονίζουμε ότι όταν λέμε ότι μια f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα σημείο a υποννοούμε ότι η f' ορίζεται στο $D \cap (a-\delta, a+\delta)$ για κάποιο $\delta > 0$.

Θεώρημα 3.14. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα, f συνεχής στο $a \in D$ και έστω ότι υπάρχει $\delta_0 > 0$ έτσι ώστε f παραγωγίσιμη στο $D \cap ((a-\delta_0, a) \cup (a, a+\delta_0))$.*

Αν $\lim_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο a με $f'(a) = \ell$.

Απόδειξη: Για κάθε $h \in (0, \delta_0)$ η f είναι συνεχής στο $[a, a+h]$, παραγωγίσιμη στο $(a, a+h)$.[32] Από το ΘΜΤ παίρνουμε ότι υπάρχει $\alpha_h \in (a, a+h)$ με

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\alpha_h). \tag{3.2}$$

Θα δείξουμε ότι $\lim_{h \to 0^+} f'(\alpha_h) = \ell$.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{h \to 0} f'(a+h) = \ell$,[33] υπάρχει $\delta \in (0, \delta_0)$ έτσι ώστε για κάθε $0 < h < \delta$ ισχύει $|f'(a+h) - \ell| < \varepsilon$. Αφού για κάθε $h' \in (0, h)$ ισχύει $0 < h' < h < \delta$, προκύπτει ότι $|f'(a+h') - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $h' \in (0, h)$. Ειδικότερα, θέτοντας $h' = \alpha_h - a \in (0, h)$, έχουμε $|f'(\alpha_h) - \ell| < \varepsilon$. Άρα, συνοψίζοντας, βρήκαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $0 < h < \delta$ ισχύει $|f'(\alpha_h) - \ell| < \varepsilon$, δηλαδή $\lim_{h \to 0^+} f'(\alpha_h) = \ell$, και άρα από την (3.2) προκύπτει

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell. \tag{3.3}$$

Αντίστοιχα, για κάθε $h \in (-\delta_0, 0)$ η f είναι συνεχής στο $[a+h, a]$, παραγωγίσιμη στο $(a+h, a)$.[34] Από το ΘΜΤ παίρνουμε ότι υπάρχει $\beta_h \in (a+h, a)$ με

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\beta_h). \tag{3.4}$$

Όμοια με πριν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $-\delta < h < 0$ και κάθε $h < h' < 0$ ισχύει $|f'(a+h') - \ell| < \varepsilon$ και άρα, ειδικότερα, αφού $\beta_h - a \in (h, 0)$, $|f'(\beta_h) - \ell| < \varepsilon$, δηλαδή $\lim_{h \to 0^-} f'(\beta_h) = \ell$, και από την (3.4) προκύπτει

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell. \tag{3.5}$$

Από τις (3.3), (3.5), την Πρόταση 1.5 και τον Ορισμό 3.1 της παραγώγου, προκύπτει $f'(a) = \ell$. □

Κλείνουμε τη μελέτη των ιδιοτήτων των παραγώγων με ένα ακόμα χρήσιμο αποτέλεσμα για τον υπολογισμό ορίων.

Θεώρημα 3.15. (Κανόνας του L' Hôpital)
Έστω $f, g : D \to \mathbb{R}$ με $D = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ για κάποιο $\delta > 0$, παραγωγίσιμες στο D με $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$. Τότε ισχύει:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

[32] Εκτός αν το a είναι το δεξί άκρο του διαστήματος D, οπότε δεν εξετάζουμε την περίπτωση αυτή.
[33] βλ. Πρόταση 1.1
[34] Εκτός αν το a είναι το αριστερό άκρο του διαστήματος D, οπότε δεν εξετάζουμε την περίπτωση αυτή.

Απόδειξη: Θέτουμε $f(a) := 0 =: g(a)$. Έτσι οι f, g ορίζονται τώρα στο $D \cup \{a\}$ και είναι συνεχείς σε αυτό.[35] Αφού οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο D και συνεχείς στο $D \cup a$ μπορούμε να εφαρμόσουμε και το ΘΜΤ (Θεώρημα 3.7) και το γενικευμένο ΘΜΤ (Θεώρημα 3.8) για τις f, g στα διαστήματα $[a, x]$ για $x \in (a, a+\delta)$ και $[x, a]$ για $x \in (a-\delta, a)$.

Εφαρμόζοντας στο διάστημα $[a, x]$, $x \in (a, a+\delta)$ το ΘΜΤ στην g προκύπτει ότι $g(x) \neq 0$, αφού, σύμφωνα με το ΘΜΤ, υπάρχει κάποιο $\xi \in (a, x)$ έτσι ώστε

$$0 \neq g'(\xi) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{g(x)}{x - a} \quad \Rightarrow \quad g(x) \neq 0.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το γενικευμένο ΘΜΤ στις f, g στο διάστημα $[a, x]$, παίρνουμε ότι υπάρχει κάποιο $\alpha_x \in (a, x)$ έτσι ώστε

$$f(x)g'(\alpha_x) = g(x)f'(\alpha_x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = h(\alpha_x), \quad h(x) := \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.6}$$

Αφού $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ και $\alpha_x \in (a, x)$, παίρνουμε με τον ίδιο τρόπο όπως στην απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος 3.14 $\lim\limits_{x \to a^+} h(\alpha_x) = \ell$,[36] και συνεπώς από την (3.6) $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Ανάλογα,[37] εφαρμόζοντας στο διάστημα $[x, a]$, $x \in (a - \delta, a)$, το ΘΜΤ στην g παίρνουμε $g(x) \neq 0$ και, εφαρμόζοντας το γενικευμένο ΘΜΤ στις f, g στο διάστημα αυτό, παίρνουμε ότι υπάρχει κάποιο $\beta_x \in (x, a)$ έτσι ώστε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\beta_x)}{g'(\beta_x)} = h(\beta_x),$$

όπου $\lim\limits_{x \to a} h(\beta_x) = \ell$ και συνεπώς $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Αφού τα δύο πλευρικά όρια της $f(x)/g(x)$ για $x \to a$ υπάρχουν και ισούνται με το ℓ, προκύπτει το αποδεικτέο (Πρόταση 1.5). □

Παρατήρηση 3.5. *Το Θεώρημα 3.14 προκύπτει από τον Κανόνα του L' Hôpital. Άσκηση.*

3.2.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 11]:

SOS: 1-4, 6, 8
Συνιστώμενες: 28, 29, 34, 48, 49, 53-57, [65]

[35] Ως παραγωγίσιμες στο D, οι f, g ήταν εξ αρχής συνεχείς στο D και αφότου ορίσαμε $f(a) = 0 = g(a)$ και ισχύει $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ είναι και συνεχείς στο a.

[36] Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta' > 0$ έτσι ώστε για κάθε x με $0 < x - a < \delta'$ να ισχύει $|h(x) - \ell| < \varepsilon$. Ειδικότερα, $|h(x') - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x' \in (a, x) \Leftrightarrow 0 < x' - a < x - a$ για κάθε τέτοιο x (δηλαδή με $0 < x - a < \delta'$). Επιλέγοντας $x' = \alpha_x \in (a, x)$, έχουμε δηλαδή $|h(\alpha_x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε x με $0 < x - a < \delta'$. Άρα *(γραμμένα όλα μαζί, αυτά που βρήκαμε)*, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta' > 0$ έτσι ώστε για κάθε x με $0 < x - a < \delta'$ να ισχύει $|h(\alpha_x) - \ell| < \varepsilon$. Αυτός είναι όμως ο ορισμός του ορίου σε ένα σημείο από τα δεξιά, $\lim\limits_{x \to a^+} h(\alpha_x) = \ell$.

[37] Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη, βλ. και την απόδειξη του Θεωρήματος 3.14.

3.3 Αντίστροφες συναρτήσεις

Ορισμός 3.5. *(α′) Μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **1-1** *αν για κάθε* $a, b \in D$ *με* $a \neq b$ *ισχύει* $f(a) \neq f(b)$ *ή, ισοδύναμα, αν για κάθε* $a, b \in D$ *για τα οποία ισχύει* $f(a) = f(b)$ *προκύπτει* $a = b$.

(β′) Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ *είναι 1-1. Τότε η συνάρτηση* $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$, *η οποία αντιστοιχεί σε κάθε* $y \in f(D)$ *το μοναδικό*[38] $x \in D$ *για το οποίο ισχύει* $f(x) = y$, *ονομάζεται* **αντίστροφη (συνάρτηση) της** f.

Παρατήρηση 3.6. *(α′) Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο*

$$f(D) := \{y \in \mathbb{R} : \exists\ x \in D : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in D\}$$

είναι το σύνολο τιμών της f *ή η εικόνα της* f *ή η εικόνα του* D *υπό (δηλαδή, κάτω από) την* f.

(β′) Η μοναδικότητα του $x \in D$ *με* $f(x) = y \in f(D)$ *στον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει ακριβώς από το ότι η* f *είναι 1-1: Αν για δοσμένο* $y \in f(D)$ *υπήρχαν* $x_1, x_2 \in D$ *με* $x_1 \neq x_2$ *και* $f(x_1) = y = f(x_2)$, *τότε η* f *δεν θα ήταν 1-1, σύμφωνα με τον ορισμό (του 1-1).*

Αυτό σημαίνει επίσης ότι αν μία συνάρτηση f *δεν είναι 1-1, δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση* f^{-1}, *καθώς οι συναρτήσεις αντιστοιχούν σε κάθε σημείο του πεδίο ορισμού τους έναν μονοδικό αριθμό, ενώ στην περίπτωση μίας συνάρτησης* f *που δεν είναι 1-1 σε κάποιο σημείο της εικόνας* $f(D)$ *της* f *(δηλαδή του πεδίου ορισμού της* f^{-1}*) θα αντιστοιχούσαν περισσότερα από ένα σημεία στο πεδίο ορισμού* D *της* f *(δηλαδή στην εικόνα της* f^{-1}*).*

Σχετικά με την τελευταία παρένθεση: Από τον ορισμό της ανίστροφης συνάρτησης f^{-1} *έχουμε ότι για κάθε* $y \in f(D)$ *ισχύει* $f^{-1}(y) = x \in D$ *και άρα* $f^{-1}(f(D)) \subset D$ *και για κάθε* $x \in D$ *υπάρχει* $y \in f(D)$ *με* $f^{-1}(y) = x$ *και άρα* $D \subset f^{-1}(f(D))$. *Συνεπώς,* $f^{-1}(f(D)) = D$.

(γ′) Αξίζει να σημειωθεί ότι για κάθε συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ *και κάθε* $A \subset \mathbb{R}$ *ορίζεται η* **αντίστροφη εικόνα του** A, $f^{-1}(A) := \{x \in D : f(x) \in A\}$. *Ειδικότερα, για κάθε* $A \supset f(D)$ *έχουμε* $f^{-1}(A) = D$.

Επίσης, για κάθε $y \in f(D)$ *έχουμε* $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in D : f(x) = y\}$, *το οποίο είναι για κάθε* $y \in f(D)$ *το μονοσύνολο* $\{x\}$, *όπου* $f(x) = y$ *(και γράφουμε τότε* $f^{-1}(y) = x$*), αν και μόνο αν η* f *είναι 1-1.*

Π.χ., για τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, *έχουμε* $f^{-1}(c) = \mathbb{R}$ *και* $f^{-1}(y) = \emptyset$ *για* $y \neq c$.

(δ′) Σημειώνουμε ακόμα ότι από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ *για 1-1 συναρτήσεις* $f : D \to \mathbb{R}$ *προκύπτει η ισοδυναμία*

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x, \quad x \in D, \quad y \in f(D),$$

[38]βλ. την επόμενη παρατήρηση

η οποία συνεπάγεται

$$(f \circ f^{-1}) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \quad \forall\ y \in f(D)$$

και

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \forall\ x \in D.$$

(ε΄) *Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, όταν ορίζεται, δηλαδή όταν η f είναι 1-1, είναι και αυτή 1-1.*

Πράγματι, αν $y_1 \neq y_2$, τότε $x_1 = f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2) = x_2$, αφού, αν είχαμε $x_1 = x_2$, θα είχαμε $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, άτοπο.

Παρατήρηση 3.7. (α΄) *Οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις, δηλαδή, οι (γνησίως) αύξουσες ή φθίνουσες συναρτήσεις, είναι 1-1.*

Πράγματι, αν η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε για κάθε $a, b \in D$ με $a \neq b$ θα ισχύει είτε $a < b$ είτε $b < a$. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας (χ.β.τ.γ.), ότι ισχύει το πρώτο, $a < b$. Αν η f είναι αύξουσα, τότε θα έχουμε $f(a) < f(b)$, αν είναι φθίνουσα θα έχουμε $f(a) > f(b)$. Σε κάθε περίπτωση, για $a \neq b$ θα έχουμε $f(a) \neq f(b)$.

(β΄) *Επίσης, και η αντίστροφη συνάρτηση μιας αύξουσας ή φθίνουσας συνάρτησης είναι και αυτή αύξουσα ή φθίνουσα, αντίστοιχα.*

Πράγματι, έστω f αύξουσα. Τότε για κάθε $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$ θα έχουμε $x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$, δηλαδή η f^{-1} θα είναι αύξουσα, γιατί αν είχαμε $x_1 \geq x_2$ τότε (αφού η f είναι αύξουσα) θα είχαμε $y_1 = f(x_1) \geq y_2 = f(x_2)$, άτοπο.

(γ΄) *Οι μη φθίνουσες και οι μη αύξουσες συναρτήσεις δεν είναι απαραίτητα 1-1, εκτός φυσικά αν είναι (γνησίως) αύξουσες ή φθίνουσες.*

Πράγματι, μία σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $x \in D$, $c \in \mathbb{R}$, είναι μη φθίνουσα και μη αύξουσα, αλλά δεν είναι 1-1 αφού για οποιαδήποτε $a, b \in D$ με $a \neq b$ ισχύει $f(a) = f(b) = c$.

Παράδειγμα 3.5. *Η ισχύς των παρακάτω αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. (Η διαπίστωσή τους είναι άμεση από τον ορισμό και την προηγούμενη παρατήρηση.)*

(α΄) *Οι γραμμικές, μη σταθερές, συναρτήσεις $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, είναι 1-1.*

(β΄) *Οι σταθερές συναρτήσεις δεν είναι 1-1.*

(γ΄) *Η $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι 1-1, ενώ η $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, είναι 1-1.*

(δ΄) *Γενικότερα, οι συναρτήσεις $f(x) = x^n$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, και οι συναρτήσεις $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ περιττός, είναι 1-1*

Παρατήρηση 3.8. *(α΄) Υπάρχει ένα ωραίο γεωμετρικό κριτήριο για να διαπιστώσει κανείς από το γράφημα (ή, αλλιώς, τη γραφική παράσταση) μιας συνάρτησης αν αυτή είναι 1-1:*

Αυτό θα ισχύει αν δεν υπάρχει οριζόντια ευθεία (δηλαδή, παράλληλη προς τον άξονα των x) που να τέμνει σε δύο σημεία το γράφημα της συνάρτησης.

Εδώ αξίζει να θυμηθούμε ότι για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι δεν υπάρχει κάθετη ευθεία (δηλαδή, παράλληλη προς το άξονα των y) που να τέμνει το γράφημα της συνάρτησης σε δύο σημεία.

(β΄) Ακόμα, αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 και συνεπώς έχει αντίστροφη f^{-1}, τότε το γράφημα της αντίστροφης είναι ο κατοπτρισμός στη διαγώνιο $y = x$ (δηλαδή στο γράφημα της ταυτοτικής συνάρτησης $I(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$) του γραφήματος της f.

Πράγματι, έστω $f : D \to \mathbb{R}$ είναι 1-1. Τότε, το γράφημα της f είναι το

$$\Gamma_f := \{(x, y) : y = f(x), x \in D\} = \{(x, f(x)) : x \in D\},$$

ενώ το γράφημα της f^{-1} είναι το

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(y, x) : x = f^{-1}(y), y \in f(D)\} = \{(y, f^{-1}(y)) : y \in f(D)\}$$

Αφού $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$, όπου $x \in D$, $y \in f(D)$, βλέπουμε ότι το Γ_f και το $\Gamma_{f^{-1}}$ αποτελούνται το μεν πρώτο από τα ζεύγη (x, y) το δε δεύτερο από τα ζεύγη (y, x), όπου στα δύο ζεύγη οι αριθμοί x και y είναι οι ίδιοι, αλλά σε διαφορετική θέση. Το (y, x) είναι ο κατοπτρισμός του (x, y) ως προς τη διαγώνιο.[39]

Είδαμε πιο πάνω ότι οι (γνησίως) αύξουσες ή φθίνουσες συναρτήσεις είναι 1-1, ανεξαρτήτως άλλων ιδιοτήτων τους. Για συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 3.16. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 στο διάστημα $D \subset \mathbb{R}$. Τότε η f είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα σε ολόκληρο το διάστημα D.*

Απόδειξη: (1) Έστω $a < b < c$ τρία σημεία του διαστήματος D. Αφού $a \neq c$ θα έχουμε ή $f(a) < f(c)$ ή $f(a) > f(c)$.

Στην πρώτη περίπτωση θα πρέπει να ισχύει $f(a) < f(b) < f(c)$: Πράγματι, αν ίσχυε $f(b) < f(a)$, θα υπήρχε ένα $x \in (b, c)$ με $f(x) = f(a)$, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, που είναι άτοπο, αφού η f είναι 1-1 στο D και άρα και στο $[a, c]$. Αντίστοιχα, αν $f(b) > f(c)$, θα υπήρχε ένα $x \in (a, b)$ με $f(y) = f(c)$ που θα ήταν πάλι άτοπο, αφού η f είναι 1-1 στο $[a, c]$.

Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι στη δεύτερη περίπτωση θα πρέπει να ισχύει $f(a) > f(b) > f(c)$.[40]

[39] Για να το δείτε καλύτερα αυτό, σχεδιάστε μερικά σημεία (a, b) και (b, a) και δείτε που βρίσκονται ως προς τη διαγώνιο $y = x$ ή δείτε τα Σχήματα 4 και 5 στο Κεφάλαιο 12 του [1].

[40] Η ουσία δηλαδή είναι ότι για τρία σημεία σε αύξουσα διάταξη οι αντίστοιχες τιμές είναι και αυτές διατεταγμένες με ενιαία αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη. Δεν μπορεί να συμβεί η διάταξη των τιμών να αλλάξει από αύξουσα σε φθίνουσα ή το αντίστροφο μέσα στην ίδια τριάδα. Στο (2) δείχνεται το ίδιο για τέσσερα σημεία.

(2) Αν έχουμε τέσσερα σημεία $a < b < c < d$ του D, τότε θα ισχύει

$$\text{είτε} \quad f(a) < f(b) < f(c) < f(d) \quad \text{είτε} \quad f(a) > f(b) > f(c) > f(d).$$

Πράγματι, από το (1) έχουμε ότι είτε $f(a) < f(b) < f(c)$ είτε $f(a) > f(b) > f(c)$. Αν ισχύει το πρώτο, τότε θα πρέπει να ισχύει και $f(b) < f(c) < f(d)$, πάλι από το (1), και ανάλογα και για το δεύτερο.

(3) Έστω δύο οποιαδήποτε σημεία $a < b$ του D. Τότε, αν $f(a) < f(b)$, η f θα είναι αύξουσα, δηλαδή για οποιαδήποτε $c < d$ θα ισχύει $f(c) < f(d)$.

Πράγματι, αν τα $c < d$ ταυτίζονται με τα $a < b$ δεν χρειάζεται να δείξουμε τίποτα, αν το ένα από τα δύο $c < d$ ταυτίζεται με κάποιο από τα $a < b$,[41] θα έχουμε $f(c) < f(d)$ από το (1), ενώ αν τα $a < b$ και $c < d$ είναι όλα διαφορετικά, η διάταξη $f(a) < f(b)$ θα ισχύει και για τα $f(c) < f(d)$, σύμφωνα με το (2), αφού $c < d$ και $a < b$, βλ. και την Υποσημείωση 40.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι αν $f(a) > f(b)$, τότε η f θα είναι φθίνουσα. □

Παρατήρηση 3.9. *Από το προηγούμενο θεώρημα και το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού $f(D)$ της αντίστροφης $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ μιας $f : D \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα D και είναι συνεχής και 1-1 και συνεπώς, όπως μόλις είδαμε, αύξουσα ή φθίνουσα στο D, θα είναι και αυτό διάστημα.*

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα.[42]

Αν $D = [a, b]$, τότε, αφού $f(a) < f(b)$, έχουμε $[f(a), f(b)] \subset f(D)$ από το ΘΕΤ. Επίσης δεν υπάρχει $y \in\in f(D)$ με $y > f(b)$ ή $y < f(a)$ γιατί τότε η f δεν θα ήταν αύξουσα στο D.[43] *Συνεπώς, $f(D) = [f(a), f(b)]$.*[44]

Αν $D = [a, b)$, τότε $[f(a), f(c)] \subset f(D)$ για κάθε $c \in (a, b)$ και δεν υπάρχει $y \in f(D)$ με $y < f(a)$. Αυτό προκύπτει όπως πριν από το ΘΕΤ και επειδή η f είναι αύξουσα.

Εάν η f δεν είναι άνω φραγμένη στο $[a, b)$, θα υπάρχει για κάθε $y > f(a)$ ένα $x \in (a, b)$ έτσι ώστε $y = f(x)$.[45] *Συνεπώς από το ΘΕΤ $[f(a), y] \subset f(D)$ και άρα $[f(a), +\infty) = f(D)$.*[46]

Εάν η f είναι άνω φραγμένη στο $[a, b)$, τότε θα υπάρχει $\alpha = \sup f = \sup f(D) = \sup\{f(x) : x \in [a, b)\} \in (f(a), +\infty)$ από το Αξίωμα Πληρότητας και επειδή η f είναι αύξουσα.

Αυτό συνεπάγεται καταρχάς ότι δεν υπάρχει $y \in f(D)$ με $y > \alpha$, δηλαδή, $f(D) \subset [f(a), \alpha]$.

Επίσης, $\alpha \notin f(D)$, αφού αν υπήρχε $x \in (a, b)$ με $f(x) = \alpha$, τότε, αφού η f είναι αύξουσα, για κάθε $x' \in (x, b)$ θα είχαμε $f(x') > f(x) = \alpha$, που είναι άτοπο, αφού το α είναι άνω φράγμα της $f(D)$. Συνεπώς, $f(D) \subset [f(a), \alpha)$.

Από την άλλη, για κάθε $y \in (f(a), \alpha)$ υπάρχει $x \in (a, b)$ με $y = f(x)$.[47] *Συνεπώς, $[f(a), \alpha) \subset f(D)$ και άρα $f(D) = [f(a), \alpha)$.*[48]

[41] Οι περιπτώσεις που μπορούν να προκύψουν είναι $c < d = a < b$, $c < a < d = b$, $a < c < d = b$, $c = a < b < d$, $c = a < d < b$.

[42] Αν f φθίνουσα, μπορούμε να μεταφέρουμε στην f τα αποτελέσματα που θα βρούμε για την αύξουσα $-f$.

[43] Αφού τότε θα είχαμε $x \in (a, b)$ με $y = f(x) > f(b)$ ή $y = f(x) < f(a)$, αντίστοιχα, που είναι άτοπο προς το ότι η f είναι αύξουσα.

[44] Παράδειγμα στο $[0, 1]$: $f(x) = x$.

[45] Αφού η f δεν είναι άνω φραγμένη στο $[a, b)$, υπάρχει για κάθε $y > f(a)$ ένα $x \in (a, b)$ έτσι ώστε $f(x) > y + 1$ (αλλιώς το $y + 1$ θα ήταν άνω φράγμα της f). Τότε όμως από το ΘΕΤ υπάρχει $x' \in (a, x)$ με $f(x') = y$.

[46] Παράδειγμα στο $[0, 1)$: $f(x) = 1/(1 - x)$.

[47] Αφού $\alpha = \sup f(D)$, για κάθε $y < y' < \alpha$ υπάρχει $x \in (a, b)$ με $f(x) > y'$ (αλλιώς το α δεν θα ήταν το ελάχιστο άνω φράγμα του $f(D)$) και από το ΘΕΤ προκύπτει ότι υπάρχει $x' \in (a, x)$ με $f(x') = y$.

[48] Παράδειγμα στο $[0, 1)$: $f(x) = x$.

Αντίστοιχα, αν $D = (a, b]$, *τότε είτε* $f(D) = (-\infty, f(b)]$ *αν η* f *δεν είναι κάτω φραγμένη*[49] *είτε* $f(D) = (\beta, f(b)]$ *με* $\beta = \inf f = \inf f(D) = \inf\{f(x) : x \in (a, b]\}$ *αν η f είναι κάτω φραγμένη.*[50]

Αν $D = (a, b)$, *τότε το* $f(D)$ *θα είναι της μορφής* $(\beta, +\infty)$, (β, α), $(-\infty, \alpha)$, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, *ανάλογα με το αν η* f *είναι φραγμένη κάτω αλλά όχι άνω, και κάτω και άνω, άνω αλλά όχι κάτω, ούτε κάτω ούτε άνω.*[51]

Με παρόμοιο τρόπο όπως στην περίπτωση $D = [a, b)$ *αποδεικνύεται και ότι*[52] *αν* $D = [a, +\infty)$, *τότε το* $f(D)$ *θα είναι είτε της μορφής* $[f(a), +\infty)$ *αν η* f *δεν είναι άνω φραγμένη*[53] *είτε της μορφής* $[f(a), \sup f)$ *αν είναι άνω φραγμένη,*[54] *ενώ αν* $D = (a, +\infty)$ *έχουμε για το* $f(D)$ *πάλι τις περιπτώσεις* $(\inf f, +\infty)$, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, $(\inf f, \sup f)$, $(-\infty, \sup f)$.[55]

Αντίστοιχα αποτελέσματα προκύπτουν[56] *και στις περιπτώσεις όπου το* $D = (-\infty, b]$ *(εδώ, είτε* $f(D) = (-\infty, f(b)]$ *είτε* $f(D) = (\inf f, f(b)]$*) ή* $D = (-\infty, b)$ *ή* $D = \mathbb{R}$ *(στις δύο αυτές περιπτώσεις έχουμε πάλι ότι το* $f(D)$ *θα έχει μία από τις μορφές* $(\inf f, +\infty)$, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, $(\inf f, \sup f)$, $(-\infty, \sup f)$*).*[57]

Θεώρημα 3.17. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$ *συνεχής και 1-1 στο διάστημα* $D \subset \mathbb{R}$. *Τότε και η* $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ *θα είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Από το προηγούμενο Θεώρημα 3.16 έχουμε ότι η f είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα στο διάστημα D. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα.[58] Ας υποθέσουμε επίσης ότι το διάστημα D είναι ανοικτό.[59]

Έστω τώρα $b \in f(D)$ και $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $y \in f(D)$ με $|y - b| < \delta$ να ισχύει $|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon$. Αφού $b \in f(D)$ υπάρχει $a \in D$ με $b = f(a) \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$. Άρα θέλουμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $y \in f(D)$ με $|y - f(a)| < \delta$ να ισχύει $|f^{-1}(y) - a| < \varepsilon$.

[49] Παράδειγμα στο $(0, 1]$: $f(x) = -1/x$.

[50] Παράδειγμα στο $(0, 1]$: $f(x) = x$.

[51] Παραδείγματα στο $(0, 1)$: $f(x) = 1/(1 - x)$, $f(x) = x$, $f(x) = -1/x$, $f(x) = 4 - (1/x)$ για $x \le 1/2$ και $f(x) = 1/(1 - x)$ για $x \ge 1/2$.

[52] Απόδειξη: Άσκηση

[53] Παράδειγμα στο $[1, +\infty)$: $f(x) = x$.

[54] Παράδειγμα στο $[1, +\infty)$: $f(x) = -1/x$.

[55] Παραδείγματα στο $(1, +\infty)$: Άσκηση.

[56] Απόδειξη: Άσκηση.

[57] Παραδείγματα: Άσκηση.

[58] Αν η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε ανάλογα. Μπορούμε όμως και να χρησιμοποιήσουμε ότι τότε η $-f : D \to \mathbb{R}$ θα είναι αύξουσα και, εφαρμόζοντας το θεώρημα στην $-f$, να πάρουμε ότι η $(-f)^{-1} : (-f)(D) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Επειδή για $x \in D$ και $y \in f(D) \Leftrightarrow -y \in -f(D) := \{-f(x) : x \in D\} = (-f)(D)$ έχουμε $(-f)^{-1}(-y) = x \Leftrightarrow -y = (-f)(x) = -f(x) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, και άρα $(-f)^{-1}(-y) = f^{-1}(y)$, η συνέχεια της f^{-1} στο $f(D)$ προκύπτει από τη συνέχεια της $(-f)^{-1}$ στο $(-f)(D) = -f(D)$. [Πράγματι (σχηματικά· με τον ακολουθιακό ορισμό της συνέχειας που θα γνωρίσουμε αργότερα ο ακόλουθος συλλογισμός είναι αυστηρός, με τον $\varepsilon - \delta$-ορισμό που γνωρίζουμε θα πρέπει να μεταφραστεί σε αυτόν), $y \to a$ στο $f(D) \Leftrightarrow -y \to -a$ στο $-f(D) \Rightarrow f^{-1}(y) = (-f)^{-1}(-y) \to (-f)^{-1}(-a) = f^{-1}(a)$.]

[59] Αν το διάστημα D δεν είναι ανοικτό, δηλαδή αν είναι της μορφής $(a, b]$ ή $[a, b)$ ή $[a, b]$, μπορούμε να επεκτείνουμε τη συνεχή και αύξουσα $f : D \to \mathbb{R}$ σε μία συνεχή και αύξουσα συνάρτηση $\tilde{f}$ σε ένα ανοικτό $\tilde{D} \supset D$. Π.χ., αν $D = [a, b]$, η $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(x) := f(x)$ για $x \in D$, $\tilde{f}(x) := f(b) + (x - b)$ για $x \ge b$ και $\tilde{f}(x) := f(a) + (x - a)$ για $x \le a$ είναι συνεχής και αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για τα άλλα δύο διαστήματα απαιτείται μόνο η αντίστοιχη επέκταση στο κλειστό άκρο του D.

Επιλέγουμε $\varepsilon' \in (0,\varepsilon)$ έτσι ώστε $a-\varepsilon', a+\varepsilon' \in D$[60] και θέτουμε $\delta := \min(f(a+\varepsilon')-f(a), f(a)-f(a-\varepsilon'))$. Τότε έχουμε

$$\delta \leq f(a+\varepsilon')-f(a) \Leftrightarrow f(a)+\delta \leq f(a+\varepsilon'), \quad \delta \leq f(a)-f(a-\varepsilon') \Leftrightarrow f(a-\varepsilon') \leq f(a)-\delta,$$

και συνεπώς για κάθε $y \in f(D)$ με $|y-f(a)|<\delta \Leftrightarrow f(a)-\delta<y<f(a)+\delta$ ισχύει $f(a-\varepsilon')<y<f(a+\varepsilon')$, από το οποίο, αφού η f^{-1} είναι αύξουσα,[61] προκύπτει $a-\varepsilon'<f^{-1}(y)<a+\varepsilon' \Leftrightarrow |f^{-1}(y)-a|<\varepsilon'$ και συνεπώς $|f^{-1}(y)-a|<\varepsilon$. □

Θεώρημα 3.18. *Έστω $f: D \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 στο διάστημα $D \subset \mathbb{R}$. Αν για κάποιο $a \in f(D)$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $f^{-1}(a)$ με $f'(f^{-1}(a))=0$, τότε η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο a.*

Απόδειξη: Για κάθε $y \in f(D)$ ισχύει $f(f^{-1}(y))=y$. Αν η f^{-1} ήταν παραγωγίσιμη στο a, τότε από τον Κανόνα της Αλυσίδας και την υπόθεση $f'(f^{-1}(a))=0$ θα είχαμε

$$0=f'(f^{-1}(a))(f^{-1})'(a)=1,$$

που είναι προφανώς άτοπο. □

Θεώρημα 3.19. *Έστω $f: D \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 στο διάστημα $D \subset \mathbb{R}$. Αν για κάποιο $b \in f(D)$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $f^{-1}(b)$ με $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο b και έχει παράγωγο*

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Απόδειξη: Αφού $b \in f(D)$, υπάρχει μοναδικό $a \in D$ με $f(a)=b \Leftrightarrow a=f^{-1}(b)$. Επίσης, για κάθε $b+h \in f(D)$ υπάρχει μοναδικό $a+k(h) \in D$ με

$$f(a+k(h))=b+h \Leftrightarrow a+k(h)=f^{-1}(b+h) \Leftrightarrow k(h)=f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)$$

και η συνάρτηση $h \mapsto k(h)$ είναι συνεχής στο 0, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.17, με $k(0)=0$ και $k(h) \neq 0$ για $h \neq 0$, αφού η f^{-1} είναι 1-1. Επίσης, η συνάρτηση

$$g(k) := \frac{f(a+k)-f(a)}{k}, \quad k \neq 0, \quad g(0) := f'(a) \neq 0,$$

είναι συνεχής στο 0. Συνεπώς από το Θεώρημα 2.2 παίρνουμε

$$\lim_{h\to 0} g(k(h)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+k(h))-f(a)}{k(h)} = f'(a) \neq 0,$$

και άρα

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k(h)}{f(a+k(h))-f(a)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(k(h))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Παράδειγμα 3.6. *Το παράδειγμα στη σελίδα 215 του [1].*

[60] Αυτό μπορεί να γίνει αφού D ανοικτό και $a \in D$. Αυτός είναι και ο λόγος που θέλαμε το D να είναι ανοικτό.

[61] Αυτό προκύπτει από το ότι η f είναι αύξουσα, βλ. Παρατήρηση 3.7.

3.3.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 12]:

Το Παράδειγμα 3.5.
Το Παράδειγμα 3.6
Τα προβλήματα:
1 [Εξετάστε αν υπάρχει *συναρτηση* f^{-1}],
2 - 9, 11

Βιβλιογραφία

[1] Michael Spivak, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (μετάφραση της 4ης αγγλικής έκδοσης). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015.

[2] Σωτήρης Κ. Ντούγιας, *Απειροστικός Λογισμός I* (γ' έκδοση). Leader Books, 2007.

[3] Σωτήρης Κ. Ντούγιας, *Απειροστικός Λογισμός II* (β' έκδοση). Leader Books, 2007.