Απειροστικός Λογισμός Ι

Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΧΕ 2024/25

<u>πρόχειρες, σύντομες σημειώσεις</u>

Ιωάννης Γιαννούλης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

24 Δεκεμβρίου 2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Αριθμοί και συναρτήσεις

Το παρόν πρώτο, εισαγωγικό κεφάλαιο δεν έχει συμπεριληφθεί μέχρι τώρα στις παρούσες σημειώσεις. Αφορά την επιλογή της ύλης από τα Κεφάλαια 1 έως 4 του [1], η οποία παρουσιάστηκε στο μάθημα κατά το ΧΕ 2024/2025. Για την ακριβή ύλη παραπέμπουμε στις σημειώσεις σας από το μάθημα. Πραγματευτήκαμε τα ακόλουθα θέματα:

(α΄) Εισαγάγαμε ως «φυσιολογικά» τα σύνολα των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, των ακέραιων αριθμών $\mathbb{Z}$, των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ και εξαγάγαμε τις βασικές ιδιότητες που θέλουμε να ικανοποιούν οι πράξεις της πρόσθεσης $+$ και του πολλαπλασιασμού $\cdot$ (ιδιότητες (I1) - (I9) στο [1]) στο σύνολο των (πραγματικών) αριθμών $\mathbb{R}$, έτσι ώστε αυτό, εφοδιασμένο με αυτές τις πράξεις, να αποτελεί ένα *σώμα* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Επιπλέον, εισαγάγαμε τις ιδιότητες της διάταξης (ιδιότητες (I10) - (I12) στο [1]) στο $\mathbb{R}$.[1] (Βλ. [1, Κεφάλαιο 1].)

(β΄) Ορίσαμε την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού και μελετήσαμε τις ιδιότητές της.

(γ΄) Εισαγάμε τη μέθοδο απόδειξης μέσω *(μαθηματικής) επαγωγής* μαθηματικών προτάσεων (π.χ. ισοτήτων ή ανισοτήτων) που ισχύουν για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$ και δείξαμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$, δηλαδή ο θετικός αριθμός $x \in \mathbb{R}$ που επιλύει την εξίσωση $x^2 := x \cdot x = 1$, είναι άρρητος αριθμός. (Βλ. [1, Κεφάλαιο 2].)

(δ΄) Εισαγάγαμε την έννοια της συνάρτησης $f : D \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού $D \subset \mathbb{R}$, πεδίο τιμών $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών ή εικόνα $f(D) := \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in D : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in D\}$ και ορίσαμε τις έννοιες της πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης και σύνθεσης συναρτήσεων. Επίσης, ορίσαμε την έννοια του γραφήματος $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$ της f και της γραφικής παράστασής της στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$. Επιπλέον, γνωρίσαμε τις πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις και ειδικότερα τη σταθερή, την ταυτοτική και τις γραμμικές συναρτήσεις. (Βλ. [1, Κεφάλαια 3 και 4].)

1.1 Ασκήσεις

Μια επιλογή από προτεινόμενες ασκήσεις από τα Κεφάλαια 1 έως 4 του [1] σχετικές με τα παραπάνω θέματα, θα βρείτε στην προσωπική ιστοσελίδα του διδάσκοντα για το μάθημα, http://users.uoi.gr/giannoul/ICI_CSE/ICI_CSE.html.

[1] Το Αξίωμα Πληρότητας (ιδιότητα (I13) στο [1]), το οποίο χαρακτηρίζει μοναδικά το $\mathbb{R}$ και το διακρίνει από το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$, το πραγματευτήκαμε αργότερα, στην Ενότητα 3.2.

Κεφάλαιο 2

Όρια συναρτήσεων

Ορισμός 2.1. *Έστω μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$ *με* $D \subset \mathbb{R}$[1] *και* $a \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* D.[2] *Λέμε ότι* **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $\ell \in \mathbb{R}$ **κοντά στο** a,[3] *αν*[4]

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Γράφουμε τότε: $f(x) \to \ell$ *για* $x \to a$.

Ένα ℓ *με την παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται* **όριο της** f **κοντά στο** a.[5]

Θεώρημα 2.1. *Αν μία* f *συγκλίνει σε ένα όριο* ℓ *κοντά στο* a, *τότε το όριο αυτό είναι μοναδικό και γράφουμε:* $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Απόδειξη: Έστω ότι $f(x) \to \ell$ και $f(x) \to m$ για $x \to a$ με $\ell \neq m$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχουν σύμφωνα με τον ορισμό, αφενός, ένα $\delta_1 > 0$ έτσι ώστε

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta_1 : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

---

[1] Στις παρούσες σημειώσεις το σύμβολο $\subset$ σημαίνει απλώς υποσύνολο, όχι απαραίτητα γνήσιο. Θα μπορούσε δηλαδή να ισχύει και $D = \mathbb{R}$.

[2] Ένα $a \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης του** $D \subset \mathbb{R}$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $((a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)) \cap D \neq \emptyset$. Να προσεχθεί ότι ένα σημείο συσσώρευσης $a \in \mathbb{R}$ ενός $D \subset \mathbb{R}$ δεν είναι απαραίτητο να ανήκει στο D. Π.χ., το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $D = (0, \infty)$.

[3] Η έκφραση «κοντά στο a» χρησιμοποιείται στην ελληνική μετάφραση του βιβλίου του Spivak [1]. Θα μπορούσαμε να την αντικαταστήσουμε με την έκφραση «όταν το x τείνει ή συγκλίνει στο a».

[4] Η ακόλουθη συνθήκη (2.1) είναι ισοδύναμη με αυτές που προκύπτουν αν σε αυτήν αντικαταστήσουμε τις ανισότητες «$< \delta$» ή/και «$< \varepsilon$» με τις «$\leq \delta$» ή/και «$\leq \varepsilon$», αντίστοιχα.

Πράγματι, αν ισχύει η (2.1) για κάποιο $\varepsilon > 0$, τότε θα ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $0 < \delta' < \delta$ και κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| \leq \delta'$. Αντίστροφα, αν ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| \leq \delta'$, τότε αυτό θα ισχύει και για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta'$.

Επίσης, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, τότε προφανώς για αυτά τα x θα ισχύει και $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, ενώ, αντίστροφα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για τα πιο πάνω x να ισχύει $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, τότε για κάθε δοσμένο $\varepsilon' > 0$ μπορούμε να θεωρήσουμε το $\varepsilon = \varepsilon'/2 > 0$ και να βρούμε για αυτό το $\varepsilon > 0$ ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για τα αντίστοιχα x να ισχύει $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon = \varepsilon'/2 < \varepsilon'$.

Βλέπουμε εδώ τη σημασία των καλούμενων ποσοδεικτών $\forall$ και $\exists$ στη συνθήκη (2.1), η οποία θα πρέπει να ισχύει *μαζί με αυτούς τους ποσοδείκτες*.

[5] Να σημειωθεί ότι ο ορισμός που δίνεται εδώ είναι λίγο γενικότερος από τον ορισμό που δίνεται στο [1, σελ. 94-95], όπου απαιτείται το πεδίο ορισμού D της f να είναι τέτοιο ώστε $((a - \delta_0, a) \cup (a, a + \delta_0)) \subset D$ για κάποιο $\delta_0 > 0$. Στην πράξη, σε ό,τι δούμε στο μάθημα, αυτό σχεδόν πάντα θα ικανοποιείται, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι αντίθετο.

και, αφετέρου, ένα $\delta_2 > 0$ έτσι ώστε

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta_2 : \quad |f(x) - m| < \varepsilon.$$

Συνεπώς, αν επιλέξουμε το μικρότερο από αυτά τα δύο $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$, δηλαδή, αν θέσουμε $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, θα έχουμε

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{και} \quad |f(x) - m| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Αφού τα παραπάνω θα πρέπει να ισχύουν για κάθε $\varepsilon > 0$, και αφού $m \neq \ell$, οι ανισότητες στην (2.2) θα πρέπει να ισχύουν και για την επιλογή $\varepsilon := \frac{|m-\ell|}{2} > 0$. Τότε όμως θα έχουμε, από την τριγωνική ανισότητα,

$$|m - \ell| = |m - f(x) - (\ell - f(x))| \leq |m - f(x)| + |\ell - f(x)| < \frac{|m - \ell|}{2} + \frac{|m - \ell|}{2} = |m - \ell|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, δεν μπορεί η f κοντά στο a να συγκλίνει σε δυο διαφορετικά όρια ℓ και m, και άρα το όριό της, αν υπάρχει, θα είναι μοναδικό. □

Παρατήρηση 2.1. *Από τον Ορισμό 2.1 του ορίου $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ μέσω της συνθήκης (2.1) προκύπτει ότι το όριο αυτό είναι, όπως λέμε, μία τοπική ιδιότητα της $f : D \to \mathbb{R}$ κοντά στο σημείο συσσώρευσης a του D. Με αυτό εννοούμε ότι αν αλλάξουμε τις τιμές της f σε σημεία του D που βρίσκονται μακριά από το a, δηλαδή, σε $x \in D$ με $|x - a| \geq \delta_0$ για ένα οσοδήποτε μικρό $\delta_0 > 0$, τότε και η «αλλαγμένη» f θα έχει το ίδιο όριο. Με άλλα λόγια, για να προσδιορίσουμε το όριο $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ της f μας αρκεί να γνωρίζουμε τις τιμές της f μόνο «κοντά στο a», δηλαδή μόνο στον περιορισμό $f|_U$ της f στο $U := D \cap (a - \delta_0, a + \delta_0)$ για ένα οσοδήποτε μικρό $\delta_0 > 0$.*[6]

Πράγματι, αν $\lim_{x \to a} f|_U(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε σύμφωνα με την (2.1) θα ισχύει

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in U,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f|_U(x) - \ell| = |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Αυτό θα ισχύει και αν αντικαταστήσουμε το $\delta > 0$ με οποιοδήποτε $0 < \delta' < \min\{\delta, \delta_0\}$. Τότε όμως τα $x \in U$ με $0 < |x - a| < \delta'$ είναι ακριβώς τα $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta'$ και συνεπώς θα έχουμε

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta' > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta' : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

δηλαδή, $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$. Αντίστροφα, αν ισχύει η προηγούμενη συνθήκη, τότε, αφού $U \subset D$, θα ισχύει και

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta' > 0 \quad \forall\ x \in U,\ 0 < |x - a| < \delta' : \quad |f(x) - \ell| = |f|_U(x) - \ell| < \varepsilon,$$

δηλαδή, $\lim_{x \to a} f|_U(x) = \ell$.

Ας δούμε μερικές στοιχειώδεις εφαρμογές του Ορισμού 2.1, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν πιο κάτω για τον υπολογισμό ορίων μιας μεγάλης κατηγορίας συναρτήσεων, αυτής των ρητών συναρτήσεων.

[6] Ο **περιορισμός της** $f : D \to \mathbb{R}$ **στο** $U \subset D$ ορίζεται ως η συνάρτηση $f|_U : U \to \mathbb{R}$ με $f|_U(x) := f(x)$ για $x \in U \subset D$.

Παραδείγματα 2.1. *(α΄) Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Τότε, σε κάθε σημείο $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x\to a} f(x) = c$. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να επιλέξουμε στη συνθήκη (2.1) οποιοδήποτε $\delta > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x - a| < \delta$ θα ισχύει η πιο πάνω ανισότητα.

(β΄) Έστω η ταυτοτική συνάρτηση $g(x) = x$, πάλι με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Τότε, σε κάθε σημείο $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x\to a} g(x) = a$, αφού για κάθε δοσμένο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta = \varepsilon > 0$ έτσι ώστε να έχουμε

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - a| < \delta = \varepsilon : \quad |f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon.$$

Ας δούμε και ένα λιγότερο τετριμμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1. *Θέλουμε να δείξουμε ότι*

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \quad a \geq 0.$$

Θέλουμε, δηλαδή, να βρούμε για κάθε $a \geq 0$, το οποίο θεωρούμε στα επόμενα σταθερό, και κάθε δοσμένο $\varepsilon > 0$ ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \geq 0$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$.[7]

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $a > 0$. Τότε, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

και συνεπώς, αφού $\sqrt{x} \geq 0$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} \quad \forall\, x \geq 0.$$

Άρα, αν θέσουμε $\delta = \varepsilon\sqrt{a} > 0$, θα έχουμε για κάθε $x \geq 0$ με $|x - a| < \delta = \varepsilon\sqrt{a}$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

Ειδικότερα, αυτό θα ισχύει για κάθε $x \geq 0$ με $0 < |x - a| < \delta = \varepsilon\sqrt{a}$. Αφού αυτό μπορούμε να το κάνουμε για κάθε $\varepsilon > 0$, δείξαμε ότι για $a > 0$ ισχύει $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, σύμφωνα με τη συνθήκη (2.1).[8]

[7]Η πρώτη συνθήκη, $x \geq 0$, μπαίνει για να ορίζεται το $\sqrt{x}$.

[8]Να προσεχθεί ότι το σύνολο $A := \{x \geq 0 : |x - a| < \delta\} = [0, \infty) \cap (a - \delta, a + \delta)$, για το οποίο αποδείξαμε ότι ισχύει $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$, δεν είναι απαραίτητα ίσο με το σύνολο $B := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$. Έχουμε ισότητα αν και μόνο αν $\delta \leq a$. Συνεπώς, αν θέλουμε να εκφράσουμε το A, που χρησιμοποιείται στη συνθήκη (2.1) ως $A \setminus \{a\}$, στη μορφή ενός ανοικτού διαστήματος γύρω από το a (δηλαδή, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την τομή με το πεδίο ορισμού $[0, \infty)$ της $\sqrt{x}$) και αφού η συνθήκη (2.1) απαιτεί μόνο την *ύπαρξη* ενός $\delta > 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta := \min\{\varepsilon\sqrt{a}, a\} > 0$, έτσι ώστε να ισχύει *και* $\delta \leq \varepsilon\sqrt{a}$ *και* $\delta \leq a$. Για αυτό το $\delta > 0$ έχουμε $A = B$ και η συνθήκη (2.1) συνεχίζει να ισχύει, αφού αν ισχύει για ένα $\delta > 0$, θα ισχύει και για κάθε μικρότερό του $0 < \delta' < \delta$. (Ουσιαστικά εδώ χρησιμοποιούμε την τετριμμένη - αλλά βασική! - ιδιότητα, ότι για $0 < \delta' < \delta$ ισχύει $(a - \delta', a + \delta') \subsetneq (a - \delta, a + \delta)$.)

Αν $a = 0$, θέλουμε να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \geq 0$ με $0 < |x - 0| = |x| = x < \delta$ να ισχύει $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon$. Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας $\delta = \varepsilon^2 > 0$.[9]

Για τα όρια συναρτήσεων κοντά σε ένα a ισχύει το ακόλουθο πολύ χρήσιμο θεώρημα.[10]

Θεώρημα 2.2. *Έστω $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$. Τότε*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \ell + m, \qquad \lim_{x\to a}(fg)(x) = \ell m$$

και

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}, \quad \text{αν} \quad m \neq 0.$$

Παράδειγμα 2.2. *Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.2 στα Παραδείγματα 2.1, προκύπτει ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $c \in \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\lim_{x\to a}(cx) = ca, \quad \lim_{x\to a}(cx^n) = ca^n.$$

Συνεπώς, πάλι με εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2, για κάθε πολυώνυμο $p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ έχουμε

$$\lim_{x\to a} p(x) = \alpha_n a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0.$$

Ακόμα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ στο οποίο το πολυώνυμο $q(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$ δεν μηδενίζεται, δηλαδή, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ με $q(a) \neq 0$, έχουμε

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\alpha_n a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0}{\beta_m a^m + \beta_{m-1}a^{m-1} + \cdots + \beta_1 a + \beta_0}.$$

Πολλές φορές, για να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ είναι χρήσιμες οι ακόλουθες ισοδύναμες εκφράσεις.

Πρόταση 2.1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) = \ell &\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell\\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to a}(f(x) - \ell) = 0\\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to a}|f(x) - \ell| = 0\\ &\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}|f(a+h) - \ell| = 0.\end{aligned}$$

[9] Αφού, αν $0 < x = (\sqrt{x})^2 < \varepsilon^2$, τότε $\sqrt{x} < \varepsilon$, βλ. [1, Πρόβλημα 1-5(x)].

[10] Για την απόδειξή του παραπέμπουμε στο [1, Κεφάλαιο 5, Θεώρημα 2].

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε την πρώτη ισοδυναμία θέτουμε $x = a + h$. Τότε η συνθήκη (2.1) για το όριο $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ γίνεται

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ h \in \mathbb{R},\ a + h \in D,\ 0 < |h| < \delta: \quad |f(a+h) - \ell| < \varepsilon.$$

Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $g(h) := f(a+h)$ με πεδίο ορισμού $D_g := \{h \in \mathbb{R} : a + h \in D\}$,[11] έχουμε δηλαδή

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ h \in D_g,\ 0 < |h| < \delta: \quad |g(h) - \ell| < \varepsilon,$$

και άρα, σύμφωνα με τη συνθήκη (2.1), $\lim_{h \to 0} g(h) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = \ell$.

Η δεύτερη ισοδυναμία προκύπτει αν αντί για τη συνάρτηση f θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g_1(x) := f(x) - \ell$ με το ίδιο πεδίο ορισμού D όπως η f, αφού, χρησιμοποιώντας την g_1, η συνθήκη (2.1) γίνεται

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta: \quad |g_1(x)| < \varepsilon, \tag{2.3}$$

που σημαίνει, πάλι σύμφωνα με τον ορισμό (2.1), $\lim_{x \to a} g_1(x) = \lim_{x \to a} (f(x) - \ell) = 0$.

Η τρίτη ισοδυναμία προκύπτει από την προηγούμενη αν παρατηρήσουμε ότι για τη συνάρτηση $g_2(x) := |g_1(x)|$ που έχει πάλι πεδίο ορισμού D, έχουμε $|g_2(x)| = |g_1(x)|$ και άρα η (2.3) γίνεται

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta: \quad |g_2(x)| < \varepsilon,$$

που σημαίνει $\lim_{x \to a} g_2(x) = \lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$.

Η τέταρτη ισοδυναμία προκύπτει από την τρίτη αν εφαρμόσουμε σε αυτήν την πρώτη.[12] □

Παρατήρηση 2.2. *Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι* ***η*** f ***δεν συγκλίνει στο*** ℓ ***κοντά στο*** a, *δηλαδή, συμβολικά,* $f(x) \not\to \ell$ *για* $x \to a$, *τότε θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει η άρνηση της συνθήκης (2.1), δηλαδή, ότι ισχύει*

$$\exists\ \varepsilon > 0 \quad \forall\ \delta > 0 \quad \exists\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta: \quad |f(x) - \ell| \geq \varepsilon. \tag{2.4}$$

Αν για κάθε $\ell \in \mathbb{R}$ *ισχύει* $f(x) \not\to \ell$ *για* $x \to a$, *δηλαδή, αν η* f *δεν συγκλίνει σε κανένα* $\ell \in \mathbb{R}$ *κοντά στο* a, *λέμε ότι* **το όριο** $\lim_{x \to a} f(x)$ **δεν υπάρχει στο** $\mathbb{R}$, *συμβολικά* $\nexists \lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$.

Πριν περάσουμε σε ένα παράδειγμα συνάρτησης, η οποία δεν έχει όριο κοντά σε ένα σημείο, θα δώσουμε τους ακόλουθους ορισμούς που αφορούν μία βασική και απλή ιδιότητα συνόλων ή συναρτήσεων, η οποία θα μας χρειαστεί συχνά σε διάφορα επιχειρήματα.

Ορισμός 2.2. *Ένα σύνολο* $A \subset \mathbb{R}$ *ονομάζεται*

(α΄) ***άνω φραγμένο***, *αν υπάρχει* $M \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $x \leq M$ *για κάθε* $x \in A$. *Κάθε τέτοιο* $M \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* ***άνω φράγμα*** *του* A.

[11] Τα h που ανήκουν στο σύνολο $\{h \in \mathbb{R} : a + h \in D\}$ είναι αυτά για τα οποία $x = a + h \in D$. Είναι, δηλαδή, τα h που ανήκουν στο σύνολο $\{h = x - a = (-a) + x : x \in D\} =: (-a) + D$. Παρατηρούμε ακόμα, ότι αν το a είναι σημείο συσσώρευσης του D, τότε το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $(-a) + D$. Πράγματι, $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap D$ αν και μόνο αν $h = x - a \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap ((-a) + D)$.

[12] Με $|f(x) - \ell|$ αντί για $f(x)$ στα αριστερά των ισοτήτων της πρώτης ισοδυναμίας και 0 αντί για ℓ στα δεξιά των ισοτήτων

(β′) **κάτω φραγμένο**, *αν υπάρχει* $m \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $m \le x$ *για κάθε* $x \in A$. *Κάθε τέτοιο* $m \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **κάτω φράγμα** *του* A.

(γ′) **φραγμένο**, *αν είναι άνω και κάτω φραγμένο ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει ένα* $C > 0$ *έτσι ώστε* $|x| \le C$ *για κάθε* $x \in A$.[13]

Ορισμός 2.3. *Μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, *ονομάζεται*

(α′) **άνω φραγμένη**, *αν υπάρχει* $M \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $f(x) \le M$ *για κάθε* $x \in D$. *Κάθε τέτοιο* $M \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **άνω φράγμα** *της* f.

(β′) **κάτω φραγμένη**, *αν υπάρχει* $m \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $m \le f(x)$ *για κάθε* $x \in D$. *Κάθε τέτοιο* $m \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **κάτω φράγμα** *της* f.

(γ′) **φραγμένη**, *αν είναι άνω και κάτω φραγμένη ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει ένα* $C > 0$ *έτσι ώστε* $|f(x)| \le C$ *για κάθε* $x \in D$.

Παράδειγμα 2.3. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f(x) = \sin(1/x)$ *με πεδίο ορισμού* $D = \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Παρατηρούμε ότι η* $f : D \to \mathbb{R}$ *είναι φραγμένη, αφού* $|f(x)| \le 1$ *για κάθε* $x \in D$.

Θα δείξουμε ότι η f *δεν έχει κάποιο όριο* $\ell \in \mathbb{R}$ *κοντά στο* 0.

Καταρχάς, δεν μπορεί να ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$ *για κάποιο* $\ell \in \mathbb{R}$ *με* $|\ell| > 1$, *δηλαδή, για κάποιο* $\ell \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. *Πράγματι, για να ίσχυε αυτό, θα έπρεπε*[14] *για* $\varepsilon = |\ell| - 1 > 0$ *να υπάρχει κάποιο* $\delta > 0$ *έτσι ώστε για κάθε* $x \in (0, \delta)$ *να έχουμε* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. *Τότε όμως θα είχαμε*[15]

$$||f(x)| - |\ell|| \le |f(x) - \ell| < \varepsilon = |\ell| - 1 \quad \text{και άρα} \quad |f(x)| > |\ell| - (|\ell| - 1) = 1$$

το οποίο όμως δεν ισχύει για κάνενα $x \in D$, *όπως είδαμε πιο πάνω.*

Επίσης, δεν μπορεί να ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$ *για κάποιο* $\ell \in (-1, 1]$, *αφού για* $x_k = 1/(2k\pi - \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{N}$, *έχουμε* $f(x_k) = \sin(1/x_k) = \sin(2k\pi - \frac{\pi}{2}) = -1$ *και συνεπώς για κάθε* $\varepsilon \in (0, \ell + 1)$ *θα έχουμε*

$$|f(x_k) - \ell| = \ell + 1 > \varepsilon$$

ενώ για κάθε $\delta > 0$ *υπάρχει κάποιο* $k \in \mathbb{N}$ *έτσι ώστε* $x_k < \delta$ *ή, ισοδύναμα,* $k > \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\delta}\right)$.[16] *Συνεπώς, για* $\ell \in (-1, 1]$ *ισχύει η άρνηση της* (2.1), *δηλαδή η* (2.4).

Αντίστοιχα, αν $\ell = -1$, *επιλέγουμε τα σημεία* $\tilde{x}_k = 1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$, *για τα οποία έχουμε* $f(\tilde{x}_k) = 0$ *και συνεπώς,* $|f(\tilde{x}_k) - \ell| = 1$, *έτσι ώστε για* $\varepsilon = 1$ *να ισχύει πάλι η* (2.4), *αφού για κάθε* $\delta > 0$ *υπάρχει* $k \in \mathbb{N}$ *με* $\tilde{x}_k < \delta \Leftrightarrow k > \frac{1}{\pi\delta}$.

Πολύ χρήσιμη για τον υπολογισμό ορίων είναι η ακόλουθη πρόταση.[17]

[13] Απόδειξη της ισοδυναμίας: Άσκηση.

[14] σύμφωνα με τη συνθήκη (2.1)

[15] αντίστροφη τριγωνική ανισότητα

[16] Αυτό προκύπτει από την καλούμενη **Αρχιμήδεια Ιδιότητα** των πραγματικών αριθμών, η οποία λέει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k > x$. Αυτή την ιδιότητα θα τη γνωρίσουμε «επισήμως» λίγο αργότερα, βλ. και [1, Κεφάλαιο 8, Θεώρημα 3].

[17] Αυτή αναφέρεται πολλές φορές άτυπα και ως «μηδενική επί φραγμένη ίσον μηδενική». Βλέπε και [1, Πρόβλημα 3-21(β)].

Πρόταση 2.2. *Έστω* $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *σημείο συσσώρευσης του* D *και* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *με* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *και* g *φραγμένη. Τότε,* $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$.

Απόδειξη: Αφού η g είναι φραγμένη, υπάρχει κάποιο $C > 0$ με $|g(x)| \leq C$ για κάθε $x \in D$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε προφανώς και $\frac{\varepsilon}{C} > 0$ και αφού $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, θα υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}$. Τότε όμως για τα ίδια x θα ισχύει και $|(fg)(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$.[18] □

Παράδειγμα 2.4. *Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση έχουμε* $\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$.[19]

Ακόμα, αξίζει να παρατηρήσουμε και την ακόλουθη ιδιότητα του ορίου μιας συνάρτησης.

Πρόταση 2.3. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$ *με* $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *σε ένα σημείο συσσώρευσης* a *του* D. *Αν υπάρχει* $\delta_0 > 0$ *έτσι ώστε* $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in D$ *με* $0 < |x - a| < \delta_0$, *τότε* $\ell \geq 0$.

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή σε άτοπο. Αν ίσχυε $\ell < 0$, τότε σύμφωνα με τη συνθήκη (2.1) θα υπήρχε για το $\varepsilon = -\ell > 0$ ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Αυτό θα ισχύει και για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta' := \min\{\delta, \delta_0\}$. Συνεπώς, για αυτά τα x θα ισχύει $f(x) < \ell + \varepsilon = 0$, το οποίο είναι όμως άτοπο προς την υπόθεση ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_0$, η οποία συνεπάγεται και ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta' = \min\{\delta, \delta_0\}$. □

Επίσης, ιδιαίτερα χρήσιμο είναι και το ακόλουθο αποτέλεσμα.[20]

Πρόταση 2.4. *Έστω* $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *σημείο συσσώρευσης του* D *και έστω* $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *για* $x \in D \cap ((a - \delta_0, a) \cup (a + \delta_0))$ *και κάποιο* $\delta_0 > 0$. *Τότε, αν* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, *θα έχουμε και* $\lim_{x \to a} h(x) = \ell$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta \in (0, \delta_0)$ έτσι ώστε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$.[21] Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ έχουμε

$$g(x) - \ell \leq h(x) - \ell < \varepsilon \quad \text{και} \quad -\varepsilon < f(x) - \ell \leq g(x) - \ell$$

και άρα $-\varepsilon < g(x) - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow |g(x) - \ell| < \varepsilon$. □

Όταν μιλάμε για όρια συναρτήσεων που ορίζονται στο $\mathbb{R}$, καθώς αυτό είναι ένα διατεταγμένο σύνολο (σώμα), μπορούμε να ορίσουμε και τα καλούμενα πλευρικά όρια, από πάνω (ή από τα θετικά ή από τα δεξιά) και από κάτω (ή από τα αρνητικά ή από τα αριστερά).

[18] Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ προκύπτει $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.

[19] *Άσκηση:* Βρείτε ποια είναι τα f και g στα οποία εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.2 και που δείξαμε τις απαιτούμενες ιδιότητες που πρέπει να έχουν τα f και g αυτά.

[20] Ονομάζεται και Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Συναρτήσεων ή Κριτήριο Παρεμβολής.

[21] Για λόγους επανάληψης ας δούμε και εδώ λίγο πιο λεπτομερώς πως προκύπτει αυτό: Η ύπαρξη των ορίων $\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ μας δίνει αρχικά την ύπαρξη δύο $\delta_1, \delta_2 > 0$ έτσι ώστε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_1$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta_2$. Συνεπώς, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta' := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Αν, αρχικά, $\delta' \geq \delta_0 > 0$, επιλέγουμε έπειτα κάποιο $0 < \delta < \min\{\delta', \delta_0\}$ έτσι ώστε τελικά να έχουμε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ και $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$ όπου $\delta \in (0, \delta_0)$. (Ο λόγος που επιμένουμε να βρούμε ένα $\delta < \delta_0$ είναι προφανώς για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - a| < \delta$.)

Ορισμός 2.4. *Έστω μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$ *με* $D \subset \mathbb{R}$.

(α′) *Έστω* $a \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* $D \cap (a, \infty)$. *Λέμε ότι* **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο όριο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** a **από πάνω**, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < x - a < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{2.5}$$

και γράφουμε $f(x) \to \ell$ *για* $x \to a^+$ *ή για* $x \downarrow a$ *ή* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$ *ή* $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \ell$.

(β′) *Έστω* $a \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* $D \cap (-\infty, a)$. *Λέμε ότι* **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο όριο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** a **από κάτω**, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ -\delta < x - a < 0 : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{2.6}$$

και γράφουμε $f(x) \to \ell$ *για* $x \to a^-$ *ή για* $x \uparrow a$ *ή* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$ *ή* $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \ell$.[22] [23]

Πρόταση 2.5. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *σημείο συσσώρευσης και του* $D \cap (a, +\infty)$ *και του* $D \cap (-\infty, a)$ *και* $\ell \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Προκύπτει άμεσα από τις συνθήκες (2.1), (2.5), (2.6), αφού για κάθε $\delta > 0$ ισχύει

$$\{x \in D : 0 < |x - a| < \delta\} = \{x \in D : 0 < x - a < \delta\} \cup \{x \in D : -\delta < x - a < 0\}.$$

$\Leftarrow$: Από τις συνθήκες (2.5), (2.6) προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \forall\ x \in D,\ 0 < x - a < \delta_1 : &\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon, \\ \forall\ x \in D,\ -\delta_2 < x - a < 0 : &\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ ισχύει

$$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

και από τη συνθήκη (2.1) προκύπτει το αποδεικτέο. □

Παράδειγμα 2.5. *Έστω η συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} \alpha, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \beta, & x < 0, \end{cases}$ *για* $x \in \mathbb{R}$ *και σταθερά* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Εξετάστε υπό ποιες προϋποθέσεις στα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *υπάρχουν τα όρια* $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ *και* $\lim_{x \to 0} f(x)$ *και δώστε τις τιμές τους.*
Απάντηση: *Είναι* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \alpha$ *και* $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \beta$. *Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό των ορίων αυτών.*[24] *Το όριο* $\lim_{x \to 0} f(x)$ *υπάρχει αν και μόνο αν* $\alpha = \beta$ *και τότε* $\lim_{x \to 0} f(x) = \alpha = \beta$, *σύμφωνα με την Πρόταση* 2.5.

(Παρατηρούμε ότι η τιμή $f(0)$ *δεν έχει καμία σημασία για τα όρια αυτά.)*

[22] Τα όρια $\lim_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim_{x \to a^-} f(x)$, αν υπάρχουν, είναι μοναδικά. Αυτό προκύπτει από μια απλή προσαρμογή της απόδειξης του Θεωρήματος 2.1.

[23] Να σημειωθεί και εδώ οι ορισμοί που δίνονται για πλευρικά όρια είναι λίγο γενικότεροι από αυτούς που δίνονται στο [1, σελ. 95], όπου απαιτείται το πεδίο ορισμού D της f να είναι τέτοιο ώστε $(a, a + \delta_1) \subset D$ και $(a - \delta_2, a) \subset D$, αντίστοιχα, για κάποια $\delta_1, \delta_2 > 0$.

[24] Πβ. *[= παράβαλε = σύγκρινε]* με το Παράδειγμα 2.1 (1).

Κλείνουμε το κεφάλαιο περί ορίων συναρτήσεων με τους ορισμούς των ορίων στα οποία εμφανίζονται τα $\pm\infty$, όταν το $f(x)$ ή το x τείνουν ή συγκλίνουν προς τα $\pm\infty$.

Ορισμός 2.5. *Έστω μία συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ με $D \subset \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του D. Λέμε ότι*

(α′) **η f τείνει ή συγκλίνει στο ∞ κοντά στο a**, *συμβολικά: $f(x) \to \infty$ για $x \to a$ ή $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon},$$

(β′) **η f τείνει ή συγκλίνει στο $-\infty$ κοντά στο a**, *συμβολικά: $f(x) \to -\infty$ για $x \to a$ ή $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Παρατήρηση 2.3. *Αντίστοιχα ορίζονται και τα όρια $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \infty$ και $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = -\infty$, αν στις συνθήκες που εμφανίζονται στον προηγούμενο ορισμό αντικαταστήσουμε την έκφραση «$\forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta$» με «$\forall\ x \in D,\ 0 < x - a < \delta$» για το $x \to a^+$ και «$\forall\ x \in D,\ -\delta < x - a < 0$» για το $x \to a^-$.*[25]

Παράδειγμα 2.6. *(α′) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$.*

Η $f(x) = \dfrac{1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ και το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{R}^* \cap (0,\infty) = (0,\infty)$, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $((-\varepsilon, 0) \cup (0,\varepsilon)) \cap (0,\infty) = (0,\varepsilon)$ είναι μη κενό (περιέχει, π.χ., το $\varepsilon/2$).

Τώρα, για κάθε $\varepsilon > 0$, θέτοντας $\delta = \varepsilon > 0$, έχουμε $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < \varepsilon$ για κάθε $0 < x < \delta = \varepsilon$.

(β′) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Και εδώ, το 0 ειναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{R}^* \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, θέτοντας $\delta = \varepsilon > 0$, έχουμε $\dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow -x < \varepsilon \Leftrightarrow x > -\varepsilon$ για κάθε $0 > x > -\delta = -\varepsilon$.

Ορισμός 2.6. *Έστω μία συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$.*

(α′) Αν το $D \subset \mathbb{R}$ δεν είναι άνω φραγμένο, λέμε ότι

[25]Φυσικά, για να ορίζονται αυτά τα πλευρικά όρια από πάνω και από κάτω θα πρέπει το a να είναι σημείο συσσώρευσης του $D \cap (a,\infty)$ και του $D \cap (-\infty, a)$, αντίστοιχα. Βλ. και τον Ορισμό 2.4.

(i) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞, *συμβολικά:* $\mathsf{f}(\mathsf{x}) \to \ell$ *για* $\mathsf{x} \to \infty$ *ή* $\lim\limits_{\mathsf{x}\to\infty} \mathsf{f}(\mathsf{x}) = \ell$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ \mathsf{x} \in \mathrm{D},\ \mathsf{x} > \frac{1}{\delta}: \quad |\mathsf{f}(\mathsf{x}) - \ell| < \varepsilon,$$

(ii) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞, *συμβολικά:* $\mathsf{f}(\mathsf{x}) \to \infty$ *για* $\mathsf{x} \to \infty$ *ή* $\lim\limits_{\mathsf{x}\to\infty} \mathsf{f}(\mathsf{x}) = \infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ \mathsf{x} \in \mathrm{D},\ \mathsf{x} > \frac{1}{\delta}: \quad \mathsf{f}(\mathsf{x}) > \frac{1}{\varepsilon},$$

(iii) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞, *συμβολικά:* $\mathsf{f}(\mathsf{x}) \to -\infty$ *για* $\mathsf{x} \to \infty$ *ή* $\lim\limits_{\mathsf{x}\to\infty} \mathsf{f}(\mathsf{x}) = -\infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ \mathsf{x} \in \mathrm{D},\ \mathsf{x} > \frac{1}{\delta}: \quad \mathsf{f}(\mathsf{x}) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

(β΄) Αντίστοιχα, αν το $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$ *δεν είναι κάτω φραγμένο, λέμε ότι*

(i) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $\ell \in \mathbb{R}$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$, *συμβολικά:* $\mathsf{f}(\mathsf{x}) \to \ell$ *για* $\mathsf{x} \to -\infty$ *ή* $\lim\limits_{\mathsf{x}\to-\infty} \mathsf{f}(\mathsf{x}) = \ell$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ \mathsf{x} \in \mathrm{D},\ \mathsf{x} < -\frac{1}{\delta}: \quad |\mathsf{f}(\mathsf{x}) - \ell| < \varepsilon,$$

(ii) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** ∞ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$, *συμβολικά:* $\mathsf{f}(\mathsf{x}) \to \infty$ *για* $\mathsf{x} \to -\infty$ *ή* $\lim\limits_{\mathsf{x}\to-\infty} \mathsf{f}(\mathsf{x}) = \infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ \mathsf{x} \in \mathrm{D},\ \mathsf{x} < -\frac{1}{\delta}: \quad \mathsf{f}(\mathsf{x}) > \frac{1}{\varepsilon},$$

(iii) **η** f **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$ **όταν το** x **τείνει ή συγκλίνει στο** $-\infty$, *συμβολικά:* $\mathsf{f}(\mathsf{x}) \to -\infty$ *για* $\mathsf{x} \to -\infty$ *ή* $\lim\limits_{\mathsf{x}\to-\infty} \mathsf{f}(\mathsf{x}) = -\infty$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ \mathsf{x} \in \mathrm{D},\ \mathsf{x} < -\frac{1}{\delta}: \quad \mathsf{f}(\mathsf{x}) < -\frac{1}{\varepsilon},$$

Παράδειγμα 2.7. *(α΄)* $\lim\limits_{\mathsf{x}\to\infty} \mathsf{x} = \infty$ *και* $\lim\limits_{\mathsf{x}\to-\infty} = -\infty$.

Η $\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{x}$ *έχει πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}$, *που δεν είναι ούτε άνω φραγμένο, ούτε κάτω φραγμένο.*

Έστω $\varepsilon > 0$. *Τότε, για* $\delta = \varepsilon > 0$ *έχουμε* $\mathsf{x} > \frac{1}{\varepsilon}$ *για κάθε* $\mathsf{x} > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon}$ *και* $\mathsf{x} < -\frac{1}{\varepsilon}$ *για κάθε* $\mathsf{x} < -\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{\varepsilon}$.

(β') $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ *έχει πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, που δεν είναι ούτε άνω φραγμένο, ούτε κάτω φραγμένο.*

Έστω $\varepsilon > 0$*. Τότε, θέτοντας* $\delta = \varepsilon > 0$*, βλέπουμε ότι για κάθε* $x > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ *έχουμε* $x = |x| = |x - 0| < \varepsilon$ *και για κάθε* $x < -\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{\varepsilon} < 0$ *έχουμε* $-x = |x| = |x - 0| < \varepsilon$.

2.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 5]:
(Κάποιες περιέχονται στις παρούσες σημειώσεις.)
"SUPER SOS": 1, 2, 4, 9, 33, 34, 36, 37, 38
"SOS": 8, 10(α,β), 12, 13, 16(α), 17, 18, 21, 29, 39
Συνιστώμενες: 11, 15, 27, 32, 35

Κεφάλαιο 3

Συνέχεια

3.1 Συνέχεια σε σημείο

Ορισμός 3.1. *Έστω* $D \subset \mathbb{R}$ *ένα διάστημα*[1] *και* $f : D \to \mathbb{R}$. *Λέμε ότι η* f **είναι συνεχής στο** $a \in D$, *αν* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Παρατήρηση 3.1. *(α΄) Αφού το όριο της* f *κοντά στο* a *είναι μία τοπική ιδιότητα,*[2] *ο παραπάνω ορισμός μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού* $D \subset \mathbb{R}$ *της* $f : D \to \mathbb{R}$ *δεν είναι (ολόκληρο) διάστημα, αρκεί να υπάρχει ένα διάστημα* $I \subset D$ *με* $a \in I$.[3]

(β΄) Από τον Ορισμό 2.1 του ορίου, προκύπτει ότι η $f : D \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $a \in D$ *αν και μόνο αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

δηλαδή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in D,\ |x - a| < \delta : \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Παράδειγμα 3.1. *Από τα παραδείγματα ορίων που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο προκύπτει άμεσα ότι η σταθερή συνάρτηση, η ταυτοτική συνάρτηση, οι πολυωνυμικές συναρτήσεις, οι ρητές συναρτήσεις και η συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας είναι όλες συνεχείς συναρτήσεις σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.*

[1] Δηλαδή, το D είναι της μορφής (a, b) ή $(a, b]$ ή $[a, b)$ ή $[a, b]$ με $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$ ή είναι της μορφής $(-\infty, a)$ ή $(-\infty, a]$ ή (a, ∞) ή $[a, \infty)$ με $a \in \mathbb{R}$ ή είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$. (Αν $a = b \in \mathbb{R}$, έχουμε $(a, b) = (a, b] = [a, b) = \emptyset$ και $[a, b] = \{a\} = \{b\}$. Αυτά δεν θεωρούνται διαστήματα.) Στα επόμενα όταν θα μιλάμε για συνέχεια μιας f σε ένα a θα θεωρούμε ότι η f ορίζεται σε ένα διάστημα που περιέχει το a. Βλ. σχετικά και την Παρατήρηση 3.1.

[2] Βλ. Παρατήρηση 2.1

[3] Ας σημειωθεί ότι αν το $I \subset D$ είναι διάστημα με $a \in I$, τότε το a είναι σημείο συσσώρευσης του I και άρα και του D. (Θα μπορούσαμε να ορίσουμε τη συνέχεια της $f : D \to \mathbb{R}$ στο $a \in D$ μέσω του ορίου της f κοντά στο a, όπως κάναμε στον Ορισμό 3.1, ακόμα και για πεδία ορισμού D που έχουν μόνο την ιδιότητα το $a \in D$ να είναι σημείο συσσώρευσης του D, αφού για τέτοια πεδία ορισμού και σημεία a ορίσαμε το όριο της f. Επειδή στην πράξη αυτό δεν θα μας χρειαστεί στο μάθημα, επιλέγουμε εδώ και στα επόμενα την απλούστερη εκδοχή του Ορισμού 3.1, όπου η f [ή ένας κατάλληλος περιορισμός της] ορίζονται σε ένα διάστημα.)

Από το Θεώρημα 2.2 προκύπτει άμεσα το ακόλουθο θεώρημα.[4]

Θεώρημα 3.1. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα, $a \in D$ και $f, g : D \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο a. Τότε η $f + g$ και η fg είναι συνεχείς στο a και, αν $g(a) \neq 0$, και η $1/g$ είναι συνεχής στο a.*

Θεώρημα 3.2. *Έστω $g : D_g \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $a \in D_g$ και η $f : D_f \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $g(a) \in g(D_g) \subset D_f$.[5] Τότε η $f \circ g : D_g \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο a.*

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη συνθήκη (3.1). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $g(a)$, θα υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $y \in D_f$ με $|y - g(a)| < \delta$ να ισχύει $|f(y) - f(g(a))| < \varepsilon$. Όμως, αφού η g είναι συνεχής στο a, θα υπάρχει $\gamma > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D_g$ με $|x - a| < \gamma$ να ισχύει $|g(x) - g(a)| < \delta$, και συνεπώς, αφού $g(x) \in D_f$, από το πιο πάνω συμπέρασμα για την f προκύπτει $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$. $\square$

Στα επόμενα θα χρειαστούμε δύο απλές συνέπειες της συνέχειας σε ένα σημείο, οι οποίες προκύπτουν από τον ορισμό της και την τριγωνική ανισότητα.

Πρόταση 3.1. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $a \in D$. Αν $f(a) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in D$ με $|x - a| < \delta$. Αντίστοιχα, αν $f(a) < 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in D$ με $|x - a| < \delta$.*

Απόδειξη: Αν $f(a) > 0$, αφού η f είναι συνεχής στο a, έχουμε από τη συνθήκη (3.1) ότι για $\varepsilon = f(a) > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $|x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(a)| < f(a)$, δηλαδή, ισοδύναμα, $0 = f(a) - f(a) < f(x) < f(a) + f(a)$.[6] Αν $f(a) < 0$, εφαρμόζουμε το πρώτο αποτέλεσμα στην $-f$. $\square$

Πρόταση 3.2. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $a \in D$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε η f είναι φραγμένη στο $D \cap (a - \delta, a + \delta)$.*[7]

Απόδειξη: Αφού $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, υπάρχει π.χ. για $\varepsilon = 1$ κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in D$ με $|x - a| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(a)| < 1 \Leftrightarrow \; f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1$.[8] $\square$

3.1.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 6]:
"SOS": 1, 2(μόνο για το [1, Πρόβλημα 4-17]), 3(α,γ),
Συνιστώμενες: 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 17(α-γ)

---

[4] Για την απόδειξη βλ. και [1, Κεφάλαιο 6, Θεώρημα 1].

[5] Υπενθυμίζουμε ότι θεωρούμε ότι τα D_g και D_f είναι διαστήματα του $\mathbb{R}$, βλ. Υποσημείωση 1.

[6] Επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$ βρίσκουμε ανάλογα ένα $\delta' > 0$ για το οποίο για κάθε $x \in D$ με $|x - a| < \delta'$ ισχύει $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$.

[7] Με αυτό εννοούμε προφανώς ότι ο περιορισμός της f στο $D \cap (a - \delta, a + \delta)$ είναι φραγμένη συνάρτηση. Βλ. τον Ορισμό 2.3 και την Υποσημείωση 6.

[8] Συνεπώς, $-|f(a)| - 1 < f(x) < |f(a)| + 1 \Leftrightarrow |f(x)| < |f(a)| + 1$.

3.2 Πληρότητα των πραγματικών αριθμών

Πρίν περάσουμε στη μελέτη συνεχών συναρτήσεων σε ένα κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$, αναφέρουμε εδώ εμβόλιμα την τελευταία θεμελιώδη ιδιότητα (αξίωμα) των πραγματικών αριθμών, η οποία καθιστά το $\mathbb{R}$ «πλήρες» (σε σχέση με το $\mathbb{Q}$ που δεν έχει αυτή την ιδιότητα). Η ιδιότητα αυτή θα μας χρειαστεί για να αποδείξουμε κάποια θεμελιώδη αποτελέσματα για συνεχείς συναρτήσεις και για αυτόν τον λόγο την αναφέρουμε εδώ.

Από τον Ορισμό 2.2 γνωρίζουμε τι σημαίνει άνω φράγμα ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}$: Είναι ένας πραγματικός αριθμός $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $x \leq M$ για κάθε $x \in A$. Προφανώς, αν το M είναι άνω φράγμα του A, τότε και κάθε $M' \geq M$ θα είναι άνω φράγμα του A. Επίσης προφανώς, αν $A \neq \emptyset$, δηλαδή αν υπάρχει έστω και ένα $x_0 \in A$, τότε δεν θα είναι *κάθε* $M \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A, αφού αν επιλέξουμε $M < x_0$ δεν θα ισχύει $x \leq M$ για *κάθε* $x \in A$.

Αναρωτιόμαστε αν υπάρχει και ποιο είναι το ελάχιστο (μικρότερο) άνω φράγμα ενός μη κενού συνόλου $A \subset \mathbb{R}$. Δίνουμε καταρχάς τον προφανή ορισμό ενός τέτοιου άνω φράγματος.

Ορισμός 3.2. *Ένας αριθμός $M \in \mathbb{R}$ λέγεται* **ελάχιστο άνω φράγμα ή supremum** *ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}$, αν (i) το M είναι άνω φράγμα του A και (ii) για κάθε άνω φράγμα M' του A ισχύει $M' \geq M$.*

Ο αριθμός αυτός, αν υπάρχει, είναι μοναδικός,[9] *και συμβολίζεται με* $\sup A$.

Αντίστοιχα, ορίζεται μοναδικά το μέγιστο (μεγαλύτερο) κάτω φράγμα ενός συνόλου A.[10]

Ορισμός 3.3. *Ένας αριθμός $m \in \mathbb{R}$ λέγεται* **μέγιστο κάτω φράγμα ή infimum** *ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}$, αν (i) το m είναι κάτω φράγμα του A και (ii) για κάθε κάτω φράγμα m' του A ισχύει $m' \leq m$.*

Ο αριθμός αυτός, αν υπάρχει, είναι μοναδικός, και συμβολίζεται με $\inf A$.[11]

Επειδή οι ιδιότητες του μέγιστου κάτω φράγματος προκύπτουν κατά κάποιον τρόπο «κατοπτρικά» από αυτές του ελάχιστου άνω φράγματος, εστιάζουμε συνήθως στο τελευταίο.

Η, τελευταία κατά σειρά, ιδιότητα των πραγματικών αριθμών που τους κάνει να ξεχωρίζουν από τους ρητούς και κάνει το $\mathbb{R}$ «πλήρες» είναι η ακόλουθη:

(Ι13) (Ιδιότητα του ελάχιστου άνω φράγματος ή Αξίωμα Πληρότητας του $\mathbb{R}$):
Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα ή supremum $\sup A \in \mathbb{R}$.[12]

[9] Η μοναδικότητα του ελάχιστου άνω φράγματος, αν υπάρχει, προκύπτει από τον ίδιο τον ορισμό του. Πράγματι, αν M και $\tilde{M}$ είναι δύο ελάχιστα άνω φράγματα για ένα δοσμένο σύνολο A, τότε τα M και $\tilde{M}$ είναι, ειδικότερα, άνω φράγματα του A. Αφού το M είναι ελάχιστο άνω φράγμα, θα ισχύει συνεπώς $\tilde{M} \geq M$ και, αντίστοιχα, αφού το $\tilde{M}$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα, θα ισχύει $M \geq \tilde{M}$. Συνεπώς, $M = \tilde{M}$.

[10] Για τον, εν τω μεταξύ μάλλον προφανή, ορισμό ενός κάτω φράγματος, βλ. τον Ορισμό 2.2.

[11] Η μοναδικότητα του μέγιστου κάτω φράγματος αποδεικνύεται ανάλογα με αυτήν του ελάχιστου άνω φράγματος.

[12] Αν το $\neq \emptyset$ δεν είναι άνω φραγμένο, θεωρούμε ότι το μόνο «άνω φράγμα» του είναι το $+\infty$ και συνεπώς (αφού είναι το μόνο είναι και το ελάχιστο) θέτουμε $\sup A = +\infty$. Επίσης, αφού κάθε αριθμός $M \in \mathbb{R}$ μπορεί να θεωρηθεί άνω φράγμα του κενού συνόλου (αφού δεν υπάρχουν $x \in \emptyset$ η ιδιότητα «$x \leq M$ για κάθε $x \in \emptyset$» θεωρείται ότι ισχύει· αν και φαινομενικά παράδοξο, αυτό ανήκει στα θεμέλια της Λογικής [π.χ. η πρόταση «κάθε ψάρι που φοράει γυαλιά μυωπίας, είναι κάτοχος μιας Ferrari» θεωρείται σωστή, μιας και δεν υπάρχει τέτοιο ψάρι για να την ελέγξουμε]) ορίζουμε $\sup \emptyset := -\infty$.

Αντίστοιχα, κάθε μη κενό σύνολο A που είναι κάτω φραγμένο έχει μέγιστο κάτω φράγμα $\inf A \in \mathbb{R}$, ενώ αν δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε $\inf A = -\infty$, και $\inf \emptyset := +\infty$

Ενώ όλες οι άλλες ιδιότητες (Ι1-Ι12) ισχύουν και στο $\mathbb{Q}$, το Αξίωμα Πληρότητας (Ι13) δεν ισχύει στο $\mathbb{Q}$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής.

Πρόταση 3.3. *Το σύνολο των ρητών αριθμών δεν ικανοποιεί το Αξίωμα Πληρότητας (Ι13).*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει έστω και ένα μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{Q}$, το οποίο δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\sup A \in \mathbb{Q}$.[13] Θα δείξουμε ότι το σύνολο $S := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 2\}$, το οποίο είναι μη κενό (αφού, π.χ., $1 \in S$) και άνω φραγμένο (π.χ. από το 2, αφού, αν για κάποιο $x \in S$ είχαμε $x > 2$, τότε, μιας και $x > 0$, θα είχαμε $x^2 = x \cdot x > 2 \cdot x > 2 \cdot 2 = 4 \geq 2$, το οποίο είναι άτοπο [αφού $x \in S$ και άρα $x^2 < 2$]), δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\mu = \sup S \in \mathbb{Q}$.

Έστω ότι υπάρχει ένα τέτοιο ελάχιστο άνω φράγμα $\mu \in \mathbb{Q}$ του S. Από τον νόμο της τριχοτομίας (Ι10')[14] γνωρίζουμε ότι, αν υπάρχει τέτοιος αριθμός, τότε είτε $\mu^2 < 2$ είτε $\mu^2 > 2$ είτε $\mu^2 = 2$. Θα δείξουμε ότι τίποτα από αυτά δεν ισχύει και συνεπώς ότι η υπόθεσή μας είναι εσφαλμένη, δηλαδή ότι δεν υπάρχει τέτοιο $\mu \in \mathbb{Q}$.

Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε τον αριθμό

$$y := \frac{4+3\mu}{3+2\mu}.$$

Αφού $1 \in S$ και το μ είναι άνω φράγμα του S, θα ισχύει $\mu \geq 1 > 0$ και άρα ο y ορίζεται καλώς, είναι θετικός και ανήκει στο $\mathbb{Q}$.[15] Επίσης

$$\mu - y = \frac{2(\mu^2-2)}{3+2\mu} \quad \text{και} \quad 2 - y^2 = \frac{2-\mu^2}{(3+2\mu)^2}.$$

Έστω $\mu^2 < 2$. Τότε, $\mu < y$ και $y \in S$, το οποίο είναι άτοπο, αφού το μ έχει υποτεθεί ότι είναι άνω φράγμα του S. Έστω $\mu^2 > 2$. Τότε, $\mu > y$ και $y^2 > 2 > x^2$ για κάθε $x \in S$ που συνεπάγεται $y > x$ για κάθε $x \in S$,[16] το οποίο είναι άτοπο προς την υπόθεση ότι το μ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του S (αφού τώρα δείξαμε ότι το y είναι άνω φράγμα του S, *γνήσια μικρότερο* του μ). Άρα, για το $\mu \in \mathbb{Q}$ θα πρέπει να ισχύει $\mu^2 = 2$, το οποίο είναι άτοπο, αφού δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.[17] □

Σημείωση:
Στις παρούσες σημειώσεις δεν θα εντρυφήσουμε περαιτέρω στον θεμελιώδη ρόλο του Αξιώματος Πληρότητας (Ι13) για τον ορισμό των πραγματικών αριθμών και στις πολλές συνέπειές του.

[13] Προσοχή: Το «$\in \mathbb{Q}$» είναι το σημαντικό εδώ. Το ότι ένα μη κενό άνω φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ έχει άνω φράγμα στο $\mathbb{R}$ μας το δίνει το Αξίωμα Πληρότητας του $\mathbb{R}$.

[14] Βλ. και [1, Κεφάλαιο 1, Πρόβλημα 8]

[15] Αυτά προκύπτουν από τις ιδιότητες (Ι1-Ι12) και αφήνονται ως Άσκηση. (Για το ότι $y \in \mathbb{Q}$, αρκεί να δειχθεί ότι για $\mu = p/q$ με $p, q \in \mathbb{N}$ έχουμε $y = p'/q'$ για κάποια $p', q' \in \mathbb{N}$.)

[16] Βλ. [1, Κεφάλαιο 1, Πρόβλημα 5(x)].

[17] Έστω $\mu = p/q$ με $p, q \in \mathbb{N}$ χωρίς κοινό διαιρέτη. (Το μ είδαμε ότι είναι θετικό.) Τότε $\mu^2 = p^2/q^2 = 2$ και άρα $p^2 = 2q^2$, όπου $q^2 \in \mathbb{N}$, δηλαδή ο p^2 είναι άρτιος. Συνεπώς και ο p θα είναι άρτιος, δηλαδή $p = 2m$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. (Αν ήταν περιττός, δηλαδή αν $p = 2k+1$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε και ο $p^2 = 2(2k^2+2k)+1$ θα ήταν περιττός. [Εδώ χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη ότι κάθε φυσικός είναι είτε άρτιος είτε περιττός, βλ. και [1, Κεφάλαιο 2, Πρόβλημα 8].]) Τότε όμως, $p^2 = 4m^2 = 2q^2$ και άρα $q^2 = 2m^2$, όπου $m^2 \in \mathbb{N}$, δηλαδή ο q^2 είναι άρτιος και άρα και ο q είναι άρτιος. Συνεπώς, και ο p και ο q είναι άρτιοι και άρα έχουν κοινό διαιρέτη το 2, που είναι άτοπο προς την υπόθεση.

Αντ' αυτού, παραπέμπουμε κάθε ενδιαφερόμενο

- για μία συνοπτική ανακεφαλαίωση των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών, και ειδικότερα κάποιων βασικών στοιχείων αναφορικά με τα supremum και infimum και κάποιες άμεσες συνέπειες του Αξιώματος Πληρότητας (όπως η Αρχιμήδεια Ιδιότητα την οποία ήδη αναφέραμε στην Υποσημείωση 16), στις παλαιότερες χειρόγραφες σημειώσεις του διδάσκοντα http://users.uoi.gr/giannoul/ICI/1_2.pdf, οι οποίες, όπως και όλες που θα βρείτε στις ιστοσελίδες http://users.uoi.gr/giannoul/ICI/ICI.html και http://users.uoi.gr/giannoul/ICII/ICII.html, αποτελούν μία συλλογή των σημαντικότερων εννοιών και αποτελεσμάτων του Απειροστικού Λογισμού πραγματικών συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής, που επιλέχθηκαν από τα βιβλία [2] και [3] του Ομότιμου Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, κ. Σωτήρη Ντούγια, με πρωτοβουλία του ίδιου, για τη συνδιδασκαλία των δύο εξαμηνιαίων μαθημάτων Απειροστικού Λογισμού Ι και ΙΙ στο πρώτο έτος του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων το ακαδημαϊκό έτος 2011-2012,
- σε αυτά που αναφέρονται στο [1, Κεφάλαιο 8] μετά την απόδειξη του Θεωρήματος 7.3 εκεί (τα οποία περιλαμβάνουν επίσης την απόδειξη της Αρχιμήδειας Ιδιότητας), καθώς και στα Προβλήματα του κεφαλαίου αυτού, όπως επίσης και στα Κεφάλαια 28-30 στο [1] που περιγράφουν διεξοδικά την κατασκευή και τη μοναδικότητα του $\mathbb{R}$.[18]

Κατά τα λοιπά, στις παρούσες σημειώσεις θα εστιάσουμε σε ό,τι χρειαζόμαστε για την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού πραγματικών συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής με κατά το δυνατόν ακριβείς αναφορές για ό,τι δεν αποδεικνύεται εδώ.

3.2.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 8]:
"SOS": 1, 2
Συνιστώμενες: 12, 13

3.3 Συνέχεια σε διάστημα

Ορισμός 3.4. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα. Λέμε ότι* **η** $f : D \to \mathbb{R}$ **είναι συνεχής (στο** D**)**, *αν η* f *είναι συνεχής σε κάθε* $x \in D$.

Παρατήρηση 3.3.1. *Για* $D = [a, b]$ *αυτό σημαίνει ότι (i) για κάθε* $x_0 \in (a, b)$ *ισχύει* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *και (ii)* $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ *και* $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

Το Αξίωμα Πληρότητας (Ι13) είναι απαραίτητο για να αποδειχθούν τα ακόλουθα αποτελέσματα για *συνεχείς συναρτήσεις* που ορίζονται *σε κλειστά και φραγμένα (δηλαδή,* ***συμπαγή****)*

[18]Παρεμπιπτόντως, σημειώνουμε ότι και η «Προτεινόμενη βιβλιογραφία» στο [1] περιέχει πολύ ενδιαφέρουσες πληροφορίες σχετικά με διάφορα θέματα που θίγονται στο βιβλίο και τις προεκτάσεις τους στα Μαθηματικά.

διαστήματα.[19] Τα αποτελέσματα αυτά δίνουν *ολικές ιδιότητες* τέτοιων συναρτήσεων, δηλαδή αναφέρονται στη (και απαιτούν τη) συνέχεια των συναρτήσεων σε *ολόκληρο* το συμπαγές διάστημα, δηλαδή *σε κάθε σημείο* του, σε αντιδιαστολή με τις τοπικές ιδιότητες συναρτήσεων που είναι συνεχείς *σε κάποιο σημείο* και ισχύουν *κοντά* στο σημείο αυτό, τις βασικότερες των οποίων γνωρίσαμε στην Ενότητα 3.1. Η ολικότητα αυτή είναι ο λόγος για τον οποίο απαιτείται η χρήση του Αξιώματος Πληρότητας.

Θεώρημα 3.3. (Θεώρημα Bolzano)
Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής με* $f(a)f(b) < 0$, *τότε υπάρχει* $x \in (a, b)$ *με* $f(x) = 0$.

Απόδειξη: Η υπόθεση $f(a)f(b) < 0$ σημαίνει ότι είτε $f(a) < 0 < f(b)$ είτε $f(a) > 0 > f(b)$. Θα υποθέσουμε εδώ το πρώτο, καθώς το αποτέλεσμα για το δεύτερο προκύπτει από το πρώτο θέτοντας $g = -f$. Έστω λοιπόν $f(a) < 0 < f(b)$ και έστω το σύνολο

$$A := \{x \in [a, b] : f(y) < 0 \ \forall \ y \in [a, x]\},$$

το οποίο είναι μη κενό (αφού $a \in A$) και άνω φραγμένο (αφού για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \in [a, b]$ και συνεπώς $x \leq b$). Συνεπώς, από την ιδιότητα του ελάχιστου άνω φράγματος (I13) προκύπτει ότι το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω $\lambda := \sup A \in [a, b]$.[20]

Μάλιστα, από την Πρόταση 3.1 προκύπτει ότι $\lambda \in (a, b)$.

Πράγματι, αφού η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχουμε $f(a) < 0 < f(b)$, θα υπάρχουν $\delta, \delta' > 0$ με $a + \delta \leq b - \delta'$ έτσι ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, a + \delta)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (b - \delta', b]$.[21] Συνεπώς, $[a, a + \delta) \subset A \subset [a, b - \delta']$.[22] Άρα, αφού το λ είναι άνω φράγμα του A, θα ισχύει $\lambda \geq a + \delta$,[23] δηλαδή $\lambda > a$, και αφού το $b - \delta'$ είναι άνω φράγμα του A και το λ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, θα ισχύει $\lambda \leq b - \delta'$, δηλαδή $\lambda < b$.

Θα δείξουμε τώρα ότι για το $\lambda = \sup A \in (a, b)$ ισχύει $f(\lambda) = 0$.[24] Θα επιχειρηματολογήσουμε με απαγωγή σε άτοπο.

Πράγματι, αν $f(\lambda) < 0$, η Πρόταση 3.1 μας δίνει ότι υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset (a, b)$.[25] Αφού το λ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, θα υπάρχει

[19] Ένα σύνολο $D \subset \mathbb{R}$ ονομάζεται **συμπαγές** αν είναι κλειστό και φραγμένο. Η κλειστότητα είναι μία *τοπολογική έννοια* συνόλων, την οποία δεν θα αναλύσουμε εδώ. Αναφορικά με διαστήματα του $\mathbb{R}$, τα κλειστά είναι τα $[a, b]$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) και το $\mathbb{R}$. Συνεπώς, τα συμπαγή διαστήματα είναι μόνο τα $[a, b]$.

[20] Αφού το b είναι άνω φράγμα του A, θα ισχύει $\lambda \leq b$ και αφού $a \in A$, θα ισχύει $a \leq \lambda$.

[21] Η Πρόταση 3.1 μας δίνει καταρχάς την ύπαρξη δύο $\delta, \delta' > 0$ έτσι ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ με $x \in (a - \delta, a + \delta)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ με $x \in (b - \delta', b + \delta')$. Αυτά συνεπάγονται $a + \delta \leq b - \delta'$ και κατά μείζονα λόγο (*a fortiori*) $[a, a + \delta) \subset [a, b)$ και $(b - \delta', b] \subset (a, b]$.

[22] Πράγματι, αφού για κάθε $y \in [a, a + \delta)$ ισχύει $f(y) < 0$ και αφού για κάθε $x \in [a, a + \delta)$ έχουμε $[a, x] \subset [a, a + \delta)$, προκύπτει ότι για κάθε $x \in [a, a + \delta)$ ισχύει: $f(y) < 0 \ \forall \ y \in [a, x]$, δηλαδή, από τον ορισμό του A, $x \in A$. Άρα, $[a, a + \delta) \subset A$. (Υπενθυμίζουμε ότι για να δείξουμε $A \subset B$ πρέπει και αρκεί να δείξουμε $x \in A \Rightarrow x \in B$.)

Από την άλλη, αφού $x \in A$ συνεπάγεται ειδικότερα ότι $f(x) < 0$ και αφού για κάθε $x \in (b - \delta', b]$ έχουμε $f(x) > 0$, αυτό σημαίνει ότι κανένα $x \in (b - \delta', b]$ δεν ανήκει στο A. Αφού το A έχει μόνο στοιχεία από το $[a, b]$ και όπως μόλις είδαμε κανένα από το $(b - \delta', b]$, όλα τα στοιχεία του θα είναι από το $[a, b - \delta']$, δηλαδή θα έχουμε $A \subset [a, b - \delta']$.

[23] Αν ήταν $\lambda < a + \delta$, θα υπήρχε $x \in (\lambda, a + \delta) \subset A$ και άρα το λ δεν θα ήταν άνω φράγμα του A.

[24] Το x του ισχυρισμού θα είναι τότε αυτό το λ.

[25] Αφού $\lambda \in (a, b)$, μπορούμε πάντα να επιλέξουμε ένα μικρότερο $\delta > 0$ από αυτό που μας δίνει καταρχάς η Πρόταση 3.1, τέτοιο ώστε να ισχύει $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset (a, b)$, και προφανώς το αποτέλεσμα της πρότασης θα συνεχίσει να ισχύει στο μικρότερο αυτό διάστημα.

κάποιο $x_0 \in A$ που ανήκει στο $(\lambda-\delta, \lambda]$.[26] Αφού $x_0 \in A$, έχουμε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, x_0]$. Όμως, επειδή $x_0 \in (\lambda-\delta, \lambda]$, έχουμε $f(x) < 0$ και στο $[x_0, x_1]$ για οποιοδήποτε $x_1 \in (\lambda, \lambda+\delta)$, αφού $[x_0, x_1] \subset (\lambda-\delta, \lambda+\delta)$. Συνεπώς έχουμε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, x_1]$, δηλαδή έχουμε $x_1 \in A$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το ότι το λ είναι άνω φράγμα του A, αφού $\lambda < x_1$. Άρα, οδηγούμαστε σε άτοπο, που σημαίνει ότι το $f(\lambda) < 0$ δεν μπορεί να ισχύει.

Από την άλλη, αν $f(\lambda) > 0$, θα υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\lambda-\delta, \lambda+\delta) \subset (a, b)$. Όμως, όπως είδαμε πριν, υπάρχει $x_0 \in A \cap (\lambda-\delta, \lambda]$, που σημαίνει (από τον ορισμό του A) ότι $f(x_0) < 0$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι $f(x_0) > 0$ (αφού $x_0 \in (\lambda-\delta, \lambda]$). Άρα και η υπόθεση $f(\lambda) > 0$ οδηγεί σε άτοπο και άρα ούτε αυτό ισχύει.

Συνεπώς, $f(\lambda) = 0$. ☐

Από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει άμεσα το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.4. (Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής)
Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $[c, d] \subset [a, b]$ με $f(c) \neq f(d)$. Τότε για κάθε $y \in \mathbb{R}$ γνήσια μεταξύ των $f(c)$ και $f(d)$ υπάρχει ένα $x \in (c, d)$ έτσι ώστε $f(x) = y$.

Απόδειξη: Από τις υποθέσεις προκύπτει ότι $a \leq c < d \leq b$. Ο περιορισμός $g := f|_{[c,d]}$ της συνεχούς $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ στο $[c, d] \subset [a, b]$ είναι συνεχής συνάρτηση.[27] Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) := g(x) - y$, $x \in [c, d]$, με $y \in \mathbb{R}$ γνήσια μεταξύ των $g(c)$ και $g(d)$. Η h είναι συνεχής, και αν $g(c) < g(d)$ και $y \in (g(c), g(d))$, έχουμε $h(c) < 0 < h(d)$, ενώ αν $g(c) > g(d)$ και $y \in (g(d), g(c))$, έχουμε $h(c) > 0 > h(d)$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $h(c)h(d) < 0$, και άρα από το Θεώρημα του Bolzano (Θεώρημα 3.3) παίρνουμε ότι υπάρχει $x \in (c, d)$ με $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = f(x) = y$. ☐

Θεώρημα 3.5. (Ύπαρξη μεγίστου και ελαχίστου)
Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f **λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο (στο** $[a, b]$**)**, *δηλαδή, υπάρχουν* **σημείο μεγίστου** $x_1 \in [a, b]$ *και* **σημείο ελαχίστου** $x_2 \in [a, b]$,[28] *έτσι ώστε*

$$\min f := f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1) =: \max f \quad \forall\ x \in [a, b].$$

Παρατήρηση 3.3.2. *(α΄) Τα σημεία ακροτάτων δεν πρέπει να είναι μοναδικά. Αρκεί να σκεφτεί κανείς μία σταθερή συνάρτηση.*

(β΄) Η ύπαρξη ολικών ακροτάτων συνεπάγεται ότι η f είναι φραγμένη, βλέπε τον Ορισμό 2.3.

Απόδειξη Θεωρήματος 3.5: Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο μεγίστου $x_1 \in [a, b]$. Τότε, αφού και η $-f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, θα έχει και αυτή σημείο μεγίστου $x_2 \in [a, b]$ έτσι ώστε $-f(x) \leq -f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και άρα το x_2 θα είναι σημείο ελαχίστου της f.

[26] Αφού το λ είναι άνω φράγμα του A, για όλα τα $x \in A$ ισχύει $x \leq \lambda$. Αν τώρα δεν υπήρχε $x_0 \in A$ με $x_0 \in (\lambda-\delta, \lambda]$ αυτό θα σήμαινε ότι για όλα τα $x \in A$ ισχύει $x \leq \lambda - \delta$ και συνεπώς το $\lambda - \delta$ θα ήταν ένα άνω φράγμα του A *γνήσια μικρότερο* του λ, το οποίο όμως έρχεται σε αντίφαση με το ότι το λ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, δηλαδή με το ότι όλα τα άλλα άνω φράγματα του A είναι *μεγαλύτερα ή ίσα* του λ.

[27] Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της συνέχειας συνάρτησης σε ένα διάστημα και αφήνεται ως άσκηση. Για τον ορισμό του περιορισμού μιας συνάρτησης σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, βλ. Υποσημείωση 6.

[28] Το μέγιστο και το ελάχιστο της $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ λέγονται **ακρότατα της** f. Επειδή αφορούν τις τιμές της f σε *ολόκληρο* το πεδίο ορισμού της, ονομάζονται και **ολικά ακρότατα**. Ακόμα, λέγονται και **μέγιστη και ελάχιστη τιμή της** f, αντίστοιχα.

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η f είναι άνω φραγμένη στο $[a,b]$. Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε το σύνολο

$$A := \{x \in [a,b] : \text{η } f \text{ είναι άνω φραγμένη στο } [a,x]\}.$$

Έχουμε $A \neq \emptyset$ (αφού $a \in A$) και ότι το A είναι άνω φραγμένο (από το b). Συνεπώς, από το Αξίωμα Πληρότητας, το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\lambda = \sup A \in [a,b]$.

Μάλιστα, $\lambda = b$.

Πράγματι, αφού η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και άρα, ειδικότερα, στο a, η Πρόταση 3.2 μας δίνει ένα $0 < \delta < b-a$ έτσι ώστε η f είναι φραγμένη στο $[a, a+\delta)$. Συνεπώς, $[a,a+\delta) \subset A$ και άρα $\lambda \geq a+\delta$, δηλαδή $\lambda > a$, και ειδικότερα $\lambda \in (a,b]$. Ας υποθέσουμε ότι $\lambda < b$. Τότε, αφού η f είναι συνεχής στο $\lambda \in (a,b)$, η Πρόταση 3.2 μας δίνει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε η f είναι φραγμένη στο $(\lambda-\delta, \lambda+\delta) \subset (a,b)$. Αφού $\lambda = \sup A$, θα υπάρχει κάποιο $x_0 \in A \cap (\lambda-\delta, \lambda]$.[29] Αυτό σημαίνει ότι η f είναι άνω φραγμένη στο $[a,x_0]$. Από την άλλη η f είναι άνω φραγμένη και στο $[x_0,x_1]$ για κάθε $x_1 \in (\lambda, \lambda+\delta)$, αφού $[x_0,x_1] \subset (\lambda-\delta,\lambda+\delta)$. Συνεπώς, επιλέγοντας το μεγαλύτερο από τα δύο άνω φράγματα της f στο $[a,x_0]$ και στο $[x_0,x_1]$, έχουμε ότι η f είναι άνω φραγμένη στο $[a,x_1]$ και άρα $x_1 \in A$, όπου $x_1 > \lambda$. Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει αφού το λ είναι άνω φράγμα του A. Άρα, δεν ισχύει η υπόθεση $\lambda < b$ και συνεπώς $\lambda = b$.

Έχουμε λοιπόν ότι το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Αυτό θα ίσχυε και αν $A = [0,b)$, ενώ εμείς θέλουμε να δείξουμε ότι $A = [a,b]$. 'Ομως, αφού η f είναι συνεχής και στο b, η Πρόταση 3.2 μας δίνει ένα $0 < \delta < b-a$ έτσι ώστε η f είναι φραγμένη στο $(b-\delta, b]$, δηλαδή σε κάθε $[x,b]$ για $x \in (b-\delta,b]$. Από την άλλη, αφού το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, θα υπάρχει ένα $x_0 \in A \cap (b-\delta, b]$.[30] Άρα, η f είναι άνω φραγμένη στα $[a,x_0]$ και $[x_0,b]$ και συνεπώς, επιλέγοντας το μεγαλύτερο από τα δύο άνω φράγματα, και στο $[a,b]$.

Δείξαμε λοιπόν μέχρι τώρα ότι η συνεχής $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένη στο $[a,b]$, δηλαδή ότι το σύνολο τιμών της, $f([a,b]) := \{f(x) : x \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}$, είναι άνω φραγμένο. Αφού το σύνολο αυτό είναι μη κενό, θα έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \geq f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, σύμφωνα με το Αξίωμα Πληρότητας. Μένει να δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο $x_1 \in [a,b]$ με $f(x_1) = \lambda$. Το x_1 θα είναι τότε σημείο μεγίστου της f.

Έστω ότι $f(x) < \lambda$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε ορίζεται η συνεχής, θετική $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := 1/(\lambda - f(x))$, η οποία συνεπώς είναι άνω φραγμένη, όπως δείξαμε μόλις.[31] Από την άλλη, αφού το λ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $f([a,b])$ θα υπάρχει για κάθε $\varepsilon > 0$ ένα $x \in [a,b]$ με $f(x) > \lambda - \varepsilon \Leftrightarrow \lambda - f(x) < \varepsilon$.[32] Αυτό ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει

[29] Αν δεν υπήρχε τέτοιο $x_0 \in A$, και αφού γνωρίζουμε ότι $x \leq \lambda$ για κάθε $x \in A$ (αφού το λ είναι άνω φράγμα του A), θα είχαμε $x \leq \lambda - \delta$ για όλα τα $x \in A$ και συνεπώς το $\lambda - \delta < \lambda$ θα ήταν άνω φράγμα του A, που αντιφάσκει στο ότι το λ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A.

[30] Όπως και πριν, αν δεν υπήρχε τέτοιο $x_0 \in A$ θα είχαμε $x \leq b - \delta$ για κάθε $x \in A$ και συνεπώς το $b - \delta < b$ θα ήταν άνω φράγμα του A σε αντίφαση με το ότι το b είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A.

[31] Στο πρώτο μέρος της απόδειξης δείξαμε ότι *κάθε* συνεχής $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένη. Αυτό το αποτέλεσμα είναι διατυπωμένο στο [1] ξεχωριστά (βλ. [1, Θεώρημα 7.2]) και αποδεικνύεται όπως πιο πάνω.

[32] Ένας πολύ πρακτικός ισοδύναμος χαρακτηρισμός του $\sup A \in \mathbb{R}$ ενός μη κενού, άνω φραγμένου $A \subset \mathbb{R}$, τον οποίο έχουμε χρησιμοποιήσει ήδη αρκετές φορές στην πράξη, είναι ο ακόλουθος:

$$\lambda = \sup A \quad \Leftrightarrow \quad \text{(i) } x \leq \lambda \quad \forall\, x \in A \quad \text{και} \quad \text{(ii) } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in A : \quad x > \lambda - \varepsilon.$$

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Το (i) σημαίνει απλώς ότι το λ είναι άνω φράγμα του A. Για το (ii), παρατηρούμε ότι αν για κάποιο $\varepsilon > 0$ δεν υπήρχε $x \in A$ με $x > \lambda - \varepsilon$, θα ίσχυε $x \leq \lambda - \varepsilon$ για όλα τα $x \in A$ και συνεπώς το $\lambda - \varepsilon < \lambda$ θα ήταν άνω φράγμα του A, γνήσια μικρότερο του λ, σε αντίφαση με το ότι το λ είναι το *ελάχιστο* (δηλαδή, το μικρότερο άνω φράγμα του A. $\Leftarrow$: Το (i), όπως είπαμε, ισοδυναμεί με το ότι το λ είναι άνω φράγμα του A. Αν το λ δεν είναι το ένα $x \in [a,b]$ με $g(x) > 1/\varepsilon$ και αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι η g δεν είναι άνω φραγμένη στο $[a,b]$ και οδηγούμαστε σε άτοπο. $\square$

Παρατήρηση 3.3.3. *Οι υποθέσεις των προηγούμενων θεωρημάτων δεν μπορούν να εξασθενισθούν. Αυτό επιβεβαιώνεται από τα ακόλουθα αντιπαραδείγματα*

(α′) Η $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1 & ,x < 0, \end{cases}$ είναι ασυνεχής μόνο στο $x = 0$, αλλά δεν έχει σημείο $x_0 \in [-1,1]$ με $f(x_0) = 0$.

(β′) Η $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, είναι συνεχής, αλλά δεν είναι άνω φραγμένη. (Το $(0,1]$ ενώ είναι φραγμένο, δεν είναι κλειστό, άρα δεν είναι συμπαγές.) Ούτε η $g(x) = x$, $x \geq 0$, είναι άνω φραγμένη, ενώ είναι συνεχής και το πεδίο ορισμού της $[0,\infty)$ κλειστό, αλλά όχι φραγμένο, συνεπώς όχι συμπαγές.

(γ′) Η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ για $x \in [0,1)$ και $f(1) = 0$, είναι φραγμένη, το $[0,1]$ είναι συμπαγές, αλλά η f δεν λαμβάνει μέγιστο, αφού για κάθε $x \in [0,1)$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα $x+\varepsilon \in (0,1)$ με $\varepsilon \in (0, 1-x)$ έτσι ώστε $f(x+\varepsilon) = x+\varepsilon > x$. Δεν υπάρχει συνεπώς κάποιο $x_0 \in [0,1)$ έτσι ώστε το $f(x_0)$ να είναι μεγαλύτερο από όλα τα $x \in [0,1)$. (Η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο $x = 1$.)

3.3.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 7]:
"SOS": 1, 11, [1, Κεφάλαιο 7, Θεώρημα 8]
ΣΥΝΙΣΤΩΜΕΝΕΣ: 8, 10

3.4 Ομοιόμορφη συνέχεια

Έστω η $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Ως γνωστόν, για να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάποιο σημείο $x \in \mathbb{R}$ θα πρέπει για κάθε δοσμένο $\varepsilon > 0$ να βρούμε ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για $y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, όπου $|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |x-y||x+y|$, θα πρέπει δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ να βρούμε ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x-y||x+y| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-y| < \frac{\varepsilon}{|x+y|}, \qquad \text{αν } |x+y| > 0.$$

ελάχιστο άνω φράγμα του A, θα υπάρχει ένα $\lambda' < \lambda$ έτσι ώστε $x \leq \lambda'$ για κάθε $x \in A$, το οποίο όμως δεν ισχύει, αφού σύμφωνα με το (ii), για $\varepsilon = \lambda - \lambda' > 0$ υπάρχει κάποιο $x \in A$ με $x > \lambda - (\lambda - \lambda') = \lambda'$. $\square$

Για $x > 0$ θα πρέπει δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ να βρούμε ένα $\delta \in (0, 2x)$[33] έτσι ώστε

$$|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x-y| < \frac{\varepsilon}{x+y} \tag{3.2}$$

Αφού

$$\begin{aligned} |x-y| < \delta \quad &\Leftrightarrow \quad -\delta < y - x < \delta \\ &\Leftrightarrow \quad 2x - \delta < x + y < 2x + \delta \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2x+\delta} < \frac{1}{x+y} < \frac{1}{2x-\delta} \end{aligned} \tag{3.3}$$

(όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή $\delta \in (0, 2x)$ και άρα $2x - \delta > 0$), προκύπτει ότι θα πρέπει να επιλέξουμε ένα $\delta \in (0, 2x)$ τέτοιο ώστε [34]

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{2x+\delta} < \frac{\varepsilon}{2x}. \tag{3.4}$$

Η παραπάνω ανάλυση δείχνει αυτό στο οποίο θέλαμε να καταλήξουμε:

Ναι μεν η $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$, ανεξάρτητα του πόσο μακριά βρίσκεται το x από το 0, παρ' όλα αυτά για να δείξουμε τη συνέχειά της σε ένα σημείο $x > 0$ μέσω του ε-δ-ορισμού παρατηρούμε ότι για δοσμένο, ίδιο, σταθερό ως προς x $\varepsilon > 0$ *θα πρέπει ανάλογα με το πόσο μεγάλο είναι το $x > 0$ να επιλέξουμε αναγκαστικά ένα όλο και μικρότερο δ.*[35]

[33]Ο περιορισμός $\delta < 2x$ μπήκε απλώς έτσι ώστε για όλα τα $y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta \Leftrightarrow x - \delta < y < x + \delta \Leftrightarrow 2x - \delta < x + y < 2x + \delta$ να έχουμε $x + y > 0$ και, ως γνωστόν, δεν αλλοιώνει το ζητούμενο: Αφενός καλούμαστε να βρούμε *(μόνο) ένα* $\delta > 0$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του ε-δ-ορισμού του ορίου, χωρίς περιορισμό στο πόσο μικρό θα το επιλέξουμε, δηλαδή χωρίς περιορισμό «προς τα κάτω» (όπου «κάτω» είναι το 0). Αφετέρου, αν υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ για το οποίο ικανοποιείται η συνθήκη αυτή, τότε αυτή θα ικανοποιείται και για κάθε άλλο $\delta' \in (0, \delta)$.

[34]Αυτό προκύπτει επειδή η συνεπαγωγή (3.2) ισοδυναμεί με $(-\infty, \delta) \subset (-\infty, \frac{\varepsilon}{x+y})$, όπου $\frac{\varepsilon}{x+y} \in \left(\frac{\varepsilon}{2x+\delta}, \frac{\varepsilon}{2x-\delta}\right)$, σύμφωνα με την (3.3). Το τελευταίο σημαίνει ότι για y με $|x-y| < \delta$ το $\frac{\varepsilon}{x+y}$ μπορεί να πλησιάσει το $\frac{\varepsilon}{2x+\delta}$ από πάνω οσοδήποτε κοντά (και μάλιστα αυτό συμβαίνει όταν το y πλησιάζει το $x + \delta$ από κάτω) και συνεπώς, αφού θέλουμε $\delta \leq \frac{\varepsilon}{x+y}$ για όλα τα y με $|x-y| < \delta$ θα πρέπει να απαιτήσουμε $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2x+\delta}$, αφού αν $\delta > \frac{\varepsilon}{2x+\delta}$ θα υπήρχε μη κενή τομή του $(-\infty, \delta)$ με το $\left(\frac{\varepsilon}{2x+\delta}, \frac{\varepsilon}{2x-\delta}\right)$ και συνεπώς θα υπήρχαν y με $\frac{\varepsilon}{x+y} < |x-y| < \delta$ τα οποία θα παραβίαζαν την (3.2). Αυτό μπορεί πράγματι να συμβεί όταν $y \to (x+\delta)^-$ και μπορεί να αποδειχθεί λεπτομερώς.
Πράγματι, αν

$$\delta > \frac{\varepsilon}{2x+\delta} \Leftrightarrow 2x\delta + \delta^2 > \varepsilon \Leftrightarrow (x+\delta)^2 > x^2 + \varepsilon \Leftrightarrow x + \delta > \sqrt{x^2+\varepsilon} \Leftrightarrow x + \delta = \sqrt{x^2+\varepsilon} + \eta, \quad \eta > 0,$$

έχουμε για $y = x + \delta - \theta$ με $\theta \in (0, \delta)$:

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = (x+\delta-(x+\theta))(x+\delta+x-\theta) &= (x+\delta)^2 - 2\theta(x+\delta) - x^2 + \theta^2 \\ &= \varepsilon + \eta^2 + 2\eta\sqrt{x^2+\varepsilon} - 2\theta(x+\delta) + \theta^2 \end{aligned}$$

και συνεπώς, για $\theta \to 0^+$ προκύπτει $y^2 - x^2 \to \varepsilon + \eta^2 + 2\eta\sqrt{x^2+\varepsilon} > \varepsilon$.

[35]Διαισθητικά-γεωμετρικά αυτό δεν είναι δύσκολο να το δει κανείς: Καθώς η f αυξάνει όλο και πιο «απότομα» όσο μεγαλώνουν τα $x > 0$ (όπως ξέρουμε και θα δούμε και «επίσημα» στο επόμενο κεφάλαιο περί παραγώγισης, έχουμε $f'(x) = 2x$), αν θέλουμε να βρούμε τα y κοντά στο x έτσι ώστε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, δηλαδή έτσι ώστε τα $f(y)$ να απέχουν το πολύ μια δοσμένη σταθερή απόσταση $\varepsilon > 0$ από το $f(x)$, τόσο πιο κοντά στο x θα πρέπει να πάμε για αύξον x, ακριβώς επειδή η f αυξάνει όλο και πιο απότομα. (Υπερβάλλοντας, θα μπορούσαμε να πούμε επειδή γίνεται όλο και πιο «κάθετη».)

Με άλλα λόγια, για να δείξουμε τη συνέχεια της $f(x) = x^2$ *στα σημεία* $x \in \mathbb{R}$*, η επιλογή του* $\delta > 0$ *για δοσμένο* $\varepsilon > 0$ *δεν μπορεί να γίνει με ενιαίο ή* ομοιόμορφο *τρόπο για όλα τα* $x \in \mathbb{R}$.

Αυτό βέβαια στο παράδειγμά μας αλλάζει, αν περιοριστούμε σε κάποιο φραγμένο διάστημα των $x \in \mathbb{R}$. Π.χ., αν θεωρήσουμε την $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[0, b]$ με $b > 0$, τότε επιλέγοντας για δοσμένο $\varepsilon > 0$ το ίδιο $\delta = \frac{\varepsilon}{2b}$ για κάθε $x \in [0, b]$ προκύπτει ότι για κάθε $y \in [0, b]$ με $|x - y| < \delta$ ισχύει $|x - y||x + y| = |x - y|(x + y) \leq |x - y|2b < \delta 2b = \varepsilon$.[36]

Η δυνατότητα της ομοιόμορφης επιλογής *ενός* $\delta > 0$ στον ε-δ-ορισμό της συνέχειας *για όλα τα* $x \in D$ μιας συνεχούς συνάρτησης $f : D \to \mathbb{R}$ για δοθέν $\varepsilon > 0$ είναι μία ιδιαίτερα «καλή» και χρήσιμη ιδιότητα μιας συνεχούς συνάρτησης και για αυτόν τον λόγο η ιδιότητα αυτή έχει μία ξεχωριστή ονομασία.[37]

Ορισμός 3.5. *Μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **ομοιόμορφα συνεχής***, αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x, y \in [a, b],\ |x - y| < \delta :\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Όπως είδαμε στο παραπάνω παράδειγμα, η $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, είναι μεν συνεχής, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής, ενώ η $f(x) = x^2$, $x \in [0, b]$. Το τελευταίο δεν είναι κάποια ιδιαιτερότητα της $f(x) = x^2$, αλλά ισχύει για κάθε συνεχή συνάρτηση. Συγκεκριμένα ισχύει[38]

Θεώρημα 3.6. *Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα* $[a, b]$*, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα αυτό.*

Απόδειξη: Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, έστω $\varepsilon > 0$ και έστω το σύνολο

$$A := \{x \in [a, b] : \text{η } f \text{ είναι } \varepsilon\text{-καλή στο } [a, x]\},$$

όπου η $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ονομάζεται ε-**καλή (στο** $[\alpha, \beta]$**)** αν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $y, z \in [\alpha, \beta]$ με $|y - z| < \delta$ να ισχύει $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Συνεπώς, θέλουμε να δείξουμε ότι η f είναι ε-καλή στο $[a, b]$, δηλαδή ότι $b \in A$. Παρατηρούμε ότι αν η f είναι ε-καλή στο $[a, x]$ (δηλαδή αν $x \in A$), τότε θα είναι ε-καλή και σε κάθε $[a, x'] \subset [a, x]$ (δηλαδή τότε $x' \in A$ για κάθε $x' \in [a, x]$ ή, ισοδύναμα, $[a, x] \subset A$). Άρα, θέλουμε να δείξουμε $A = [a, b]$. Θα χρησιμοποιήσουμε το Αξίωμα Πληρότητας.

Έχουμε $a \in A$, αφού η $f : \{a\} \to \mathbb{R}$ είναι τετριμμένα ε-καλή. Επίσης τετριμμένα, η A είναι φραγμένη, αφού $A \subset [a, b]$. Συνεπώς, υπάρχει $\lambda = \sup A \in \mathbb{R}$ με $\lambda \geq a$ (αφού $a \in A$ και το λ είναι άνω φράγμα του A) και $\lambda \leq b$ (αφού το b είναι άνω φράγμα του A και λ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A). Άρα, $\lambda \in [a, b]$.

Μάλιστα, $\lambda \in (a, b]$. Πράγματι, αφού η f είναι συνεχής στο a, υπάρχει $\delta \in (0, b - a)$ έτσι ώστε για κάθε $y \in [a, a + \delta)$ ισχύει $|f(a) - f(y)| < \varepsilon/2$, και συνεπώς για κάθε $y, z \in [a, a + \delta)$

[36] Το ότι εδώ μπορέσαμε να επιλέξουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2b}$ ακόμα και για το $x = b$, οφείλεται στο ότι δεν λαμβάνουμε υπόψη μας τιμές $y > b$. Ο περιορισμός $\delta < \frac{\varepsilon}{2x}$ στην (3.4) οφειλόταν σε προβλήματα που προέκυπταν όταν $y \to (x + \delta)^+$. Αν και εκεί περιοριζόμασταν σε $y \in (x - \delta, x]$, τότε θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2x}$. Αυτό προφανώς σχετίζεται με το ότι η $f(x) = x^2$ αυξάνει πιο «απότομα» στα δεξιά ενός σημείου $x > 0$ από ότι στα αριστερά του.

[37] Προφανώς μία ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής. (Άσκηση.)

[38] Το θεώρημα δίνει μία *ικανή*, αλλά όχι *αναγκαία*, συνθήκη ομοιόμορφης συνέχειας μιας συνεχούς συνάρτησης. Προφανώς, η $f(x) = x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. (Άσκηση.)

ισχύει $|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(a)| + |f(a) - f(z)| < \varepsilon$. Άρα, η f είναι ε-καλή σε κάθε $[a, a + \delta']$ με $\delta' \in (0, \delta)$, δηλαδή $[a, a + \delta) \subset A$ και συνεπώς $\lambda \geq a + \delta > a$.

Έστω τώρα $\lambda \in (a, b)$. Αφού η f είναι συνεχής στο λ, υπάρχει $\delta \in (0, \min\{b - \lambda, \lambda - a\})$ έτσι ώστε, αν $|y - \lambda| < \delta$, ισχύει $|f(y) - f(\lambda)| < \varepsilon/2$ και άρα, αν $|y - \lambda|, |z - \lambda| < \delta$, ισχύει $|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(\lambda)| + |f(\lambda) - f(z)| < \varepsilon$. Συνεπώς, η f είναι ε-καλή στο $[\lambda - \delta/2, \lambda + \delta/2]$.

Από την άλλη, αφού $\lambda = \sup A$, για κάθε $\delta' \in (0, \lambda - a)$ υπάρχει ένα $x \in (\lambda - \delta', \lambda]$ έτσι ώστε $x \in A \Leftrightarrow [a, x] \subset A \Rightarrow \lambda - \delta' \in A$. Συνεπώς, επιλέγοντας $\delta' = \delta/2$, προκύπτει ότι η f είναι ε-καλή και στο $[a, \lambda - \delta/2]$.

Όμως, όπως θα αποδείξουμε στο τέλος της παρούσας απόδειξης, αν μία συνεχής συνάρτηση f στο $[a, c]$ είναι ε-καλή στο $[a, b]$ και ε-καλή στο $[b, c]$, όπου $b \in (a, c)$, τότε η f θα είναι ε-καλή και στο $[a, c]$. Στην περίπτωσή μας, από τις δύο προηγούμενες παραγράφους προκύπτει ότι η f είναι ε-καλή στο $[a, \lambda + \delta/2]$, δηλαδή $\lambda + \delta/2 \in A$ σε αντίφαση με το ότι το λ είναι άνω φράγμα του A.

Άρα, $\lambda = b$. Μένει να δείξουμε ότι $b \in A$. Θα χρησιμοποιήσουμε παρόμοια επιχειρήματα με αυτά που είδαμε μόλις και για αυτόν τον λόγο θα είμαστε πιο σύντομοι. Αφού η f είναι συνεχής στο b, θα υπάρχει ένα $\delta \in (0, b - a)$ έτσι ώστε για κάθε $y, z \in (b - \delta, b]$ ισχύει $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Συνεπώς η f είναι ε-καλή στο $[b - \delta/2, b]$. Από την άλλη, αφού $b = \sup A$, η f είναι ε-καλή και στο $[a, b - \delta/2]$ και συνεπώς και στο $[a, b]$, δηλαδή $b \in A$.

Απόδειξη της ιδιότητας ε-καλών συναρτήσεων που αναφέραμε (και χρησιμοποιήσαμε) πιο πάνω (με τις υποθέσεις και τους συμβολισμούς εκεί): Αφού η f είναι συνεχής στο b, θα υπάρχει ένα $\delta_3 \in (0, \min\{c - b, b - a\})$ έτσι ώστε για $x, y \in (b - \delta_3, b + \delta_3)$ ισχύει $|f(x) - f(b)|, |f(y) - f(b)| < \varepsilon/2$ και συνεπώς $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Έστω $\delta_1, \delta_2 > 0$ τα δ που απαιτεί η ιδιότητα ότι η f είναι ε-καλή στα $[a, b]$ και $[b, c]$, αντίστοιχα (βλ. τον ορισμό), έστω $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ και έστω $x, y \in [a, c]$ με $|x - y| < \delta$. Αν $x, y \in [a, b]$ ή $x, y \in [b, c]$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, αφού η f είναι ε-καλή στα $[a, b]$ και $[b, c]$, αντίστοιχα, ενώ αν $x \in [a, b)$ και $y \in (b, c]$ (αν ισχύει το αντίστροφο, ανταλλάσσουμε τις ονομασίες των x, y) και άρα $x < b < y \Leftrightarrow 0 < b - x < y - x \Leftrightarrow -x > -b > -y \Leftrightarrow y - x > y - b > 0$ και αφού $y - x = |x - y| < \delta$, θα έχουμε $0 < b - x, y - b < \delta \leq \delta_3$, και άρα $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. □

3.4.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Παράρτημα του Κεφάλαιου 8]:
1,2

Κεφάλαιο 4

Παραγώγιση

Στα επόμενα θεωρούμε συναρτήσεις $f : D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subset \mathbb{R}$ *διάστημα*, εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό.[1][2]

4.1 Παράγωγος: Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ορισμός 4.1. *Η* $f : D \to \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο** $a \in D$, *αν υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός)* **η παράγωγος της** f **στο** a

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Η f *ονομάζεται* **παραγωγίσιμη (στο** D**)**, *αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε* $a \in D$. *Τότε, η* $f' : D \to \mathbb{R}$, $D \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$, *ονομάζεται* **η παράγωγος της** f **(στο** D**).**[3][4]

Παρατήρηση 4.1.1. *Ο αριθμός* $f'(a) \in \mathbb{R}$ *δίνει την κλίση της* **εφαπτομένης** *(δηλαδή της εφαπτόμενης ευθείας)* $y(x) = f(a) + (x - a)f'(a)$, $x \in \mathbb{R}$, *στο σημείο* $(a, f(a))$ *του γραφήματος της* f, $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in D\}$.

[1]Το ύφος της παρουσίασης της ύλης ενδεχομένως να είναι πιο συνοπτικό στα επόμενα κεφάλαια των παρόντων σημειώσεων. Για μια πιο αναλυτική παρουσίαση παραπέμπουμε στις παραδόσεις του μαθήματος, στις οποίες συνήθως αναφέρονται περισσότερες παρατηρήσεις, επεξηγήσεις και περισσότερα σχόλια και παραδείγματα, και φυσικά στο βιβλίο [1], του οποίου τη σειρά παρουσίασης της ύλης ακολουθούμε στο παρόν μάθημα. Ενίοτε τα παραδείγματα έχουν αναλυθεί και οι προτάσεις και τα θεωρήματα έχουν αποδειχθεί στην τάξη.

[2]Να προσεχθεί ότι τα ακόλουθα αποτελέσματα μπορούν να εφαρμοσθούν και στον περιορισμό $f|_D$ μιας συνάρτησης $f : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ σε ένα διάστημα $D \subset \tilde{D}$ σε περιπτώσεις που το $\tilde{D} \subset \mathbb{R}$ δεν είναι εξ αρχής διάστημα.

[3]Συνηθίζονται και οι συμβολισμοί Leibniz: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{df(x)}{x} = f'(x)$ και $\frac{d}{dx}f = \frac{df}{dx} = f'$, αλλά (λίγο σπανιότερα) και $\frac{df(x)}{x}\big|_{x=a} = f'(a)$.

[4]Να προσεχθεί ότι ο πιο πάνω ορισμός της παραγώγου σε ένα $a \in D$, όπου $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα, ισχύει και όταν το a είναι κάποιο άκρο του διαστήματος D. Αυτό οφείλεται στον Ορισμό 2.1 του ορίου συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $a < b$, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στα a και b, αν υπάρχει η παράγωγος της f στα σημεία αυτά ως πραγματικός αριθμός, δηλαδή αν υπάρχουν τα όρια $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ και $f'(b) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(b+h) - f(b)}{h}$.

Υπό την έννοια αυτή, η εφαπτομένη είναι το όριο όταν $h \to 0$ *των τεμνουσών (ευθειών)* $y_h(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-h}$, $x \in \mathbb{R}$, *που περνάνε από τα σημεία* $(a, f(a))$ *και* $(a+h, f(a+h))$, $h \neq 0$, *και έχουν κλίση* $\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-h}$.

Παράδειγμα 4.1. *Από τον ορισμό προκύπτουν άμεσα:*[5]

(α′) $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, *όπου* $c \in \mathbb{R}$ *σταθερά,* $\Rightarrow f'(x) = 0$.

(β′) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow f'(x) = 1$.

(γ′) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow f'(x) = 2x$.

(δ′) $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί μέσω του ορισμού, χρησιμοποιώντας τον **διωνυμικό τύπο**[6]

$$(x+h)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} h^j, \quad n \in \mathbb{N},\ x, h \in \mathbb{R},$$

όπου $\binom{n}{j} := \frac{n!}{j!(n-j)!}$, $j = 0, \ldots, n$, *ο* **διωνυμικός συντελεστής** *με* $n! := n(n-1)\cdot 2$ *και* $0! := 1$.

(ε′) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ *ενώ η παράγωγος* $f'(0)$ *δεν υπάρχει.*

(στ′) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, $\Rightarrow f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

(ζ′) $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$, $\Rightarrow f'(x) = -1/x^2$.

Για παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύουν οι ακόλουθες βασικές ιδιότητες.

Θεώρημα 4.1. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη στο* $a \in D$. *Τότε η* f *είναι συνεχής στο* a.

Απόδειξη:[7] Για $h \neq 0$ με $a + h \in D$ έχουμε

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h.$$

Στέλνοντας το $h \to 0$ προκύπτει το αποτέλεσμα από τις ιδιότητες των ορίων.[8] □

Παράδειγμα 4.2. (α′) *Έστω η* $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ *Δείξτε ότι η* f *είναι συνεχής, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο* $x = 0$.

[5]Άσκηση.

[6]ο τύπος αυτός αναφέρεται και ως **διωνυμικό θεώρημα**

[7]Στα επόμενα θεωρήματα, που μπορείτε να βρείτε και στο [1], θα αναφέρουμε συχνά μόνο τον πυρήνα της απόδειξης. Η συμπλήρωση των λεπτομερειών αφήνεται ως άσκηση.

[8]Άσκηση: Βρείτε τις στις παρούσες σημειώσεις· κοινώς, συμπληρώστε την απόδειξη.

(β΄) *Έστω η* $g(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ *Δείξτε ότι η* g *είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο* $x = 0$ *και βρείτε την παράγωγό της* $g'(0)$.

Θεώρημα 4.2. *Έστω* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμες στο* $a \in D$. *Τότε ισχύουν:*

(α΄) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(β΄) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

(γ΄) $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{1}{g^2(a)}$, *αν* $g(a) \neq 0$.

Απόδειξη: Για $h \neq a$ με $a + h \in D$ έχουμε

(α΄)

$$\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h},$$

Από τις ιδιότητες των ορίων και τον ορισμό της παραγώγου, στέλνοντας το $h \to 0$ προκύπτει το αποτέλεσμα.

(β΄)

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} &= \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} \\ &= \frac{(f(a+h)-f(a))g(a+h)+f(a)(g(a+h)-g(a))}{h} \\ &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a+h)+f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\end{aligned}$$

Αφού ως παραγωγίσιμη στο a, η g είναι και συνεχής στο a, όπως είδαμε πιο πάνω, έχουμε $g(a+h) \to g(a)$ όταν $h \to 0$. Στέλνοντας το $h \to 0$ στο τελευταίο μέλος της παραπάνω αλυσίδας ισοτήτων, το αποτέλεσμα προκύπτει από τις ιδιότητες των ορίων και τον ορισμό της παραγώγου.

(γ΄) Όπως και πριν, αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο a θα είναι και συνεχής, δηλαδή $g(a+h) \to g(a)$ για $h \to 0$. Επίσης, από προηγούμενη πρόταση,[9] αφού $g(a) \neq 0$ θα υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $h \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ και $a + h \in D$ ισχύει $g(a+h) \neq 0$. Για αυτά τα $h \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}}{h} \\ &= \frac{g(a)-g(a+h)}{hg(a+h)g(a)} \\ &= -\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\frac{1}{g(a+h)g(a)}\end{aligned}$$

και για $h \to 0$ παίρνουμε το αποτέλεσμα.

[9] Ποια πρόταση στις παρούσες σημειώσεις;

□

Πόρισμα 4.3. *Έστω $f, g : D \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $a \in D$ με $g(a) \neq 0$. Τότε:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Παράδειγμα 4.3. *Χρησιμοποιήστε τους παραπάνω κανόνες και τις παραγώγους της σταθερής και της ταυτοτικής συνάρτησης για να δείξετε τα ακόλουθα ή να βρείτε τα ζητούμενα.*

(α') $f : D \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη στο* $a \in D$ *και* $g(x) = cf(x)$, $c \in \mathbb{R}$ *σταθερά,* $\Rightarrow g'(x) = cf'(x)$.

(β') $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$, $\Rightarrow f(x) = kx^{k-1}$.

Χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή και όπου χρειαστεί τη σύμβαση $x^0 := 1$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

(γ') *Βρείτε την παράγωγο του πολυωνύμου (ή της πολυωνυμικής συνάρτησης)* $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$ *σταθερές για* $i = 0, \ldots, n$ *με* $a_n \neq 0$.

Θεώρημα 4.4. (Κανόνας της Αλυσίδας)
Έστω $g : D \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη στο* $a \in D$ *με* $g(D) \subset \Delta$, *όπου* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *διάστημα, και* $f : \Delta \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη στο* $g(a)$. *Τότε η* $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* a *με* $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$.

Απόδειξη: Πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \to f'(g(a))g'(a) \quad \text{για } h \to 0. \tag{4.1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(h) := g(a+h) - g(a)$ για $h \in \mathbb{R}$ με $a + h \in D$. Αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο a, θα είναι και συνεχής εκεί, δηλαδή θα ισχύει $k(h) \to 0 = k(0)$ για $h \to 0$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$\phi(h) := \begin{cases} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{k(h)}, & k(h) \neq 0, \\ f'(g(a)), & k(h) = 0. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι $\phi(h) \to f'(g(a)) = \phi(0)$ για $h \to 0$, δηλαδή ότι η ϕ είναι συνεχής στο 0.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(a)$, θα υπάρχει κάποιο $\delta' > 0$, έτσι ώστε για κάθε $0 < |k| < \delta'$, $g(a) + k \in \Delta$, ισχύει

$$\left| \frac{f(g(a) + k) - f(g(a))}{k} - f'(g(a)) \right| < \varepsilon.$$

Όμως, για αυτό το $\delta' > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $0 < |h| < \delta$ με $a + h \in D$ να ισχύει $|k(h)| < \delta'$. Αυτό θα ισχύει ειδικότερα για αυτά τα $0 < |h| < \delta$, $a + h \in D$ με $0 < |k(h)|$. Τότε όμως θα έχουμε

$$\left| \frac{f(g(a) + k(h)) - f(g(a))}{k(h)} - f'(g(a)) \right| < \varepsilon,$$

δηλαδή, αφού $g(a) + k(h) = g(a + h)$,

$$\left| \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{k(h)} - f'(g(a)) \right| = |\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$

Αφού για τα $0 < |h| < \delta$, $a + h \in D$ με $0 = |k(h)|$ έχουμε $\phi(h) = f'(g(a))$, η τελευταία ανισότητα ισχύει τετριμμένα και για αυτά τα h, και έτσι έχουμε τελικά ότι για όλα τα $0 < |h| < \delta$ με $a + h \in D$ ισχύει $|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon$. Αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα τέτοιο $\delta > 0$, δείξαμε $\phi(h) \to f'(g(a))$ για $h \to 0$.

Τώρα το όριο (4.1) προκύπτει εύκολα. Για $h \neq 0$ με $a + h \in D$ και $k(h) = g(a+h) - g(a) \neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{k(h)} \frac{k(h)}{h} = \phi(h) \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Αυτή η ισότητα ισχύει όμως και όταν $k(h) = 0$, αφού τότε $g(a+h) = g(a)$, και άρα οι αριθμητές και του αριστερού μέλους και του δεξιού θα ισούνται και οι δύο με το μηδέν. Συνεπώς, για κάθε $h \neq 0$ με $a + h \in D$ ισχύει

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \phi(h) \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \to f'(g(a))g'(a),$$

και έχουμε τελειώσει. □

Ορισμός 4.2. (Παράγωγοι ανώτερης τάξης)
Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε η f λέγεται **δυο φορές παραγωγίσιμη στο** $a \in D$ *αν υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός) η* **παράγωγος δεύτερης τάξης της** f **στο** a

$$f''(a) := \left(f'\right)'(a).$$

Γενικότερα, αν η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι $k \in \mathbb{N}$ φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο k τάξης $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η f είναι $k+1$ **φορές παραγωγίσιμη στο** $a \in D$ *αν υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός) η* **παράγωγος** $k+1$ **τάξης της** f **στο** a[10]

$$f^{(k+1)}(a) := \left(f^{(k)}\right)'(a).$$

[10]Έχουμε $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} := f'$, $f^{(2)} := f''$, $f^{(3)} := f'''$. Επίσης γράφουμε $f^{(k)} := \frac{d^k f}{dx^k}$ για $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ (συμβολισμός Leibniz).

Παράδειγμα 4.4. *Για* $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, *έχουμε* $f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdot(n-k+1)x^{n-k}$ *για* $k = 1, \ldots, n$ *και* $f^{(k)}(x) = 0$ *για* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n+1$.

Το πρώτο αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή [11] *Το δεύτερο προκύπτει, αφού σύμφωνα με το πρώτο έχουμε* $f^{(n)}(x) = n!x^0 = n!$ *και άρα* $f^{(n+1)}(x) = 0$, *το οποίο ισχύει συνεπώς και για κάθε* $k \geq n+2$.[12]

4.1.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 10]:

1, 2, 4-6, 10-12, 15, 16, 20, 28, 29, 32, 35.

4.2 Εφαρμογές των παραγώγων

Θεώρημα 4.5. (Θεώρημα Fermat)
Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x \in (a,b)$ *σημείο ακροτάτου της* f *και η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* x. *Τότε* $f'(x) = 0$.[13]

Απόδειξη: Έστω ότι το $x \in (a,b)$ είναι σημείο μεγίστου της f στο (a,b).[14] Τότε ισχύει $f(x+h) \leq f(x)$ για κάθε $x+h \in (a,b)$ και συνεπώς

$$g(h) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0 \quad \text{για } h \in (0, b-x)$$

και

$$g(h) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \quad \text{για } h \in (a-x, 0).$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x, θα υπάρχουν τα πλευρικά όρια της $g(h)$ για $h \to 0^+$ και $h \to 0^-$, αντίστοιχα, και θα είναι ισούνται με την $f'(x)$. Τότε όμως, από την Πρόταση 2.3 έχουμε[15]

$$f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0 \quad \text{και} \quad f'(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

και συνεπώς $f'(x) = 0$. □

Ο ορισμός του μεγίστου και του ελαχίστου (δηλαδή των ακροτάτων), καθώς και των σημείων ακροτάτων $x \in D$ στα οποία αυτά λαμβάνονται, μιας συνάρτησης $f : D \to \mathbb{R}$ δόθηκε στο Θεώρημα 3.5 για την περίπτωση $D = [a,b]$. Ο ορισμός αυτός γενικεύεται με προφανή τρόπο για κάθε υποσύνολο $A \subset D$.

[11] Πράγματι, για $k = 1$ έχουμε $f'(x) = nx^{n-1}$. Έστω ότι ισχύει ο τύπος για κάποιο $k = 1, \ldots, n-1$. Τότε $f^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(k)}(x) = \frac{d}{dx}\left(n(n-1)\cdot(n-k+1)x^{n-k}\right) = n(n-1)\cdot(n-k+1)(n-k)x^{n-k-1} = n(n-1)\cdot(n-k+1)(n-(k+1)+1)x^{n-(k+1)}$.

[12] Κάθε φορά προκύπτει ως παράγωγος της προηγούμενης παραγώγου η σταθερή συνάρτηση 0.

[13] Ένα σημείο $x \in D$ μιας $f : D \to \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f'(x) = 0$ ονομάζεται **κρίσιμο σημείο της** f και η αντίστοιχη τιμή $f(x)$ **κρίσιμη τιμή της** f.

[14] Αν το x είναι σημείο ελαχίστου, εφαρμόζουμε το θεώρημα στην $g = -f$.

[15] Εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.3 στις συναρτήσεις $(-g)|_{(0,b-x)}$ και $g|_{(a-x,0)}$.

Ορισμός 4.3. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ *όχι απαραίτητα διάστημα, και έστω* $A \subset D$.

(α') *Ένα σημείο* $x \in A$ *ονομάζεται* **σημείο μεγίστου (ελαχίστου) της** f **στο** A *αν*

$$f(y) \leq f(x) \quad \forall\, y \in A, \quad (f(y) \geq f(x) \quad \forall\, y \in A).$$

Η τιμή $f(x)$ *ονομάζεται τότε* **μέγιστο (ελάχιστο) ή μέγιστη (ελάχιστη) τιμή της** f **στο** A.

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα της f *στο* A *ονομάζονται και* **ακρότατα της** f **στο** A.

(β') *Ένα σημείο* $x \in A$ *ονομάζεται* **σημείο τοπικού μεγίστου (ελαχίστου) της** f **στο** A *αν υπάρχει κάποιο* $\delta > 0$ *έτσι ώστε το* $x \in A \cap (x-\delta, x+\delta)$ *να είναι σημείο μεγίστου (ελαχίστου) του περιορισμού* $f|_{A\cap(x-\delta,x+\delta)} : A \cap (x-\delta, x+\delta) \to \mathbb{R}$ *με* $f|_{A\cap(x-\delta,x+\delta)}(y) := f(y)$, $y \in A \cap (x-\delta, x+\delta)$, *της* f *στο* $A \cap (x-\delta, x+\delta)$.

Η τιμή $f(x)$ *ονομάζεται τότε* **τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) ή τοπική μέγιστη (ελάχιστη) τιμή της** f **στο** A.

Τα τοπικά μέγιστα και τα ελάχιστα της f *στο* A *ονομάζονται και* **τοπικά ακρότατα της** f **στο** A.

Παρατήρηση 4.1. *Το Θεώρημα 4.5 του Fermat ισχύει προφανώς και τοπικά, δηλαδή, αν το* $x \in (a, b)$ *είναι σημείο τοπικού ακροτάτου μίας* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *και η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* x*, τότε* $f'(x) = 0$.

Αυτό προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 4.5, αν το εφαρμόσουμε στον περιορισμό $f|_{(x-\delta,x+\delta)}$ *της* f *με* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε* $(x-\delta, x+\delta) \subset (a, b)$ *και το* x *να είναι σημείο ακροτάτου της* $f|_{(x-\delta,x+\delta)}$*, καθώς η παραγωγισιμότητα της* f *στο* x *κληρονομείται στην* $f|_{(x-\delta,x+\delta)}$.

(Αυτό βασίζεται στο ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο είναι ένα όριο, δηλαδή μία τοπική ιδιότητα. Με απλά λόγια: Για να υπολογίσουμε το όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x *πρέπει να ξέρουμε τις τιμές της συνάρτησης μόνο «κοντά» στο σημείο* x*, δηλαδή σε μία, όπως λέμε,* **περιοχή του σημείου** x, $(x-\delta, x+\delta)$, $\delta > 0$*, για οσοδήποτε μικρό* $\delta > 0$*. Το ότι αρκεί να ξέρουμε τις τιμές της συνάρτησης μόνο «κοντά» στο σημείο* x *προκύπτει από τον ορισμό (και είναι η βαθύτερη έννοια του ορισμού) του ορίου.)*

Παρατήρηση 4.2. *(α')* *Το αντίστροφο του Θεωρήματος του Fermat δεν ισχύει, δηλαδή, αν έχουμε* $f'(x) = 0$ *σε ένα σημείο* $x \in (a, b)$ *μιας συνάρτησης* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$*, αυτό δεν συνεπάγεται ότι η* f *θα πρέπει να έχει ακρότατο εκεί.*

Π.χ., η $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$*, δεν έχει ακρότατο στο* 0*, ενώ* $f'(x) = 0$.

(β') *Το Θεώρημα του Fermat δεν ισχύει στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος μιας* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Π.χ., η $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$*, έχει μέγιστο στο* 1 *και ελάχιστο στο* 0*, αλλά* $f'(x) = 1$ *για κάθε (*$x \in \mathbb{R}$ *και συνεπώς για κάθε)* $x \in [0, 1]$.

(γ′) *Από την προηγούμενη παρατήρηση προκύπτει ότι αν θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα μίας συνεχούς συνάρτησης* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,[16] *τότε αρκεί να βρούμε ποια είναι η μεγαλύτερη (μέγιστη) και ποια η μικρότερη (ελάχιστη) μεταξύ των τιμών της* f, *οι οποίες αντιστοιχούν*

(i) *στα κρίσιμα σημεία της* f *στο* (a, b), *δηλαδή στα σημεία* $x \in (a, b)$ *για τα οποία η* f *είναι παραγωγίσιμη με* $f'(x) = 0$,

(ii) *στα άκρα του διαστήματος* $[a, b]$,

(iii) *στα σημεία του* (a, b). *στα οποία η* f *δεν είναι παραγωγίσιμη.*

Θεώρημα 4.6. (Θεώρημα Rolle)
Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής, παραγωγίσιμη στο* (a, b) *με* $f(a) = f(b)$. *Τότε υπάρχει* $x \in (a, b)$ *τέτοιο ώστε* $f'(x) = 0$.

Απόδειξη: Η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5.

Αν η f λαμβάνει την ελάχιστη ή τη μέγιστη τιμή της στο (a, b), θα ισχύει $f'(x) = 0$, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat (Θεώρημα 4.5) και ο ισχυρισμός θα έχει αποδειχθεί.

Αν η f δεν λαμβάνει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο (a, b), τότε θα λαμβάνει αυτές τις τιμές στα a και b. Αφού όμως $f(a) = f(b)$, αυτή η τιμή θα είναι και η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στο $[a, b]$ και συνεπώς θα ισχύει $f(a) = f(b) \leq f(x) \leq f(a) = f(b)$ και άρα $f(x) = f(a) = f(b)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα η f θα είναι σταθερή (και ίση με $f(a) = f(b)$) σε όλο το $[a, b]$ και συνεπώς θα ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. □

Με χρήση του Θεωρήματος του Rolle αποδεικνύεται ένα από τα βασικότερα θεωρήματα αναφορικά με παραγώγους.[17]

Θεώρημα 4.7. (Θεώρημα Μέσης Τιμής)
Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής και παραγωγίσιμη στο* (a, b). *Τότε υπάρχει* $x \in (a, b)$ *τέτοιο ώστε*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

Η $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b) με

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad x \in (a, b)$$

[16] Αν η συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$, τότε είμαστε σίγουροι ότι αυτή θα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή (βλ. Θεώρημα 3.5). Φυσικά, και συναρτήσεις που δεν ορίζονται σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα ή που ορίζονται σε τέτοια, αλλά δεν είναι συνεχείς, μπορούν να έχουν ακρότατα.

[17] Σημειώνουμε ότι το Θεώρημα του Rolle είναι ειδική περίπτωση του ΘΜΤ. Το ότι η γενική περίπτωση αποδεικνύεται με χρήση της ειδικής δεν είναι ασυνήθιστο στα Μαθηματικά. Συνήθως, όπως εδώ, η ειδική περίπτωση περιέχει τον «πυρήνα» του επιχειρήματος σε μια πιο ξεκάθαρη (δηλαδή, ακριβώς, απλούστερη, ειδικότερη) μορφή. Αυτόν τον «πυρήνα» μπορούμε μετά να γενικεύσουμε σε πιο περίπλοκες (δηλαδή, γενικότερες) περιπτώσεις.

και $h(a) = f(a) = h(b)$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle (Θεώρημα 4.6) υπάρχει $x \in (a, b)$ με $h'(x) = 0$, το οποίο ισοδυναμεί με το αποδεικτέο. $\square$

Το ΘΜΤ είναι ειδική περίπτωση του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 4.8. (γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής)[18]
Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς και παραγωγίσιμες στο (a, b). Τότε υπάρχει $x \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$(f(b) - f(a))g'(x) = (g(b) - g(a))f'(x).$$

Απόδειξη:[19] Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) := f(x)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g(x), \quad x \in [a, b].$$

Η $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b) με

$$h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g'(x), \quad x \in (a, b)$$

και $h(a) = f(a)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a) = f(b)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g(b) = h(b)$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle (Θεώρημα 4.6) υπάρχει $x \in (a, b)$ με $h'(x) = 0$, το οποίο ισοδυναμεί με το αποδεικτέο. $\square$

Πόρισμα 4.9. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο διάστημα $D \subset \mathbb{R}$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in D$. Τότε η f είναι σταθερή στο D.*[20]

Απόδειξη: Έστω $a, b \in D$ με $a < b$. Αφού $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in D$ και άρα και για κάθε $x \in (a, b) \subset D$, από το ΘΜΤ προκύπτει $f(b) = f(a)$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $a, b \in D$, η f θα είναι σταθερή στο D.[21] $\square$

Πόρισμα 4.10. *Έστω $f, g : D \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο διάστημα $D \subset \mathbb{R}$ με $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in D$. Τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in D$.*[22]

Απόδειξη: Άσκηση. Βλ. και [1, Κεφάλαιο 11, Πόρισμα 2]. $\square$

Ορισμός 4.4. *Μία $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, λέγεται*

[18] Το θεώρημα αυτό ονομάζεται και **Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy**, βλ. [1, Κεφάλαιο 11, Θεώρημα 8]. Για $g(x) = x$ παίρνουμε το σύνηθες Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θεώρημα 4.7), το οποίο ονομάζεται και **Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange**, βλ. [2, Θεώρημα 5.49].

[19] Όπως το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy είναι μια γενίκευση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, έτσι και η απόδειξή του. Επειδή και τα δύο χρειάζονται για την απόδειξή τους μόνο το Θεώρημα του Rolle (Θεώρημα 4.6), θα μπορούσαμε μάλιστα να αποδείξουμε κατευθείαν το παρόν θεώρημα και να πάρουμε το σύνηθες Θεώρημα Μέσης Τιμής ως πόρισμά του θέτοντας $g(x) = x$.

[20] Ισχύει και το αντίστροφο.

[21] Πιο λεπτομερώς, αυτό προκύπτει αν σταθεροποιήσουμε ένα $x_0 \in D$, αφού τότε, όπως είδαμε, θα έχουμε $f(a) = f(x_0) = f(b)$ για κάθε $a \in D$ με $a < x_0$ και για κάθε $b \in D$ με $b > x_0$. Έτσι θα έχουμε $f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x \in D$.

[22] Ισχύει και το αντίστροφο.

(α΄) **αύξουσα (ή γνησίως αύξουσα)**, *αν για κάθε* $a, b \in D$ *ισχύει:* $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$,

(β΄) **μη φθίνουσα (ή αύξουσα)**, *αν για κάθε* $a, b \in D$ *ισχύει:* $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$,

(γ΄) **φθίνουσα (ή γνησίως φθίνουσα)**, *αν για κάθε* $a, b \in D$ *ισχύει:* $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$,

(δ΄) **μη αύξουσα (ή φθίνουσα)**, *αν για κάθε* $a, b \in D$ *ισχύει:* $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.[23] *Οι (γνησίως) αύξουσες και (γνησίως) φθίνουσες συναρτήσεις ονομάζονται* **γνησίως μονότονες**, *οι μη φθίνουσες και μη αύξουσες* **(μη γνησίως) μονότονες**.[24]

Πόρισμα 4.11. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη. Αν* $f'(x) > 0$ *για κάθε* $x \in D$, *τότε η* f *είναι αύξουσα, και αν* $f'(x) < 0$ *για κάθε* $x \in D$, *τότε η* f *είναι φθίνουσα.*[25]

Απόδειξη: Έστω $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in D$. Τότε, για κάθε $a, b \in D$ με $a < b$ έχουμε από το ΘΜΤ $f(b) > f(a)$. Έστω $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in D$. Τότε, για κάθε $a, b \in D$ με $a < b$ έχουμε από το ΘΜΤ $f(b) < f(a)$. □

Πρόταση 4.1. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$ *συνεχής και* $a \in D$. *Αν υπάρχει* $\delta > 0$ *έτσι ώστε* $f'(x) > 0$ *για* $x \in (a - \delta, a) \cap D$ *και* $f'(x) < 0$ *για* $x \in (a, a + \delta) \cap D$, *τότε το* $a \in D$ *είναι σημείο γνήσιου τοπικού μεγίστου της* f.[26]

Αντίστοιχα, αν υπάρχει $\delta > 0$ *έτσι ώστε* $f'(x) < 0$ *για* $x \in (a - \delta, a) \cap D$ *και* $f'(x) > 0$ *για* $x \in (a, a + \delta) \cap D$, *τότε το* $a \in D$ *είναι σημείο γνήσιου τοπικού ελαχίστου της* f.

Απόδειξη: Από το ΘΜΤ παίρνουμε ότι για κάθε $x \in (a - \delta, a) \cap D$ υπάρχει κάποιο $\xi_1 \in (x, a)$ με $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi_1) > 0$ και συνεπώς (αφού $x - a < 0$) ισχύει $f(x) < f(a)$ και ότι για κάθε $x \in (a, a + \delta) \cap D$ υπάρχει κάποιο $\xi_2 \in (a, x)$ με $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi_2) < 0$ και συνεπώς (αφού $x - a > 0$) και πάλι $f(x) < f(a)$.

Η απόδειξη του δεύτερου μέρους της πρότασης γίνεται αντίστοιχα. □

Θεώρημα 4.12. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$ *με* $f'(a) = 0$ *στο* $a \in D$. *Αν* $f''(a) > 0$, *τότε η* f *έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο* a, *ενώ αν* $f''(a) < 0$, *τότε η* f *έχει γνήσιο τοπικό μέγιστο στο* a.[27]

[23] Οι χαρακτηρισμοί στα αριστερά είναι αυτοί που αναφέρονται στο [1] και συνηθίζονται στην αγγλοσαξονική βιβλιογραφία (increasing/non-decreasing και decreasing/non-increasing). Θα τους ακολουθήσουμε εδώ καθώς στις παρούσες σημειώσεις ακολουθούμε το [1], παρ' όλο που στην ελληνική βιβλιογραφία συνηθίζονται περισσότερο οι χαρακτηρισμοί σε παρενθέσεις.

[24] Σημειώνουμε εδώ την τετριμμένη αλλά πολύ χρήσιμη ενίοτε παρατήρηση ότι αν η f είναι αύξουσα (μη φθίνουσα), η $-f$ είναι φθίνουσα (μη αύξουσα). Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

[25] Το αντίστροφο *δεν ισχύει*: Π.χ., η $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, είναι αύξουσα, αλλά $f'(0) = 0$.

[26] Εδώ, όπως και αλλού, όταν αναφέρουμε μια ιδιότητα ενός $f'(x)$ υπονοούμε, χωρίς να το αναφέρουμε ρητά, ότι το $f'(x) \in \mathbb{R}$ υπάρχει, δηλαδή ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x.

Το αποτέλεσμα ισχύει και όταν το $a \in D$ είναι κάποιο άκρο του διαστήματος D, αφού τότε η μία από τις δύο τομές θα είναι κενή. [Υπενθυμίζουμε ότι μια πρόταση «για κάθε $x \in A$ ισχύει η ιδιότητα $P(x)$» είναι πάντα (για οποιαδήποτε ιδιότητα $P(x)$) αληθής, όταν το A είναι κενό.]

Η τιμή $f(a)$ ονομάζεται **γνήσιο μέγιστο** μίας $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ (όχι απαραίτητα διάστημα), αν ισχύει $f(x) < f(a)$ για κάθε $x \in D \setminus \{a\}$. Η $f(a)$ ονομάζεται **γνήσιο τοπικό μέγιστο** αν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε η $f(a)$ να είναι γνήσιο μέγιστο της $f|_{(a-\delta,a+\delta)\cap D}$. Το a ονομάζεται τότε **σημείο γνήσιου (τοπικού) μεγίστου**. Αντίστοιχα ορίζονται και το **γνήσιο (τοπικό) ελάχιστο** και το **σημείο γνήσιου (τοπικού) ελαχίστου**.

[27] Κατά αναλογία με αυτά που αναφέραμε σε προηγούμενη υποσημείωση, εδώ νοείται ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο a. Αυτό σημαίνει ειδικότερα ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή $(a - \delta_0, a + \delta_0) \cap D$ του a για κάποιο $\delta_0 > 0$.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το θεώρημα για την περίπτωση γνήσιου τοπικού ελαχίστου.[28] Από τον ορισμό της $f''(a)$ και αφού $f'(a) = 0$ έχουμε

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{h} > 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f'(a+h)/h > 0$ για κάθε $0 < |h| < \delta$.[29] Συνεπώς, θα έχουμε $f'(x) < 0$ για $x \in (a-\delta, a) \cap D$ και $f'(x) > 0$ για $x \in (a, a+\delta) \cap D$ και άρα το a θα είναι σημείο γνήσιου τοπικού ελαχίστου της f, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.[30] □

Παρατήρηση 4.3. *Στο προηγούμενο θεώρημα είδαμε ότι οι συνθήκες $f'(a) = 0$ και $f''(a) > 0$ οδηγούν στην ύπαρξη γνήσιου τοπικού ελαχίστου της f στο a (και αντίστοιχα γνήσιου τοπικού μεγίστου αν $f''(a) < 0$). Αυτό δεν θα πρέπει να μας οδηγήσει στη λανθασμένη εικασία ότι αν $f''(a) \geq 0$ θα έχουμε ενδεχομένως μη γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο a. Αρκεί να σκεφτεί κανείς τις συναρτήσεις $f(x) = x^4$, $f(x) = -x^4$, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Για όλες έχουμε $f'(0) = f''(0) = 0$ ενώ η πρώτη έχει στο 0 γνήσιο ολικό ελάχιστο, η δεύτερη γνήσιο ολικό μέγιστο και η τρίτη ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο.*

Θεώρημα 4.13. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο a,[31] όπου $f'(a) = 0$. Αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a, τότε $f''(a) \geq 0$, ενώ αν η f έχει τοπικό μέγιστο στο a, τότε $f''(a) \leq 0$.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την περίπτωση όπου η f έχει στο a τοπικό ελάχιστο. Η περίπτωση όπου η f έχει στο a τοπικό μέγιστο αποδεικνύεται ανάλογα.

Έστω λοιπόν ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a, $f'(a) = 0$ και $f''(a) < 0$. Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα 4.12, η f θα έχει και γνήσιο τοπικό μέγιστο στο a δηλαδή θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) < f(a)$ για κάθε $x \in D \cap ((a-\delta, a) \cup (a, a+\delta))$, σε αντίφαση με το ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει $\delta' > 0$ έτσι ώστε $f(x) \geq f(a)$ για κάθε $x \in D \cap (a-\delta', a+\delta')$, αφού οσοδήποτε μικρό και να επιλέξουμε το $\delta' > 0$, πάντα θα υπάρχει ένα $x \in D \cap ((a-\delta', a) \cup (a, a+\delta'))$ με $f(x) < f(a)$ και όχι $f(x) \geq f(a)$. □

Παρατήρηση 4.4. *Και σε αυτή την περίπτωση, σε αναλογία με την προηγούμενη παρατήρηση, δεν ισχύει ότι αν το $f(a)$ είναι γνήσιο τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο θα πάρουμε $f''(a) > 0$ ή $f''(a) < 0$ αντίστοιχα. Βλέπε τις συναρτήσεις $f(x) = x^4$ και $g(x) = -x^4$, $x \in \mathbb{R}$, στο $a = 0$.*

Αναφέρουμε τώρα ένα αποτέλεσμα το οποίο είναι πολύ χρήσιμο σε διάφορες καταστάσεις και το οποίο είναι μάλιστα μία ειδική περίπτωση του Κανόνα του L' Hôpital (Θεώρημα 4.15).

[28] Η περίπτωση γνήσιου τοπικού μεγίστου αποδεικνύεται ανάλογα.

[29] Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 3.1, αρκεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(h) := f'(a+h)/h$ για $h \neq 0$, τέτοια ώστε τα $a+h$ να ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f', βλ. Υποσημείωση 27, και $g(0) := f''(a)$, η οποία είναι συνεχής στο $h = 0$.

[30] Η συνέχεια της f στο $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ προκύπτει απο την παραγωγισιμότητά της στα σημεία αυτά, βλ. Υποσημείωση 27 (όπου προφανώς $\delta \leq \delta_0$).

[31] Ξανατονίζουμε ότι όταν λέμε ότι μια f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα σημείο a υποννοούμε ότι η f' ορίζεται στο $D \cap (a-\delta, a+\delta)$ για κάποιο $\delta > 0$.

Θεώρημα 4.14. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα, f συνεχής στο $a \in D$ και έστω ότι υπάρχει $\delta_0 > 0$ έτσι ώστε f παραγωγίσιμη στο $D \cap ((a-\delta_0, a) \cup (a, a+\delta_0))$.*

Αν $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο a με $f'(a) = \ell$.

Απόδειξη: Για κάθε $h \in (0, \delta_0)$ η f είναι συνεχής στο $[a, a+h]$, παραγωγίσιμη στο $(a, a+h)$.[32] Από το ΘΜΤ παίρνουμε ότι υπάρχει $\alpha_h \in (a, a+h)$ με

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\alpha_h). \tag{4.2}$$

Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{h \to 0^+} f'(\alpha_h) = \ell$.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim\limits_{h \to 0} f'(a+h) = \ell$,[33] υπάρχει $\delta \in (0, \delta_0)$ έτσι ώστε για κάθε $0 < h < \delta$ ισχύει $|f'(a+h) - \ell| < \varepsilon$. Αφού για κάθε $h' \in (0, h)$ ισχύει $0 < h' < h < \delta$, προκύπτει ότι $|f'(a+h') - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $h' \in (0, h)$. Ειδικότερα, θέτοντας $h' = \alpha_h - a \in (0, h)$, έχουμε $|f'(\alpha_h) - \ell| < \varepsilon$. Άρα, συνοψίζοντας, βρήκαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $0 < h < \delta$ ισχύει $|f'(\alpha_h) - \ell| < \varepsilon$, δηλαδή $\lim\limits_{h \to 0^+} f'(\alpha_h) = \ell$, και άρα από την (4.2) προκύπτει

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell. \tag{4.3}$$

Αντίστοιχα, για κάθε $h \in (-\delta_0, 0)$ η f είναι συνεχής στο $[a+h, a]$, παραγωγίσιμη στο $(a+h, a)$.[34] Από το ΘΜΤ παίρνουμε ότι υπάρχει $\beta_h \in (a+h, a)$ με

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\beta_h). \tag{4.4}$$

Όμοια με πριν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $-\delta < h < 0$ και κάθε $h < h' < 0$ ισχύει $|f'(a+h') - \ell| < \varepsilon$ και άρα, ειδικότερα, αφού $\beta_h - a \in (h, 0)$, $|f'(\beta_h) - \ell| < \varepsilon$, δηλαδή $\lim\limits_{h \to 0^-} f'(\beta_h) = \ell$, και από την (4.4) προκύπτει

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell. \tag{4.5}$$

Από τις (4.3), (4.5), την Πρόταση 2.5 και τον Ορισμό 4.1 της παραγώγου, προκύπτει $f'(a) = \ell$. □

Κλείνουμε τη μελέτη των ιδιοτήτων των παραγώγων με ένα ακόμα χρήσιμο αποτέλεσμα για τον υπολογισμό ορίων.

Θεώρημα 4.15. (Κανόνας του L' Hôpital)
Έστω $f, g : D \to \mathbb{R}$ με $D = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ για κάποιο $\delta > 0$, παραγωγίσιμες στο D με $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$. Τότε ισχύει:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x) \quad \textit{και} \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

[32] Εκτός αν το a είναι το δεξί άκρο του διαστήματος D, οπότε δεν εξετάζουμε την περίπτωση αυτή.
[33] βλ. Πρόταση 2.1
[34] Εκτός αν το a είναι το αριστερό άκρο του διαστήματος D, οπότε δεν εξετάζουμε την περίπτωση αυτή.

Απόδειξη: Θέτουμε $f(a) := 0 =: g(a)$. Έτσι οι f, g ορίζονται τώρα στο $D \cup \{a\}$ και είναι συνεχείς σε αυτό.[35] Αφού οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο D και συνεχείς στο $D \cup a$ μπορούμε να εφαρμόσουμε και το ΘΜΤ (Θεώρημα 4.7) και το γενικευμένο ΘΜΤ (Θεώρημα 4.8) για τις f, g στα διαστήματα $[a, x]$ για $x \in (a, a+\delta)$ και $[x, a]$ για $x \in (a-\delta, a)$.

Εφαρμόζοντας στο διάστημα $[a, x]$, $x \in (a, a+\delta)$ το ΘΜΤ στην g προκύπτει ότι $g(x) \neq 0$, αφού, σύμφωνα με το ΘΜΤ, υπάρχει κάποιο $\xi \in (a, x)$ έτσι ώστε

$$0 \neq g'(\xi) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{g(x)}{x - a} \quad \Rightarrow \quad g(x) \neq 0.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το γενικευμένο ΘΜΤ στις f, g στο διάστημα $[a, x]$, παίρνουμε ότι υπάρχει κάποιο $\alpha_x \in (a, x)$ έτσι ώστε

$$f(x)g'(\alpha_x) = g(x)f'(\alpha_x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = h(\alpha_x), \quad h(x) := \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4.6}$$

Αφού $\lim_{x\to a} h(x) = \ell$ και $\alpha_x \in (a, x)$, παίρνουμε με τον ίδιο τρόπο όπως στην απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος 4.14 $\lim_{x\to a^+} h(\alpha_x) = \ell$,[36] και συνεπώς από την (4.6) $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Ανάλογα,[37] εφαρμόζοντας στο διάστημα $[x, a]$, $x \in (a-\delta, a)$, το ΘΜΤ στην g παίρνουμε $g(x) \neq 0$ και, εφαρμόζοντας το γενικευμένο ΘΜΤ στις f, g στο διάστημα αυτό, παίρνουμε ότι υπάρχει κάποιο $\beta_x \in (x, a)$ έτσι ώστε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\beta_x)}{g'(\beta_x)} = h(\beta_x),$$

όπου $\lim_{x\to a} h(\beta_x) = \ell$ και συνεπώς $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Αφού τα δύο πλευρικά όρια της $f(x)/g(x)$ για $x \to a$ υπάρχουν και ισούνται με το ℓ, προκύπτει το αποδεικτέο (Πρόταση 2.5). □

Παρατήρηση 4.5. *Το Θεώρημα 4.14 προκύπτει από τον Κανόνα του L' Hôpital. Άσκηση.*

4.2.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 11]:

SOS: 1-4, 6, 8
Συνιστώμενες: 28, 29, 34, 48, 49, 53-57, [65]
Το Πόρισμα 4.10.

---

[35] Ως παραγωγίσιμες στο D, οι f, g ήταν εξ αρχής συνεχείς στο D και αφότου ορίσαμε $f(a) = 0 = g(a)$ και ισχύει $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ είναι και συνεχείς στο a.

[36] Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta' > 0$ έτσι ώστε για κάθε x με $0 < x - a < \delta'$ να ισχύει $|h(x) - \ell| < \varepsilon$. Ειδικότερα, $|h(x') - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x' \in (a, x) \Leftrightarrow 0 < x' - a < x - a$ για κάθε τέτοιο x (δηλαδή με $0 < x - a < \delta'$). Επιλέγοντας $x' = \alpha_x \in (a, x)$, έχουμε δηλαδή $|h(\alpha_x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε x με $0 < x - a < \delta'$. Άρα *(γραμμένα όλα μαζί, αυτά που βρήκαμε)*, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta' > 0$ έτσι ώστε για κάθε x με $0 < x - a < \delta'$ να ισχύει $|h(\alpha_x) - \ell| < \varepsilon$. Αυτός είναι όμως ο ορισμός του ορίου σε ένα σημείο από τα δεξιά, $\lim_{x\to a^+} h(\alpha_x) = \ell$.

[37] Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη, βλ. και την απόδειξη του Θεωρήματος 4.14.

4.3 Αντίστροφες συναρτήσεις

Ορισμός 4.5. *(α′) Μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **1-1** *αν για κάθε* $a, b \in D$ *με* $a \neq b$ *ισχύει* $f(a) \neq f(b)$ *ή, ισοδύναμα, αν για κάθε* $a, b \in D$ *για τα οποία ισχύει* $f(a) = f(b)$ *προκύπτει* $a = b$.

(β′) Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ *είναι 1-1. Τότε η συνάρτηση* $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$, *η οποία αντιστοιχεί σε κάθε* $y \in f(D)$ *το μοναδικό*[38] $x \in D$ *για το οποίο ισχύει* $f(x) = y$, *ονομάζεται* **αντίστροφη (συνάρτηση) της** f.

Παρατήρηση 4.6. *(α′) Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο*

$$f(D) := \{y \in \mathbb{R} : \exists\ x \in D : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in D\}$$

είναι το σύνολο τιμών της f *ή η εικόνα της* f *ή η εικόνα του* D *υπό (δηλαδή, κάτω από) την* f.

(β′) Η μοναδικότητα του $x \in D$ *με* $f(x) = y \in f(D)$ *στον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει ακριβώς από το ότι η* f *είναι 1-1: Αν για δοσμένο* $y \in f(D)$ *υπήρχαν* $x_1, x_2 \in D$ *με* $x_1 \neq x_2$ *και* $f(x_1) = y = f(x_2)$, *τότε η* f *δεν θα ήταν 1-1, σύμφωνα με τον ορισμό (του 1-1).*

Αυτό σημαίνει επίσης ότι αν μία συνάρτηση f *δεν είναι 1-1, δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση* f^{-1}, *καθώς οι συναρτήσεις αντιστοιχούν σε κάθε σημείο του πεδίο ορισμού τους έναν μονοδικό αριθμό, ενώ στην περίπτωση μίας συνάρτησης* f *που δεν είναι 1-1 σε κάποιο σημείο της εικόνας* $f(D)$ *της* f *(δηλαδή του πεδίου ορισμού της* f^{-1}*) θα αντιστοιχούσαν περισσότερα από ένα σημεία στο πεδίο ορισμού* D *της* f *(δηλαδή στην εικόνα της* f^{-1}*).*

Σχετικά με την τελευταία παρένθεση: Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} *έχουμε ότι για κάθε* $y \in f(D)$ *ισχύει* $f^{-1}(y) = x \in D$ *και άρα* $f^{-1}(f(D)) \subset D$ *και για κάθε* $x \in D$ *υπάρχει* $y \in f(D)$ *με* $f^{-1}(y) = x$ *και άρα* $D \subset f^{-1}(f(D))$. *Συνεπώς,* $f^{-1}(f(D)) = D$.

(γ′) Αξίζει να σημειωθεί ότι για κάθε συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ *και κάθε* $A \subset \mathbb{R}$ *ορίζεται η* **αντίστροφη εικόνα του** A, $f^{-1}(A) := \{x \in D : f(x) \in A\}$. *Ειδικότερα, για κάθε* $A \supset f(D)$ *έχουμε* $f^{-1}(A) = D$.

Επίσης, για κάθε $y \in f(D)$ *έχουμε* $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in D : f(x) = y\}$, *το οποίο είναι για κάθε* $y \in f(D)$ *το μονοσύνολο* $\{x\}$, *όπου* $f(x) = y$ *(και γράφουμε τότε* $f^{-1}(y) = x$*), αν και μόνο αν η* f *είναι 1-1.*

Π.χ., για τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, *έχουμε* $f^{-1}(c) = \mathbb{R}$ *και* $f^{-1}(y) = \emptyset$ *για* $y \neq c$.

(δ′) Σημειώνουμε ακόμα ότι από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ *για 1-1 συναρτήσεις* $f : D \to \mathbb{R}$ *προκύπτει η ισοδυναμία*

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x, \quad x \in D, \quad y \in f(D),$$

[38] βλ. την επόμενη παρατήρηση

η οποία συνεπάγεται

$$(f \circ f^{-1}) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \quad \forall\ y \in f(D)$$

και

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \forall\ x \in D.$$

(ε′) *Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, όταν ορίζεται, δηλαδή όταν η f είναι 1-1, είναι και αυτή 1-1.*

Πράγματι, αν $y_1 \neq y_2$, τότε $x_1 = f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2) = x_2$, αφού, αν είχαμε $x_1 = x_2$, θα είχαμε $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, άτοπο.

Παρατήρηση 4.7. (α′) *Οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις, δηλαδή, οι (γνησίως) αύξουσες ή φθίνουσες συναρτήσεις, είναι 1-1.*

Πράγματι, αν η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε για κάθε $a, b \in D$ με $a \neq b$ θα ισχύει είτε $a < b$ είτε $b < a$. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας (χ.β.τ.γ.), ότι ισχύει το πρώτο, $a < b$. Αν η f είναι αύξουσα, τότε θα έχουμε $f(a) < f(b)$, αν είναι φθίνουσα θα έχουμε $f(a) > f(b)$. Σε κάθε περίπτωση, για $a \neq b$ θα έχουμε $f(a) \neq f(b)$.

(β′) *Επίσης, και η αντίστροφη συνάρτηση μιας αύξουσας ή φθίνουσας συνάρτησης είναι και αυτή αύξουσα ή φθίνουσα, αντίστοιχα.*

Πράγματι, έστω f αύξουσα. Τότε για κάθε $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$ θα έχουμε $x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$, δηλαδή η f^{-1} θα είναι αύξουσα, γιατί αν είχαμε $x_1 \geq x_2$ τότε (αφού η f είναι αύξουσα) θα είχαμε $y_1 = f(x_1) \geq y_2 = f(x_2)$, άτοπο.

(γ′) *Οι μη φθίνουσες και οι μη αύξουσες συναρτήσεις δεν είναι απαραίτητα 1-1, εκτός φυσικά αν είναι (γνησίως) αύξουσες ή φθίνουσες.*

Πράγματι, μία σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $x \in D$, $c \in \mathbb{R}$, είναι μη φθίνουσα και μη αύξουσα, αλλά δεν είναι 1-1 αφού για οποιαδήποτε $a, b \in D$ με $a \neq b$ ισχύει $f(a) = f(b) = c$.

Παράδειγμα 4.5. *Η ισχύς των παρακάτω αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. (Η διαπίστωσή τους είναι άμεση από τον ορισμό και την προηγούμενη παρατήρηση.)*

(α′) *Οι γραμμικές, μη σταθερές, συναρτήσεις $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, είναι 1-1.*

(β′) *Οι σταθερές συναρτήσεις δεν είναι 1-1.*

(γ′) *Η $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι 1-1, ενώ η $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, είναι 1-1.*

(δ′) *Γενικότερα, οι συναρτήσεις $f(x) = x^n$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, και οι συναρτήσεις $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ περιττός, είναι 1-1*

Παρατήρηση 4.8. *(α′) Υπάρχει ένα ωραίο γεωμετρικό κριτήριο για να διαπιστώσει κανείς από το γράφημα (ή, αλλιώς, τη γραφική παράσταση) μιας συνάρτησης αν αυτή είναι 1-1:*

Αυτό θα ισχύει αν δεν υπάρχει οριζόντια ευθεία (δηλαδή, παράλληλη προς τον άξονα των x) που να τέμνει σε δύο σημεία το γράφημα της συνάρτησης.

Εδώ αξίζει να θυμηθούμε ότι για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι δεν υπάρχει κάθετη ευθεία (δηλαδή, παράλληλη προς το άξονα των y) που να τέμνει το γράφημα της συνάρτησης σε δύο σημεία.

(β′) Ακόμα, αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 και συνεπώς έχει αντίστροφη f^{-1}, τότε το γράφημα της αντίστροφης είναι ο κατοπτρισμός στη διαγώνιο $y = x$ (δηλαδή στο γράφημα της ταυτοτικής συνάρτησης $I(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$) του γραφήματος της f.

Πράγματι, έστω $f : D \to \mathbb{R}$ είναι 1-1. Τότε, το γράφημα της f είναι το

$$\Gamma_f := \{(x, y) : y = f(x), x \in D\} = \{(x, f(x)) : x \in D\},$$

ενώ το γράφημα της f^{-1} είναι το

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(y, x) : x = f^{-1}(y), y \in f(D)\} = \{(y, f^{-1}(y)) : y \in f(D)\}$$

Αφού $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$, όπου $x \in D$, $y \in f(D)$, βλέπουμε ότι το Γ_f και το $\Gamma_{f^{-1}}$ αποτελούνται το μεν πρώτο από τα ζεύγη (x, y) το δε δεύτερο από τα ζεύγη (y, x), όπου στα δύο ζεύγη οι αριθμοί x και y είναι οι ίδιοι, αλλά σε διαφορετική θέση. Το (y, x) είναι ο κατοπτρισμός του (x, y) ως προς τη διαγώνιο.[39]

Είδαμε πιο πάνω ότι οι (γνησίως) αύξουσες ή φθίνουσες συναρτήσεις είναι 1-1, ανεξαρτήτως άλλων ιδιοτήτων τους. Για συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 4.16. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 στο διάστημα $D \subset \mathbb{R}$. Τότε η f είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα σε ολόκληρο το διάστημα D.*

Απόδειξη: (1) Έστω $a < b < c$ τρία σημεία του διαστήματος D. Αφού $a \neq c$ θα έχουμε ή $f(a) < f(c)$ ή $f(a) > f(c)$.

Στην πρώτη περίπτωση θα πρέπει να ισχύει $f(a) < f(b) < f(c)$: Πράγματι, αν ίσχυε $f(b) < f(a)$, θα υπήρχε ένα $x \in (b, c)$ με $f(x) = f(a)$, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, που είναι άτοπο, αφού η f είναι 1-1 στο D και άρα και στο $[a, c]$. Αντίστοιχα, αν $f(b) > f(c)$, θα υπήρχε ένα $x \in (a, b)$ με $f(y) = f(c)$ που θα ήταν πάλι άτοπο, αφού η f είναι 1-1 στο $[a, c]$.

Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι στη δεύτερη περίπτωση θα πρέπει να ισχύει $f(a) > f(b) > f(c)$.[40]

[39] Για να το δείτε καλύτερα αυτό, σχεδιάστε μερικά σημεία (a, b) και (b, a) και δείτε που βρίσκονται ως προς τη διαγώνιο $y = x$ ή δείτε τα Σχήματα 4 και 5 στο Κεφάλαιο 12 του [1].

[40] Η ουσία δηλαδή είναι ότι για τρία σημεία σε αύξουσα διάταξη οι αντίστοιχες τιμές είναι και αυτές διατεταγμένες με ενιαία αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη. Δεν μπορεί να συμβεί η διάταξη των τιμών να αλλάξει από αύξουσα σε φθίνουσα ή το αντίστροφο μέσα στην ίδια τριάδα. Στο (2) δείχνεται το ίδιο για τέσσερα σημεία.

(2) Αν έχουμε τέσσερα σημεία $a < b < c < d$ του D, τότε θα ισχύει

$$\text{είτε} \quad f(a) < f(b) < f(c) < f(d) \quad \text{είτε} \quad f(a) > f(b) > f(c) > f(d).$$

Πράγματι, από το (1) έχουμε ότι είτε $f(a) < f(b) < f(c)$ είτε $f(a) > f(b) > f(c)$. Αν ισχύει το πρώτο, τότε θα πρέπει να ισχύει και $f(b) < f(c) < f(d)$, πάλι από το (1), και ανάλογα και για το δεύτερο.

(3) Έστω δύο οποιαδήποτε σημεία $a < b$ του D. Τότε, αν $f(a) < f(b)$, η f θα είναι αύξουσα, δηλαδή για οποιαδήποτε $c < d$ θα ισχύει $f(c) < f(d)$.

Πράγματι, αν τα $c < d$ ταυτίζονται με τα $a < b$ δεν χρειάζεται να δείξουμε τίποτα, αν το ένα από τα δύο $c < d$ ταυτίζεται με κάποιο από τα $a < b$,[41] θα έχουμε $f(c) < f(d)$ από το (1), ενώ αν τα $a < b$ και $c < d$ είναι όλα διαφορετικά, η διάταξη $f(a) < f(b)$ θα ισχύει και για τα $f(c) < f(d)$, σύμφωνα με το (2), αφού $c < d$ και $a < b$, βλ. και την Υποσημείωση 40.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι αν $f(a) > f(b)$, τότε η f θα είναι φθίνουσα. □

Παρατήρηση 4.9. *Από το προηγούμενο θεώρημα και το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού $f(D)$ της αντίστροφης $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ μιας $f : D \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα D και είναι συνεχής και 1-1 και συνεπώς, όπως μόλις είδαμε, αύξουσα ή φθίνουσα στο D, θα είναι και αυτό διάστημα.*

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα.[42]

Αν $D = [a, b]$, τότε, αφού $f(a) < f(b)$, έχουμε $[f(a), f(b)] \subset f(D)$ από το ΘΕΤ. Επίσης δεν υπάρχει $y \in\in f(D)$ με $y > f(b)$ ή $y < f(a)$ γιατί τότε η f δεν θα ήταν αύξουσα στο D.[43] *Συνεπώς, $f(D) = [f(a), f(b)]$.*[44]

Αν $D = [a, b)$, τότε $[f(a), f(c)] \subset f(D)$ για κάθε $c \in (a, b)$ και δεν υπάρχει $y \in f(D)$ με $y < f(a)$. Αυτό προκύπτει όπως πριν από το ΘΕΤ και επειδή η f είναι αύξουσα.

Εάν η f δεν είναι άνω φραγμένη στο $[a, b)$, θα υπάρχει για κάθε $y > f(a)$ ένα $x \in (a, b)$ έτσι ώστε $y = f(x)$.[45] *Συνεπώς από το ΘΕΤ $[f(a), y] \subset f(D)$ και άρα $[f(a), +\infty) = f(D)$.*[46]

Εάν η f είναι άνω φραγμένη στο $[a, b)$, τότε θα υπάρχει $\alpha = \sup f = \sup f(D) = \sup\{f(x) : x \in [a, b)\} \in (f(a), +\infty)$ από το Αξίωμα Πληρότητας και επειδή η f είναι αύξουσα.

Αυτό συνεπάγεται καταρχάς ότι δεν υπάρχει $y \in f(D)$ με $y > \alpha$, δηλαδή, $f(D) \subset [f(a), \alpha]$.

Επίσης, $\alpha \notin f(D)$, αφού αν υπήρχε $x \in (a, b)$ με $f(x) = \alpha$, τότε, αφού η f είναι αύξουσα, για κάθε $x' \in (x, b)$ θα είχαμε $f(x') > f(x) = \alpha$, που είναι άτοπο, αφού το α είναι άνω φράγμα της $f(D)$. Συνεπώς, $f(D) \subset [f(a), \alpha)$.

Από την άλλη, για κάθε $y \in (f(a), \alpha)$ υπάρχει $x \in (a, b)$ με $y = f(x)$.[47] *Συνεπώς, $[f(a), \alpha) \subset f(D)$ και άρα $f(D) = [f(a), \alpha)$.*[48]

[41] Οι περιπτώσεις που μπορούν να προκύψουν είναι $c < d = a < b$, $c < a < d = b$, $a < c < d = b$, $c = a < b < d$, $c = a < d < b$.

[42] Αν f φθίνουσα, μπορούμε να μεταφέρουμε στην f τα αποτελέσματα που θα βρούμε για την αύξουσα $-f$.

[43] Αφού τότε θα είχαμε $x \in (a, b)$ με $y = f(x) > f(b)$ ή $y = f(x) < f(a)$, αντίστοιχα, που είναι άτοπο προς το ότι η f είναι αύξουσα.

[44] Παράδειγμα στο $[0, 1]$: $f(x) = x$.

[45] Αφού η f δεν είναι άνω φραγμένη στο $[a, b)$, υπάρχει για κάθε $y > f(a)$ ένα $x \in (a, b)$ έτσι ώστε $f(x) > y + 1$ (αλλιώς το $y + 1$ θα ήταν άνω φράγμα της f). Τότε όμως από το ΘΕΤ υπάρχει $x' \in (a, x)$ με $f(x') = y$.

[46] Παράδειγμα στο $[0, 1)$: $f(x) = 1/(1 - x)$.

[47] Αφού $\alpha = \sup f(D)$, για κάθε $y < y' < \alpha$ υπάρχει $x \in (a, b)$ με $f(x) > y'$ (αλλιώς το α δεν θα ήταν το ελάχιστο άνω φράγμα του $f(D)$) και από το ΘΕΤ προκύπτει ότι υπάρχει $x' \in (a, x)$ με $f(x') = y$.

[48] Παράδειγμα στο $[0, 1)$: $f(x) = x$.

Αντίστοιχα, αν $D = (a, b]$, *τότε είτε* $f(D) = (-\infty, f(b)]$ *αν η* f *δεν είναι κάτω φραγμένη*[49] *είτε* $f(D) = (\beta, f(b)]$ *με* $\beta = \inf f = \inf f(D) = \inf\{f(x) : x \in (a, b]\}$ *αν η f είναι κάτω φραγμένη.*[50]

Αν $D = (a, b)$, *τότε το* $f(D)$ *θα είναι της μορφής* $(\beta, +\infty)$, (β, α), $(-\infty, \alpha)$, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, *ανάλογα με το αν η* f *είναι φραγμένη κάτω αλλά όχι άνω, και κάτω και άνω, άνω αλλά όχι κάτω, ούτε κάτω ούτε άνω.*[51]

Με παρόμοιο τρόπο όπως στην περίπτωση $D = [a, b)$ *αποδεικνύεται και ότι*[52] *αν* $D = [a, +\infty)$, *τότε το* $f(D)$ *θα είναι είτε της μορφής* $[f(a), +\infty)$ *αν η* f *δεν είναι άνω φραγμένη*[53] *είτε της μορφής* $[f(a), \sup f)$ *αν είναι άνω φραγμένη,*[54] *ενώ αν* $D = (a, +\infty)$ *έχουμε για το* $f(D)$ *πάλι τις περιπτώσεις* $(\inf f, +\infty)$, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, $(\inf f, \sup f)$, $(-\infty, \sup f)$.[55]

Αντίστοιχα αποτελέσματα προκύπτουν[56] *και στις περιπτώσεις όπου το* $D = (-\infty, b]$ *(εδώ, είτε* $f(D) = (-\infty, f(b)]$ *είτε* $f(D) = (\inf f, f(b)]$*) ή* $D = (-\infty, b)$ *ή* $D = \mathbb{R}$ *(στις δύο αυτές περιπτώσεις έχουμε πάλι ότι το* $f(D)$ *θα έχει μία από τις μορφές* $(\inf f, +\infty)$, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, $(\inf f, \sup f)$, $(-\infty, \sup f)$*).*[57]

Θεώρημα 4.17. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$ *συνεχής και 1-1 στο διάστημα* $D \subset \mathbb{R}$. *Τότε και η* $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ *θα είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Από το προηγούμενο Θεώρημα 4.16 έχουμε ότι η f είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα στο διάστημα D. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα.[58] Ας υποθέσουμε επίσης ότι το διάστημα D είναι ανοικτό.[59]

Έστω τώρα $b \in f(D)$ και $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $y \in f(D)$ με $|y - b| < \delta$ να ισχύει $|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon$. Αφού $b \in f(D)$ υπάρχει $a \in D$ με $b = f(a) \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$. Άρα θέλουμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $y \in f(D)$ με $|y - f(a)| < \delta$ να ισχύει $|f^{-1}(y) - a| < \varepsilon$.

[49] Παράδειγμα στο $(0, 1]$: $f(x) = -1/x$.

[50] Παράδειγμα στο $(0, 1]$: $f(x) = x$.

[51] Παραδείγματα στο $(0, 1)$: $f(x) = 1/(1 - x)$, $f(x) = x$, $f(x) = -1/x$, $f(x) = 4 - (1/x)$ για $x \leq 1/2$ και $f(x) = 1/(1 - x)$ για $x \geq 1/2$.

[52] Απόδειξη: Άσκηση

[53] Παράδειγμα στο $[1, +\infty)$: $f(x) = x$.

[54] Παράδειγμα στο $[1, +\infty)$: $f(x) = -1/x$.

[55] Παραδείγματα στο $(1, +\infty)$: Άσκηση.

[56] Απόδειξη: Άσκηση.

[57] Παραδείγματα: Άσκηση.

[58] Αν η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε ανάλογα. Μπορούμε όμως και να χρησιμοποιήσουμε ότι τότε η $-f : D \to \mathbb{R}$ θα είναι αύξουσα και, εφαρμόζοντας το θεώρημα στην $-f$, να πάρουμε ότι η $(-f)^{-1} : (-f)(D) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Επειδή για $x \in D$ και $y \in f(D) \Leftrightarrow -y \in -f(D) := \{-f(x) : x \in D\} = (-f)(D)$ έχουμε $(-f)^{-1}(-y) = x \Leftrightarrow -y = (-f)(x) = -f(x) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, και άρα $(-f)^{-1}(-y) = f^{-1}(y)$, η συνέχεια της f^{-1} στο $f(D)$ προκύπτει από τη συνέχεια της $(-f)^{-1}$ στο $(-f)(D) = -f(D)$. [Πράγματι (σχηματικά· με τον ακολουθιακό ορισμό της συνέχειας που θα γνωρίσουμε αργότερα ο ακόλουθος συλλογισμός είναι αυστηρός, με τον $\varepsilon - \delta$-ορισμό που γνωρίζουμε θα πρέπει να μεταφραστεί σε αυτόν), $y \to a$ στο $f(D) \Leftrightarrow -y \to -a$ στο $-f(D) \Rightarrow f^{-1}(y) = (-f)^{-1}(-y) \to (-f)^{-1}(-a) = f^{-1}(a)$.]

[59] Αν το διάστημα D δεν είναι ανοικτό, δηλαδή αν είναι της μορφής $(a, b]$ ή $[a, b)$ ή $[a, b]$, μπορούμε να επεκτείνουμε τη συνεχή και αύξουσα $f : D \to \mathbb{R}$ σε μία συνεχή και αύξουσα συνάρτηση $\tilde{f}$ σε ένα ανοικτό $\tilde{D} \supset D$. Π.χ., αν $D = [a, b]$, η $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(x) := f(x)$ για $x \in D$, $\tilde{f}(x) := f(b) + (x - b)$ για $x \geq b$ και $\tilde{f}(x) := f(a) + (x - a)$ για $x \leq a$ είναι συνεχής και αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για τα άλλα δύο διαστήματα απαιτείται μόνο η αντίστοιχη επέκταση στο κλειστό άκρο του D.

Επιλέγουμε $\varepsilon' \in (0,\varepsilon)$ έτσι ώστε $a-\varepsilon', a+\varepsilon' \in D$[60] και θέτουμε $\delta := \min(f(a+\varepsilon')-f(a), f(a)-f(a-\varepsilon'))$. Τότε έχουμε

$$\delta \le f(a+\varepsilon')-f(a) \Leftrightarrow f(a)+\delta \le f(a+\varepsilon'), \quad \delta \le f(a)-f(a-\varepsilon') \Leftrightarrow f(a-\varepsilon') \le f(a)-\delta,$$

και συνεπώς για κάθε $y \in f(D)$ με $|y-f(a)|<\delta \Leftrightarrow f(a)-\delta<y<f(a)+\delta$ ισχύει $f(a-\varepsilon')<y<f(a+\varepsilon')$, από το οποίο, αφού η f^{-1} είναι αύξουσα,[61] προκύπτει $a-\varepsilon'<f^{-1}(y)<a+\varepsilon' \Leftrightarrow |f^{-1}(y)-a|<\varepsilon'$ και συνεπώς $|f^{-1}(y)-a|<\varepsilon$. □

Θεώρημα 4.18. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 στο διάστημα $D \subset \mathbb{R}$. Αν για κάποιο $a \in f(D)$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $f^{-1}(a)$ με $f'(f^{-1}(a)) = 0$, τότε η f^{-1}* δεν *είναι παραγωγίσιμη στο a.*

Απόδειξη: Για κάθε $y \in f(D)$ ισχύει $f(f^{-1}(y)) = y$. Αν η f^{-1} ήταν παραγωγίσιμη στο a, τότε από τον Κανόνα της Αλυσίδας και την υπόθεση $f'(f^{-1}(a)) = 0$ θα είχαμε

$$0 = f'(f^{-1}(a))(f^{-1})'(a) = 1,$$

που είναι προφανώς άτοπο. □

Θεώρημα 4.19. *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 στο διάστημα $D \subset \mathbb{R}$. Αν για κάποιο $b \in f(D)$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $f^{-1}(b)$ με $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο b και έχει παράγωγο*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Απόδειξη: Αφού $b \in f(D)$, υπάρχει μοναδικό $a \in D$ με $f(a) = b \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$. Επίσης, για κάθε $b+h \in f(D)$ υπάρχει μοναδικό $a+k(h) \in D$ με

$$f(a+k(h)) = b+h \Leftrightarrow a+k(h) = f^{-1}(b+h) \Leftrightarrow k(h) = f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)$$

και η συνάρτηση $h \mapsto k(h)$ είναι συνεχής στο 0, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.17, με $k(0) = 0$ και $k(h) \neq 0$ για $h \neq 0$, αφού η f^{-1} είναι 1-1. Επίσης, η συνάρτηση

$$g(k) := \frac{f(a+k)-f(a)}{k}, \quad k \neq 0, \quad g(0) := f'(a) \neq 0,$$

είναι συνεχής στο 0. Συνεπώς από το Θεώρημα 3.2 παίρνουμε

$$\lim_{h\to 0} g(k(h)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+k(h))-f(a)}{k(h)} = f'(a) \neq 0,$$

και άρα

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k(h)}{f(a+k(h))-f(a)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(k(h))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Παράδειγμα 4.6. *Το παράδειγμα στη σελίδα 215 του [1].*

[60] Αυτό μπορεί να γίνει αφού D ανοικτό και $a \in D$. Αυτός είναι και ο λόγος που θέλαμε το D να είναι ανοικτό.

[61] Αυτό προκύπτει από το ότι η f είναι αύξουσα, βλ. Παρατήρηση 4.7.

4.3.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 12]:

Το Παράδειγμα 4.5.
Το Παράδειγμα 4.6
Τα προβλήματα:
1 [Εξετάστε αν υπάρχει *συναρτηση* f^{-1}],
2 - 9, 11

Κεφάλαιο 5

Ολοκλήρωση

5.1 Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Ορισμός 5.1. *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *φραγμένη και έστω* P *μία* **διαμέριση του** $[a, b]$, *δηλαδή* $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ *με*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ονομάζουμε **κάτω άθροισμα της** f **για τη διαμέριση** P *τον πραγματικό αριθμό*

$$L(f, P) := \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}), \quad m_i := \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\},$$

και **άνω άθροισμα της** f **για τη διαμέριση** P *τον πραγματικό αριθμό*

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}), \quad m_i := \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Πριν συνεχίσουμε, κάποιες παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 5.1. *(α′) Το σύνολο των διαμερίσεων* P *του* $[a, b]$ *(όπου* $a, b \in \mathbb{R}$ *με* $a < b$*) είναι μη κενό, αφού η* $P = \{t_0, t_1\}$ *με* $t_0 = a$, $t_1 = b$ *είναι μία (τετριμμένη) διαμέριση του* $[a, b]$.

(β′) Η f *υποτέθηκε φραγμένη έτσι ώστε να ισχύει* $m_i, M_i \in \mathbb{R}$ *για όλα τα* $i = 1, \ldots, n$ *και συνεπώς* $L(f, P), U(f, P) \in \mathbb{R}$.

Μάλιστα ισχύει

$$\mathbb{R} \ni \inf f \leq m_i \leq M_i \leq \sup f \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.1}$$

Αυτό προκύπτει επειδή τα $[t_{i-1}, t_i]$ *είναι υποσύνολα του πεδίου ορισμού* $[a, b]$ *της* f *και για κάθε φραγμένη συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, *και κάθε περιορισμό*[1] $f|_A$ *της* f *σε*

[1] *Υπενθύμιση:* Ο περιορισμός $f|_A$ της $f : D \to \mathbb{R}$ σε ένα $\emptyset \neq A \subset D$ ορίζεται ως η συνάρτηση $f|_A : A \to \mathbb{R}$ με $f|_A(x) := f(x)$ για κάθε $x \in A$.

ένα $\emptyset \neq A \subset D$ *ισχύει*

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \ni \inf f := \inf f(D) := \inf\{f(x) : x \in D\} \\ &\leq \inf\{f(x) : x \in A\} \ [\, = \inf f(A) = \inf f|_A \,] \\ &\leq \sup\{f(x) : x \in A\} \ [\, = \sup f|_A = \sup f(A) \,] \\ &\leq \sup\{f(x) : x \in D\} =: \sup f(D) =: \sup f \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Οι ανισότητες στην (5.2) *προκύπτουν από το ότι για οποιοδήποτε* $\emptyset \neq B \subset C \subset \mathbb{R}$ *με* C *φραγμένο έχουμε*[2]

$$\mathbb{R} \ni \inf C \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup C \in \mathbb{R}.$$

(γ') *Από τους ορισμούς των άνω και κάτω αθροισμάτων για μία φραγμένη* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *και την* (5.1) *προκύπτει για κάθε διαμέριση* P *του* $[a, b]$

$$\mathbb{R} \ni \inf f(b-a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq \sup f(b-a) \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

Αυτό συνεπάγεται ότι ορίζονται **το κάτω και το άνω ολοκλήρωμα της** f

$$L\int_a^b f := \sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\}, \tag{5.4}$$

$$U\int_a^b f := \inf\{U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\}, \tag{5.5}$$

αφού ισχύει

$$\mathbb{R} \ni \inf f(b-a) \leq L\int_a^b f, \ U\int_a^b f \leq \sup f(b-a) \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

Μάλιστα ισχύει και

$$L\int_a^b f \leq U\int_a^b f, \tag{5.7}$$

[2]Πράγματι, αφού το C είναι μη κενό και κάτω φραγμένο θα ισχύει $x \geq \inf C \in \mathbb{R}$ για όλα τα $x \in C$ και άρα ειδικότερα για όλα τα $x \in B$. Συνεπώς, το $\inf C$ είναι ένα κάτω φράγμα του B και άρα $\inf B \geq \inf C$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\sup B \leq \sup C \in \mathbb{R}$, αφού το C είναι μη κενό και άνω φραγμένο και το B ένα υποσύνολό του (Άσκηση). Επίσης, αφού B μη κενό και φραγμένο θα υπάρχει ένα $x \in B$ με $\mathbb{R} \ni \inf B \leq x \leq \sup B \in \mathbb{R}$ (αφού τα $\sup B \in \mathbb{R}$ και $\inf B \in \mathbb{R}$ είναι άνω και κάτω φράγματα του B, αντίστοιχα) από το οποίο προκύπτει $\inf B \leq \sup B$.
(Εάν θεωρήσουμε τα σύνολα $\emptyset \neq B \subset C \subset \mathbb{R}$ ως πεπερασμένα, δηλαδή ως σύνολα που αποτελούνται από ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, το οποίο συνεπάγεται ότι τα sup και inf θα είναι max και min, τότε είναι διαισθητικά προφανές ότι $\inf C \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup C$: Αφού το C περιέχει το B, είναι πιθανό το C να περιέχει ένα ακόμα μικρότερο στοιχείο και ένα ακόμα μεγαλύτερο στοιχείο σε σχέση με όλα τα στοιχεία του B και επίσης, προφανώς, το μικρότερο στοιχείο του B είναι μικρότερο από το μεγαλύτερο στοιχείο του B.
[Ακόμα πιο παραστατικά: Φανταστείτε μία αίθουσα με συγκεκριμένο πλήθος ανθρώπων τους οποίους διατάσσετε ανάλογα με το ύψος τους. Προφανώς, ο ψηλότερος είναι πιο ψηλός από τον κοντύτερο. Αν ανοίξει η πόρτα και μπούνε στην αίθουσα επιπλέον άνθρωποι, είναι πιθανό ένας από αυτούς να είναι ψηλότερος από τον αρχικά ψηλότερο και ένας άλλος να είναι κοντύτερος από τον αρχικά κοντύτερο.])

όπως θα αποδείξουμε σε λίγο.[3]

Τότε, από τις (5.3) - (5.7) προκύπτει ότι για κάθε φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ισχύει*

$$\mathbb{R} \ni \inf f(b-a) \leq L(f, P) \leq L\int_a^b f \leq U\int_a^b f \leq U(f, P) \leq \sup f(b-a) \in \mathbb{R}$$
$$\text{για κάθε διαμέριση } P \text{ του } [a, b]. \quad (5.8)$$

Για την απόδειξη της (5.7) θα αποδείξουμε πρώτα το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 5.1. *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *φραγμένη και* P *και* Q *δύο διαμερίσεις του* $[a, b]$, *όπου* **η** Q **περιέχει την** P, *δηλαδή όλα τα στοιχεία της* P *είναι και στοιχεία της* Q. *Τότε,*

$$L(f, Q) \geq L(f, P) \quad \text{και} \quad U(f, Q) \leq U(f, P).$$

Απόδειξη: Έστω ότι η Q περιέχει όλα τα στοιχεία της $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ και μόνο ένα παραπάνω, το $u \in (a, b)$, δηλαδή έστω $Q = P \cup \{u\}$, και ας υποθέσουμε ότι αυτό το u βρίσκεται στο (t_{k-1}, t_k) για κάποιο $k = 1, \dots, n$. Έχουμε δηλαδή

$$P : \quad a = t_0 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_n \quad \text{και} \quad Q : \quad a = t_0 < \ldots < t_{k-1} < u < t_k < \ldots < t_n.$$

Έστω

$$m_k' := \inf\{f(x) : x \in [t_{k-1}, u]\}, \quad m_k'' := \inf\{f(x) : x \in [u, t_k]\}.$$

Αφού $[t_{k-1}, u], [u, t_k] \subset [t_{k-1}, t_k]$, έχουμε (βλ. την (5.2))

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\} \leq m_k', m_k'',$$

και άρα

$$m_k(t_k - t_{k-1}) = m_k(u - t_{k-1}) + m_k(t_k - u) \leq m_k'(u - t_{k-1}) + m_k''(t_k - u). \tag{5.9}$$

Αφού

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k(t_k - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$
$$L(f, Q) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k'(u - t_{k-1}) + m_k''(t_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$

από την (5.9) προκύπτει ότι

$$L(f, P) \leq L(f, Q). \tag{5.10}$$

[3] Να προσεχθεί ότι η (5.7) δεν προκύπτει από τα προηγούμενα, καθώς στην (5.3) συγκρίνουμε τα $L(f, P) \leq U(f, P)$ για την *ίδια* διαμέριση P και δεν έχουμε αποκλείσει ακόμα ότι για δοσμένη διαμέριση P μπορεί να υπάρχει κάποια άλλη διαμέριση P' έτσι ώστε $L(f, P') > U(f, P)$. Αυτό όμως δεν συμβαίνει, σύμφωνα με την Πρόταση 5.1, την οποία θα αποδείξουμε σε λίγο.

Ανάλογα προκύπτει και ότι

$$U(f, Q) \leq U(f, P), \tag{5.11}$$

αφού (πάλι σύμφωνα με την (5.2))

$$M_k' := \sup\{f(x) : x \in [t_{k-1}, u]\}, M_k'' := \sup\{f(x) : x \in [u, t_k]\} \leq \sup\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\} = M_k.$$

Αν η διαμέριση Q περιέχει την P και επιπλέον $\ell \in \mathbb{N}$ νέα στοιχεία, διαφορετικά μεταξύ τους και κάθε ένα από αυτά διαφορετικό από τα στοιχεία της P,[4] τότε μπορούμε να προσθέτουμε σε κάθε διαμέριση P_{j-1}, $j = 1, \dots, \ell$, με $P_0 = P$ ένα ακόμα στοιχείο από τα επιπλέον που έχει η Q, διαφορετικό κάθε φορά μέχρι να εξαντλήσουμε τα ℓ νέα στοιχεία, για να αποκτήσουμε την P_j με $P_\ell = Q$. Τότε θα έχουμε

$$P = P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_\ell = Q,$$

όπου, όπως είπαμε, η P_j έχει ένα μόνο παραπάνω στοιχείο από την P_{j-1} για $j = 1, \dots, \ell$, και συνεπώς, σύμφωνα με τις (5.10) και (5.11), θα έχουμε

$$L(f, P) = L(f, P_0) \leq L(f, P_1) \leq \cdots \leq L(f, P_\ell) = L(f, Q)$$

και

$$U(f, P) = U(f, P_0) \geq U(f, P_1) \geq \cdots \geq U(f, P_\ell) = U(f, Q),$$

που ήταν και το αποδεικτέο. □

Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα, το οποίο μας λέει ότι *οποιοδήποτε* κάτω άθροισμα μιας φραγμένης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μικρότερο ή ίσο από *οποιοδήποτε* άνω άθροισμα της f.

Πρόταση 5.1. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε, για οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις P_1, P_2 του $[a, b]$ ισχύει*

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

Απόδειξη: Έστω P_1 και P_2 δύο διαμερίσεις του $[a, b]$ και έστω η P η διαμέριση που προκύπτει από την ένωση των δύο διαμερίσεων, $P = P_1 \cup P_2$. Τότε η P περιέχει και την P_1 και την P_2 και συνεπώς, σύμφωνα με το Λήμμα 5.1 και την (5.1), έχουμε

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2).$$

□

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την (5.7).

[4] Να προσεχθεί ότι κάθε διαμέριση περιέχει ένα *πεπερασμένο* πλήθος στοιχείων $n \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι σημαντικό γιατί σημαίνει ότι δεν έχουμε κάποιο πρόβλημα να ορίσουμε καλώς τα (πεπερασμένα) άνω και κάτω αθροίσματα.

Πρόταση 5.2. *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *φραγμένη. Τότε, για τα κάτω και άνω ολοκληρώματά της,* (5.4) *και* (5.5)*, αντίστοιχα, ισχύει*

$$L\int_a^b f \leq U\int_a^b f. \tag{5.12}$$

Απόδειξη: Έστω P μία διαμέριση του $[a, b]$. Τότε, σύμφωνα με το Πρόταση 5.1, ισχύει

$$L(f, P') \leq U(f, P) \quad \text{για } \textit{κάθε} \text{ διαμέριση } P' \text{ του } [a, b].$$

Συνεπώς (αφού το $U(f, P)$ είναι άνω φράγμα του συνόλου όλων των κάτω αθροισμάτων $L(f, P')$),

$$L\int_a^b f = \sup\{L(f, P') : P' \text{ διαμέριση του } [a, b]\} \leq U(f, P).$$

Αφού αυτό ισχύει για *κάθε* διαμέριση P του $[a, b]$ έχουμε (αφού το $L\int_a^b f$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου όλων των άνω αθροισμάτων $U(f, P)$)

$$L\int_a^b f \leq \inf\{U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} = U\int_a^b f.$$

□

Μπορούμε τώρα να περάσουμε στον ορισμό του ολοκληρώματος μιας φραγμένης συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Ορισμός 5.2. *Μία φραγμένη* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *λέγεται* **ολοκληρώσιμη (στο** $[a, b]$**)** *αν το κάτω και το άνω ολοκλήρωμά της,* (5.4) *και* (5.5)*, αντίστοιχα, είναι ίσα, και τότε η κοινή τιμή τους ονομάζεται* **ολοκλήρωμα της** f **(στο** $[a, b]$**)**,

$$L\int_a^b f = U\int_a^b f =: \int_a^b f.$$

Παρατήρηση 5.2. *(α΄) Να προσεχθεί ότι ορίσαμε το ολοκλήρωμα μόνο για συναρτήσεις* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, οι οποίες είναι φραγμένες και ορίζονται σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα του* $\mathbb{R}$*.*

Ειδικότερα, να προσεχθεί ότι, σύμφωνα με αυτό τον ορισμό, στα επόμενα μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση θα θεωρείται αυτόματα φραγμένη, χωρίς το τελευταίο να αναφέρεται απαραιτήτως ρητά.

(β΄) Σύμφωνα με την (5.8)*, για το ολοκλήρωμα μιας ολοκληρώσιμης (και άρα φραγμένης) συνάρτησης* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ισχύει*

$$\mathbb{R} \ni \inf f(b - a) \leq L(f, P) \leq \int_a^b f \leq U(f, P) \leq \sup f(b - a) \in \mathbb{R}$$
$$\text{για κάθε διαμέριση } P \text{ του } [a, b] \tag{5.13}$$

και το ολοκλήρωμα της f *είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει αυτή η ιδιότητα.*[5]

(γ′) *Από την ιδιότητα (5.13) μιας ολοκληρώσιμης (και άρα φραγμένης) συνάρτησης* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *προκύπτει και οτι, αν* $m, M \in \mathbb{R}$ *με*

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall\, x \in [a, b],$$

τότε

$$m(b - a) \leq \inf f(b - a) \leq \int_a^b f \leq \sup f(b - a) \leq M(b - a). \tag{5.14}$$

(Η πρώτη και η τελευταία ανισότητα προκύπτουν από το ότι το $\inf f$ *είναι το μέγιστο κάτω φράγμα και το* $\sup f$ *είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της* f*.)*

(δ′) *Το ολοκλήρωμα μίας* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *με* $f \geq 0$ *ερμηνεύεται ως το* ***εμβαδό*** *του υποσυνόλου του* $\mathbb{R}^2$ *που περικλείεται από τον άξονα* $y = 0$*, τις ευθείες* $x = a$*,* $x = b$ *και το γράφημα* $\Gamma_f = \{(x, f(x) : x \in [a, b]\}$ *της* f*.*

(ε′) *Το ολοκλήρωμα της* f *στο* $[a, b]$ *(αν υπάρχει) συμβολίζεται πιο κλασικά ως*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ας δούμε δύο τετριμμένα παραδείγματα, μιας ολοκληρώσιμης και μιας μη ολοκληρώσιμης φραγμένης συνάρτησης.

Παράδειγμα 5.1. (α′) *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = c \in \mathbb{R}$ *για κάθε* $x \in [a, b]$.

Αφού για οποιαδήποτε διαμέριση $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ *του* $[a, b]$ *έχουμε*

$$m_i = M_i = c, \quad i = 1, \dots, n,$$

θα ισχύει

$$L(f, P) = c(b - a) = U(f, P)$$

και συνεπώς

$$L\int_a^b f = c(b - a) = U\int_a^b.$$

Άρα, η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c \in \mathbb{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη σε οποιοδήποτε* $[a, b]$ *και το ολοκλήρωμά της είναι το*

$$\int_a^b f = \int_a^b c = c(b - a).$$

[5]Από τον ορισμό των κάτω και άνω ολοκληρωμάτων ως sup και inf κάτω και άνω αθροισμάτων, αντίστοιχα, προκύπτει ότι για αριθμούς $x \notin \left[L\int_a^b f, U\int_a^b f\right]$ η ιδιότητα (5.8) δεν ισχύει. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τα άκρα του διαστήματος ταυτίζονται και δίνουν έναν μοναδικό αριθμό με την ιδιότητα (5.13).

(β΄) *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$.

Δεδομένου ότι σε κάθε (μη κενό) διάστημα του $\mathbb{R}$*, οσοδήποτε μικρού μήκους, υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι αριθμοί,*[6] *θα έχουμε για κάθε διαμέριση* $P = \{t_0, \dots, t_n\}$

$$m_i = 0 < 1 = M_i, , \quad i = 1, \dots, n,$$

το οποίο συνεπάγεται

$$L(f, P) = 0 < b - a = U(f, P)$$

και συνεπώς

$$L \int_a^b f = 0 < b - a = U \int_a^b f.$$

Άρα, η συνάρτηση f *δεν είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$*, δηλαδή δεν έχει ολοκλήρωμα στο* $[a, b]$.

Θα αποδείξουμε τώρα ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας φραγμένων συναρτήσεων $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.[7]

Θεώρημα 5.2. (Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας)
Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *φραγμένη. Η* f *είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει διαμέριση* P *του* $[a, b]$ *έτσι ώστε*

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon. \tag{5.15}$$

Απόδειξη:
$\Leftarrow$: Έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$, έτσι ώστε να ισχύει η (5.15). Αφού, σύμφωνα με την (5.8), για κάθε φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ ισχύει

$$L(f, P) \leq L \int_a^b f \leq U \int_a^b f \leq U(f, P),$$

έχουμε για τη διαμέριση P που ικανοποιεί την (5.15)

$$0 \leq U \int_a^b f - L \int_a^b f \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

[6] Χωρίς απόδειξη (μέχρι στιγμής) στις παρούσες σημειώσεις.

[7] Το χαρακτηριστικό αυτού του κριτηρίου (και το δυνατό του σημείο) είναι ότι δεν απαιτεί τη χρήση των κάτω και άνω ολοκληρωμάτων (που είναι τα sup και inf των κάτω και άνω αθροισμάτων, αντίστοιχα) για την απόδειξη ότι μία φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, αλλά βασίζεται μόνο στα κάτω και άνω αθροίσματα. Να σημειωθεί επίσης ότι απαιτεί για κάθε $\varepsilon > 0$ την εύρεση *μόνο μίας* κατάλληλης διαμέρισης.

Συνεπώς, αφού αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ (και ο όρος στα αριστερά της μεσαίας ανισότητας δεν εξαρτάται από το $\varepsilon > 0$), προκύπτει[8]

$$U\int_a^b f = L\int_a^b f = \int_a^b f, \tag{5.16}$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη.

$\Rightarrow$: Έστω τώρα ότι η φραγμένη f είναι ολοκληρώσιμη. Σύμφωνα με τον ορισμό της ολοκληρωσιμότητας θα ισχύει

$$\sup\{L(f, P') : P' \text{ διαμέριση του } [a, b]\} = \inf\{U(f, P'') : P'' \text{ διαμέριση του } [a, b]\} =: \alpha \in \mathbb{R}.$$

Από αυτό και τον ορισμό των sup και inf προκύπτει[9] ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαμερίσεις P' και P'' του $[a, b]$ έτσι ώστε

$$L(f, P') > \alpha - \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(f, P'') < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.17}$$

Έστω τώρα P μία διαμέριση του $[a, b]$ που περιέχει και την P' και την P''. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 5.1, θα ισχύει

$$L(f, P) \geq L(f, P'), \quad U(f, P) \leq U(f, P''),$$

το οποίο, σε συνδυασμό με την (5.17), μας δίνει

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P'') - L(f, P') < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

□

Παράδειγμα 5.2. *Έστω η $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$ με εξαίρεση το $x = 1$ για το οποίο υποθέτουμε ότι $f(1) = 1$. Τότε για κάθε διαμέριση $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ του $[0, 2]$ τέτοια ώστε $1 \in (t_{j-1}, t_j)$ έχουμε*

$$L(f, P) = 0, \quad U(f, P) = t_j - t_{j-1}.$$

Συνεπώς, αν για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ επιλέξουμε μια διαμέριση με $t_j - t_{j-1} < \varepsilon$,[10] προκύπτει από το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας (Θεώρημα 5.2) ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

Επίσης, αφού προφανώς για κάθε διαμέριση P του $[0, 2]$ ισχύει $L(f, P) = 0 \leq U(f, P)$ και ο αριθμός με αυτήν την ιδιότητα είναι μοναδικός και είναι το ολοκλήρωμα της f (βλ. την Παρατήρηση 5.2), θα ισχύει

$$\int_0^2 f = 0.$$

[8] Αυτό είναι ένα απλό, αλλά συχνά απαντώμενο επιχείρημα: Αν για έναν αριθμό $a \in \mathbb{R}$, ο οποίος δεν εξαρτάται από το $\varepsilon > 0$, γνωρίζουμε ότι $0 \leq a \leq \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $a = 0$. Πράγματι, αν ήταν $a > 0$, τότε θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $\varepsilon = a/2 > 0$ και θα είχαμε $0 < a < a/2$, το οποίο είναι άτοπο (αφού τότε, διαιρώντας δια του $a > 0$, θα προέκυπτε $1 < 1/2 \Leftrightarrow 2 < 1$).

[9] Βλ. και την Υποσημείωση 32.

[10] Μια τέτοια διαμέριση είναι π.χ. η $P = \left\{0, 1 - \frac{\varepsilon}{4}, 1 + \frac{\varepsilon}{4}, 2\right\}$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει κάτι πολύ σημαντικό: δεν είναι αναγκαίο μια φραγμένη συνάρτηση να είναι συνεχής για να είναι ολοκληρώσιμη (αν και όπως θα δούμε σε λίγο σίγουρα είναι ικανό). Τουλάχιστον ένα σημείο ασυνέχειας επιτρέπεται. Όπως θα δούμε πιο κάτω επιτρέπεται σίγουρα και πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας.

Το παράδειγμα δείχνει επίσης ότι «χαλώντας» τη σταθερή συνάρτηση $g(x) = 0$, $x \in [0, 2]$, *μόνο σε ένα σημείο, το ολοκλήρωμά της δεν άλλαξε. Και αυτό ισχύει αν αλλάξουμε της τιμές μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης μόνο σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της.*

Παράδειγμα 5.3. *Έστω η ταυτοτική συνάρτηση* $f(x) = x$ *στο* $[a, b]$. *Αν διαμερίσουμε το* $[a, b]$ *σε* n *ίσα υποδιαστήματα* $[t_{i-1}, t_i]$ *με*

$$t_i = t_{i-1} + \frac{b-a}{n}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

έτσι ώστε

$$t_i - a = t_i - t_0 = (t_i - t_{i-1}) + (t_{i-1} - t_{i-2}) + \cdots + (t_1 - t_0) = \sum_{j=1}^{i} (t_j - t_{j-1}) = i\frac{b-a}{n},$$

και αφού το καθένα τους έχει μήκος $\frac{b-a}{n}$, *θα έχουμε για αυτή τη διαμέριση* P_n

$$\begin{aligned}
L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} t_{i-1}\frac{b-a}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n}\frac{n-1}{2}, \\
U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} t_i\frac{b-a}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n}\frac{n+1}{2},
\end{aligned}$$

και συνεπώς

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{(b-a)^2}{n}\left(\frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Άρα, για οποιοδήποτε δοσμένο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $n > \frac{(b-a)^2}{\varepsilon}$, οπότε σύμφωνα με το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας (Θεώρημα 5.2), η $f(x) = x$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Σύμφωνα με την (5.13), για το ολοκλήρωμά της ισχύει

$$L(f, P_n) \leq \int_a^b f \leq U(f, P_n) \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή,

$$\alpha - \frac{(b-a)^2}{2n} \leq \int_a^b f \leq \alpha + \frac{(b-a)^2}{2n} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \int_a^b f - \alpha \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

όπου

$$\alpha := a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2},$$

το οποίο συνεπάγεται[11]

$$\int_a^b f = \alpha = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Η σημαντικότερη κλάση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι οι συνεχείς.[12] Υπενθυμίζουμε ότι όταν αυτές ορίζονται σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, είναι φραγμένες, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5.

Θεώρημα 5.3. *Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη: Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$, είναι και φραγμένη σε αυτό, βλ. Θεώρημα 3.5. Συνεπώς, σύμφωνα με το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας (Θεώρημα 5.2), για να αποδείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μία διαμέριση P του $[a, b]$ έτσι ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon. \tag{5.18}$$

---

[11] Αν για $x := \int_a^b f$ είχαμε $x \neq \alpha \Leftrightarrow |x - \alpha| > 0$ θα προέκυπτε για $n > \frac{(b-a)^2}{2|x-\alpha|} \Leftrightarrow |x - \alpha| > \frac{(b-a)^2}{2n}$ η αντίφαση $|x - \alpha| > \frac{(b-a)^2}{2n} \geq |x - \alpha|$.

Σημειώνουμε ότι στις [1, σελ. 236-237] (για την περίπτωση $a = 0$) ο Spivak εξάγει την τιμή του ολοκληρώματος λίγο διαφορετικά, χρησιμοποιώντας ένα πιο γενικό επιχείρημα, στο πνεύμα της Υποσημείωσης 14: Αφού διαπιστώνει ότι $L(f, P_n) \leq \alpha \leq U(f, P_n)$ για κάθε n (στη βάση των ρητών εκφράσεων των αθροισμάτων όπως και εμείς για το αντίστοιχο α) μετά επιχειρηματολογεί όπως στην Υποσημείωση 14 ότι αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορεί να επιλέξει n έτσι ώστε $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon$, η πιο πάνω διπλή ανισότητα μπορεί να ισχύει μόνο για ένα μοναδικό (αλλά καταρχάς απροσδιόριστο) x (στη θέση του α). Ξέρουμε ότι η ανισότητα ισχύει για το α. Η ιδιότητα (5.13) συνεπάγεται όμως ότι η ανισότητα ισχύει και για το $\int_a^b f$. Άρα, αφού η ανισότητα ισχύει για έναν μοναδικό αριθμό και ισχύει *και* για το α *και* για το $\int_a^b f$, αυτά θα ταυτίζονται.

Το επιχείρημα αυτό, το οποίο παρουσιάζεται πιο αναλυτικά στην Υποσημείωση 14, είναι πολύ χρήσιμο. Στην παρούσα εφαρμογή όμως, αφού χρησιμοποιείται ούτως ή άλλως η ρητή μορφή των αθροισμάτων (και από τον Spivak), θεωρούμε ότι το αποτέλεσμα $\int_a^b f = \alpha$ προκύπτει πιο άμεσα με τον τρόπο που το εξαγάγαμε εδώ.

[12] Στο παρόν μάθημα οι συναρτήσεις που θα ζητείται να ολοκληρώσουμε θα είναι συνήθως συνεχείς συναρτήσεις.

Επειδή η f είναι συνεχής σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$, είναι και ομοιόμορφα συνεχής σε αυτό, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.6. Συνεπώς, για το $\varepsilon > 0$ για το οποίο θέλουμε να δείξουμε την (5.18) υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x, y \in [a, b]$ με $|x - y| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Επιλέγοντας τώρα μία διαμέριση $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ του $[a, b]$ με $\max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \dots, n\} < \delta$,[13] έχουμε για κάθε $i = 1, \dots, n$

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(x) - f(y) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall\, x, y \in [t_{i-1}, t_i].$$

Συνεπώς, για κάθε $i = 1, \dots, n$ και κάθε (προς στιγμήν σταθερό) $y \in [t_{i-1}, t_i]$ έχουμε

$$f(x) < f(y) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall\, x \in [t_{i-1}, t_i],$$

και άρα (το $f(y) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$)

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} \leq f(y) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $y \in [t_{i-1}, t_i]$, θα έχουμε (το $M_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{f(y) : y \in [t_{i-1}, t_i]\}$)

$$M_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq \inf\{f(y) : y \in [t_{i-1}, t_i]\} = m_i$$

και άρα

$$M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Συνεπώς, για την επιλεγμένη διαμέριση P του $[a, b]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_i - t_{i-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b - a)
\end{aligned}$$

[13] Αυτό μπορεί να γίνει, π.χ., διαμερίζοντας το διάστημα $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα ίσου μήκους $(b - a)/n$, δηλαδή επιλέγοντας $t_i = t_{i-1} + \frac{b-a}{n}$ για $i = 1, \dots, n$ με $n > (b - a)/\delta$ (τέτοιο $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει σύμφωνα με την Αρχιμήδεια Ιδιότητα).

$$= \frac{\varepsilon}{2}$$
$$< \varepsilon.$$

□

Ακολουθούν οι βασικές ιδιότητες των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 5.4. *Αν η* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη και* $c \in (a, b)$, *τότε η* f *είναι ολοκληρώσιμη στα* $[a, c]$ *και* $[c, b]$, *και αντίστροφα, και ισχύει*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{5.19}$$

Απόδειξη:

$\Rightarrow$: Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, θα υπάρχει, σύμφωνα με το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας (Θεώρημα 5.2), για κάθε $\varepsilon > 0$ μία διαμέριση P του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon. \tag{5.20}$$

Αν δεν τυχαίνει εξ αρχής να έχουμε $c \in P$, τότε θεωρούμε τη διαμέριση Q που αποτελείται από τα σημεία της P και το σημείο c. Αφού η Q περιέχει την P, θα ισχύει $U(f, Q) - L(f, Q) \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$, σύμφωνα με το Λήμμα 5.1, και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η Q είναι η αρχική μας διαμέριση P που τώρα περιλαμβάνει και το c και για την οποία ισχύει η (5.20).

Έστω λοιπόν $P = \{t_0, \dots, t_j = c, \dots t_n\}$ με $t_0 = a$, $t_n = b$ και $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Τότε, $P = P' \cup P''$, όπου $P' = \{t_0, \dots, t_j\}$ είναι μία διαμέριση του $[a, c]$ και $P' = \{t_j, \dots, t_n\}$ είναι μία διαμέριση του $[c, b]$, και έχουμε

$$L(f, P) = L(f, P') + L(f, P''), \quad U(f, P) = U(f, P') + U(f, P''),$$

και άρα

$$(U(f, P') - L(f, P')) + (U(f, P'') - L(f, P'')) = U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Αφού για κάθε διαμέριση P ισχύει $U(f, P) - L(f, P) \geq 0$, προκύπτει

$$U(f, P') - L(f, P') < \varepsilon, \quad U(f, P'') - L(f, P'') < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και στο $[c, b]$, σύμφωνα με το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας (Θεώρημα 5.2).

Επιπλέον, αφού

$$L(f, P') \leq \int_a^c f \leq U(f, P'), \quad L(f, P'') \leq \int_c^b f \leq U(f, P''),$$

έχουμε

$$L(f, P) = L(f, P') + L(f, P'') \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq U(f, P') + U(f, P'') = U(f, P).$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ για την αντίστοιχη διαμέριση P που περιέχει το c και για την οποία ισχύει η (5.20), η ιδιότητα (5.13) συνεπάγεται[14]

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

$\Leftarrow$: Έστω η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a, c]$ και $[c, b]$. Πάλι σύμφωνα με το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας (Θεώρημα 5.2), θα υπάρχουν μία διαμέριση P' του $[a, c]$ και μία διαμέριση P'' του $[c, b]$ έτσι ώστε

$$U(f, P') - L(f, P') < \varepsilon/2, \quad U(f, P'') - L(f, P'') < \varepsilon/2.$$

Τότε για τη διαμέριση P του $[a, b]$ που προκύπτει από την ένωση της διαμέρισης P' του $[a, c]$ με τη διαμέριση P'' του $[c, b]$, έχουμε

$$L(f, P) = L(f, P') + L(f, P''), \quad U(f, P) = U(f, P') + U(f, P''),$$

και άρα

$$U(f, P) - L(f, P) = U(f, P') - L(f, P') + U(f, P'') - L(f, P'') < \varepsilon.$$

Συνεπώς, η f θα είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, σύμφωνα με το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας (Θεώρημα 5.2). □

Παρατήρηση 5.3. *Μιας και ορίσαμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f$, δηλαδή την ολοκληρωσιμότητα μίας φραγμένης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, μόνο για $a < b$, κάνουμε και τις ακόλουθες συμβάσεις:*

$$\int_a^a f := 0, \quad \int_a^b f := -\int_b^a \quad \text{αν } b < a. \tag{5.21}$$

Με αυτές αποδεικνύεται ότι η εξίσωση (5.19) ισχύει για οποιαδήποτε $a, c, b \in \mathbb{R}$, ανεξαρτήτως της διάταξής τους, υπό την προϋπόθεση φυσικά ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο μεγαλύτερο από τα πεδία ολοκλήρωσης.[15]

Δουλεύοντας όπως στις προηγούμενες αποδείξεις με τον ορισμό του ολοκληρώματος και το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας (Θεώρημα 5.2), αποδεικνύονται και τα ακόλουθα βασικά θεωρήματα.[16]

[14]Πράγματι, έστω ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ δύο αριθμοί $\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ με $0 \le \beta_\varepsilon - \alpha_\varepsilon < \varepsilon$ και $\alpha_\varepsilon \le x \le \beta_\varepsilon$. Τότε το x αυτό είναι μοναδικό: Έστω ότι υπήρχε και ένας άλλος αριθμός $y \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\alpha_\varepsilon \le y \le \beta_\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Τότε θα είχαμε $-\alpha_\varepsilon \ge -y \ge -\beta_\varepsilon$ και συνεπώς $\alpha_\varepsilon - \beta_\varepsilon \le x - y \le \beta_\varepsilon - \alpha_\varepsilon$, δηλαδή $|x - y| \le \beta_\varepsilon - \alpha_\varepsilon$, και άρα $|x - y| < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Αυτό όμως συνεπάγεται $x = y$, αφού αν $x \ne y \Leftrightarrow |x - y| > 0$ θα προέκυπτε για $\varepsilon = |x - y| > 0$ η αντίφαση $|x - y| < |x - y|$.

Σύμφωνα με την ιδιότητα (5.13), για *όλες* τις διαμερίσεις P ισχύει $L(f, P) \le \int_a^b f \le U(f, P)$. Άρα αυτό ισχύει και για τις διαμερίσεις P που περιέχουν το c και ικανοποιούν την (5.20), τις οποίες επιλέξαμε εδώ για κάθε $\varepsilon > 0$. Για *όλες αυτές* τις διαμερίσεις (για κάθε $\varepsilon > 0$) ισχύει όμως και $L(f, P) \le \int_a^c f + \int_c^b \le U(f, P)$. Άρα, αν θέσουμε $x := \mathrm{int}_a^b f$, $y := \int_a^c f + \int_c^b$ και $\alpha_\varepsilon := L(f, P)$, $\beta_\varepsilon := U(f, P)$ για την αντίστοιχη διαμέριση P που επιλέξαμε με τα παραπάνω χαρακτηριστικά για κάθε $\varepsilon > 0$, προκύπτει $x = y$, σύμφωνα με το επιχείρημα πιο πάνω.

[15]Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

[16]Η απόδειξή τους αφήνεται ως συνιστώμενη (εξ)άσκηση στη χρήση του ορισμού του ολοκληρώματος.

Ο συνδυασμός των θεωρημάτων αυτών συνεπάγεται ότι το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (που είναι ένα υποσύνολο των φραγμένων συναρτήσεων, σύμφωνα με τον ορισμό μας) είναι ένας διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος συναρτήσεων πάνω από το $\mathbb{R}$ και ότι ο τελεστής της ολοκλήρωσης $\int_a^b$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές πάνω στον χώρο αυτό.

Θεώρημα 5.5. *Αν οι $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε και η $f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει*

$$\int_a^b (f + g) = c \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Απόδειξη: Βλ. [1, Κεφάλαιο 13, Θεώρημα 5]. □

Θεώρημα 5.6. *Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε και η $cf : [a, b] \to \mathbb{R}$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει*

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f.$$

Απόδειξη: Βλ. [1, Κεφάλαιο 13, Θεώρημα 6]. □

5.1.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 13]:

5, 8, 9, 13, 19, 20, 23, 37.

5.2 Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

Θεώρημα 5.7. *Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ με*

$$F(x) := \int_a^x f, \quad x \in [a, b],$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη: Η συνάρτηση $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι καλά ορισμένη σύμφωνα με το Θεώρημα 5.4. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι, εξ ορισμού, φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε

$$|f(x)| \leq M \Leftrightarrow -M \leq f(x) \leq M \quad x \in [a, b].$$

Συνεπώς, το Θεώρημα 5.4 και η (5.14) δίνουν για κάθε $c \in [a, b]$

$$-Mh \leq F(c + h) - F(c) = \int_c^{c+h} f \leq Mh, \quad h \in (0, b - c) \Leftrightarrow c + h \in (c, b), \quad c \in [a, b),$$
$$-M(-h) \leq F(c) - F(c + h) = \int_{c+h}^{c} f \leq M(-h), \quad h \in (a - c, 0) \Leftrightarrow c + h \in (a, c), \quad c \in (a, b],$$

και άρα

$$|F(c + h) - F(c)| \leq M|h|, \quad |h| > 0, \quad c + h \in [a, b].$$

Από αυτό προκύπτει $\lim_{h\to 0} F(c + h) = F(c)$, είτε απευθείας από τον ορισμό του ορίου είτε μέσω του Κριτηρίου Παρεμβολής (Πρόταση 2.4).[17] □

[17] Άσκηση.

Θεώρημα 5.8. (Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)
Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη, και είναι συνεχής στο* $c \in [a, b]$, *τότε η (συνεχής)* $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a, b]$, *είναι παραγωγίσιμη στο* c *με* $F'(c) = f(c)$.

Απόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Έστω $c \in [a, b)$ και $h \in (0, b - c)$. (έτσι ώστε $c + h \in (c, b) \subset (a, b)$). Από τον ορισμό της F και το Θεώρημα 5.4 έχουμε

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f$$

και από την (5.14) παίρνουμε

$$m_h h \leq \int_c^{c+h} f \leq M_h h,$$

όπου

$$m_h := \inf\{f(x) : x \in [c, c+h]\}, \quad M_h := \sup\{f(x) : x \in [c, c+h]\}.$$

Συνεπώς,

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h, \quad h \in (0, b - c).$$

Από τη συνέχεια της f στο c προκύπτει $m_h, M_h \to f(c)$ για $h \to 0^+$,[18] και συνεπώς, σύμφωνα με το Κριτήριο Παρεμβολής (Πρόταση 2.4),

$$\lim h \to 0^+ \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Ανάλογα, έστω $c \in (a, b]$ και $h \in (a - c, 0)$ (έτσι ώστε $c + h \in (a, c) \subset (a, b)$.) Τότε

$$m_h(-h) \leq F(c) - F(c+h) = \int_{c+h}^{c} f \leq M_h(-h)$$

όπου

$$m_h := \inf\{f(x) : x \in [c+h, c]\}, \quad M_h := \sup\{f(x) : x \in [c+h, c]\},$$

και συνεπώς, πάλι από τη συνέχεια της f στο c και το Κριτήριο Παρεμβολής,

$$\lim h \to 0^- \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

□

[18] Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta \in (0, b - c)$ έτσι ώστε για κάθε $h \in [0, \delta)$ να ισχύει $|f(c+h) - f(c)| < \varepsilon$. Άρα, για κάθε $h' \in [0, h]$ ισχύει $|f(c+h') - f(c)| < \varepsilon$ (αφού για αυτά τα h' έχουμε $0 \leq h' \leq h < \delta$), δηλαδή $f(c) - \varepsilon < f(c+h') < f(c) + \varepsilon$, και συνεπώς (αφού τα $f(c) + \varepsilon$ και $f(c - \varepsilon)$ είναι άνω και κάτω φράγματα, αντίστοιχα, του συνόλου $\{f(c+h') : h' \in [0, h]\}$ και $m_h = \inf\{f(c+h') : h' \in [0, h]\}$, $M_h = \sup\{f(c+h') : h' \in [0, h]\}$) από τον ορισμό του sup και του inf, $f(c - \varepsilon) \leq m_h \leq M_h \leq f(c) + \varepsilon$, δηλαδή $|m_h - f(c)| \leq \varepsilon$ και $|M_h - f(c)| \leq \varepsilon$. Αυτό όμως σημάινει (από τον ορισμό του ορίου) ότι $\lim_{h \to 0^+} m_h = \lim_{h \to 0^+} M_h = f(c)$. (Ανάλογα αποδεικνύεται και για τα m_h, M_h που ορίζονται πιο κάτω για $h < 0$ ότι από τη συνέχεια της f στο c προκύπτει (για εκείνα τα m_h, M_h) ότι $\lim_{h \to 0^-} m_h = \lim_{h \to 0^-} M_h = f(c)$.)

Πόρισμα 5.9. (Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)
Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και* $f = g'$ *για κάποια* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$,[19] *τότε*

$$F(x) = \int_a^x f = g(x) - g(a) \quad \forall\ x \in [a, b].$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 5.3 γνωρίζουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Τότε, από το ΘΘΑΛ προκύπτει ότι για την $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a, b]$, ισχύει $F' = f$ και άρα $F' = g'$. Συνεπώς, από το Πόρισμα 4.10 έχουμε $F = g + c$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Άρα, $F(a) = g(a) + c$ και αφού $F(a) = 0$, έχουμε $c = -g(a)$. Έτσι, $F(x) = g(x) - g(a)$ για $x \in [a, b]$. □

Το προηγούμενο αποτέλεσμα ισχύει και αν η $f = g' : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι (μόνο) ολοκληρώσιμη, αλλά όχι απαραίτητα συνεχής.

Θεώρημα 5.10. (Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)
Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη και* $f = g'$ *για κάποια* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, *τότε*

$$F(x) = \int_a^x f = g(x) - g(a) \quad \forall\ x \in [a, b].$$

Απόδειξη: Έστω $x \in (a, b]$ και $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ μια διαμέριση του $[a, x]$. Αφού η g είναι παραγωγίσιμη (και συνεπώς και συνεχής) στο $[a, x]$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε κάθε υποδιάστημα $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, για να πάρουμε

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) = f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \quad \text{για κάποιο } x_i \in (t_{i-1}, t_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Συνεπώς,

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \le f(x_i)(t_i - t_{i-1}) = g(t_i) - g(t_{i-1}) \le M_i(t_i - t_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

και άρα

$$L(f, P) \le \sum_{i=1}^{n} g(t_i) - g(t_{i-1}) = g(x) - g(a) \le U(f, P).$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε διαμέριση P του $[a, x]$, παίρνουμε

$$F(x) = \int_a^x f = g(x) - g(a)$$

σύμφωνα με την ιδιότητα (5.13) των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. □

5.2.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 14]:

1, 8 - 10, 18, 25 - 30.

[19] Τέτοια συνάρτηση g υπάρχει, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3 και το ΘΘΑΛ (Θεώρημα 5.8), η $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a, b]$.

5.3 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να ορισθούν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Εδώ θα ακολουθήσουμε αυτόν στο [1, Κεφάλαιο 15].

Ξεκινάμε *ορίζοντας* τον αριθμό π ως το εμβαδό του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή του κύκλου με ακτίνα 1. Αυτός ο αριθμός σίγουρα υπάρχει, ασχέτως αν καταρχάς δεν γνωρίζουμε ούτε ποιος είναι ούτε τι ιδιότητες έχει.[20]

Ορισμός 5.3.

$$\pi := 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx. \tag{5.22}$$

Συνεχίζουμε ορίζοντας μία συνάρτηση $A : [-1,1] \to \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in [-1,1]$ μας δίνει το εμβαδό $A(x)$ του τομέα του μοναδιαίου κύκλου, ο οποίος φράσσεται από τον κύκλο, τον άξονα των x και την ημιευθεία που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και περνάει από το σημείο $(x, \sqrt{1-x^2})$ του κύκλου. Γνωρίζοντας ότι ένα εμβαδό μπορεί να περιγραφεί μέσω ενός ολοκληρώματος και γνωρίζοντας ποιο είναι το εμβαδό ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι σχετικά εύκολο να δει κανείς γεωμετρικά ότι το εμβαδόν $A(x)$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο.[21]

Ορισμός 5.4.

$$A(x) := \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_{x}^{1}\sqrt{1-t^2}dt, \quad x \in [-1,1]. \tag{5.23}$$

Η συνάρτηση A είναι καλά ορισμένη για κάθε $x \in [-1,1]$, αφού η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και συνεπώς το ολοκλήρωμα στα δεξιά της (5.23) υπάρχει για κάθε $x \in [-1,1]$. Μάλιστα, από το Θεώρημα ... 5.4 και τον Ορισμό 5.22 προκύπτει

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt - \int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}dt \\ &= \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\pi}{2} - \int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}dt, \quad x \in [-1,1]. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα ... προκύπτει ότι η A είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού προκύπτει ότι η A είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με παράγωγο

$$A'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{x}{2}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} < 0, \quad x \in (-1,1).$$

Συνεπώς η A είναι (γνησίως) φθίνουσα και άρα και 1-1 (Θεώρημα ...) στο $[-1,1]$, σύμφωνα με το Θεώρημα ... και το ΘΜΤ, από το $A(-1) = \frac{\pi}{2}$ στο $A(1) = 0$. Σύμφωνα με το ΘΕΤ, η A λαμβάνει κάθε τιμή στο διάστημα $[0, \pi/2]$ και αφού είναι 1-1 λαμβάνει κάθε τιμή μία μόνο φορά. Συνεπώς ορίζεται η αντίστροφη $^{-1} : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ της , η οποία είναι συνεχής και φθίνουσα σύμφωνα με το Θεώρημα ... Μπορούμε τότε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

[20]Μπορούμε φυσικά να τον εκτιμήσουμε από πάνω και από κάτω, αν θέλουμε με όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια. Π.χ. μπορούμε να βάλουμε ένα τετράγωνο πλευρές μήκους $\sqrt{2}$ μέσα στον μοναδιαίο κύκλο και να τον καλύψουμε με ένα τετράγωνο με πλευρές μήκους 2. Τότε θα πάρουμε μία πρώτη πολύ χονδρική εκτίμηση του π, δηλαδή $2 < \pi < 4$. Σημειώνουμε ότι στο [1, Κεφάλαιο 16] αποδεικνύεται ότι ο π είναι άρρητος.

[21]Βλ. και τα σχήματα και τις επεξηγήσεις στο [1, σελ. 276].

Ορισμός 5.5. *Για κάθε αριθμό* $x \in [0, \pi]$ *ορίζουμε ως* **συνημίτονο του** x *τον μοναδικό αριθμό*

$$\cos x := A^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad A(\cos x) = \frac{x}{2}, \quad x \in [0, \pi],$$

και ως **ημίτονο του** x *τον μοναδικό αριθμό*

$$\sin x := \sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad x \in [0, \pi].$$

Παρατήρηση 5.3.1. *Το* $x/2 \in [0, \pi/2]$ *στον ορισμό του συνημιτόνου είναι το εμβαδό του τομέα* S *του (εσωτερικού του) μοναδιαίου κύκλου που αντιστοιχεί σε ένα τόξο μήκους* $x \in [0, \pi]$ *πάνω στον κύκλο, μετρημένο από τον οριζόντιο άξονα έως ένα σημείο* P.

Ο τομέας S *φράσσεται από τον μοναδιαίο κύκλο, τον οριζόντιο άξονα και την ημιευθεία που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων και περνάει από το* P. *Συνεπώς, ο τομέας* S *καθορίζεται μονοσήμαντα από το σημείο* P, $S = S(P)$.

Το ότι ο τομέας S *αυτός έχει εμβαδό* $x/2$ *προκύπτει από το ότι ο μοναδιαίος κύκλος έχει περιφέρεια* 2π *και εμβαδό* π. *Συνεπώς, σε έναν τομέα ο οποίος αντιστοιχεί σε ένα τόξο μήκους* x *θα αναλογεί το* $x/(2\pi)$ *του εμβαδού* π *του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή ο τομέας αυτός θα έχει εμβαδό ίσο με*

$$\frac{x}{2\pi}\pi = \frac{x}{2}.$$

Περαιτέρω, η συνάρτηση A^{-1} *αντιστοιχεί στο εμβαδό* $x/2$ *του τομέα* $S = S(P)$ *την οριζόντια συντεταγμένη* $c \in [-1, 1]$ *του σημείου* $P = (c, s)$. *Συνεπώς, σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό, το* $\cos x$ *είναι ακριβώς αυτή η οριζόντια συντεταγμένη του σημείου* $P = (c, s)$, $\cos x = c$.

Επίσης, αφού το $P = (c, s)$ *βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, θα πρέπει να έχει Ευκλείδεια απόσταση από την αρχή των αξόνων ίση με* $c^2 + s^2 = 1$. *Αφού το* P *βρίσκεται στο άνω ημικύκλιο, θα πρέπει να έχει συνεπώς θετική κατακόρυφη συντεταγμένη* $s = \sqrt{1 - c^2} = \sqrt{1 - \cos^2 x} > 0$ *και ο ορισμός του ημιτόνου μας λέει ότι αυτό είναι ακριβώς αυτή η κατακόρυφη συντεταγμένη*, $\sin x = s$.

Άρα έχουμε $P = (\cos x, \sin x)$, *όπου το* P *είναι το σημείο πάνω στο άνω μοναδιαίο ημικύκλιο που έχει μήκος τόξου* $x \in [0, \pi]$ *από το σημείο* $(1, 0)$.

Το P *καθορίζει έναν τομέα* S *εμβαδού* $x/2$ *και αφού το* P *ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο ισχύει η θεμελιώδης ταυτότητα*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad x \in [0, \pi]. \tag{5.24}$$

(Αυτή η ταυτότητα ισχύει ως γνωστόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. *Αυτό θα το δούμε σε λίγο, προφανώς αφού ορίσουμε τα* $\sin$ *και* $\cos$ *σε όλο το* $\mathbb{R}$.*)*

Το συνημίτονο $\cos x$ και το ημίτονο $\sin x$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως προς το $x \in [0, \pi]$.

Πρόταση 5.3.

$$\cos' x = -\sin x, \quad \sin' x = \cos x, \quad x \in [0, \pi]. \tag{5.25}$$

Απόδειξη: Αφού, εξ ορισμού, $A(\cos x) = \frac{x}{2}$, $x \in [0, \pi]$, με $\cos x \in (-1, 1)$ για $x \in (0, \pi)$ και $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$, και επίσης

$$A'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} < 0, \quad x \in (0, 1),$$

έχουμε από τον Κανόνα της Αλυσίδας

$$A'(\cos x)\cos' x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos' x = -\sqrt{1-\cos^2 x} = -\sin x \quad \text{για } x \in (0, \pi).$$

Επίσης, αφού, εξ ορισμού, $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ για $x \in (0, \pi)$ και $\sin 0 = 0 = \sin \pi$, έχουμε, πάλι από τον Κανόνα της Αλυσίδας, και το προηγούμενο αποτέλεσμα

$$\sin' x = \frac{1}{2}\frac{-2\cos x \cos' x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \cos x \quad \text{για } x \in (0, \pi).$$

Από τη συνέχεια των cos και sin στο $[0, 2\pi]$ και την παραγωγισιμότητά τους στο $(0, 2\pi)$, προκύπτει από το Θεώρημα ...

$$\begin{aligned} \cos' 0 &= \lim_{x\to 0^+} \cos' x = -\lim_{x\to 0^+} \sin x = -\sin 0 = 0, \\ \cos' \pi &= \lim_{x\to \pi^-} \cos' x = -\lim_{x\to \pi^-} \sin x = -\sin \pi = 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \sin' 0 &= \lim_{x\to 0^+} \sin' x = \lim_{x\to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1, \\ \sin' \pi &= \lim_{x\to \pi^-} \sin' x = \lim_{x\to \pi^-} \cos x = \cos \pi = -1. \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι τύποι (5.25) ισχύουν σε όλο το $[0, 2\pi]$ (στα άκρα του διαστήματος προφανώς ως πλευρικές παράγωγοι). □

Παρατήρηση 5.3.2. *Από τους ορισμούς των* cos, sin *στο* $[0, \pi]$ *και τις παραγώγους που δίνονται στην* (5.25) *μπορούν να εξαχθούν κάποια πρώτα συμπεράσματα για τη μορφή (δηλαδή τη γραφική παράσταση) των συναρτήσεων αυτών στο διάστημα* $[0, \pi]$, *όπως:*[22]

(α΄) *Η* cos *είναι συνεχής και φθίνουσα στο* $[0, \pi]$ *από το* $\cos 0 = 1$ *ως το* $\cos \pi = -1$.

Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της cos *στο* $[0, \pi]$ *ως* $\cos x = A^{-1}(x/2)$, $x \in [0, \pi]$, *όπου η* $A : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και φθίνουσα με* $A(-1) = \pi/2$ *και* $A(1) = 0$ *και συνεπώς έχει συνεχή και φθίνουσα αντίστροφη* $A^{-1} : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$.[23]

(β΄) *Η* cos *λαμβάνει (παίρνει) μία μόνο φορά την τιμή* 0 *στο διάστημα* $(0, \pi)$ *και μάλιστα στο σημείο* $\pi/2$.

[22] Άσκηση: Βρείτε την αιτιολόγηση για κάθε μία από τις ακόλουθες ιδιότητες. Δείτε και [1, σελ. 278].

[23] Ας σημειωθεί ότι αν $f : D \to \mathbb{R}$ φθίνουσα και $g : E \to \mathbb{R}$ αύξουσα με $D, E \subset \mathbb{R}$ και $g(E) \subset D$, τότε και η $f \circ g$ είναι φθίνουσα: για $x < y$ έχουμε $g(x) < g(y)$ και συνεπώς $f(g(x)) > f(g(y))$.

Το ότι η $\cos$ παίρνει την τιμή 0 προκύπτει από το ΘΕΤ αφού είναι συνεχής με $\cos 0 = 1$ και $\cos\pi = -1$. Ότι παίρνει την τιμή 0 μόνο μία φορά προκύπτει από το ότι είναι φθίνουσα (και άρα 1-1) στο $[0,\pi]$.

Έστω $a \in (0,\pi)$ με $\cos a = 0$. Από τον ορισμό της $\cos$ έχουμε $A(0) = a/2$ και από τον ορισμό του A έχουμε

$$(0) = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}.$$

(Η δεύτερη ισότητα προκύπτει εδώ από την ερμηνεία του ολοκληρώματος ως εμβαδού και τη συμμετρία της $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ ως προς τον (κάθετο) άξονα των y. Η τελευταία ισότητα προκύπτει από τον ορισμό του π που δώσαμε εδώ.) Συνεπώς, $a = \pi/2$.

(γ΄) *Η $\sin$ είναι αύξουσα στο $[0,\pi/2]$ από το $\sin 0 = 0$ έως το $\sin(\pi/2) = 1$ και φθίνουσα στο $[\pi/2,\pi]$ από το $\sin(\pi/2) = 1$ έως το $\sin\pi = 0$.*

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

$$\sin' x = \cos x \begin{cases} > 0, & 0 < x < \pi/2, \\ < 0, & \pi/2 < x < \pi, \end{cases}.$$

το οποίο συνεπάγεται καταρχάς ότι η $\sin$ είναι αύξουσα στο $(0,\pi/2)$ και φθίνουσα στο $(\pi/2,\pi)$.

Από το ΘΜΤ παίρνουμε όμως και ότι για $h \in (0,\pi/2)$ ισχύει $1 = \sin(\pi/2) > \sin h > 0 = \sin 0$ και $1 = \sin(\pi/2) > \sin(\pi - h) > 0 = \sin\pi$,[24] *το οποίο συνεπάγεται ότι η $\sin$ είναι αύξουσα στο $[0,\pi/2]$ και φθίνουσα στο $[\pi/2,\pi]$.*

Ορισμός 5.6. *Οι* **συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου** *που ορίστηκαν έως τώρα μόνο στο $[0,\pi]$, μπορούν να επεκταθούν στις συναρτήσεις $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μέσω των εξής ορισμών:*

$$\sin x := -\sin(2\pi - x), \quad \cos x := \cos(2\pi - x) \quad \text{για } x \in [0,2\pi],$$
$$\sin x := \sin x', \quad \cos x := \cos x' \quad \text{για } x = 2\pi k + x' \text{ με } k \in \mathbb{Z} \text{ και } x' \in [0,2\pi].$$

Παρατήρηση 5.3.3. (α΄) *Μέσω των πιο πάνω ορισμών, οι $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι 2π-περιοδικές συναρτήσεις, δηλαδή ισχύουν $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$ και $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$,*

Επίσης $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή συνάρτηση, ενώ η $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή $\sin x = -\sin(-x)$ και $\cos x = \cos(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

[24]Άσκηση.

(β') *Αποδεικνύεται*[25] *ότι η ταυτότητα* (5.24) *και οι τύποι των παραγώγων* (5.25) *ισχύουν για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Ειδικότερα, απο τους πιο πάνω ορισμούς προκύπτει ότι για $h \in (-\pi, 0)$ *έχουμε*

$$\begin{aligned} \cos h &= \cos(2\pi + h) = \cos(2\pi - (2\pi + h)) = \cos(-h), \\ \sin h &= \sin(2\pi + h) = \sin(2\pi - (2\pi + h)) = -\sin(-h) \end{aligned}$$

και συνεπώς, λόγω της συνέχειας των $\cos, \sin$ *στο* $[0, \pi]$,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \cos h &= \lim_{h \to 0^-} \cos(-h) = \lim_{h \to 0^+} \cos h = \cos 0 = 1, \\ \lim_{h \to 0^-} \sin h &= -\lim_{h \to 0^-} \sin(-h) = -\lim_{h \to 0^+} \sin h = -\sin 0 = 0 = \sin 0, \end{aligned}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι οι $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχείς στο* 0, *και επίσης, ότι λόγω της ύπαρξης των πλευρικών παραγώνων από τα δεξιά στο* 0 *των* $\cos$, $\sin$, *οι οποίες δίνονται στην* (5.25),

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{\cos h - \cos 0}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cos(-h) - \cos 0}{h} \\ &= -\lim_{h \to 0^-} \frac{\cos(-h) - \cos 0}{-h} \\ &= -\lim_{h \to 0^+} \frac{\cos h - \cos 0}{h} \\ &= \sin 0 \\ &= 0 \\ &= -\sin 0 \\ \lim_{h \to 0^-} \frac{\sin h - \sin 0}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{\sin h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{-\sin(-h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{\sin(-h)}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι οι $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμες στο* 0 *και έχουν εκεί τις παραγώγους που δίνονται στην* (5.25), *δηλαδή*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

[25] Άσκηση.

Ορισμός 5.7. *Οι* **συναρτήσεις της εφαπτομένης και της συνεφαπτομένης** *ορίζονται, αντίστοιχα, ως*

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi 2}{,} \quad \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi 2}{,} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ορισμός 5.8. *Συμβολίζουμε με*[26]

(α′) $\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *την αντίστροφη της* $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$,

(β′) $\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *την αντίστροφη της* $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

(γ′) $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *την αντίστροφη της* $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$,

Σύμφωνα με αυτά που γνωρίζουμε για την παράγωγο της αντίστροφης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης, αποδεικνύεται:

Πρόταση 5.4.

$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1), \\
\arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1), \\
\arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε μόνο την πρώτη ισότητα. Οι υπόλοιπες αφήνονται ως Άσκηση.[27]

Έχουμε $\sin' x = \cos x$ για καθε $x \in \mathbb{R}$, με $\sin'(-\pi/2) = \cos(-\pi/2) = 0 = \sin'(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ και $\sin' x = \cos x > 0$ για $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ Συνεπώς,[28] η $\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία -1 και 1, όπου $\arcsin(-1) = -\pi/2$ και $\arcsin(1) = \pi/2$, ενώ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x \in (-1,1)$, όπου $\arcsin(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$, και έχουμε

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

Θεώρημα 5.11. *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *ισχύουν οι τριγωνομετρικές «ταυτότητες της πρόσθεσης»:*

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x, \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.
\end{aligned}$$

[26] Δείτε τις γραφικές παραστάσεις στα [1, Κεφάλαιο 15, Σχήματα 18-22].
[27] Βλ. και [1, Κεφάλαιο 15, Θεώρημα 3].
[28] Γιατί ισχύει η μη παραγωγισιμότητα ή η παραγωγισιμότητα σε αυτά τα σημεία;

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε την πρώτη ταυτότητα θα χρησιμοποιήσουμε δύο ενδιάμεσα βήματα:

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές διαφορίσιμη και ισχύει $f'' + f = 0$, $f(0) = f'(0) = 0$. Τότε $f = 0$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} & f'' + f = 0 \\ \Rightarrow\quad & f'f'' + ff' = \frac{1}{2}\left((f')^2 + f^2\right)' = 0 \\ \Rightarrow\quad & ((f')^2 + f^2)(x) = ((f')^2 + f^2)(0) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \qquad f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές διαφορίσιμη και ισχύει $f'' + f = 0$, $f(0) = a$, $f'(0) = b$. Τότε $f = b\sin + a\cos$.[29]

Πράγματι, για $g := f - b\sin - a\cos$ έχουμε $g(0) = f(0) - a = 0$ και $g' = f' - b\cos + a\sin$ από όπου προκύπτει $g'(0) = f'(0) - b = 0$ και $g'' = f'' + b\sin + a\cos = f'' + f - g = -g$ και συνεπώς $g = 0$ σύμφωνα με το Βήμα 1.

3. Έστω $y \in \mathbb{R}$ σταθερό. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin(x + y)$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(0) = \sin y$ και $f'(x) = \cos(x + y)$ με $f'(0) = \cos y$ και $f'' = -f$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Βήμα 2,

$$\sin(x + y) = \cos y \sin x + \sin y \cos x.$$

Η δεύτερη ταυτότητα αποδεικνύεται ανάλογα. (Άσκηση.) □

5.3.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 15]:

1 - 3, 6 - 8, 20.

5.4 Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση

Στο παρόν κεφάλαιο ορίζεται η εκθετική συνάρτηση και η αντίστροφή της, η λογαριθμική συνάρτηση για εκθέτες που είναι πραγματικοί αριθμοί. Στόχος είναι να έχουμε έναν στέρεο ορισμό τους, ο οποίος να βασίζεται σε έννοιες και συναρτήσεις οι οποίες μας είναι ήδη γνωστές και κατά το δυνατόν απλές και θεμελιώδεις.[30] Ένας πιθανός τρόπος για το πώς μπορεί να γίνει αυτό δίνεται στο [1, Κεφάλαιο 18], τον οποίο παρουσιάζουμε στη συνέχεια. Όπως εκεί ξεκινάμε όσο γίνεται πιο απλά σε μια προσπάθεια να αιτιολογήσουμε τον δρόμο που επιλέγουμε.

[29] Η εξίσωση $f'' + f = 0$ είναι μία από τις σημαντικότερες *γραμμικές ομογενείς Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ) δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές*, αυτή του αρμονικού ταλαντωτή. Το πρόβλημα της εύρεσης μίας δυο φορές διαφορίσιμης *λύσης* της, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία να ικανοποιεί τις *αρχικές συνθήκες* $f(0) = a$ και $f'(0) = b$ είναι ένα *πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)* για την εξίσωση αυτή. Για περισσότερα σχετικά με ΣΔΕ και ΠΑΤ, βλ. και τις Υποσημειώσεις 42 και 43.

[30] Όπως θα παρατήρησε ο προσεκτικός αναγνώστης, αναφερόμαστε στην εκθετική και τη λογαριθμική συνάρτηση σαν αυτές να είναι ήδη «γνωστές». Πράγματι, όπως θα δούμε στη συνέχεια, για εκθέτες φυσικούς αριθμούς γνωρίζουμε ή είναι εύκολο να εξάγουμε τις ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών. Το ζήτημα εδώ είναι πως μπορούν αυτές οι γνωστές και στοιχειώδης ιδιότητες να γενικευτούν ώστε οι εκθέτες να μπορούν να είναι πραγματικοί αριθμοί.

Έστω ένας οποιοσδήποτε αριθμός $a \in \mathbb{R}$. Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τον αριθμό $a^n \in \mathbb{R}$ ως

$$a^n := \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ φορές}}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.26}$$

και παρατηρούμε ότι για $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ φορές}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ φορές}} = \underbrace{a \cdots a}_{n+m \text{ φορές}} = a^{n+m}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \tag{5.27}$$

το οποίο συνεπάγεται

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdots a^n}_{m \text{ φορές}} = a^{\overbrace{n + \ldots + n}^{m \text{ φορές}}} = a^{nm}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \tag{5.28}$$

Θα θέλαμε να επεκτείνουμε τον ορισμό a^n όπου $n \in \mathbb{N}$ και για άλλους εκθέτες $x \in \mathbb{R}$, όχι μόνο φυσικούς αριθμούς. Για να είναι ο ορισμός του a^x πραγματικά *επέκταση* του ορισμού a^n θα πρέπει να συνεχίσει να ισχύει η (5.27), και άρα και η (5.28), για οποιουσδήποτε εκθέτες x, y. Έτσι, περνώντας από εκθέτες $n \in \mathbb{N}$ σε εκθέτες $n \in \mathbb{N}_0$, διαπιστώνουμε ότι θα πρέπει να ισχύει

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n \quad \Rightarrow \quad a^0 := 1 \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.29}$$

Εν συνεχεία, θέλοντας να ορισούμε το a^n για $n \in \mathbb{Z}$, βλέπουμε ότι θα πρέπει να ισχύει ειδικότερα

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n} = (a^n)^{-1} \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.30}$$

όπου παρατηρούμε ότι απαιτήσαμε $a \neq 0$ επειδή θέλουμε $a^n \neq 0$ για $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε ο a^n να έχει αντίστροφο.[31] Από τους ορισμούς αυτούς προκύπτει ότι[32]

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Αν θέλουμε να ορίσουμε το a^x για $x = m/n \in \mathbb{Q}$ με $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{Z}$, έτσι ώστε η (5.27), και άρα και η (5.28), να συνεχίσει να ισχύει και για τέτοιους εκθέτες, θα πρέπει να ισχύει

$$(a^{1/n})^n = a^1 = a \quad \Rightarrow \quad a^{1/n} := \sqrt[n]{a}, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.31}$$

[31] Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει: $a \neq 0 \Leftrightarrow a^n \neq 0$, δηλαδή, ισοδύναμα, $a = 0 \Leftrightarrow a^n = 0$. Στην τελευταία ισοδυναμία, η κατεύθυνση $\Rightarrow$ προκύπτει από το ότι $0 \cdot x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ η κατεύθυνση $\Leftarrow$ από το ότι $x \cdot y = 0$ συνεπάγεται $x = 0$ ή $y = 0$.

[32] Για να το αποδείξουμε λεπτομερώς θα πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις: Αν, χ.β.τ.γ., $n = 0$, τότε $a^n \cdot a^m = a^m = a^{0+m}$. Αν $n, m \in \mathbb{N}$, τότε $a^n a^m = a^{n+m}$, $a^{-n}a^{-m} = \frac{1}{a^n}\frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)} = a^{-n-m}$ και, αν $n - m \in \mathbb{N}$, τότε $a^n a^{-m} = a^n \frac{1}{a^m} = a^{n-m}$, αφού $a^{n-m}a^m = a^n$, και $a^{-n}a^m = \frac{1}{a^n}\frac{1}{a^{-m}} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{m-n}$. Ανάλογα αποδεικνύεται και η $(a^n)^m = a^{mn}$ για $a \neq 0$ και $m, n \in \mathbb{Z}$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του a^{-n} για $n \in \mathbb{N}$, την (5.28) και ότι $x^0 = 1$ για $x \in \mathbb{R}$ και $(x^{-1})^m = (x^m)^{-1}$ για $m \in \mathbb{N}$ και $x \neq 0$, αφού $x^m(x^{-1})^m = (xx^{-1})^m = 1$ και ο αντίστροφος ενός $y \neq 0$ είναι μοναδικός.

όπου απαιτήσαμε $a > 0$ έτσι ώστε ο a να έχει n-οστή ρίζα για *κάθε* φυσικό $n \in \mathbb{N}$.[33] Επίσης θα πρέπει να ισχύει

$$(a^{1/n})^m = a^{m/n} \quad \Rightarrow \quad a^{m/n} := (\sqrt[n]{a})^m, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}. \tag{5.32}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι[34]

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a > 0, \quad x, y \in \mathbb{Q}.$$

Με αυτόν τον τρόπο, με καθαρά αλγεβρικά επιχειρήματα, δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσουμε κάποιο όριο, *οδηγηθήκαμε αναγκαία* στον *μοναδικό δυνατό ορισμό* της συνάρτησης $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x = f(1)^x$, για $a > 0$, η οποία έχει την ιδιότητα

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall\ x, y. \tag{5.33}$$

Θέλουμε να *επεκτείνουμε* αυτή την f σε όλο το $\mathbb{R}$, έτσι ώστε η (5.33) να ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Μιας και δεν είναι προφανές πώς θα μπορούσε να προκύψει αυτό μόνο με χρήση της (5.33) και αλγεβρικών επιχειρημάτων, αλλάζουμε οπτική και χρησιμοποιούμε μια πιο αναλυτική θεώρηση. Συγκεκριμένα, αναζητούμε μια $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = a > 0$, η οποία έχει την ιδιότητα (5.33), και η οποία απαιτούμε τώρα να είναι επιπλέον και παραγωγίσιμη.[35] Για μία τέτοια f, αν υπάρχει, εξάγουμε *a priori*[36] ότι

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h) - 1}{h} = f(x)f'(0),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι από την (5.33) και το ότι $f(1) \neq 0$ προκύπτει $f(0) = 1$.

Το αποτέλεσμα αυτό δεν μας βοηθάει ιδιαίτερα να βρούμε τη συνάρτηση f, Αν όμως υποθέσουμε ότι η f είναι 1-1 και έχει μη μηδενική παράγωγο παντού, τότε από το Θεώρημα 4.19 για την παράγωγο μιας αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(0)f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(0)x}.$$

Συνεπώς, υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις, και αφού η $x \mapsto \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $(0, \infty)$, μπορούμε να υπολογίσουμε την f^{-1} μέσω του ΘΘΑΛ ως

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(0)} \int_1^x \frac{1}{t} dt - f^{-1}(1) = \frac{1}{f'(0)} \int_1^x \frac{1}{t} dt \tag{5.34}$$

[33] Ένας αριθμός x ονομάζεται n-**οστή ρίζα ενός αριθμού** y αν ισχύει $x^n = y$. Αν $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, θα έχουμε $x^{2k} = (x^2)^k$, και αφού $x^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ (βλ. [1, Κεφάλαιο 1, σελ. 10]) θα ισχύει $x^{2k} > 0$ για $x \in \mathbb{R}^*$. Συνεπώς, αρνητικοί αριθμοί δεν έχουν πραγματικές άρτιες ρίζες. Το ότι κάθε θετικός αριθμός έχει *θετική* n-οστή ρίζα, την οποία συμβολίζουμε με $\sqrt[n]{a}$, αποδεικνύεται όπως στο [1, Θεώρημα 7-8]. Το ότι αυτή είναι μοναδική αποδεικνύεται στο [1, Πρόβλημα 1-6]. Θετικοί αριθμοί δεν έχουν άλλες πραγματικές περιττές ρίζες. Αν ο n είναι άρτιος, τότε ο $a > 0$ έχει ως πραγματική n-οστή ρίζα και την $-\sqrt[n]{a}$. Ορίζουμε όμως ως $a^{1/n}$ τη θετική ρίζα $\sqrt[n]{a}$ έτσι ώστε να ορίζεται στους πραγματικούς και η $(a^{1/n})^{1/m}$ για $m \in \mathbb{N}$ άρτιο.

[34] Πράγματι, $(a^{m/n}a^{p/q})^{nq} = (\sqrt[n]{a}^{mnq}(\sqrt[q]{a})^{pnq} = a^{mq}a^{pn} = a^{mq+pn} \Rightarrow a^{m/n}a^{p/q} = a^{(mq+pn)/(nq)}$ και, αφού $(a^{1/n})^n = a \Rightarrow ((a^{1/n})^m)^n = ((a^{1/n})^n)^m = a^m = ((a^m)^{1/n})^n \Rightarrow (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$ προκύπτει $(a^{m/n})^{p/q} = ((a^{m/n})^{1/q})^p = ((a^{m/n})^p)^{1/q}$ και άρα $((a^{m/n})^{p/q})^{nq} = ((a^{m/n})^p)^n = (((a^{1/n})^m)^p)^n = (a^{1/n})^{mpn} = a^{mp} \Rightarrow a^{m/n})^{p/q} = a^{mp/(nq)}$.

[35] Αξίζει να ξανατονισθεί ότι αρκούσαν μόνο οι υποθέσεις $f(1) = a > 0$ και (5.33) για να οδηγηθούμε με αλγεβρικά επιχειρήματα στο ότι $f(x) = a^x$ για ρητούς x, με τους ορισμούς (5.26), (5.29), (5.30), (5.31), (5.32) .

[36] *εκ προοιμίου*· έτσι αποκαλούνται ιδιότητες που εξάγονται για κάποιο μαθηματικό αντικείμενο από ήδη γνωστές ιδιότητές *πρωτού* θεμελιωθεί αυστηρά η ύπαρξη των αντικειμένων αυτών.

οπότε η ζητούμενη f θα είναι η αντίστροφή της.

Αυτή είναι και η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε στη συνέχεια: θα ορίσουμε μια συνάρτηση f^{-1}, όπως πιο πάνω, και θα εξαγάγουμε την f ως αντίστροφη της f^{-1}. Βέβαια υπάρχει ακόμη μία εκκρεμότητα: δεν γνωρίζουμε ποιο είναι το $f'(0)$. Για αυτόν τον λόγο θα ορίσουμε την f^{-1} ως παράγουσα της $1/x$, δηλαδή θέτοντας αυθαίρετα $f'(0) = 1$ στην (5.34). Τη συνάρτηση f^{-1} θα την ονομάσουμε λογάριθμο επειδή έτσι ονομάζεται η αντίστροφη της f ήδη για εκθέτες φυσικούς αριθμούς. Το ποια θα είναι η βάση αυτής της εκθετικής συνάρτησης (δηλαδή το ποιο θα είναι το a της $f(x) = a^x$ που θέλουμε να ορίσουμε), θεωρούμε ότι θα προκύψει στην πορεία.

Ξεκινάμε με τον ορισμό της **λογαριθμικής συνάρτησης** $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ως εξής:[37]

Ορισμός 5.9.

$$\log x := \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0.$$

Παρατήρηση 5.4.1. *Παρατηρούμε αμέσως ότι η λογαριθμική συνάρτηση είναι καλά ορισμένη για $x \in (0, +\infty)$, αφού η $t \mapsto 1/t$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$,*

Παρατηρούμε επίσης ότι, λόγω της συνέχειας της $\frac{1}{t}$, $t > 0$, η $\log$ είναι και παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το ΘΘΑΛ, με

$$\log' x = \frac{1}{x} > 0, \quad x > 0.$$

Από αυτό βλέπουμε και ότι η $\log$ είναι (γνησίως) αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Επίσης, βλέπουμε ότι

$$\log x \begin{cases} > 0, & x > 1, \\ = 0, & x = 1, \\ < 0, & x < 1. \end{cases} \tag{5.35}$$

Το πρώτο προκύπτει από τον ορισμό του ολοκληρώματος, αφού για κάθε $x > 1$ έχουμε $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{x}$ για $t \in [1, x]$ και συνεπώς

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \geq \frac{1}{x}(x - 1) = 1 - \frac{1}{x} > 0, \quad x > 1,$$

ενώ το δεύτερο και το τρίτο, από τη σύμβαση (5.21), αφού σύμφωνα με αυτήν

$$\log 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt := 0, \quad \log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt := -\int_x^1 \frac{1}{t} dt \leq 1(x - 1) = x - 1 < 0, x \in (0, 1).$$

(Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε την (5.35) πιο σύντομα, διαπιστώνοντας πρώτα ότι $\log 1 = 0$ και μετά χρησιμοποιώντας ότι η $\log$ είναι αύξουσα.)

Αποδεικνύεται ότι η $\log$ έχει την ακόλουθη θεμελιώδη ιδιότητα.

[37] Η συνάρτηση $\log$ είναι ο καλούμενος *φυσικός λογάριθμος*, ο οποίος για αυτόν τον λόγο συμβολίζεται και ως $\ln$.

Θεώρημα 5.12.

$$\log(xy) = \log x + \log y, \quad x, y > 0.$$

Απόδειξη: Βλ. [1, Κεφάλαιο 18, Θεώρημα 1]. Εν συντομία:

$$f(x) := \log(xy) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{xy}y = \frac{1}{x} = \log' x \Rightarrow f(x) = \log x + c \Rightarrow f(1) = c.$$

□

Από αυτή την ιδιότητα προκύπτουν τα ακόλουθα πορίσματα.

Πόρισμα 5.13.

$$\log(x^n) = n \log x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x > 0.$$

Απόδειξη: Προκύπτει από το Θεώρημα 5.12 με μαθηματική επαγωγή: Αρχικό Βήμα: $\log x = 1 \log x$. Επαγωγικό Βήμα: Για $n \in\in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\log(x^{n+1}) = \log(x^n x) = \log(x^n) + \log x = n \log x + \log x = (n+1) \log x.$$

□

Πόρισμα 5.14.

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y, \quad x, y > 0.$$

Απόδειξη:

$$\log x = \log\left(\frac{x}{y}y\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right) + \log y.$$

□

Παρατήρηση 5.4.2. *Από τα δύο προηγούμενα πορίσματα προκύπτει ότι το σύνολο τιμών (ή η εικόνα) της* $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *είναι όλο το* $\mathbb{R}$.

Πράγματι, σύμφωνα με το Πόρισμα 5.13, έχουμε $\log(2^n) = n \log 2$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *όπου* $\log 2 > 0$. *Από αυτό και το Πόρισμα 5.14, έχουμε και* $\log(2^{-n}) = \log(1/2^n) = \log 1 - \log(2^n) = -n \log 2$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Συνεπώς, αφού η* $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη), προκύπτει από το ΘΕΤ ότι* $[-n \log 2, n \log 2] \subset \log((0, +\infty))$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και άρα* $\log((0, +\infty)) = \mathbb{R}$. *Αυτό σημαίνει ειδικότερα ότι η* $\log$ *δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη.*

Αφού η $\log$ *είναι αύξουσα και άρα 1-1 με σύνολο τιμών* $\log((0, +\infty)) = \mathbb{R}$, *ορίζεται η αντίστροφή της* $\log^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *η οποία έχει σύνολο τιμών* $\log^{-1}(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, *είναι αύξουσα και, αφού η* $\log$ *είναι παραγωγίσιμη με* $\log'(x) = 1/x > 0$, $x > 0$, *θα είναι και η* $\log^{-1}$ *παραγωγίσιμη με*

$$(\log^{-1})'(x) = \frac{1}{\log'(\log^{-1}(x))} = \log^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η αντίστροφη συνάρτηση της λογαριθμικής συνάρτηση έχει μία δική της ονομασία και έναν δικό της συμβολισμό, τα οποία δίνονται στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 5.10. *Η αντίστροφη συνάρτηση* $\log^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *της λογαριθμικής συνάρτησης ονομάζεται* **εκθετική συνάρτηση** *και συμβολίζεται με* $\exp$ *αλλά και με* $e^x := \exp(x)$ *για* $x \in \mathbb{R}$.[38] *Ο αριθμός* $e := e^1 = \exp(1)$ *ονομάζεται και* **αριθμός του Euler**.[39]

Παρατήρηση 5.4.3. *Όπως είδαμε στην προηγούμενη παρατήρηση η εκθετική συνάρτηση* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *έχει σύνολο τιμών* $\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ *και άρα είναι κάτω φραγμένη με* $\inf \exp = 0$,[40] *αλλά δεν είναι άνω φραγμένη, και είναι παραγωγίσιμη με* $\exp' = \exp$ *και άρα αύξουσα.*

Από το Θεώρημα 5.12 προκύπτει η αντίστοιχη θεμελιώδης ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης που δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.15.

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{5.36}$$

Απόδειξη: Έστω $x' = e^x$, $y' = e^y$ για δύο $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε, εξ ορισμού, $x = \log x'$, $y = \log y'$ και από το Θεώρημα 5.12 προκύπτει $x + y = \log(x'y')$ και άρα, εξ ορισμού, $e^{x+y} = x'y' = e^x e^y$. □

Παρατήρηση 5.4.4. *Σχετικά με τον αριθμό του Euler* e *παρατηρούμε ότι ισχύει*

$$e = e^1 \Leftrightarrow 1 = \log e = \int_1^e \frac{1}{t} dt.$$

Αφού

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt < 1(2-1) = 1, \quad \log 4 = \int_1^4 \frac{1}{t} dt > \frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{4}(4-2) = 1,$$

παίρνουμε

$$\log 2 < \log e < \log 4 \Leftrightarrow 2 < e < 4. \tag{5.37}$$

Σημειώνουμε ότι στο [1, Κεφάλαιο 20, Θεώρημα 5] αποδεικνύεται ότι ο e *είναι άρρητος, δηλαδή ότι δεν είναι ρίζα ενός πρωτοβάθμιου πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές, και στο [1, Κεφάλαιο 21] αποδεικνύεται ότι ο* e *είναι υπερβατικός, δηλαδή ότι δεν είναι ρίζα κάποιου πολυωνύμου οποιουδήποτε βαθμού με ακέραιους συντελεστές.*

Παρατήρηση 5.4.5. *Η ιδιότητα (5.36) της* $\exp$ *είναι αυτή που μας οδηγεί στον συμβολισμό* $e^x := \exp(x)$. *Συγκεκριμένα, όπως δείξαμε στην αρχή της ενότητας,*[41] *η ιδιότητα (5.36) μαζί με τον ορισμό* $e = \exp(1) > 0$ *οδηγεί στο ότι ισχύει* $\exp(x) = \exp(1)^x = e^x$ *για* $x \in \mathbb{Q}$. *Συνεπώς, η χρήση του συμβολισμού* $e^x := \exp(x)$ *για* $x \in \mathbb{R}$ *αποτελεί απλώς επέκταση της ισχύουσας (αλγεβρικής) ισότητας* $e^x = \exp(x)$ *για* $x \in \mathbb{Q}$.

[38] Για τον συμβολισμό αυτό βλ. την Παρατήρηση 5.4.5 πιο κάτω.

[39] Εδώ χρειάζεται προσοχή: Πολλοί συγγραφείς, όπως και ο Spivak, βλ. [1, Πρόβλημα 22-12], αποκαλούν αριθμό του Euler αυτό που άλλοι αποκαλούν **σταθερά του Euler** ή **σταθερά Euler-Macheroni**, δηλαδή το όριο $\gamma := \lim_{n\to\infty}(-\log n + \sum_k = 1^n \frac{1}{k}) \in \mathbb{R}$.

[40] Οι λεπτομέρειες για το τελευταίο, αφήνονται ως άσκηση. Δείτε και την Παρατήρηση 4.9.

[41] Βλ. ιδίως Υποσημείωση 35.

Θεώρημα 5.16. *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη με*

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = a \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.38}$$

Τότε $f(x) = ae^x$, $x \in \mathbb{R}$.[42]

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε ότι οι μόνες παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη (γραμμική μη ομογενή συνήθη διαφορική) εξίσωση (πρώτης τάξης) $f' = f$ έχουν τη μορφή $f(x) = ce^x$, $x \in \mathbb{R}$.[43] Η αρχική τιμή $f(0) = a$ θα καθορίσει τότε τη μοναδική λύση του ΠΑΤ (5.38), $f(x) = ae^x$, $x \in \mathbb{R}$, αφού $f(0) = ce^0 = c = a$.

Αν η f είναι λύση της $f' = f$, τότε για την $g(x) = f(x)/e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - e^x f(x)}{e^{2x}} = 0, x \in \mathbb{R},$$

και άρα η g είναι σταθερή, δηλαδή $g(x) = g(0) = f(0) = c$ με $c \in \mathbb{R}$, σύμφωνα με το Πόρισμα ... □

Θεώρημα 5.17.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.39}$$

[42]Το πρόβλημα της εύρεσης μίας άγνωστης συνάρτησης f (της *λύσης* του προβλήματος), η οποία να ικανοποιεί τα ζητούμενα στην (5.38) είναι ένα *πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) (ή πρόβλημα Cauchy)* για τη *γραμμική ομογενή Συνήθη Διαφορική Εξίσωση (ΣΔΕ) πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές* $f' = f$. Το $x \in \mathbb{R}$ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η μεταβλητή του χρόνου και για αυτόν τον λόγο αντί για τη μεταβλητή x χρησιμοποιείται συχνά η μεταβλητή t. Πολλές φορές προβλήματα αρχικών τιμών τίθενται για $x \geq 0$, δηλαδή θέλουμε να γνωρίζουμε πως θα εξελιχθεί η τιμή της συνάρτησης f, η οποία διέπεται από κάποιον νόμο, ο οποίος *μοντελοποιείται* από την *εξίσωση του προβλήματος*, και της οποίας την *αρχική τιμή*, δηλαδή την τιμή της συνάρτησης κατά την *αρχική*, π.χ. τωρινή, *χρονική στιγμή* $t = 0$ γνωρίζουμε, $f(0) = a$. (Αυτή είναι η *αρχική συνθήκη του προβλήματος*.) Τέτοια προβλήματα ονομάζονται *ντετερμινιστικά ή προσδιοριστικά (deterministic)* και βρίσκονται στον πυρήνα της ανθρώπινης θεώρησης της συμπεριφοράς της φύσης το αργότερο από την εποχή του Newton: ότι, δηλαδή, η φύση, ή τουλάχιστον κάποια φαινόμενά της, ας πούμε κυρίως τα μη έμβια, συμπεριφέρονται βάσει νόμων, και άρα αν γνωρίζουμε μία αρχική κατάσταση, μπορούμε να προβλέψουμε και όλες τις μελλοντικές. (Στον αντίποδα των ντετερμινιστικών προβλημάτων βρίσκονται τα *στοχαστικά*, όπου θεωρούμε ότι στην εξέλιξη ενός συστήματος υπεισέρχεται κάποιου είδους *τυχαιότητα*, η οποία οδηγεί σε μία σχετική *απροσδιοριστία* της συμπεριφοράς του συστήματος.) Πολλές φορές, όπως εδώ, όταν το σύστημα ή η εξίσωση που μελετάμε χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα της (χρονικής) *αντιστρεψιμότητας (reversibility)* μπορούμε να γνωρίζουμε από την τωρινή τιμή της συνάρτησης, $f(0) = a$, ποια ήταν η τιμή της σε όλους τους προηγούμενους χρόνους.

Η εξίσωση $f' = f$ ονομάζεται *πρώτης τάξης*, επειδή η υψηλότερη παράγωγος που εμφανίζεται σε αυτήν την εξίσωση είναι πρώτης τάξης. Ονομάζεται *γραμμική*, επειδή αν δύο συναρτήσεις f_1 και f_2 ικανοποιούν την εξίσωση $f' = f$ τότε και η συνάρτηση $\lambda f_1 + \mu f_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, θα ικανοποιεί την εξίσωση. Ονομάζεται *ομογενής* επειδή είναι της μορφής $Af = 0$, όπου $A = \frac{d}{dx} - 1$, και όχι της μορφής $Af = g$, με κάποια δεδομένη, δηλαδή γνωστή, συνάρτηση g, οπότε η εξίσωση θα ονομαζόταν *μη ομογενής* (και ο όρος g στη «δεξιά πλευρά» της εξίσωσης ο *μη ομογενής όρος* της). Λέμε ότι έχει *σταθερούς συντελεστές* $a = b = 1$ επειδή θα μπορούσε να είναι και της μορφής $af' = bf$, όπου οι δοσμένοι συντελεστές a, b είναι συναρτήσεις του x με κατάλληλες ιδιότητες που να εγγυώνται την επιλυσιμότητα της εξίσωσης.

[43]Αυτή είναι η *γενική λύση* της εξίσωσης.

Απόδειξη:

(α΄) Ισχύει

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty. \tag{5.40}$$

Πράγματι, έχουμε

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt \le 1(x-1) = x-1 < x \quad \text{για κάθε } x > 1$$

και

$$\log x \le 0 < x \quad \text{για κάθε } x \in (0,1].$$

Συνεπώς

$$\log x < x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

και άρα, αφού η εκθετική συνάρτηση είναι αύξουσα,

$$x = e^{\log x} < e^x \quad \text{για κάθε } x > 0 \tag{5.41}$$

και μάλιστα, αφού η εκθετική συνάρτηση είναι και θετική, δηλαδή $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$x < e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Από την (5.41) και τον ορισμό της σύγκλισης στο άπειρο, όταν το x τείνει στο άπειρο, μίας $f : D \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού $D \subset \mathbb{R}$ που δεν είναι άνω φραγμένο,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ x > \frac{1}{\delta} : \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon}, \tag{5.42}$$

προκύπτει η (5.40) για $f(x) = e^x > x$, επιλέγοντας, π.χ., $\delta := \varepsilon > 0$.

(β΄) Ισχύει

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty. \tag{5.43}$$

Πράγματι, εφαρμόζοντας την (5.41) δύο φορές διαδοχικά παίρνουμε

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{2}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}} > \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} > \frac{x}{4} \tag{5.44}$$

και από την (5.42) για $f(x) = \frac{e^x}{x} > \frac{x}{4}$, επιλέγοντας $\delta := \frac{\varepsilon}{4} > 0$, προκύπτει η (5.43).

(γ΄) Ισχύει

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \quad n \in \mathbb{N},\ n \ge 2. \tag{5.45}$$

Πράγματι, από τις (5.41) και (5.44) παίρνουμε

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(\frac{x}{n}\right)^n n^n} = \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^{n-1}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} > \frac{1}{n^n}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} > \frac{1}{n^n}\frac{x}{4n}$$

και η (5.45) προκύπτει από την (5.42) για $f(x) = \frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{4n^{n+1}}$, επιλέγοντας $\delta := \frac{\varepsilon}{4n^{n+1}} > 0$.

Σημειώνουμε ότι ο ισχυρισμός για $n \in \mathbb{N}$ μπορεί να αποδειχθεί και μέσω ενός κατάλληλου Κανόνα του l' Hôpital, χρησιμοποιώντας την (5.40), βλ. [1, Προβλήματα 18-30 και 11-56]. □

Στη βάση των παραπάνω, αποδεικνύεται ότι ο ακόλουθος ορισμός της $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, για $a > 0$ επεκτείνει αυτόν για $x \in \mathbb{Q}$ που είδαμε στην αρχή της ενότητας.

Ορισμός 5.11.

$$a^x := e^{x \log a}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη τις ακόλουθες ιδιότητες της a^x για $x \in \mathbb{R}$ και με $a > 0$.[44]

Θεώρημα 5.18. *Για $a, b > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε*

$$a^x > 0, \quad a^1 = a, \quad 1^x = 1, \quad a^x b^x = (ab)^x, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Παρατήρηση 5.4.6. *Επίσης αποδεικνύεται ότι η $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, έχει ως εικόνα το $(0, \infty)$ και ότι είναι αύξουσα για $a > 1$, φθίνουσα για $a \in (0, 1)$, ενώ $1^x = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Την αντίστροφή της (για $a > 0$, $a \neq 1$) τη συμβολίζουμε με $\log_a$. και ισχύει*

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Η απόδειξη της τελευταίας σχέσης και ο υπολογισμός των παραγώγων της a^x και της $\log_a$ αφήνονται ως ασκήσεις.[45]

Παρατήρηση 5.4.7. *Από τον ορισμό της a^x για $x \in \mathbb{R}$ και $a > 0$ προκύπτει και ο αναμενόμενος (και γνωστός) τύπος της παραγώγου της συνάρτησης $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^a = e^{a \log x}$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$,*[46] *η οποία είναι*

$$f'(x) = (x^a)' = (e^{a \log x})' = e^{a \log x} a \frac{1}{x} = a e^{a \log x - \log x} = a x^{a-1}.$$

Από αυτό προκύπτει ότι η $f(x) = x^a$, $x > 0$, είναι αύξουσα για κάθε $a > 0$ και φθίνουσα για κάθε $a < 0$, ενώ για $a = 0$ είναι σταθερή $f(x) = x^0 = 1$.

5.4.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 18]:

1 - 3, 5, 6, 13, 17, 20, 21 .

[44] Για την απόδειξη των δύο τελευταίων παραπέμπουμε στο [1, Θεώρημα 18-4]. Η πρώτες τέσσερις προκύπτουν εύκολα από τους ορισμούς των a^x, e^x, exp και log και τις ιδιότητες των δύο τελευταίων που ήδη γνωρίσαμε: $a^x = e^{x \log a} = \exp(x \log a) > 0$, αφού η exp είναι η αντίστροφη της log, η οποία ορίζεται στο $(0, \infty)$, $a^1 = e^{\log a} = \exp(\log a) = a$, αφού οι exp και log είναι η μία αντίστροφη της άλλης, $1^x = e^{x \log 1} = e^0 = \exp(0) = 1$, και $a^x b^x = e^{x \log a} e^{x \log b} = e^{x(\log a + \log b)} = e^{x \log(ab)} = (ab)^x$.

[45] Βλ. και [1, σελ. 312].

[46] Σημειώνουμε ότι η f είχε οριστεί μέχρι τώρα μόνο για $a \in \mathbb{Q}$, βλ. Παράδειγμα (4.6) ([1, σελ. 215]).

5.5 Αόριστο Ολοκλήρωμα

Και σε αυτό το κεφάλαιο το $D \subset \mathbb{R}$ θα είναι εν γένει διάστημα, εκτός φυσικά αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό.

Ορισμός 5.12. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$. *Μία συνάρτηση* $F : D \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $F' = f$ *ονομάζεται* **παράγουσα (συνάρτηση) της** f.[47]

Παρατήρηση 5.5.1. *(α΄) Προφανώς, αν* F *είναι μία παράγουσα της* f, *τότε και κάθε* $G = F + c$, *δηλαδή* $G(x) = F(x) + c$, *με* $c \in \mathbb{R}$, *είναι παράγουσα της* f.

(β΄) Από το Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε ότι κάθε συνεχής $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *έχει παράγουσα, την*

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]. \tag{5.46}$$

Καθώς η παράγουσα F *μίας συνεχούς* f *προκύπτει από την ολοκλήρωση της* f, *όπως στην (5.46), και καθώς κάθε άλλη παράγουσα της* f *ισούται με* $F + c$ *για οποιοδήποτε* $c \in \mathbb{R}$,[48] *κάθε παράγουσα της* f *ονομάζεται και* **αόριστο ολοκλήρωμα της** f *και την συμβολίζουμε με*

$$\int f = \int f(x)dx \tag{5.47}$$

δηλαδή με το σύμβολο της ολοκλήρωσης $\int$ *χωρίς συγκεκριμένα άκρα.*[49]

(γ΄) Η διαφορά του αόριστου ολοκληρώματος από το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ότι το πρώτο είναι μία συνάρτηση ενώ το δεύτερο ένας αριθμός.

(δ΄) Συνήθως χρησιμοποιούμε την έννοια του αόριστου ολοκληρώματος όταν αυτό είναι μία γνωστή συνάρτηση, η οποία δηλαδή μπορεί να γραφεί σε ρητή (explicit) *(ή αλλιώς σε κλειστή) μορφή.*

Ως γνωστές συναρτήσεις στο παρόν θα θεωρούμε συναρτήσεις που προκύπτουν από αλγεβρικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση) και συνθέσεις ρητών, τριγωνομετρικών και εκθετικών συναρτήσεων και των αντιστρόφων τους.[50]

Δεν ισχύει πάντα ότι ένα αόριστο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί σε κλειστή μορφή. Κλασικό αντιπαράδειγμα είναι η παράγουσα της $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

[47] Η F ονομάζεται και **αρχική (συνάρτηση) της** f ή και **αντιπαράγωγος της** f. Εμείς θα χρησιμοποιούμε τον όρο παράγουσα. Αυτός είναι και ο όρος που χρησιμοποιείται στο [1].

[48] Αυτό προκύπτει από το ΘΜΤ, βλ. Πόρισμα ...., Βλ. και την απόδειξη του Πορίσματος ... .

[49] Σύμφωνα με το 1 και πιο διαδεδομένο και κλασικό είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f να γράφεται ως

$$F = \int f + c = \int f(x)dx + c$$

χωρίς κάποια συγκεκριμένη σταθερά, αλλά απλά ως υπενθύμιση ότι αν προσθέσουμε μία σταθερά σε μία παράγουσα τότε πάλι θα έχουμε μία παράγουσα. Εμείς, όπως γίνεται και στο [1], θα χρησιμοποιούμε τη μορφή (5.47) χωρίς τη σταθερά, εκτός εάν χρειάζεται για λόγους αποσαφήνισης.

[50] Το τι θεωρείται γνωστό και τι άγνωστο είναι φυσικά πάντα σχετικό. Στο [1] οι συναρτήσεις που αναφέραμε εδώ ονομάζονται *στοιχειώδεις*, δείτε όμως και την υποσημείωση εκεί (σελ. 327).

(ε') *Στα επόμενα θα δούμε δύο βασικές μεθόδους εύρεσης αόριστων ολοκληρωμάτων, οι οποίες εφαρμόζονται όμως για ορισμένα ολοκληρώματα. Αυτές είναι η ολοκλήρωση* κατά μέρη (ή ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή παραγοντική ολοκλήρωση) *και* η μέθοδος ή ο κανόνας ή ο τύπος αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής.

Παράδειγμα 5.4. *Μέχρι στιγμής γνωρίζουμε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση στα δεξιά της ισότητας θα πρέπει να προκύψει η ολοκληρωτέα συνάρτηση, δηλαδή η συνάρτηση «κάτω από το (ή μέσα στο) ολοκλήρωμα» στα αριστερά της ισότητας. Να προσεχθεί ότι όλες οι ολοκληρωτέες συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους, συνεπώς οι τύποι αυτοί είναι απόρροια του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.*

$$\begin{aligned}
&\int a dx = ax, \quad a \in \mathbb{R} \\
&\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq -1 \\
&\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \log x \\
&\int e^x dx = e^x \\
&\int \sin x dx = -\cos x \\
&\int \cos x dx = \sin x \\
&\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \\
&\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x
\end{aligned}$$

Πρόταση 5.5. (Γραμμικότητα του αόριστου ολοκληρώματος) *Αν* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *συνεχείς, ισχύει*

$$\int (f+g) = \inf f + \int g, \quad \int cf = c \int f \quad (c \in \mathbb{R})$$

Απόδειξη: Προκύπτει από τη γραμμικότητα της παραγώγισης και το το ΘΘΑΛ. □

Πρόταση 5.6. (Ολοκλήρωση κατά μέρη)
Αν $f, g \in C^1([a, b])$*, δηλαδή αν οι* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *είναι διαφορίσιμες (δηλαδή, παραγωγίσιμες) με συνεχείς παραγώγους (τέτοιες* f*,* g *ονομάζονται* **συνεχώς διαφορίσιμες***), τότε*

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

και

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

όπου

$$f(x)g(x)\Big|_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Απόδειξη: Προκύπτουν από τον κανόνα του γινομένου για παραγώγους και το ΘΘΑΛ. □

Παραδείγματα 5.1.

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x$$
$$\int \log x dx \int 1 \cdot \log x dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x(\log x - 1)$$
$$\int \frac{\log x}{x}dx = (\log x)^2 - \int \log x \frac{1}{x}dx = \frac{(\log x)^2}{2}$$
$$\int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x dx = -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x\frac{\sin x - \cos x}{2}$$
$$\int (\log x)^2 dx = x(\log x - 1)\log x - \int (\log x - 1)dx = x((\log x - 1)^2 + 1)$$

Όπως η ολοκλήρωση κατά μέρη στηρίζεται στον κανόνα του γινομένου για παραγώγους, η μέθοδος αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής στηρίζεται στον Κανόνα της Αλυσίδας.[51]

Πρόταση 5.7. (Κανόνας Αντικατάστασης ή Αλλαγής Μεταβλητής)
Αν $g \in C^1([a,b])$ *με* $g([a,b]) \subset [\alpha,\beta]$ *και* $f \in C([\alpha,\beta])$, *τότε*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du. \tag{5.48}$$

Επίσης,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad \textit{με} \quad u = g(x),$$

δηλαδή το αόριστο ολοκλήρωμα στα αριστερά (μια συνάρτηση του x*) ισούται με το αόριστο ολοκλήρωμα στα δεξιά (μια συνάρτηση του* u*) με* $g(x)$ *στη θέση του* u*.*[52]

Απόδειξη: Έστω F παράγουσα της f.[53] Τότε στα δεξιά της ισότητας στην (5.48) θα έχουμε $F(g(b)) - F(g(a))$, σύμφωνα με το ΘΘΑΛ.[54] Όμως, από τον Κανόνα της Αλυσίδας έχουμε

$$(F \circ g)' = (F' \circ g)g' = (f \circ g)g', \tag{5.49}$$

[51] Θα μπορούσε να πει κανείς ότι ο κανόνας αλλαγής μεταβλητής είναι το αντίστροφο του κανόνα της αλυσίδας, αφού η ολοκλήρωση είναι το αντίστροφο της παραγώγισης.

[52] Τυπικά, παίρνουμε το ολοκλήρωμα στα δεξιά αντικαθιστώντας $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$ στα αριστερά, το οποίο είναι συνεπές με το ότι $\frac{du}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} = g'(x)$.

[53] Τέτοια υπάρχει, π.χ., η $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$, $x \in [\alpha,\beta]$, σύμφωνα με το ΘΘΑΛ, αφού η f είναι συνεχής.

[54] Εφόσον $g(a), g(b) \in [\alpha,\beta]$, έχουμε από τη συνέχεια της g στο $[a,b]$, σύμφωνα με το ΘΕΤ, ή $[g(a),g(b)] \subset [\alpha,\beta]$, αν η g είναι αύξουσα, ή $[g(b),g(a)] \subset [\alpha,\beta]$, αν η g είναι φθίνουσα. Και στις δύο περιπτώσεις το ΘΘΑΛ βγάζει το ορθό αποτέλεσμα, σύμφωνα με τη σύμβαση ... Αν η g' αλλάζει πρόσημο σε ένα σημείο $c \in (a,b)$ τότε από την εφαρμογή του τύπου αντικατάστασης στα $[a,c]$ και $[c,b]$ και τη χρήση του Θεωρήματος ... (βλ. και την Παρατήρηση ...) ο τύπος θα ισχύει πάλι σε όλο το $[a,b]$.

δηλαδή η $F \circ g$ είναι παράγουσα της συνεχούς $(f \circ g)g'$ και συνεπώς από το ΘΘΑΛ για αυτή τη συνάρτηση θα έχουμε στα αριστερά της ισότητας (5.48) επίσης $(F \circ g)(b) - (F \circ g)(a)$.

Επίσης, αν F είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, τότε όπως μόλις είδαμε στην (5.49), η $F \circ g$ θα είναι μία παράγουσα της συνεχούς $(f \circ g)g'$, δηλαδή ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $(f \circ g)g'$, σύμφωνα με τη ορισμό του στην Παρατήρηση 5.5.1 (2). □

Παρατήρηση 5.5.2. *Για την εφαρμογή όλων αυτών των μεθόδων και κανόνων θα πρέπει πάντα να προσέχουμε τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται να είναι καλά ορισμένα. Αυτό αφορά κυρίως τα άκρα ολοκλήρωσης, αλλά και το ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση θα πρέπει να είναι καλά ορισμένη και φραγμένη στο πεδίο ολοκλήρωσης. Δείτε και το επόμενο παράδειγμα.*

Παραδείγματα 5.2.

$$\int_a^b \sin^5 x \cos x dx = \int_{\sin a}^{\sin b} u^5 du = \frac{\sin^6 b}{6} - \frac{\sin^6 a}{6} \quad (u = g(x) = \sin x),$$

$$\int_a^b \tan x dx = \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_a^b \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int_{\cos a}^{\cos b} \frac{du}{u} = -\log(\cos b) + \log(\cos a)$$

$$\textit{για } [a, b] \subset (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z} \quad (u = g(x) = \cos x),$$

$$\int_a^b \tan x dx = \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_a^b \frac{\sin x}{-\cos x} dx = -\int_{-\cos a}^{-\cos b} \frac{du}{u} = -\log(-\cos b) + \log(-\cos a)$$

$$\textit{για } [a, b] \subset ((2k-1)\pi, 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \quad (u = g(x) = -\cos x),$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x \log x} = \int_{\log a}^{\log b} \frac{du}{u} = \log(\log b) - \log(\log a)$$

$$\textit{για } [a, b] \subset (1, \infty) \quad (u = g(x) = \log x).$$

Τα αντίστοιχα αόριστα ολοκληρώματα είναι

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \frac{\sin^6 x}{6}$$

$$\int \tan x dx = -\log(\cos x) \quad \textit{στο } 2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z},$$

$$\int \tan x dx = -\log(-\cos x) \quad \textit{στο } ((2k-1)\pi, 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z},$$

$$\int \frac{dx}{x \log x} == \log(\log x) \quad \textit{στο } (1, \infty).$$

Παρατήρηση 5.5.3. *Αν* $f \in C^1([a, b])$ *με* $f > 0$, *έχουμε*

$$\int_a^b \frac{f'x}{f(x)} dx = \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{du}{u} = \log(f(b)) - \log(f(a)) \quad \textit{και} \quad \int \frac{f'x}{f(x)} dx = \log(f(x)) \quad (u = f(x))$$

Παράδειγμα 5.5.

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\log u = \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$
$$\int \arctan x dx = x\arctan x - \int x\frac{1}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Παρατήρηση 5.5.4. *Το αόριστο ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης* f *του* $ax+b$ *υπολογίζεται με την ιδιαίτερα απλή γραμμική αντικατάσταση*

$$u = g(x) = ax+b \quad \Rightarrow \quad du = g'(x)dx = adx \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{a}du$$

ως

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(u)du.$$

Παράδειγμα 5.6.

$$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{du}{u} = \log(x+3)$$
$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^{3x}$$
$$\int \cos(4x)dx = \frac{1}{4}\int \cos u du = \frac{1}{4}\sin(4x)$$
$$\int \sin(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int \sin u du = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)$$
$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan(2x)$$

Παρατήρηση 5.5.5. *Αν ο παράγοντας* $g'(x)$ *για την αντικατάσταση* $u = g(x)$ *δεν εμφανίζεται στο αόριστο ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε θα πρέπει να τον εισάγουμε ή να χρησιμοποιήσουμε την αντίστροφη της αντικατάστασης,* $x = g^{-1}(u)$*. Αυτή θα χρειαστεί και αν εισάγουμε τον παράγοντα* $g'(x)$*.*

Πράγματι, έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγουσα

$$\int f(g(x))dx.$$

Θέτουμε

$$u = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = g^{-1}(u) \quad \Rightarrow \quad dx = (g^{-1})'(u)du$$

και η παράγουσα γίνεται

$$\int f(u)(g^{-1})'(u)du.$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να εισάγουμε τον παράγοντα $g'(x)$ στην παράγουσα και να χρησιμοποιήσουμε την (ευθεία) αντικατάσταση

$$u = g(x) \quad \Rightarrow \quad du = g'(x)dx$$

αφού, σύμφωνα με το θεώρημα για την παράγωγο αντίστροφης συνάρτησης (Θεώρημα ...),

$$\int f(g(x))dx = \int f(g(x))\frac{1}{g'(x)}g'(x)dx = \int f(u)\frac{1}{g'(g^{-1}(u))}du = \int f(u)(g^{-1})'(u)du.$$

Παράδειγμα 5.7. *Με την αντικατάσταση $u = g(x) = e^x \Rightarrow du = g'(x)dx = e^x dx$ έχουμε*

$$\begin{aligned}\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx &= \int \frac{1+e^x}{1-e^x}\frac{1}{e^x}e^x dx = \int \frac{1+u}{1-u}\frac{1}{u}du = \int \left(\frac{2}{1-u} + \frac{1}{u}\right) du \\ &= -2\int \frac{-1}{1-u}du + \log u = -2\log(1-u) + \log u = -2\log(1-e^x) + x\end{aligned}$$

Το ίδιο προκύπτει αν θέσουμε κατευθείαν[55] $u = e^x \Leftrightarrow x = \log u \Rightarrow dx = \frac{1}{u}du$ *στο ολοκλήρωμα:*

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx = \int \frac{1+u}{1-u}\frac{1}{u}du = -2\log(1-e^x) + x,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει όπως πριν.

Παράδειγμα 5.8. *Ενίοτε μπορούμε να κάνουμε και άλλες αντικαταστάσεις, αν αυτές οδηγούν σε ένα αποτέλεσμα εύκολα. Αυτό εξαρτάται φυσικά από τη συγκεκριμένη μορφή της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Για παράδειγμα, με την αντικατάσταση*

$$u = \sqrt{e^x+1} \quad \Leftrightarrow \quad e^x = u^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log(u^2-1) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{u^2-1}2udu$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx &= \int \frac{(u^2-1)^2}{u}\frac{1}{u^2-1}2udu = 2\int(u^2-1)du = \frac{2}{3}u^3 - 2u \\ &= \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} - 2(e^x+1)^{1/2}.\end{aligned}$$

Παρατήρηση 5.5.6. *Επίσης, καμιά φορά είναι χρήσιμο να αντικαθιστούμε το x με μία συνάρτηση του u, δηλαδή να θέτουμε $x = h(u)$ και $dx = h'(u)du$. Αυτό το έχουμε δει βέβαια ήδη στην προηγούμενη παρατήρηση υπό τη μορφή $x = g^{-1}(u)$, δηλαδή με $h = g^{-1}$, αλλά εδώ βλέπουμε την h ως «ευθεία» συνάρτηση και όχι ως αντίστροφη κάποιας άλλης, παρ' όλο που και η h είναι προφανώς αντίστροφη της h^{-1}.*

Αυτό το είδος αντικατάστασης είναι χρήσιμο ιδίως όταν μέσω αυτής προκύπτουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

[55] δηλαδή χωρίς πρώτα να πολλαπλασιάσουμε και να διαιρέσουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση με $g'(x) = e^x$

Παράδειγμα 5.9. *Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$\int \sqrt{1-x^2}dx.$$

Με την αντικατάσταση

$$x = \sin u \quad \Leftrightarrow \quad u = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad dx = \cos u du$$

έχουμε (για $x \in (-\pi/2, \pi/2)$)

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 x}dx = \int \cos u \cos u du = \int \cos^2 u du$$

Η τελευταία παράγουσα υπολογίζεται εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο από τους ακόλουθους δύο τριγωνομετρικούς τύπους, οι οποίοι προκύπτουν από τις «ταυτότητες της πρόσθεσης» για τριγωνομετρικές συναρτήσεις (Πρόταση 5.11)

$$\cos^2 x = \sin^2 x + \cos(2x) = 1 - \cos^2 x + \cos(2x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \tag{5.50}$$

$$\sin^2 x = \cos^2 x - \cos(2x) = 1 - \sin^2 x - \cos(2x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}. \tag{5.51}$$

Από την (5.50) παίρνουμε (με την αντικατάσταση $v = 2u \Rightarrow dv = 2du$ και στο τέλος την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin(2u) = 2\sin u \cos u = 2\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}$)

$$\begin{aligned}\int \cos^2 u du &= \frac{1}{2}\int (1+\cos(2u))du = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\int \cos v dv\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\sin(2u)\right) = \frac{1}{2}(u + \sin u\sqrt{1-\sin^2 u})\end{aligned}$$

και συνεπώς αντικαθιστώντας $u = \arcsin x \Leftrightarrow \sin u = x$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(u + \sin u\sqrt{1-\sin^2 u}) = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}).$$

Παρατήρηση 5.5.7. *Σημειώνουμε εδώ κάποιες υποδείξεις για τον υπολογισμό αόριστων ολοκληρωμάτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.*

(α′) Θεωρούμε γνωστό το ακόλουθο ολοκλήρωμα (μέσω επαλήθευσης)

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x$$

(β′)

$$\int \frac{\tan x}{\cos x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} = \frac{1}{\cos x}$$

(γ΄) *Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες* (5.50), (5.51) *για τον υπολογισμό των*

$$\int \sin^n x dx, \quad \int \cos^n x dx, \quad \int \cos^n x \sin^m x dx \quad \text{για άρτιους } n, m \in \mathbb{N}, \tag{5.52}$$

καθώς οι αναφερθείσες ταυτότητες οδηγούν σε ολοκληρώματα όπου τα sin *και* cos *εμφανίζονται σε μικρότερη δύναμη.*

(δ΄) *Αν ένα από τα* $n, m \in \mathbb{N}$ *στα ολοκληρώματα* (5.52) *είναι περιττός αριθμός, π.χ.,* $m = 2k + 1$, *υπολογίζουμε*

$$\int \cos^n x \sin^m x dx = \int \cos^n x (1 - \cos^2 x)^k \sin x dx = -\int u^n (1 - u^2)^k du$$

(ε΄) *Χρησιμοποιούμε το ακόλουθο ολοκλήρωμα (μέσω επαλήθευσης)*[56]

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \log\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right)$$

(στ΄) *Χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους αναγωγικούς τύπους, οι οποίοι προκύπτουν μέσω ολοκλήρωσης κατά μέρη*

$$\begin{aligned}
\int \sin^n x dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \\
&= -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \\
\int \cos^n x dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int \cos^n x dx \\
&= \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 5.5.8. *Μια άλλη μεγάλη κλάση συναρτήσεων για την οποία θέλουμε να είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε αόριστα ολοκληρώματα είναι αυτή των ρητών συναρτήσεων.*

Εδώ πρώτα απ' όλα θα πρέπει να είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε ολοκληρώματα της ακόλουθης μορφής για $n \in \mathbb{N}$, *το οποίο, όταν* $n \geq 2$, *επιτυγχάνεται με χρήση του αναγωγικού τύπου,*

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}, \quad n \geq 2, \tag{5.53}$$

[56] Βλ. σχετικά [1, Πρόβλημα 19-13].

ο οποίος προκύπτει και πάλι μέσω ολοκλήρωσης κατά μέρη, ως εξής

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} &= \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx \\ &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2}\int x\frac{2x}{(x^2+1)^n}dx \\ &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2}\left(x\frac{1}{-n+1}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{-n+1}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{-n+1}\right)\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{-n+1}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}.\end{aligned}$$

Κάθε ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}dx, \quad \text{όπου} \quad \delta^2 := \gamma - \frac{\beta^2}{4} > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma < 0,$$

μπορεί να αναχθεί σε ολοκλήρωμα της μορφής (5.53) *για* $n \in \mathbb{N}$ *μέσω της συμπλήρωσης τετραγώνου*

$$x^2+\beta x+\gamma = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4} = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \delta^2 = \delta^2\left(\left(\frac{1}{\delta}x+\frac{\beta}{2\delta}\right)^2+1\right)$$

και της αντικατάστασης $u = \frac{1}{\delta}x + \frac{\beta}{2\delta} \Rightarrow du = \frac{1}{\delta}dx$*, έτσι ώστε*

$$\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}dx = \frac{1}{\delta^{2n-1}}\int \frac{1}{(u^2+1)^n}du.$$

Έστω τώρα το αόριστο ολοκλήρωμα μιας ρητής συνάρτησης

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$$

με

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0, \\ q(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0, \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad b_m \neq 0. \end{aligned}$$

Αν $n \geq m$*, υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα*

$$\begin{aligned} r(x) &= c_{n-m}x^{n-m} + c_{n-m-1}x^{n-m-1} + \cdots + c_0, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad c_{n-m}b_m := a_n \neq 0, \\ s(x) &= d_\ell x^\ell + d_{\ell-1}x^{\ell-1} + \cdots + d_0, \quad d_i \in \mathbb{R}, \quad d_\ell \neq 0, \quad \ell < m, \end{aligned}$$

έτσι ώστε[57]

$$p(x) = r(x)q(x) + s(x) \tag{5.54}$$

[57]Το αποτέλεσμα προκύπτει μέσω της λεγόμενης *διαίρεσης πολυωνύμων*, μιας αλγοριθμικής διαδικασίας που περιγράφεται π.χ. ακόμα και στο βιβλίο της Άλγεβρας της Β' Λυκείου (2012), βλ. http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2658/Algebra_B-Lykeiou_html-empl/index4_2.html. Βλ. π.χ. το Παράδειγμα 5.11.

και συνεπώς

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int r(x)dx + \frac{d_\ell}{b_m}\int \frac{\tilde{s}(x)}{\tilde{q}(x)}dx, \quad d_\ell \tilde{s} := s, \quad b_m \tilde{q} := q.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε αόριστα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων της μορφής

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx, \quad \textit{όπου} \quad \begin{cases} p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \\ q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 \end{cases} \quad \textit{με} \quad n < m.$$

Αυτό μπορεί να γίνει μέσω της ανάλυσης σε (μερικά (partial) ή) *απλά κλάσματα της ρητής συνάρτησης* p/q. *Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι ο παρονομαστής* q *της ρητής συνάρτησης μπορεί να αναλυθεί σε παράγοντες (ή, αλλιώς, να παραγοντοποιηθεί) στην ακόλουθη μορφή:*[58]

$$\begin{aligned} q(x) &= x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 && (5.55)\\ &= (x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_\ell x+\gamma_\ell)^{s_\ell}, && (5.56) \end{aligned}$$

όπου

$$\sum_{i=1}^{k} r_i + 2\sum_{j=1}^{\ell} s_j = m, \quad \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0 \quad \forall\ j = 1, \ldots, \ell.$$

και τότε η ρητή συνάρτηση p/q *μπορεί να αναλυθεί στα μερικά (ή απλά) κλάσματα*

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \left(\frac{a_{1,1}}{x-\alpha_1} + \frac{a_{1,2}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots \frac{a_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}\right) \qquad (5.57)\\ &+ \cdots + \left(\frac{a_{k,1}}{x-\alpha_k} + \frac{a_{k,2}}{(x-\alpha_k)^2} + \cdots \frac{a_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\right)\\ &+ \left(\frac{b_{1,1}x+c_{1,1}}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \frac{b_{1,2}x+c_{1,2}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2} + \cdots + \frac{b_{1,s_1}x+c_{1,s_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}}\right)\\ &+ \cdots + \left(\frac{b_{\ell,1}x+c_{\ell,1}}{x^2+\beta_\ell x+\gamma_\ell} + \frac{b_{\ell,2}x+c_{\ell,2}}{(x^2+\beta_\ell x+\gamma_\ell)^2} + \cdots + \frac{b_{\ell,s_\ell}x+c_{\ell,s_\ell}}{(x^2+\beta_\ell x+\gamma_\ell)^{s_\ell}}\right). \end{aligned}$$

Ο προσδιορισμός των συντελεστών στους αριθμητές των μερικών κλασμάτων γίνεται μέσω της σύγκρισης των συντελεστών:

Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα (5.57) *με τον παρονομαστή* q *στη μορφή* (5.56) *προκύπτει μία ισότητα δύο πολυωνύμων, οι συντελεστές των οποίων θα πρέπει να είναι συνεπώς όλοι ίσοι. Αυτό οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων για τους συντελεστές, του οποίου είναι λύσεις. Βλ. το Παράδειγμα 5.12.*

Για να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ *δεν έχουμε τότε παρά να υπολογίσουμε τα αόριστα ολοκληρώματα για τα πιο πάνω μερικά (ή απλά) κλάσματα με τους γνωστούς πια συντελεστές.*

[58] Αυτό προκύπτει από το Θεμελιωδες Θεώρημα της Άλγεβρας, σύμφωνα με το οποίο κάθε πολυώνυμο βαθμού $n \in \mathbb{N}$ με (εδώ) πραγματικούς συντελεστές έχει ακριβώς n *μιγαδικές* ρίζες, όχι απαραίτητα όλες διαφορετικές, εκ των οποίων οι μη πραγματικές εμφανίζονται ως συζυγή ζεύγη. Εδώ, τα συζυγή ζεύγη των μη πραγματικών ριζών είναι οι ρίζες των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων που δεν μπορούν να παραγοντοποιηθούν σε δύο πρωτοβάθμια πολυώνυμα με πραγματικές ρίζες.

Παράδειγμα 5.10.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}dx &= \frac{1}{2^3}\int \frac{1}{(u^2+1)^2}du = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+1}+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+5}+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.11. *Για* $p(x) = x^4+1$ *και* $q(x) = x^2+3x+1$ *έχουμε*

$$\begin{aligned}x^4+1 &= x^2(x^2+3x+1)-3x^3-x^2+1 \\ &= x^2(x^2+3x+1)-3x(x^2+3x+1)+8x^2+3x+1 \\ &= x^2(x^2+3x+1)-3x(x^2+3x+1)+8(x^2+3x+1)-21x-7\end{aligned}$$

και συνεπώς $r(x) = x^2-3x+8$ *και* $s(x) = -21x-7$ *έτσι ώστε να ισχύει η* (5.54).

Παράδειγμα 5.12.

$$\begin{aligned}& q(x) = x^3+x^2-x-1 = x^2(x+1)-(x+1) = (x+1)^2(x-1) \\ \Rightarrow\quad & \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x^2+7x-1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{x-1} \\ \Leftrightarrow\quad & 2x^2+7x-1 = a(x^2-1)+b(x-1)+c(x+1)^2 = (a+c)x^2+(b+2c)x+c-a-b \\ \Leftrightarrow\quad & \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 7\\ -1\end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\quad & \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 7\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 3\\ 2\end{pmatrix} \\ \Rightarrow\quad & \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{3}{(x+1)^2}+\frac{2}{x-1} \\ \Rightarrow\quad & \int \frac{p(x)}{q(x)}dx = 3\int \frac{1}{(x+1)^2}dx+2\int \frac{1}{x-1}dx = -3\frac{1}{x+1}+2\log(x-1)\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.13.

$$\int \frac{x+4}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx+4\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\log(x^2+1)+4\arctan x$$

Παράδειγμα 5.14.

$$\begin{aligned} q(x) &= x^4+1 \\ &= (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)(x^2+\beta_2 x+\gamma_2) \\ &= x^4+(\beta_1+\beta_2)x^3+(\gamma_1+\beta_1\beta_2+\gamma_2)x^2+(\beta_2\gamma_1+\gamma_2\beta_1)x+\gamma_1\gamma_2 \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} &\beta := \beta_1 = -\beta_2, \quad \beta^2 = \gamma_1+\gamma_2, \quad \beta(\gamma_1-\gamma_2)=0, \quad \gamma_1\gamma_2 = 1, \\ \Rightarrow\ &\beta \neq 0, \quad \gamma := \gamma_1 = \gamma_2, \quad \gamma^2 = 1, \quad \beta^2 = 2\gamma > 0, \\ \Rightarrow\ &\gamma = 1, \quad \beta = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} & q(x) = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1) \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{q(x)} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1} \\ \Leftrightarrow\ & 1 = (ax+b)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(cx+d)(x^2+\sqrt{2}x+1) \\ & \quad = (a+c)x^3+((c-a)\sqrt{2}+b+d)x^2+(a+c+(d-b)\sqrt{2})x+b+d \\ \Rightarrow\ & a=-c, \quad d=b=\frac{1}{2}, \quad 2c\sqrt{2}+1=0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) \\ & \quad = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) \\ & \qquad + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1} + \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1}\right). \end{aligned}$$

Συνεπώς, με τις αντικαταστάσεις

$$u_\pm = x^2 \pm \sqrt{2}x+1 \Rightarrow du_\pm = (2x\pm\sqrt{2})dx \quad \textit{και} \quad v_\pm = \sqrt{2}x \pm 1 \Rightarrow dv_\pm = \sqrt{2}dx$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{q(x)}dx &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\int \frac{du_+}{u_+} - \int \frac{du_-}{u_-}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int \frac{dv_+}{v_+^2+1} + \int \frac{dv_-}{v_-^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(\log u_+ - \log u_-) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\arctan v_+ + \arctan v_-) \end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}&\left(\log\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) - \log\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\right) \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)\right). \end{aligned}$$

Παρατήρηση 5.5.9. *Περισσότερες, πιο εξειδικευμένες αντικαταστάσεις μπορεί να βρει κανείς στο [1, Κεφάλαιο 19] και στα προβλήματα του κεφαλαίου αυτού, καθώς και στο [3, Κεφάλαιο 1].*

5.5.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 19]:

1 - 6

5.6 Θεώρημα Taylor

Έστω το πολυώνυμο βαθμού $n \in \mathbb{N}$ στον $\mathbb{R}$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x-a)^i = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n \quad \Rightarrow \quad p(a) = a_0 \tag{5.58}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
p'(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i i (x-a)^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(i+1)(x-a)^i \quad \Rightarrow \quad p'(a) = a_1 \\
p''(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(i+1)i(x-a)^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-2} a_{i+2}(i+2)(i+1)(x-a)^i \quad \Rightarrow \quad p''(a) = a_1 2 \\
&\ \vdots \\
p^{(k)}(x) &= \sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k}(i+k)\cdots(i+1)(x-a)^i \quad \Rightarrow \quad p^{(k)}(a) = a_k k! \qquad (k \in \{1, \ldots, n-1\}) \\
p^{(k+1)}(x) &= \sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k}(i+k)\cdots(i+1)i(x-a)^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-(k+1)} a_{i+k+1}(i+k+1)\cdots(i+2)(i+1)(x-a)^i \quad \Rightarrow \quad p^{(k+1)}(a) = a_{k+1}(k+1)!
\end{aligned}$$

Έτσι, αποδείξαμε επαγωγικά ότι

$$p^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k}(i+k)\cdots(i+1)(x-a)^i \quad \Rightarrow \quad p^{(k)}(a) = a_k k! \qquad \forall\, k = 0, \ldots, n \tag{5.59}$$

και, άρα

$$p^{(n)} = a_n n! \quad \Rightarrow \quad p^{(n+1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad p^{(k)} = 0, \quad k \geq n+1. \tag{5.60}$$

Ειδικότερα, από την (5.59) βλέπουμε ότι οι συντελεστές του πολυωνύμου (5.58) μπορούν να εκφραστούν μέσω των παραγώγων του στο σημείο a

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{5.61}$$

Μιας και εκτός από το a και τον βαθμό $n \in \mathbb{N}$ ενός πολυωνύμου, αυτό καθορίζεται πλήρως από τους συντελεστές του, βλέπουμε συνεπώς ότι το πολυώνυμο p εκφράστηκε *πλήρως* μέσω των παραγώγων του στο σημείο a.

Έστω τώρα μία $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $a \in D$. Από τον ορισμό της παραγώγου $f'(a)$ της f στο a παίρνουμε

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x - a} = 0. \tag{5.62}$$

Αυτό, ως γνωστόν, εκφράζει το γεγονός ότι η εφαπτομένη στο σημείο $(a, f(a))$ του γραφήματος $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in D\}$ της f,

$$P_{1,a,f}(x) := f(a) + f'(a)(x-a)$$

η οποία γεωμετρικά είναι μία ευθεία, αλλά αναλυτικά μία πρωτοβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση, είναι μία **προσέγγιση της** f **για** x **κοντά στο** a, η οποία είναι τόσο καλύτερη όσο πιο κοντά στο a είναι το x, αφού αν θεωρήσουμε το **σφάλμα της προσέγγισης** της f από την $P_{1,a,f}$, δηλαδή τη διαφορά των τιμών $f(x)$ και $P_{1,a,f}(x)$,

$$R_{1,a,f}(x) := f(x) - P_{1,a,f}(x),$$

βλέπουμε ότι η (5.62) γράφεται ισοδύναμα

$$f(x) = P_{1,a,f}(x) + R_{1,a,f}(x) \quad \text{με} \quad \lim_{x \to a} \frac{R_{1,a,f}(x)}{x-a} = 0.$$

Παρατηρούμε μάλιστα ότι, όχι απλώς

$$\begin{aligned} R_{1,a,f}(x) &= f(x) - P_{1,a,f}(x) \\ &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \\ &\to 0 \quad \text{για} \quad x \to a, \end{aligned}$$

αλλά ότι ισχύει κάτι ακόμα ισχυρότερο, δηλαδή ότι το σφάλμα ή **υπόλοιπο** της προσέγγισης της f από την $P_{1,a,f}$ τείνει στο μηδέν για $x \to a$ ακόμα και αν το διαιρέσουμε δια $x - a$, αφού

$$\frac{R_{1,a,f}(x)}{x-a} \to 0 \quad \text{για} \quad x \to a.$$

Αυτό κατά κάποιο τρόπο μετράει *πόσο πολύ συμπεριφέρεται η* f *κοντά στο* a *σαν να ήταν ευθεία* ή, ας το πούμε πιο χοντροκομμένα, «πόσο ευθεία είναι» και με *ποια* ευθεία μοιάζει.

Παρατηρήστε ότι αν η f περιέγραφε όντως μία ευθεία,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a)$$

τότε

$$P_{1,a,f}(x) = f(0) + f'(a)(x-a) = a_0 + a_1(x-a) = f(x)$$

δηλαδή το σφάλμα της προσέγγισης της f από την $P_{1,a,f}$ θα ήταν μηδενικό και μάλιστα για όλα τα $x \in \mathbb{R}$,

$$R_{1,a,f}(x) = f(x) - P_{1,a,f}(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Αυτό μας κάνει να αναρωτηθούμε αν μπορούμε να βρούμε και πόσο πολύ η f «μοιάζει» και με πολυώνυμα ανώτερου βαθμού τοπικά γύρω από το a, δηλαδή πόσο μοιάζει με μία παραβολή $c(x-a)^2$ ή, στη χοντροκομμένη έκδοση, «πόσο παραβολή είναι» και *ποια* θα είναι η παραβολή αυτή ακριβώς, κ.ο.κ.[59]

Και πράγματι, αυτό ισχύει, όπως προκύπτει από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.19. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα και έστω ότι η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο a και έχει εκεί όλες τις παραγώγους μέχρι και $n \in \mathbb{N}_0$ τάξης. Τότε, το πολυώνυμο*[60]

$$P_{n,a,f}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.63}$$

ονομάζεται **πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f στο a** *και για το* **υπόλοιπο Taylor**[61]

$$R_{n,a,f}(x) := f(x) - P_{n,a,f}(x) \tag{5.64}$$

ισχύει

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (5.64) του υπολοίπου, πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Εισάγοντας τις συναρτήσεις

$$Q(x) := P_{n,a,f}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \text{και} \quad g(x) := (x-a)^n,$$

αυτό ισοδυναμεί με το να δείξουμε

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{5.65}$$

[59]και ούτω καθεξής = και έτσι συνεχίζοντας

[60]Υπενθυμίζουμε τις συμβάσεις $f^{(0)}(x) := f(x)$ και $0! := 0$.

[61]Ο τύπος $f = P_{n,a,f} + R_{n,a,f}$ ονομάζεται και **τύπος του Taylor**.

Από τις (5.61) και (5.59) προκύπτουν, αντίστοιχα,

$$Q^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \text{και} \quad g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k} \quad \text{για} \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Συνεπώς,[62]

$$\lim_{x\to a}(f^{(k)}(x) - Q^{(k)}(x)) = \lim_{x\to a} g^{(k)}(x) = 0 \quad \text{για} \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Μπορούμε τότε να εφαρμόσουμε $n-1$ φορές τον Κανόνα του l' Hôpital (Θεώρημα 4.15),[63] για να πάρουμε

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - Q^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}, \tag{5.66}$$

εφόσον το όριο στα δεξιά υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Αυτό όμως ισχύει, αφού, σύμφωνα με τον ορισμό του Q και την (5.60) (με $n-1$ στη θέση του n και με $a_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$), έχουμε $Q^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η $f^{(n-1)}$ είναι παραγωγίσιμη στο a, έτσι ώστε

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - Q^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{5.67}$$

Από τις (5.66) και (5.67) προκύπτει η (5.65), δηλαδή το αποδεικτέο. □

Το υπόλοιπο $R_{n,a,f}$ ορίστηκε στην (5.64) ως το σφάλμα μεταξύ της f και της προσέγγισής της από το πολυώνυμο Taylor $P_{n,a,f}$, δηλαδή ως η διαφορά $R_{n,a,f} = f - P_{n,a,f}$. Μπορούμε όμως να εκφράσουμε το υπόλοιπο $R_{n,a,f}$ και με άλλους τρόπους. Οι δύο βασικότεροι είναι η ολοκληρωτική μορφή και η μορφή Lagrange, οι οποίες παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Θεώρημα 5.20. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα και και έστω $f \in C^{n+1}(D)$, $n \in \mathbb{N}_0$, δηλαδή έστω $f : D \to \mathbb{R}$ $n+1$* **φορές συνεχώς παραγωγίσιμη**[64]*, το οποίο σημαίνει ότι όλες οι παράγωγοι της f μέχρι και $n+1$ τάξης υπάρχουν και είναι συνεχείς στο D. Τότε, το υπόλοιπο Taylor που ορίζεται στην (5.64) έχει την* ολοκληρωτική μορφή

$$R_{n,a,f}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt, \quad a, x \in D, \ a \neq x. \tag{5.68}$$

[62]Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για να υπάρχει η παράγωγος $f^{(n)}(a)$ θα πρέπει να ορίζονται όλες οι $f^{(k)}$, $k = 0, \dots, n-1$, σε κάποια *περιοχή* $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, ενώ μπορεί η $f^{(n-1)}$ να είναι παραγωγίσιμη μόνο στο a, δηλαδή μπορεί η $f^{(n)}$ να μην ορίζεται σε κανένα άλλο σημείο εκτός από το a. Συνεπώς, όλες οι $f^{(k)}$, $k = 0, \dots, n-2$, ως παραγωγίσιμες, είναι και συνεχείς στο $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, δηλαδή $f \in C^{n-2}((a-\varepsilon, a+\varepsilon))$, ενώ για την $f^{(n-1)}$ γνωρίζουμε μόνο ότι είναι συνεχής στο a, ως παραγωγίσιμη, αν και ορίζεται σε όλο το $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Σε κάθε περίπτωση, όλες οι $f^{(k)}$, $k = 0, \dots, n-1$, ορίζονται στο $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ και είναι συνεχείς στο a.

[63]Στην πράξη εφαρμόζουμε τον Κανόνα l' Hôpital πρώτα για να βρούμε το όριο $\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-2)}(x) - Q^{(n-2)}(x)}{g^{(n-2)}(x)}$. Επειδή αυτό, όπως θα δούμε, υπάρχει, κινούμενοι «προς τα πίσω», δηλαδή από το $k = n-2$ έως το $k = 0$, βρίσκουμε ότι όλα τα όρια $\lim_{x\to a} \frac{f^{(k)}(x) - Q^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$ υπάρχουν και ισούνται με αυτό.

[64]ή $n+1$ **φορές συνεχώς διαφορίσιμη**

Απόδειξη: Το αποτέλεσμα αποδεικνύεται επαγωγικά. Για $n = 0$ το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το ΘΘΑΛ (Πόρισμα 5.9),

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Συνεπώς, αφού, σύμφωνα με τον ορισμό (5.63), $P_{0,a,f}(x) = f(a)$, το ολοκλήρωμα στα δεξιά της ισότητας είναι το $R_{0,a,f}$, σύμφωνα με τον ορισμό (5.64). Αυτός όμως είναι ο ισχυρισμός του θεωρήματος για $n = 0$.

Έστω τώρα ότι ισχύει ο τύπος (5.68) για $f \in C^{n+2}(D)$. Τότε, ολοκληρώνοντας κατά μέρη, παίρνουμε

$$\begin{aligned} R_{n,a,f}(x) &= \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=a}^{x} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{n!}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt \end{aligned}$$

δηλαδή, ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (5.64) και (5.63),

$$R_{n+1,a,f}(x) = f(x) - P_{n+1,a,f}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt$$

δηλαδή την (5.68) για $n+1$. □

Θεώρημα 5.21. (Θεώρημα Taylor)
Έστω $f \in C^n([\alpha,\beta])$ με $f^{(n)}$ παραγωγίσιμη στο (α,β). Τότε, το υπόλοιπο Taylor που ορίζεται στην (5.64) έχει τη μορφή Lagrange

$$R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad a, x \in [\alpha,\beta], \quad a \neq x, \quad \xi \text{ γνήσια μεταξύ των } a \text{ και } x. \tag{5.69}$$

Απόδειξη: Αφού η f είναι n φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $n+1$ φορές παραγωγίσιμη στο (α,β), το ίδιο θα ισχύει για το υπόλοιπο Taylor $R = R_{n,a,f}$. Επίσης, από τον ορισμό του πολυωνύμου Taylor και την (5.59) για $p = P_{n,a,f}$ προκύπτει ότι

$$R^{(k)}(a) = R^{(k)}_{n,a,f} = f^{(k)}(a) - P^{(k)}_{n,a,f}(a) = 0 \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots, n.$$

Θα δείξουμε ότι τότε

$$\frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad a, x \in [\alpha,\beta], \quad a \neq x, \quad \xi \text{ γνήσια μεταξύ των } a \text{ και } x. \tag{5.70}$$

Αυτο όμως συνεπάγεται την (5.69), αφού $R^{(n+1)}_{n,a,f} = f^{(n+1)}$ στο (α,β), μιας και $P^{(n+1)}_{n,a,f} = 0$, σύμφωνα με την (5.60) για $p = P_{n,a,f}$.

Η απόδειξη της (5.70) γίνεται με μαθηματική επαγωγή στο n. Ο ισχυρισμός (5.70) για $n = 0$ δεν είναι τίποτα άλλο από το ΘΜΤ (Θεώρημα 4.7) για την R στο διάστημα $[a, x]$ ή $[x, a]$, ανάλογα με το αν $x > a$ ή $x < a$.

Έστω τώρα ότι ισχύει ο ισχυρισμός (5.70) για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$ και ότι $R \in C^{(n+1)}([\alpha, \beta])$ με $R^{(n+1)}$ παραγωγίσιμη στο (α, β) και $R^{(k)}(a) = 0$ για $k = 0, \dots, n+1$. Από το γενικευμένο ΘΜΤ (Θεώρημα 4.8) για τις R και $(x-a)^{n+1}$ στα διαστήματα $[a, x]$ ή $[x, a]$ (όπως πριν) προκύπτει

$$\frac{R(x)}{(x-a)^{n+2}} = \frac{R'(z)}{(n+2)(z-a)^{n+1}}, \quad z \text{ γνήσια μεταξύ των } a \text{ και } x.$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας, $R' \in C^{(n)}([\alpha, \beta])$ με $(R')^{(n)}$ παραγωγίσιμη στο (α, β) και $(R')^{(k)}(a) = 0$ για $k = 0, \dots, n$. Συνεπώς, από την υπόθεση της επαγωγής, δηλαδή την ισχύ της (5.70) για $n \in \mathbb{N}_0$, έχουμε για το διάστημα $[a, z]$ ή $[z, a]$, ανάλογα με το αν $x > a$ ή $x < a$,

$$\begin{aligned}
\frac{R(x)}{(x-a)^{n+2}} &= \frac{1}{n+2}\frac{R'(z)}{(z-a)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{n+2}\frac{(R')^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \\
&= \frac{R^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}, \quad \xi \text{ γνήσια μεταξύ των } a \text{ και } z
\end{aligned}$$

και άρα ο ισχυρισμός (5.70) ισχύει και για το $n+1$. □

Ας υπολογίσουμε κάποια πολυώνυμα Taylor βασικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 5.15. *(α') Έστω $f(x) = e^x$. Επαγωγικά αποδεικνύεται*

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Συνεπώς

$$e^x = \exp(x) = P_{n,0,\exp}(x) + R_{n,0,\exp}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + R_{n,0,\exp}(x) \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0.$$

(β') Έστω $f(x) = \log x$, $x > 0$. Τότε

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = 2\frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(x) = -3\cdot 2\frac{1}{x^4} \quad \Rightarrow \quad \cdots$$

Από τα παραπάνω εικάζουμε ότι

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{x^k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5.71}$$

το οποίο επιβεβαιώνεται μέσω μαθηματικής επαγωγής, αφού ο τύπος (5.71) όντως ισχύει για $k = 1$ και παίρνοντάς τον ως υπόθεση βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
(f^{(k)})'(x) &= (-1)^{k-1}(k-1)!\left(\frac{1}{x^k}\right)' \\
&= (-1)^{k-1}(k-1)!(-k)\frac{1}{x^{k+1}} \\
&= (-1)^{(k+1)-1}((k+1)-1)!\frac{1}{x^{k+1}}
\end{aligned}$$

που είναι ο τύπος (5.71) *για* $k+1$.

Από τον (5.71) *προκύπτει για* $a = 1$

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!, \quad k \in \mathbb{N}$$

και συνεπώς

$$P_{n,1,\log}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}(x-1)^k, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή

$$\log(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}(x-1)^k + R_{n,1,\log}(x), \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Πολλές φορές, αντί να αναπτύξουμε την $f(x) = \log(x)$, $x > 0$, *γύρω από το* $a = 1$, *αναπτύσσουμε την* $g(x) = \log(1+x)$, $x > -1$, *γύρω από το* $a = 0$. *Αφού, σύμφωνα με την* (5.71), *ισχύει*

$$g^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k} \quad \Rightarrow \quad g^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5.72}$$

έχουμε

$$P_{n,0,\log(1+\cdot)}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k, \quad x > -1, \quad n \in \mathbb{N},$$

και άρα

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k + R_{n,0,\log(1+\cdot)}(x), \quad x > -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(γ΄) *Έστω* $f(x) = \sin x$. *Τότε*

$$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι έχουμε μόνο τέσσερις διαφορετικές παραγώγους, όπου η τέταρτη είναι ξανά η αρχική συνάρτηση (μηδενική παράγωγος).

Από τις παραγώγους αυτές προκύπτει

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

Επειδή αυτό συνεχίζεται περιοδικά ανά $4k$, $k \in \mathbb{N}$, *προκύπτει*

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

και άρα

$$P_{2n+1,0,\sin}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

και

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+1,0,\sin}(x)$$

(δ′) Αντίστοιχα αποδεικνύεται[65] *ότι*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n,0,\cos}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Το Θεώρημα Taylor, δηλαδή η μορφή Lagrange του υπολοίπου, μας βοηθάει να *εκτιμήσουμε (to estimate)* τις τιμές συναρτήσεων κατά προσέγγιση (approximatively). Ας δούμε κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 5.16. *(α′) Για την $f(x) = \sin x$, της οποίας το πολυώνυμο Taylor υπολογίσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε, σύμφωνα με την (5.69)*

$$R_{2n+1,0,\sin}(x) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad x \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Αφού $|\sin^{(2n+2)}(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει

$$|R_{2n+1,0,\sin}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad x \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Όπως θα αποδείξουμε στην ενότητα περί ακολουθιών και σειρών, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ n \in \mathbb{N} : \quad \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} < \varepsilon$$

Συνεπώς, για ένα οποιοδήποτε $x \neq 0$ μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή $\sin x$ προσεγγιστικά μέσω του πολυώνυμου Taylor

$$P_{2n+1,0,\sin}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

επιλέγοντας ένα $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε το σφάλμα μεταξύ των τιμών $\sin x$ και $P_{2n+1,0,\sin}(x)$ να γίνει όσο μικρό θέλουμε.

[65] Άσκηση

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\sin 2$ *προσεγγιστικά με ένα σφάλμα μικρότερο του* 10^{-4}*. Έχουμε*

$$\sin 2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1,0,\sin}(2)$$

με

$$|R_{2n+1,0,\sin}(2)| \leq \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} \overset{!}{<} 10^{-4}.$$

Από τον πίνακα τιμών που δίνεται στη [1, σελ. 292], διαπιστώνουμε ότι για $n = 5$ *(δηλαδή υπολογίζοντας ένα άθροισμα 6 αθροιστέων στο πολυώνυμο Taylor* $P_{11,0,\sin}(2)$*) έχουμε*[66]

$$|R_{11,0,\sin}(2)| \leq \frac{2^{12}}{12!} = \frac{4\,096}{479\,001\,600} \approx 0.000008... < 0.0001.$$

Άρα

$$\sin 2 = 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} - \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!} + R \quad \textit{με } |R| < 0.0001.$$

Με την ίδια ακρίβεια, δηλαδή ένα σφάλμα μικρότερο του 10^{-4}*, το* $\sin 1$ *υπολογίζεται ευκολότερα και με ένα βήμα λιγότερο (*$n = 4$*), δηλαδή ελαφρώς γρηγορότερα. Με τη βοήθεια του πίνακα που αναφέραμε πιο πάνω, βρίσκουμε*

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} - \frac{1}{9!} + R \quad \textit{με} \quad |R| = |R_{9,0,\sin}(1)| \leq \frac{1}{8!} \approx 0.000024... < 10^{-4}.$$

(β′) Για την $f(x) = e^x$ *έχουμε*

$$R_{n,0,\exp}(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad x \neq 0, \quad \xi \textit{ γνήσια μεταξύ } 0 \textit{ και } x.$$

Για $x > 0$ *και καθώς οι* $f(x) = e^x$*,* $x \in \mathbb{R}$*, και* $g(a) = a^x = e^{x \log a}$*,* $a > 0$ *(*$x > 0$*), είναι αύξουσες, και όπως γνωρίζουμε (βλ. την (5.37)) ισχύει* $2 < e < 4$*, προκύπτει*

$$R_{n,0,\exp}(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{e^{x}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{4^{x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad x > 0, \tag{5.73}$$

και άρα

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R, \quad 0 < R = R_{n,0,\exp}(1) < \frac{4}{(n+1)!}.$$

Συνεπώς, για $n = 4$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + R = 2 + \frac{17}{24} + R < 2.75 < 3, \quad 0 < R < \frac{4}{5!} = \frac{1}{30} < \frac{1}{10}.$$

[66] Δυστυχώς το $n = 4$ δεν φτάνει: προκύπτει ένα σφάλμα ≈ 0.0003.

Αυτό μας επιτρέπει να βελτιώσουμε την εκτίμηση (5.73) σε

$$R_{n,0,\exp}(x) < \frac{3^x}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad x > 0.$$

Για $n = 7$ μπορούμε να υπολογίσουμε τον e με ακρίβεια τριών πρώτων δεκαδικών

$$\begin{aligned} e &= \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} + R, \quad 0 < R < \frac{3}{8!} = \frac{3}{40320} < \frac{1}{10000}, \\ &= 2 + \frac{362}{504} + R \\ &= 2.718\ldots \end{aligned}$$

Παρατήρηση 5.6.1. *Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Taylor αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι ο e είναι άρρητος.*

Πράγματι, όπως είδαμε

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n, \quad 0 < R_n = R_{n,0,\exp}(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

Αν $e = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ με $a, b \in \mathbb{N}$, πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη ισότητα με $n!$, όπου $n > b, 3$, προκύπτει

$$\begin{aligned} & \frac{n!a}{b} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + n!R_n \\ \Leftrightarrow \quad & an(n-1)\cdots(b+1)(b-1)\cdots 2 = \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\cdots(k+1) + n!R_n. \end{aligned}$$

Αφού οι δύο από τους τρείς όρους της ισότητας είναι φυσικοί αριθμοί θα πρέπει αυτό να ισχύει και για τον τρίτο, δηλαδή θα πρέπει $n!R_n \in \mathbb{N}$. Όμως, καθώς επιλέξαμε $n > 3$, ισχύει

$$0 < n!R_n < \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1$$

και άρα $n!R_n \notin \mathbb{N}$. Άρα, η υπόθεσή μας ότι ο e είναι ρητός οδηγεί σε άτοπο.

5.6.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 20]:

1 - 3, 7

Κεφάλαιο 6

Ακολουθίες, σειρές, δυναμοσειρές

6.1 Ακολουθίες

Ορισμός 6.1. *Μια συνάρτηση* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *ονομάζεται* **ακολουθία πραγματικών αριθμών ή πραγματική ακολουθία.** *και θα τη συμβολίζουμε στο παρόν με* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *ή απλούστερα με* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *ή, μιας και στο παρόν ασχολούμαστε μόνο με πραγματικές ακολουθίες, σκέτα με* (a_n) *και θα την ονομάζουμε και σκέτα* **ακολουθία.**

Οι τιμές $a(n)$ *της συνάρτησης* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *ονομάζονται* **όροι της ακολουθίας** (a_n) *και συμβολίζονται με* a_n.

Ορισμός 6.2. *Μια ακολουθία* $(a_n) \subset \mathbb{R}$

(α′) **συγκλίνει στο** ℓ *ή* **τείνει στο** ℓ *ή* **έχει όριο το** ℓ, *όπου* $\ell \in \mathbb{R}$, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \in \mathbb{N},\ n > N: \quad |a_n - \ell| < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Το $\ell \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται τότε* **όριο της ακολουθίας** *και γράφουμε* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ *ή απλά* $a_n \to \ell$ *ή* $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.[1] *Μια ακολουθία η οποία έχει ένα όριο* $\ell \in \mathbb{R}$, *δηλαδή η οποία συγκλίνει, ονομάζεται* **συγκλίνουσα ακολουθία.**[2]

(β′) **τείνει ή συγκλίνει στο άπειρο** *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \in \mathbb{N},\ n > N: \quad a_n > \frac{1}{\varepsilon} \tag{6.2}$$

και γράφουμε $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *ή απλά* $a_n \to \infty$ *ή* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[1] Ο τελευταίος τρόπος γραφής, καθώς ορίζει ένα μαθηματικό αντικείμενο, το $\lim_{n\to\infty} a_n$, απαιτεί πρώτα την απόδειξη της μοναδικότητας του ορίου μιας ακολουθίας, αν αυτό υπάρχει. Αυτή αποδεικνύεται παρόμοια με τη μοναδικότητα του ορίου μιας συνάρτησης κοντά σε ένα σημείο: Έστω $\ell, m \in \mathbb{R}$ δύο όρια μιας ακολουθίας $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχουν $N_\ell, N_m \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > N_\ell$ ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon/2$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > N_m$ ισχύει $|a_n - m| < \varepsilon/2$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > N := \max\{N_\ell, N_m\}$ ισχύει $|\ell - m| \le |\ell - a_n| + |a_n - m| < \varepsilon$. Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $|\ell - m| < \varepsilon$, από το οποίο προκύπτει $|\ell - m| = 0 \Leftrightarrow \ell = m$. (Το τελευταίο επιχείρημα το έχουμε ξαναδεί: αν $0 \le a < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, όπου το a είναι ανεξάρτητο του ε, τότε $a = 0$, αφού αν ήταν $a > 0$, τότε, επιλέγοντας $\varepsilon = a > 0$ θα προέκυπτε η αντίφαση $a < a$.)

[2] Αν μια ακολουθία δεν συγκλίνει ονομάζεται συχνά **αποκλίνουσα ακολουθία.** Ο όρος όμως θέλει προσοχή γιατί υπάρχουν διάφορων ειδών «αποκλίνουσες» συμπεριφορές. Π.χ., μία ακολουθία που τείνει στο άπειρο είναι υπό αυτήν την έννοια αποκλίνουσα αν και συγκλίνει κάπου, δηλαδή στο άπειρο. Το άπειρο όμως δεν είναι αριθμός. Υπάρχουν όμως και

(γ′) **τείνει ή συγκλίνει στο πλην άπειρο** *αν*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > N: \quad a_n < -\frac{1}{\varepsilon} \tag{6.3}$$

και γράφουμε $a_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$ *ή απλά* $a_n \to -\infty$ *ή* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Παρατήρηση 6.1.1. *Είναι χρήσιμο να συνειδητοποιήσουμε ευθύς εξ αρχής ότι για να καταλάβουμε αν μια ακολουθία συγκλίνει (σε ένα* $\ell \in \mathbb{R}$ *ή στα* ∞ *ή* $-\infty$*) σημασία έχει μόνο η συμπεριφορά της «ουράς» ή του «τέλους» της ακολουθίας, δηλαδή των όρων* a_n *με* $n \geq n_0$ *για οποιοδήποτε σταθερό* $n_0 \in \mathbb{N}$*, οι οποίοι σχηματίζουν την ακολουθία* $(a_n)_{n\geq n_0}$.[3] *Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της σύγκλισης, αφού, εξ ορισμού, μπορούμε πάντα να αγνοήσουμε ένα οσοδήποτε μεγάλο, αλλά πεπερασμένο, πλήθος όρων όταν εξετάζουμε τη σύγκλιση μιας ακολουθίας.*

Ας υποθέσουμε π.χ. ότι για οποιουσδήποτε λόγους δεν μπορούμε ή δεν θέλουμε να εξετάσουμε τους $n_0 \in \mathbb{N}$ *πρώτους όρους μιας ακολουθίας ή δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κάποιο θεώρημα σε αυτούς, ενώ για* $n > n_0$ *η ακολουθία γίνεται πολύ απλή, π.χ. επειδή έχει έναν απλό, εύκολα διαχειρίσιμο τύπο. Τότε, μπορούμε να αγνοήσουμε παντελώς τους* n_0 *πρώτους όρους της ακολουθίας αναζητώντας και επιλέγοντας απλώς ένα* $N \in \mathbb{N}$ *όπως στους παραπάνω ορισμούς της σύγκλισης που να είναι μεγαλύτερο από το* n_0*, δηλαδή* $> n_0$*, αφού τότε οι* n_0 *πρώτοι όροι της ακολουθίας δεν παίζουν κανέναν ρόλο.*

Αυτό είναι ισοδύναμο με το αντί να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλισή της την ακολουθία (a_n) *να εξετάσουμε την* (a_{n+n_0})*, δηλαδή την* (b_n) *με* $b_n = a_{n+n_0}$*, για οποιοδήποτε σταθερό* $n_0 \in \mathbb{N}$*. Αν η μία συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει και η άλλη.*

Πράγματι, αν για κάποιο $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\in \mathbb{N}$ *έτσι ώστε* $|a_n - \ell| < \varepsilon$ *για κάθε* $n > N$*, τότε αυτό θα ισχύει και για κάθε* $n + n_0 > n > N$*, δηλαδή θα έχουμε* $|a_{n+n_0} - \ell| = |b_n - \ell| < \varepsilon$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$*. Αντίστροφα, αν υπάρχει* $\in \mathbb{N}$ *έτσι ώστε* $|b_n - \ell| = |a_{n+n_0} - \ell| < \varepsilon$ *για κάθε* $n >$ *, τότε θα ισχύει* $|a_n - \ell| < \varepsilon$ *για κάθε* $n > N + n_0$.

Παρατήρηση 6.1.2. *(α′) Μια ακολουθία* (a_n) *με* $a_n \to 0$ *ονομάζεται* **μηδενική ακολουθία**.

Παρατηρούμε ότι από τον ορισμό (6.1) προκύπτει άμεσα

$$a_n \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| \to 0.$$

αφού $|a_n - 0| = |a_n| = ||a_n|| = ||a_n| - 0|$.

Ακόμα, από τον ορισμό (6.1) προκύπτει άμεσα

$$|b_n| \leq |a_n| \to 0 \quad \Rightarrow \quad |b_n| \to 0. \tag{6.4}$$

(β′) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία (a_n) *είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει* $C > 0$ *έτσι ώστε* $|a_n| \leq C$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.[4]

[3] Αυτό είναι το ανάλογο της τοπικότητας του ορίου μιας συνάρτησης κοντά σε ένα σημείο.

[4] Βλ. και Ορισμό

Πράγματι, αν $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$*, τότε από τον ορισμό* (6.1) *και την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι για* $\varepsilon = 1$ *υπάρχει* $N \in \mathbb{N}$ *έτσι ώστε*

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ n > N: \quad |a_n| - |\ell| \le ||a_n| - |\ell|| \le |a_n - \ell| < 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| < 1 + |\ell|.$$

Συνεπώς,

$$|a_n| \le \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, 1 + \ell\} =: C \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

(γ΄) *Επίσης παρατηρούμε ότι αν έχουμε δύο ακολουθίες* (a_n) *και* (b_n)*, εκ των οποίων η πρώτη είναι μηδενική και η δεύτερη φραγμένη, δηλαδή αν ισχύει* $a_n \to 0$ *και* $|b_n| \le C$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και κάποια σταθερά* $C > 0$*, τότε και η* $(a_n b_n)$ *είναι μηδενική.*[5]

Πράγματι, αφού η (a_n) *είναι μηδενική, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $N \in \mathbb{N}$ *έτσι ώστε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *με* $n > N$ *ισχύει* $|a_n| < \varepsilon / C$*. Αυτό συνεπάγεται ότι για αυτά τα* $n > N$ *ισχύει* $|a_n b_n| = |a_n||b_n| \le |a_n| C < \varepsilon$ *και συνεπώς η* $(a_n b_n)$ *είναι μηδενική.*

(δ΄) *Από τον ορισμό* (6.1) *προκύπτει άμεσα*

$$a_n \to \ell \quad \Leftrightarrow \quad a_n - \ell \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - \ell| \to 0. \tag{6.5}$$

Αυτό είναι πολύ πρακτικό, καθώς σημαίνει ότι αν υποπτευόμαστε το όριο $\ell \in \mathbb{R}$ *μιας ακολουθίας* (a_n)*, χωρίς να το έχουμε αποδείξει ακόμα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι όντως είναι αυτό, αποδεικνύοντας τη σύγκλιση της ακολουθίας* $(a_n - \ell)$ *στο μηδέν, όπου έχουμε στη διάθεσή μας τις ιδιότητες μηδενικών ακολουθιών που αναφέρθηκαν προηγουμένως.*

(ε΄) *Αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ ισχύει*

$$a_n \to \ell \quad \Rightarrow \quad |a_n| \to |\ell|, \tag{6.6}$$

όπως προκύπτει από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα $||a_n| - |\ell|| \le |a_n - \ell|$*, το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά, αφού π.χ. η* $a_n = (-1)^n$ *δεν συγκλίνει (βλ. το παράδειγμα πιο κάτω) ενώ, τετριμμένα,* $|a_n| = 1 \to 1$.

(στ΄) *Επίσης, από τους ορισμούς* (6.1) *και* (6.2) *προκύπτει*

$$0 < a_n \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a_n} \to \infty,$$

αφού $0 < a_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon}$.

(ζ΄) *Τέλος, ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\infty.$$

Επίσης, ισχύει

$$a_n \to \infty, a_n \le b_n \forall\ n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad b_n \to \infty.$$

[5] Την ιδιότητα αυτή την αποκαλούμε συχνά και «μηδενική επί φραγμένη (είναι μηδενική)».

Παράδειγμα 6.1. *(α′) Αν $a_n = a$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε προφανώς $a_n \to a$, όπως προκύπτει άμεσα απο τον ορισμό (6.1).*

(β′) Η πιο βασική συγκλίνουσα ακολουθία είναι αναμφισβήτητα η $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, η οποία συγκλίνει στο 0, σύμφωνα με τον ορισμό (6.1), αφού για κάθε $\varepsilon > 0$, επιλέγοντας $\in \mathbb{N}$ με $N > \frac{1}{\varepsilon}$, έχουμε

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ n > N > \frac{1}{\varepsilon}: \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

(γ′) Στον αντίποδα, η πιο κλασική αποκλίνουσα ακολουθία είναι η $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.[6] *Αυτή έχει εναλλάξ τους όρους 1 και −1. Συνεπώς, είναι φραγμένη,*[7] *με $|a_n| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα σίγουρα δεν τείνει ούτε στο άπειρο ούτε στο πλην άπειρο, αφού για $\varepsilon \in (0, 1)$ δεν υπάρχουν όροι της με $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$.*

Ανάλογα, δεν συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό $\ell \neq \pm 1 \Leftrightarrow |\ell| \neq 1$, αφού για $\varepsilon \in (0, ||\ell| - 1|)$ έχουμε από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα

$$\forall\ n \in \mathbb{N}: \quad |a_n - \ell| \geq ||a_n| - |\ell|| = |1 - |\ell|| > \varepsilon$$

και άρα για αυτά τα $\varepsilon > 0$ δεν υπάρχει κανένα $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε έστω για ένα $n > N$, πόσο μάλλον για όλα τα $n > N$, να ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Όμως, ούτε τα $\ell = \pm 1$ είναι όρια της $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, αφού, όταν $\varepsilon \in (0, 2)$, για $\ell = 1$ θα υπάρχει για κάθε $N \in \mathbb{N}$ τουλάχιστον ένα $n > N$, π.χ. το $n = 2N + 1$, έτσι ώστε $|a_n - 1| = |-1 - 1| = 2 > \varepsilon$, ενώ, αντίστροφα, και για $\ell = -1$ θα υπάρχει για κάθε $N \in \mathbb{N}$ τουλάχιστον ένα $n > N$, π.χ. το $n = 2N$, έτσι ώστε $|a_n - (-1)| = |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon$.

(δ′) Η $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι το απλούστερο παράδειγμα μιας ακολουθίας που τείνει στο ∞, ενώ η $b_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι το απλούστερο παράδειγμα μιας ακολουθίας που τείνει στο $-\infty$. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$, επιλέγοντας $N \in \mathbb{N}$ με $N > \frac{1}{\varepsilon}$ στους ορισμούς (6.2) και (6.3), αντίστοιχα, έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > N$

$$a_n = n > N > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{και} \quad b_n = -n < -N < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

(ε′) Για τον υπολογισμό ορίων ακολουθιών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η $f(x) = x^a$, $x > 0$, είναι αύξουσα για κάθε $a > 0$ (και φθίνουσα για κάθε $a < 0$), το οποίο προκύπτει από το ότι $f'(x) = ax^{a-1} = ae^{x \log a} > 0$, βλ. Παρατήρηση 5.4.7.

Έτσι,

$$n^{\alpha} \to \infty \quad \text{για} \quad \alpha > 0, \tag{6.7}$$

[6] Η συμπεριφορά της θυμίζει αρκετά αυτήν της $\sin(1/x)$, $x \neq 0$, για $x \to 0$, την οποία είχαμε μελετήσει στο κεφάλαιο περί ορίων συναρτήσεων.

[7] Βλ. τον Ορισμό 6.3

αφού για κάθε $\varepsilon > 0$, *επιλέγοντας* $> \frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha} \Leftrightarrow N^\alpha > \frac{1}{\varepsilon}$ *στον ορισμό* (6.2), *έχουμε* $n > N \Leftrightarrow n^\alpha > N^\alpha > \frac{1}{\varepsilon}$.

Αυτό συνεπάγεται και ότι

$$n^{-\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \to 0 \quad \text{για} \quad \alpha > 0, \tag{6.8}$$

σύμφωνα με την παρατήρηση πιο πάνω.

(στ΄)

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \leq \frac{1}{n}\frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} \leq \frac{1}{n} \to 0$$

(ζ)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}\sin(n^n)}{n+1} = 0,$$

αφού

$$\left|\frac{(-1)^n \sqrt{n}\sin(n^n)}{n+1}\right| \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Για τον υπολογισμό ορίων ακολουθιών είναι προφανώς πολύ χρήσιμες οι ακόλουθες ιδιότητες.

Θεώρημα 6.1. *Αν*

$$a_n \to \ell \in \mathbb{R}, \quad b_n \to m \in \mathbb{R},$$

τότε

$$a_n + b_n \to \ell + m, \qquad a_n b_n \to \ell m$$

και

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\ell}{m}, \quad \text{αν } m \neq 0.$$

Απόδειξη: Οι ιδιότητες αυτές προκύπτουν εύκολα με χρήση των παρατηρήσεων (6.5) και (6.4).

Πράγματι, η πρώτη ιδιότητα προκύπτει άμεσα από αυτές, αφού

$$|a_n + b_n - (\ell + m)| = |a_n - \ell + b_n - m| \leq |a_n - \ell| + |b_n - m| \to 0,$$

όπου το τελευταίο όριο προκύπτει από το ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $N, M \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > N$ ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon/2$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > M$ ισχύει $|b_n - m| < \varepsilon/2$ και συνεπώς για κάθε $n > \max\{N, M\}$ ισχύει $|a_n - \ell| + |b_n - m| < \varepsilon$.

Για τη δεύτερη ιδιότητα χρησιμοποιούμε και ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι και φραγμένη:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \ell m| &= |a_n(b_n - m) + (a_n - \ell)m| \\ &\leq |a_n||b_n - m| + |a_n - \ell||m| \\ &\leq C|b_n - m| + |a_n - \ell||m| \to 0. \end{aligned}$$

καθώς και ότι αν $a_n \to 0$ τότε και $ca_n \to 0$ για κάθε σταθερά $c \in \mathbb{R}$.[8]

Η τελευταία ιδιότητα προκύπτει από την (6.6) και το ότι $|m| > 0$, αφού για $\varepsilon = \frac{|m|}{2} > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > N$ ισχύει

$$||b_n| - |m|| \leq |b_n - m| < \frac{|m|}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{|m|}{2} < |b_n| < 3\frac{|m|}{2}.$$

Μπορούμε τώρα συνεπώς να χρησιμοποιήσουμε και πάλι την (6.4) για $n > N$ για να πάρουμε

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|b_n - m|}{|b_n||m|} < \frac{2}{|m|^2}|b_n - m| \to 0.$$

Μαζί με τη δεύτερη ιδιότητα προκύπτει από αυτό και η τρίτη ιδιότητα. □

Παράδειγμα 6.2. *(α΄) Με χρήση της* (6.8) *και της* (6.4)

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0.$$

(β΄)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 + 7n^2 + 1}{4n^3 - 8n + 63} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + 7\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{4 - 8\frac{1}{n^2} + 63\frac{1}{n^3}} = \frac{3}{4}.$$

Χρήσιμο είναι και το ακόλουθο Κριτήριο Παρεμβολής ή Κριτήριο Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών.

Θεώρημα 6.2.

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad a_n \to \ell, \quad c_n \to \ell \quad \Rightarrow \quad b_n \to \ell.$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με την (6.5) αρκεί να δείξουμε ότι

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad a_n \to 0, \quad c_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad b_n \to 0.$$

Αφού

$$-(|a_n| + |c_n|) \leq -|a_n| \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq |c_n| \leq |c_n| + |a_n|,$$

έχουμε

$$|b_n| \leq |a_n| + |c_n| \to 0$$

και άρα $b_n \to 0$, σύμφωνα με την (6.4). □

[8]Για $c = 0$ δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα, ενώ αν $c \neq 0$ υπάρχει για κάθε $\varepsilon > 0$ ένα $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > N$ ισχύει $|a_n| < \varepsilon/|c|$ και άρα $|ca_n| < \varepsilon$.

Παρατήρηση 6.1.3. *Αν μια* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *έχει όριο* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \in [-\infty, \infty]$, *τότε και η ακολουθία* $a_n = f(cn)$, $n \in \mathbb{N}$, *όπου* $c > 0$ *σταθερό, θα έχει όριο* $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Αυτό προκύπτει άμεσα από τη σύγκριση του Ορισμού 2.6 (α′) για $D = [1, \infty)$ *με τον Ορισμό 6.2, αφού αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta \in (0, 1)$ *έτσι ώστε για κάθε* $x > \frac{1}{\delta}$ *να ισχύει*

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \ (\ell \in \mathbb{R}) \quad \acute{\eta} \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \quad \acute{\eta} \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon},$$

τότε θα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ *με* $N \geq \frac{1}{c\delta}$ *έτσι ώστε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *με* $n > N$ *να ισχύει*

$$|f(cn) - \ell| < \varepsilon \ (\ell \in \mathbb{R}) \quad \acute{\eta} \quad f(cn) > \frac{1}{\varepsilon} \quad \acute{\eta} \quad f(cn) < -\frac{1}{\varepsilon},$$

Παράδειγμα 6.3. *Από την* $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ *προκύπτει*

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \quad \text{για κάθε } a \in (0, 1),$$

αφού για $a \in (0, 1)$ *έχουμε* $a^x = e^{x\log a} = e^{-x|\log a|} = \frac{1}{e^{x|\log a|}}$, *και για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *έτσι ώστε για κάθε* $y > \frac{1}{\delta}$ *ισχύει* $e^y > \frac{1}{\varepsilon}$, *και άρα για κάθε* $x > \frac{1}{\delta|\log a|}$ *ισχύει* $\frac{1}{e^{x|\log a|}} < \varepsilon$.

Συνεπώς, σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad \text{για κάθε } a \in (0, 1).$$

Από αυτό και την ... προκύπτει και ότι $(-1)^n a^n \to 0$ *για* $a \in (0, 1)$ *και συνεπώς, αφού για* $a < 0$ *έχουμε* $a^n = (-|a|)^n = (-1)^n |a|^n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και εξάλλου* $0^n = 0$ *προκύπτει*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad \text{για κάθε } |a| < 1. \tag{6.9}$$

Επίσης, αφού

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log a} = \infty \quad \text{για κάθε } a > 1,$$

η προηγούμενη παρατήρηση μας δίνει

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty \quad \text{για κάθε } a > 1.$$

Προφανώς, για $a = 1$ *έχουμε* $\lim_{n\to\infty} 1^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, *ενώ για* $a \leq -1$ *το όριο* $\lim_{n\to\infty} a^n$ *δεν υπάρχει.*

Πράγματι, για $a = -1$ *αυτό το είδαμε ήδη σε προηγούμενο παράδειγμα, ενώ για* $a < -1$, *το οποίο συνεπάγεται* $|a| > 1$, *έχουμε* $a^{2n} = (|a|^2)^n \to \infty$ *και συνεπώς* $a^{2n+1} = -|a|(|a|^2)^n \to -\infty$. *Αυτό σημαίνει ότι η* (a^n) *δεν συγκλίνει ούτε στο* ∞, *ούτε στο* $-\infty$, *αλλά ούτε και σε κάποιο* $\ell \in \mathbb{R}$. *Όμως,* $|a^n| \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{(-1)^n}{2^n}}{2 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$ *και άρα* $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$.

Σε μεγάλο βαθμό η χρησιμότητα της έννοιας της συγκλίνουσας ακολουθίας προκύπτει από το ότι μέσω αυτής μπορούμε να *ορίσουμε* την έννοια του ορίου συνάρτησης. Αυτός είναι ο λεγόμενος *ακολουθιακός ορισμός του ορίου* σε αντιδιαστολή με τον *ε-δ-ορισμό του ορίου* τον οποίο γνωρίσαμε πρώτο.[9] Το επόμενο θεώρημα θεμελιώνει ότι αυτοί οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

Θεώρημα 6.3. *Έστω* $f : D \to \mathbb{R}$ *με* $D \subset \mathbb{R}$ *και* $a \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* D *και έστω* $\ell \in \mathbb{R}$. *Τότε ισχύει*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ (a_n) \subset D \setminus \{a\},\ a_n \to a : \quad f(a_n) \to \ell.$$

Απόδειξη:

$\Rightarrow$: Έστω $(a_n) \subset D \setminus \{a\}$ με $a_n \to a$.[10] Έστω επίσης $\varepsilon > 0$. Αφού $f(x) \to \ell$ για $x \to a$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in (D \setminus \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$ ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Τότε όμως, αφού $a_n \to a$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > N$ ισχύει $|a_n - a| < \delta$, δηλαδή $a_n \in (a - \delta, a + \delta)$, και άρα $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$.

$\Leftarrow$: Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι δεν ισχύει $f(x) \to \ell$ για $x \to a$. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε για κάθε $\delta > 0$ θα υπάρχει ένα $x \in (D \setminus \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$ με $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$. Ειδικότερα, δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα υπάρχει ένα $a_n \in (D \setminus \{a\}) \cap \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ με $|f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon$. Αυτό όμως σημαίνει ότι υπάρχει $(a_n) \subset D \setminus \{a\}$ με $a_n \to a$,[11] έτσι ώστε $f(a_n) \not\to \ell$,[12] σε αντίφαση με την υπόθεση. □

Παράδειγμα 6.4. *(α′) Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα αν μια* $f : D \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής σε ένα σημείο* $a \in D$ *και* $(a_n) \subset D$ *με* $a_n \to a$, *τότε* $f(a_n) \to f(a)$. *Για παράδειγμα:*

$$e^{1/n} \to 1, \quad \cos(1/n^2) \to 1 \quad \log(\cos(1/n)) \to 0$$

(β′)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \textit{για κάθε } a > 0.$$

Αυτό προκύπτει από τη συνέχεια της e^x *στο* $x = 0$ *και το προηγούμενο θεώρημα, αφού* $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} = e^{\frac{\log a}{n}}$ *και* $\frac{\log a}{n} \to 0$.

(γ′)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{6.10}$$

[9] Μάλιστα ο ακολουθιακός ορισμός είναι συχνά πολύ πιο εύχρηστος, ιδίως όταν θέλουμε να αποδείξουμε ιδιότητες ορίων ή συνέχειας συναρτήσεων, όπως π.χ. ιδιότητες που συνδέονται με το Αξίωμα Πληρότητας. Βλ., π.χ., [1, Πρόβλημα 18-31].

[10] Τέτοιες ακολουθίες υπάρχουν, επειδή το a είναι σημείο συσσώρευσης του D: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a_n \in (D \setminus \{a\}) \cap \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$.

[11] Πράγματι, αφού $a_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow |a_n - a| < \frac{1}{n}$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ με $N > \frac{1}{\varepsilon}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > N$ ισχύει $|a_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

[12] Αφού $|f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon$ δεν υπάρχει για αυτό το $\varepsilon > 0$ ούτε ένα $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$, πόσο μάλλον ένα $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > N$ να ισχύει $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$.

Πράγματι, γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$, *δηλαδή ότι*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x > \frac{1}{\delta} : \quad \frac{e^x}{x} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} < \varepsilon \tag{6.11}$$

δηλαδή, ισοδύναμα, ότι $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Συνεπώς, αφού για $y > e^{\frac{1}{\delta}}$ *ισχύει* $\log y > \frac{1}{\delta}$, *προκύπτει από την* (6.11) *ότι*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta' := \frac{1}{e^{\frac{1}{\delta}}} > 0 \quad \forall\ y > \frac{1}{\delta'} = e^{\frac{1}{\delta}} : \quad \frac{\log y}{y} < \varepsilon,$$

δηλαδή $\lim_{y\to\infty} \frac{\log y}{y} = 0$, *και άρα* $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$, *σύμφωνα με την Παρατήρηση 6.1.3, και συνεπώς από το προηγούμενο θεώρημα και τη συνέχεια της* exp *στο μηδέν προκύπτει η* (6.10).

(δ΄)

$$\lim_{n\to\infty} nc^n = 0 \quad \text{για } |c| < 1.$$

Για $c = 0$ *αυτό είναι προφανές, ενώ για* $|c| \in (0, 1)$ *έχουμε*

$$|nc^n| = n|c|^n = ne^{n\log|c|} = ne^{-n|\log|c||} = \frac{1}{|\log|c||}\frac{n|\log|c||}{e^{n|\log|c||}} \to 0$$

αφού $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ *δηλαδή, ισοδύναμα,* $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Ορισμός 6.3. *Μία ακολουθία* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *ονομάζεται*

(α΄) **άνω φραγμένη** *αν υπάρχει* $M \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $a_n \leq M$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

(β΄) **κάτω φραγμένη** *αν υπάρχει* $m \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $a_n \geq m$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

(γ΄) **φραγμένη** *αν είναι και άνω και κάτω φραγμένη*[13]

(δ΄) **αύξουσα** *αν* $a_{n+1} > a_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

(ε΄) **μη φθίνουσα** *αν* $a_{n+1} \geq a_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

(στ΄) **φθίνουσα** *αν* $a_{n+1} < a_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

(ζ΄) **μη αύξουσα** *αν* $a_{n+1} \leq a_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

Θεώρημα 6.4. *Μία μη φθίνουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στο ελάχιστο άνω φράγμα των όρων της.*

Αντίστοιχα, μία μη αύξουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στο μέγιστο κάτω φράγμα των όρων της.

[13] Ισοδύναμα, αφού $-\max\{|m|, |M|\} \leq -|m| \leq m \leq a_n \leq M \leq |M| \leq \max\{|m|, |M|\}$, μια ακολουθία $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ονομάζεται φραγμένη, αν υπάρχει $C > 0$ έτσι ώστε $|a_n| \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: Αν η (a_n) είναι άνω φραγμένη, το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ των όρων της[14] θα έχει εξ ορισμού ένα ελάχιστο άνω φράγμα $\alpha := \sup A \in \mathbb{R}$. Από τον ορισμό του supremum προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}$ με $a_N \in (\alpha - \varepsilon, \alpha]$ (αφού αλλιώς το α δεν θα ήταν το ελάχιστο άνω φράγμα του A). Τότε όμως, αφού η (a_n) είναι μη φθίνουσα, ισχύει $a_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq N$ και συνεπώς $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου ακολουθίας.

Το δεύτερο αποτέλεσμα αποδεικνύεται ανάλογα. □

Παράδειγμα 6.5. *Έστω η ακολουθία (a_n) που ορίζεται μέσω του αναδρομικού τύπου*

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{4+3a_n}{3+2a_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Παρατηρούμε πρώτα απ' όλα ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό αποδεικνύεται επαγωγικά: έχουμε $a_1 > 0$ και αν $a_n > 0$ τότε προφανώς $a_{n+1} > 0$.

Επίσης επαγωγικά αποδεικνύεται ότι η (a_n) είναι αύξουσα, δηλαδή ότι $\Delta_n := a_{n+1} - a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, $\Delta_1 = a_2 - a_1 = \frac{4+3}{3+2} - 1 = \frac{7}{5} - 1 > 0$ και αν $\Delta_n > 0$ τότε και

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{4+3a_{n+1}}{3+2a_{n+1}} - \frac{4+3a_n}{3+2a_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{(3+2a_{n+1})(3+2a_n)} \\ &= \frac{\Delta_n}{(3+2a_{n+1})(3+2a_n)} > 0.\end{aligned}$$

Επίσης, η (a_n) είναι άνω φραγμένη, αφού[15]

$$a_{n+1} = \frac{4+3a_n}{3+2a_n} = \frac{3(a_n + \frac{4}{3}}{2(a_n + \frac{3}{2}} < \frac{3}{2}.$$

Άρα η (a_n) συγκλίνει, δηλαδή υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$.

Άρα

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+3a_n}{3+2a_n} = \frac{4+3\lim_{n\to\infty} a_n}{3+2\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{4+3\ell}{3+2\ell}$$

και άρα, αφού $\ell \geq 0$, λόγω του ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,[16]

$$3\ell + 2\ell^2 = 4 + 3\ell \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \sqrt{2}.$$

Ορισμός 6.4. *Μία αύξουσα ακολουθία $(k_n) \subset \mathbb{N}$ ονομάζεται* **υπακολουθία δεικτών**.

Αν $(a_n) \subset \mathbb{R}$ είναι μία ακολουθία και (k_n) μία υπακολουθία δεικτών, τότε η $(a_{k_n}) \subset (a_n)$ ονομάζεται **υπακολουθία της** (a_n).

[14] Το A είναι δηλαδή η εικόνα της συνάρτησης $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n) := a_n$.

[15] $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$

[16] Αν $\ell < 0$ θα έπρεπε να υπάρχει για $\varepsilon = -\ell > 0$ ένα $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > N$ να ισχύει $|a_n - \ell| < -\ell \Rightarrow a_n < 0$ το οποίο είνα άτοπο.

Θεώρημα 6.5. (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass)
Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι μία οποιαδήποτε ακολουθία $(a_n) \subset \mathbb{R}$ έχει μία μη φθίνουσα ή μη αύξουσα υπακολουθία.[17] Τότε το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass προκύπτει από το Θεώρημα 6.4.

Έστω λοιπόν $(a_n) \subset \mathbb{R}$ μία οποιαδήποτε ακολουθία. Ονομάζουμε έναν δείκτη $k \in \mathbb{N}$ της ακολουθίας **δείκτη κορυφής της ακολουθίας** (a_n) αν ισχύει $a_k > a_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $m > k$.

Αν η (a_n) έχει άπειρους το πλήθος δείκτες κορυφής, έστω $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$, τότε θα ισχύει $a_{k_1} > a_{k_2} > a_{k_3} > \cdots$ και άρα η υπακολουθία $a_{k_n} \subset (a_n)$ είναι φθίνουσα.

Αν η (a_n) έχει πεπερασμένο το πλήθος δείκτες κορυφής και έστω $k_0 \in \mathbb{N}$ ο μεγαλύτερος από αυτούς. Τότε για $k_1 > k_0$ θα υπάρχει $k_2 > k_1$ με $a_{k_2} \geq a_{k_1}$, αφού αλλιώς θα ίσχυε $a_k < a_{k_1}$ για όλα τα $k > k_1$ και άρα και ο $k_1 > k_0$ θα ήταν δείκτης κορυφής, σε αντίφαση με την υπόθεση. Τότε θα υπάρχει και $k_3 > k_2$ με $a_{k_3} \geq a_{k_2}$ γιατί αλλιώς ο $k_2 > k_1 > k_0$ θα ήταν δείκτης κορυφής, πάλι σε αντίφαση με την υπόθεση. Συνεχίζοντας έτσι επ' άπειρον προκύπτει μία μη φθίνουσα υπακολουθία $(a_{k_n}) \subset (a_n)$. □

Παράδειγμα 6.6. *Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$, αν και, όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, δεν συγκλίνει, περιέχει δύο υπακολουθίες που συγκλίνουν, τις $a_{2n} = 1$ και $a_{2n+1} = -1$.*

Ορισμός 6.5. *Μια ακολουθία $(a_n) \subset \mathbb{R}$ λέγεται* **ακολουθία Cauchy**, *αν*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N \in \mathbb{N} \quad \forall\ n, m \in \mathbb{N},\ n, m > N : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon,$$

συμβολικά, αν

$$\lim_{n,m \to \infty} (a_n - a_m) = 0.$$

Θεώρημα 6.6. (Κριτήριο Cauchy (για ακολουθίες))
Μια ακολουθία $(a_n) \subset \mathbb{R}$ συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη:

$\Rightarrow$: Έστω $(a_n) \subset \mathbb{R}$ μια συγκλίνουσα ακολουθία. Τότε θα υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, n > N : \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνεπώς, από την τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή προκύπτει

$$\forall\ n, m > N : \quad |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon,$$

και άρα η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy, σύμφωνα με τον ορισμό.

[17] Βλ. [1, Κεφάλαιο 22, Λήμμα].

$\Leftarrow$: Κάθε ακολουθία Cauchy $(a_n) \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, αφού για $\varepsilon = 1$, π.χ., υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_n - a_{N+1}| < 1$ και συνεπώς, από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα προκύπτει

$$|a_n| - |a_{N+1}| \leq ||a_n| - |a_{N+1}|| \leq |a_n - a_{N+1}| < 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| < 1 + |a_{N+1}| \quad \forall\, n > N.$$

Άρα

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, 1 + |a_{N+1}|\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass προκύπτει τότε ότι υπάρχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(a_{k_n}) \subset (a_n)$ με $a_{k_n} \to a$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$.

Τότε όμως, αφού η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy, θα ισχύει $a_n \to a$.

Για να το δείξουμε αυτό πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι για κάθε υπακολουθία δεικτών $(k_n) \subset (n)$ ισχύει $k_n \geq n$. Αυτό προκύπτει επαγωγικά: Προφανώς ισχύει $k_1 \geq 1$. Έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $k_n \geq n$. Τότε θα ισχύει $k_{n+1} \geq k_n + 1 \geq n + 1$, όπου η πρώτη ανισότητα ισχύει επειδή μία υπακολουθία δεικτών είναι εξ ορισμού αύξουσα.

Τώρα τα πράγματα είναι εύκολα: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > N$ ισχύει $|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Επίσης υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ με $M \geq N$ έτσι ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m > M$ ισχύει $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ειδικότερα για κάθε $n > M$ ισχύει $|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$, αφού όπως είδαμε $k_n \geq n$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n > M$ έχουμε

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \varepsilon.$$

$\square$

Παρατήρηση 6.1.4. *Η χρησιμότητα της έννοιας της ακολουθίας Cauchy έγκειται στο ότι, σύμφωνα με το Κριτήριο Cauchy, μπορούμε να αποφανθούμε για το αν μία ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει χωρίς να γνωρίζουμε το όριό της ή χωρίς να έχουμε ελέγξει ότι κανένας πραγματικός αριθμός δεν είναι όριο της ακολουθίας σύμφωνα με τον ορισμό, αντίστοιχα.*

6.1.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 22]:

1 (i)-(viii), 2, 3 (α), 4, 10, 11

Επιπλέον άσκηση:
Εξετάστε αν οι ακόλουθες ακολουθίες (a_n) συγκλίνουν και αν ναι, βρείτε το όριό τους:

$$\begin{aligned}
&a_1 = \sqrt{c}, \quad a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c > 0,\\
&a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad n \in \mathbb{N},\\
&a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

6.2 Σειρές

Ορισμός 6.6. *Έστω* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *μια ακολουθία. Η* **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων** *της* (a_n),

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

ονομάζεται **σειρά** *με* **όρους** a_n, $n \in \mathbb{N}$, *και συμβολίζεται με*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := (s_n)$$

Αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (s_n) *συγκλίνει, τότε λέμε οτι* **η σειρά** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει**[18] *και συμβολίζουμε* **το όριο της σειράς** και αυτό *με*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Παρατήρηση 6.2.1. *Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι μια σειρά δεν είναι τίποτα άλλο από μια ακολουθία ειδικής μορφής και συγκεκριμένα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων μιας ακολουθίας. Συνεπώς, ό,τι γνωρίζουμε για ακολουθίες και όρια ακολουθιών ισχύει και για σειρές και όρια σειρών. Φυσικά, ως ειδικού τύπου ακολουθίες, οι σειρές έχουν και κάποιες παραπάνω ιδιότητες σε σχέση με γενικές ακολουθίες.*

Πρόταση 6.1. *Αν οι σειρές* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *συγκλίνουν τότε συγκλίνουν και οι σειρές* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$, $c \in \mathbb{R}$, *και για τα όριά τους ισχύει*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c b_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από το αντίστοιχο αποτέλεσμα για ακολουθίες. □

Πρόταση 6.2. (Κριτήριο Cauchy για σειρές)
Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν*

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} a_k = 0.$$

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από το Κριτήριο Cauchy για ακολουθίες. □

Για σειρές ισχύει η ακόλουθη αναγκαία συνθήκη σύγκλισης.

[18] Σε αυτήν την περίπτωση λέμε και ότι η ακολουθία (a_n) είναι **αθροίσιμη** και ονομάζουμε το όριο $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και **άθροισμα της ακολουθίας** (a_n).

Πρόταση 6.3. *Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*[19]

Απόδειξη:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \to \ell \quad \Rightarrow \quad s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \to \ell \quad \Rightarrow \quad s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \to 0.$$

□

Παράδειγμα 6.7. *Η σημαντικότερη σειρά είναι η* **γεωμετρική σειρά**

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1. \tag{6.12}$$

Πράγματι, για $n \in \mathbb{N}_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} r^k \\ r s_n &= r\sum_{k=0}^{n} r^k = \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} r^k = s_n + r^{n+1} - r^0 \\ (1-r)s_n &= 1 - r^{n+1} \end{aligned}$$

και άρα

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad r \neq 1. \tag{6.13}$$

Αφού $r^n \to 0$ για $n \to \infty$, όταν $|r| < 1$, βλ. (6.9), προκύπτει η (6.12).

Για $|r| \geq 1$ η γεωμετρική σειρά δεν συγκλίνει, καθώς τότε $|r|^n \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $|r|^n \not\to 0$, βλ. Πρόταση (6.3).

Από τη γεωμετρική σειρά για $r = 1/2$ προκύπτει και η ακόλουθη αξισομείωτη ανάλυση σε σειρά της μονάδας, η οποία σε διάφορα επιχειρήματα στα μαθηματικά (να προσεχθεί ότι λείπει ο όρος για $n = 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Υπάρχουν διάφορα *κριτήρια σύγκλισης* που μας επιτρέπουν να ελέγξουμε αν μία σειρά συγκλίνει ή όχι. Στη συνέχεια αναφέρουμε τα βασικότερα. Τα κριτήρια αυτά αναφέρονται σε σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ των οποίων οι όροι (a_n) σχηματίζουν **μη αρνητικές ακολουθίες**, για τις οποίες ισχύει δηλαδή $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.[20]

[19] Με άλλα λόγια, για να είναι μια ακολουθία αθροίσιμη θα πρέπει να είναι μηδενική.

[20] Μιας και τα κριτήρια αυτά αποφαίνονται για το αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει, μπορούν φυσικά να χρησιμοποιηθούν και για σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, των οποίων οι όροι σχηματίζουν **μη θετικές ακολουθίες**, δηλαδή τέτοιες με $b_n \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού τότε η $(-b_n)$ θα είναι μη αρνητική και ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\sum_{n=1}^{\infty}(-b_n)$.

Πρόταση 6.4. *Μια σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, όπου* (a_n) *μη αρνητική, συγκλίνει, συμβολικά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*,*[21] *αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της,* $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$*,* $n \in \mathbb{N}$*, είναι άνω φραγμένη. Τότε* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$*.*

Απόδειξη: Αν η $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει, τότε προφανώς θα είναι (άνω) φραγμένη. Αντίστροφα, αφού για μια μη αρνητική ακολουθία (a_n) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (s_n) είναι μη φθίνουσα, αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη, τότε θα συγκλίνει στο ελάχιστο άνω φράγμα των όρων της, σύμφωνα με το Θεώρημα 6.4. □

Θεώρημα 6.7. (Κριτήριο Σύγκρισης)
Αν $0 \le a_n \le b_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και η* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *και ισχύει*

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Απόδειξη: Από τις υποθέσεις και την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$0 \le s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k = t_n \le \sup_{n\in\mathbb{N}} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς η μη φθίνουσα (s_n) είναι άνω φραγμένη από το όριο $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. Η προηγούμενη πρόταση δίνει τότε τον ισχυρισμό του παρόντος θεωρήματος. □

Παράδειγμα 6.8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n^2} < \infty, \quad \text{αφού} \quad 0 < \frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n^2} < \frac{3}{2^n} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Θεώρημα 6.8. (Κριτήριο Σύγκρισης Ορίων)
Έστω $a_n, b_n > 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$*. Τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

Απόδειξη: Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > N$ να ισχύει

$$\frac{a_n}{b_n} - c \le \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < c \quad \Rightarrow \quad a_n < 2cb_n \quad \forall\, n > N. \tag{6.14}$$

Αν η ακολουθία $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει και η $t_n - \sum_{k=1}^{N} b_k = \sum_{k=N+1}^{n} b_k = \tilde{t}_n$ και συνεπώς και η $2c\tilde{t}_n$. Από την (6.14) και το Κριτήριο Σύγκρισης (Θεώρημα 6.7) προκύπτει ότι τότε θα συγκλίνει και η $\tilde{s}_n = \sum_{k=N+1}^{n} a_k$ και συνεπώς και η $s_n = \tilde{s}_n + \sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Αφού $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{c} > 0$, από τη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ προκύπτει ανάλογα η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. □

[21] Να προσεχθεί ότι ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιείται μόνο όταν η ακολουθία των όρων (a_n) μιας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι μη αρνητική. Για τέτοιες σειρές, όταν αποκλίνουν, γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Παράδειγμα 6.9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1 + \sin^2(n^3)} < \infty$$

αφού

$$\frac{2^n}{2^n - 1 + \sin^2(n^3)} = \frac{1}{1 + \frac{-1+\sin^2(n^3)}{2^n}} \to 1, \quad \textit{αφού} \quad \frac{|-1+\sin^2(n^3)|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \to 0.$$

Θεώρημα 6.9. (Κριτήριο Λόγου)
Έστω $a_n > 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και* $\lim_{n\to\infty} a_n = r \in [0, \infty]$. *Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Απόδειξη: Βλ. [1, Θεώρημα 23-3]. □

Παράδειγμα 6.10. *(α΄)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \infty.$$

Αυτό ισχύει σύμφωνα με το Κριτήριο Λόγου, αφού για $a_n = n!$ *έχουμε*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

(β΄)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} < \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{r^n}{n!} \to 0 \quad \textit{για κάθε } r \geq 0. \tag{6.15}$$

Για $r = 0$ *είναι προφανές ότι η σειρά συγκλίνει στο* 0. *Για* $r > 0$ *η σύγκλιση της σειράς προκύπτει από το Κριτήριο Λόγου, αφού για* $a_n = \frac{r^n}{n!}$ *έχουμε*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{r^{n+1} n!}{r^n (n+1)!} = \frac{r}{n+1} \to 0.$$

Το αποτέλεσμα γενικεύεται για κάθε $r \in \mathbb{R}$, *βλ.* (6.18) *πιο κάτω.*

(γ΄)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n < \infty \quad \Rightarrow \quad n r^n \to 0 \quad \textit{για κάθε } r \in [0, 1). \tag{6.16}$$

Για $r = 0$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Για $r > 0$ προκύπτει από το Κριτήριο Λόγου, αφού για $r \neq 0$

$$\frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n} = r\frac{n+1}{n} \to r.$$

Και σε αυτήν την περίπτωση το αποτέλεσμα γενικεύεται για $|r| < 1$, βλ. (6.19) πιο κάτω.

Για $|r| \geq 1$ η σειρά δεν συγκλίνει και ούτε το όριο υπάρχει, αφού τότε $n|r|^n \geq n \to \infty$ και συνεπώς $nr^n \not\to 0$.

Θεώρημα 6.10. (Κριτήριο Ολοκληρώματος)
Έστω η $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη,[22] θετική και φθίνουσα. Τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f := \lim_{A\to\infty} \int_1^A f < \infty.$$

Απόδειξη: Βλ. [1, Θεώρημα 23-4]. □

Παράδειγμα 6.11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} < \infty, & p > 1, \\ = \infty, & p \leq 1. \end{cases} \tag{6.17}$$

Σημειώνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ονομάζεται ***αρμονική σειρά****.*

Για $p \leq 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ αποκλίνει, αφού για $p = 0$ έχουμε $n^{-p} = n^{-0} = 1 \not\to 0$, ενώ για $p < 0$ έχουμε $n^{-p} \to \infty$, βλ. την (6.7), και άρα επίσης $n^{-p} \not\to 0$. Αφού οι αντίστοιχες ακολουθίες μερικών αθροισμάτων είναι μη φθίνουσες και αποκλίνουν, θα είναι άνω μη φραγμένες και θα ισχύει $\sum_{n=1} \frac{1}{n^p} = \infty$ για $p \leq 0$.[23]

Για $p > 0$ ισχύει $n^{-p} \to 0$ και συνεπώς έχει νόημα να εξετάσουμε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει. Σε αυτήν την περίπτωση, οι $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $x > 0$, είναι συνεχείς και άρα τοπικά ολοκληρώσιμες και είναι θετικές και φθίνουσες, αφού $f'(x) = -p\frac{1}{x^{p+1}} < 0$. Επίσης,

$$\int_1^A \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\frac{1}{A^{p-1}} - \frac{1}{1-p}, & p \neq 1, \\ \log A, & p = 1, \end{cases}$$

[22] Μία $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, ονομάζεται **τοπικά ολοκληρώσιμη στο** $[a, \infty)$, αν είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, A]$ με $A > a$. Τότε, το όριο $\int_a^{\infty} f := \lim_{A\to\infty} \int_a^A f \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα (α' είδους)**. Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε ότι αν μια $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μη φραγμένη, συνηθέστερα υπό την έννοια ότι $\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$, αλλά είναι **τοπικά ολοκληρώσιμη στο (a, b]**, δηλαδή είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a + \varepsilon, b]$ με $\varepsilon \in (0, b - a)$, τότε το όριο $\int_a^b f := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα (β' είδους)**. Εδώ το κλασικό παράδειγμα είναι τα ολοκληρώματα $\int_0^1 \frac{1}{x}^p dx$, $p \in (0, 1)$. (Προσέξτε την (δυσ-)αναλογία με τα γενικευμένα ολοκληρώματα α' είδους στο επόμενο παράδειγμα.) Στο [1] τα γενικευμένα ολοκληρώματα εισάγονται στα Προβλήματα 25-30 του Κεφαλαίου 14. Η θεωρία των γενικευμένων ολοκληρωμάτων α' είδους παρουσιάζει πολλές αναλογίες με τη θεωρία σειρών (κριτήρια σύγκλισης, απόλυτη και υπό συνθήκη σύγκλιση), η οποία εν πολλοίς οφείλεται στο παρόν θεώρημα.

[23] Αυτό ισχύει γενικότερα: Μια μη φθίνουσα ακολουθία (a_n) που δεν είναι άνω φραγμένη τείνει στο άπειρο: Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχει για κάθε $\varepsilon > 0$ ένα $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $a_N > \frac{1}{\varepsilon}$. Αφού η (a_n) είναι μη φθίνουσα, θα ισχύει $a_n \geq a_N > \frac{1}{\varepsilon}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq N$ και συνεπώς η ακολουθία θα τείνει στο άπειρο σύμφωνα με τον ορισμό.

από το οποίο προκύπτει

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} = \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ \infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

Από αυτό προκύπτει η (6.17) *για* $p > 0$, *σύμφωνα με το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας.*

Παράδειγμα 6.12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \infty$$

σύμφωνα με το Κριτήριο Σύγκρισης Ορίων (Θεώρημα 6.8), αφού

$$\frac{n(n+1)}{n^2+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to 1.$$

Ορισμός 6.7. *(α΄) Μια σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ονομάζεται* **απολύτως συγκλίνουσα** *αν συγκλίνει η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.[24]

(β΄) Μια συγκλίνουσα, αλλά όχι απολύτως συγκλίνουσα σειρά ονομάζεται **υπό συνθήκη συγκλίνουσα σειρά.**

Θεώρημα 6.11. *(α΄) Κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά είναι συγκλίνουσα.*

(β΄) Μια σειρά συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν η σειρά των θετικών όρων της και η σειρά των αρνητικών όρων της συγκλίνουν και οι δύο.

Απόδειξη: Βλ. [1, Θεώρημα 23-5]. □

Παράδειγμα 6.13. *(α΄) Προφανώς, κάθε μη αρνητική και κάθε μη θετική συγκλίνουσα σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα.*

(β΄) Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *είναι απολύτως συγκλίνουσα για* $|r| < 1$, *αφού*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |r|^n = \frac{1}{1-|r|}, \quad |r| < 1,$$

και αποκλίνουσα για $|r| \geq 1$.

(γ΄)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r|^n}{n!} < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \text{ συγκλίνει και } \frac{r^n}{n!} \to 0 \quad \text{για κάθε } r \in \mathbb{R}. \tag{6.18}$$

Προκύπτει από την (6.15) *και το Θεώρημα 6.11 (α΄).*

[24] Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ονομάζεται τότε και **απολύτως αθροίσιμη**.

(δ′)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|r|^n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} nr^n \text{ συγκλίνει και } nr^n \to 0 \quad \text{για κάθε } |r| < 1. \tag{6.19}$$

Προκύπτει από την (6.16) και το Θεώρημα 6.11 (α′).

Θεώρημα 6.12. (Κριτήριο Leibniz)
Έστω μία μηδενική, μη αύξουσα, μη αρνητική ακολουθία (a_n), για την οποία ισχύει δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{και} \qquad a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0.$$

Τότε η σειρά $\sum n = 1^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ συγκλίνει.[25]

Απόδειξη: Βλ. [1, Θεώρημα 23-6]. □

Παράδειγμα 6.14. *Στο Παράδειγμα 6.11 είδαμε ότι η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$.*

Όμως, σύμφωνα με το Κριτήριο του Leibniz (Θεώρημα 6.12), η σειρά[26] $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ *συγκλίνει και μάλιστα*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \log 2.$$

ενώ δεν συγκλίνει απολύτως. Συνεπώς είναι μία υπό συνθήκη συγκλίνουσα σειρά.

Παρατήρηση 6.2.2. *Για περισσότερα σχετικά με τη σημασία της απόλυτης σύγκλισης και για τις έννοιες της αναδιάταξης και του πολλαπλασιασμού σειρών, στις οποίες δεν αναφερόμαστε στο παρόν, παραπέμπουμε π.χ. στο [1, Κεφάλαιο 23].*

Παρατήρηση 6.2.3. *Έστω $D \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $f \in C^{\infty}(D)$, δηλαδή η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι* **άπειρες φορές διαφορίσιμη** *που σημαίνει ότι υπάρχουν όλες οι παράγωγοι $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.*

Τότε, όπως είδαμε στην Ενότητα 5.6, βλ. το Θεώρημα 5.19, ισχύει

$$f(x) = P_{n,a,f}(x) + R_{n,a,f}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n + R_{n,a,f}(x) \quad \forall\, x, a \in D \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

όπου $P_{n,a,f}(x)$ το πολυώνυμο Taylor βαθμού $n \in \mathbb{N}_0$ της f στο a και $R_{n,a,f}(x) = f(x) - P_{n,a,f}(x)$ το αντίστοιχο υπόλοιπο Taylor.

Στην Ενότητα 5.6 αναλύσαμε τη συμπεριφορά του υπολοίπου $R_{n,a,f}(x)$ όταν $x \to a$ και δώσαμε, εκτός του ορισμού του, και δύο διαφορετικές μορφές του, την ολοκληρωτική του μορφή και τη μορφή Lagrange.

[25] Τέτοιες σειρές ονομάζονται και **εναλλασσόμενες σειρές**.
[26] Η σειρά αυτή ονομάζεται και **εναλλασσόμενη αρμονική σειρά**

Τώρα που εισαγάγαμε την έννοια της σειράς, μπορούμε να εξετάσουμε και τη συμπεριφορά του υπολοίπου $R_{n,a,f}(x)$ όταν $n \to \infty$, εάν φυσικά η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι άπειρες φορές διαφορίσιμη στο σημείο $a \in D$.

Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,a,f}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} P_{n,a,f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{6.20}$$

Η σειρά στα δεξιά ονομάζεται **σειρά Taylor της f με κέντρο a στο σημείο** x *και τα πολυώνυμα Taylor $P_{n,a,f}(x)$ δεν είναι τίποτα άλλο από τα μερικά αθροίσματα αυτής της σειράς.*

Εάν ισχύει η (6.20) λέμε και ότι **η f αναπτύσσεται στο x σε σειρά Taylor με κέντρο το a** *και η σειρά Taylor της f με κέντρο το a αποκαλείται και* **ανάπτυγμα Taylor της f με κέντρο το a.**

Θα πρέπει να προσεχθεί ότι καταρχάς δεν είναι δεδομένο ότι $R_{n,a,f}(x) \to 0$ για $n \to 0$, τουλάχιστον όχι για όλα τα x. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί η $f : D \to \mathbb{R}$ ενώ ορίζεται σε κάποιο $x \in D$ να μην αναπτύσσεται σε σειρά Taylor στο σημείο αυτό, βλ. το Παράδειγμα 6.15 (δ΄), πιο κάτω. Σε κάθε περίπτωση ισχύει $R_{n,a,f}(a) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.

Για να δούμε αν η $f : D \to \mathbb{R}$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor κέντρου a σε ένα σημείο $x \in D$, δηλαδή αν $\lim_{n\to\infty} R_{n,a,f}(x) = 0$, μπορούμε να εκτιμήσουμε το υπόλοιπο χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική μορφή του ή τη μορφή Lagrange ή χρησιμοποιώντας κάποια εκτίμηση που προκύπτει από τις ιδιότητες της συγκεκριμένης συνάρτησης· για το τελευταίο βλ. και πάλι το Παράδειγμα 6.15 (δ΄).

Εξετάζουμε στη συνέχεια τις βασικότερες C^∞ συναρτήσεις των οποίων τα πολυώνυμα Taylor βρήκαμε στην Ενότητα 5.6, βλ. Παράδειγμα 5.15.

Παράδειγμα 6.15. *(α΄) Για την $f(x) = e^x$ έχουμε (βλ. Παράδειγμα 5.15 (α΄))*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + R_{n,0,\exp}(x) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

όπου η μορφή Lagrange (5.69) του υπολοίπου δίνει

$$R_{n,0,\exp}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad x \neq 0, \quad \xi \text{ γνήσια μεταξύ } 0 \text{ και } x.$$

Συνεπώς

$$|R_{n,0,\exp}(x)| \leq \max\{e^x, 1\}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{για } n \to \infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

όπου το τελευταίο όριο προκύπτει από την (6.18) ή την (6.15).

Συνεπώς η εκθετική συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά Taylor κέντρου 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(β′) *Για την* $f(x) = \sin x$ *έχουμε (βλ. Παράδειγμα* 5.15 (γ′))

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+1,0,\sin}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου η μορφή Lagrange (5.69) *του υπολοίπου δίνει*

$$R_{2n+1,0,\sin}(x) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad x \neq 0, \quad \xi \text{ γνήσια μεταξύ } 0 \text{ και } x.$$

και άρα

$$|R_{2n+1,0,\sin}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0 \quad \text{για } n \to \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Το όριο εδώ προκύπτει πάλι από (6.18) *ή την* (6.15) *και το Κριτήριο Σύγκρισης, αν θεωρήσουμε την ακολουθία* (a_n) *με* $a_{2n} = \frac{|x|^{2n}}{2n!}$ *και* $a_{2n+1} = 0$.
Έτσι, και η συνάρτηση του ημιτόνου αναπτύσσεται σε σειρά Taylor κέντρου 0 *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

(γ′) *Αντίστοιχα αποδεικνύεται*[27] *ότι η συνάρτηση συνημιτόνου αναπτύσσεται σε σειρά Taylor κέντρου* 0 *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

(δ′) *Για τη συνάρτηση* $g(x) = \log(1+x)$, $x > -1$, *βρήκαμε στο Παράδειγμα* 5.15 (β′) *το πολυώνυμο Taylor,*

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k + R_{n,0,\log(1+\cdot)}(x), \quad x > -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Η μορφή Lagrange (5.69) *του υπολοίπου με την* (5.72) *δίνουν*

$$R_{n,0,\log(1+\cdot)}(x) = \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1,0) \cup (0,\infty), \quad \xi \text{ γνήσια μεταξύ } 0 \text{ και } x.$$

Από αυτό προκύπτει

$$|R_{n,0,\log(1+\cdot)}(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{για } n \to \infty \quad \forall\ x \in [0,1],$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι για $x > \xi > 0$ *ισχύει* $(1+\xi)^{n+1} > 1$.

[27] Άσκηση. Βλ. και Παράδειγμα 5.15 (δ′))

Για $-1 < x < \xi < 0$ η εκτίμηση του υπολοίπου δεν φαίνεται να προκύπτει άμεσα από τη μορφή Lagrange, καθώς η εκτίμηση $1+\xi > 1+x = 1-|x| > 0$ συνεπάγεται $\frac{|x|^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} < \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{n+1}}$ το οποίο τείνει στο άπειρο για $n \to \infty$ όταν $|x| > 1-|x| \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{2}$, και μάλιστα πιο γρήγορα από το $n+1$,[28] *ενώ εμείς θα θέλαμε το υπόλοιπο να τείνει στο 0 για $n \to \infty$ για κάθε $x \in (-1,0)$.*

Θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε να εκτιμήσουμε την ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου (5.68), αλλά και αυτή δεν φαίνεται να οδηγεί εύκολα σε μια εκτίμηση, η οποία να τείνει στο 0 για $n \to \infty$.

Αντί να χρησιμοποιήσουμε τις έως τώρα γνωστές μορφές του υπολοίπου θα εξαγάγουμε μία άλλη η οποία ταιριάζει στην $g(x) = \log(1+x)$, $x > -1$.

Ξεκινάμε από τον τύπο (6.13), ο οποίος για $r = -t \neq 1$ δίνει

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}, \quad t \neq -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς, για $x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^x t^k dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt
\end{aligned}$$

και άρα

$$R_{n,0,\log(1+\cdot)}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt, \quad x \in (-1,0) \cup (0,\infty), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.21}$$

Από αυτό προκύπτει η εκτίμηση του υπολοίπου για $x \in (-1,0)$,[29]

$$|R_{n,0,\log(1+\cdot)}(x)| \leq \frac{1}{1-|x|}\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{1-|x|}\frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{για } n \to \infty \quad \forall\, x \in (-1,0).$$

[28] Αυτό προκύπτει από την (5.39) και την Παρατήρηση 6.1.3, αφού για $a > 1$, $x > 0$ έχουμε $\frac{a^x}{x} = \frac{e^{x\log a}}{x} = (\log a)\frac{e^{x\log a}}{x\log a} \to \infty$ για $x \to \infty$.

[29] Για $x \in (-1,0)$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&R_{n,0,\log(1+\cdot)}(x) = (-1)^n \int_0^{-|x|} \frac{t^n}{1+t}dt = (-1)^{2n+1} \int_0^{|x|} \frac{s^n}{1-s}ds \\
\Rightarrow \quad &|R_{n,0,\log(1+\cdot)}(x)| = \int_0^{|x|} \frac{s^n}{1-s}ds \leq \frac{1}{1-|x|}\int_0^{|x|} s^n ds = \frac{1}{1-|x|}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $\log(1+x)$, $x > -1$, *αναπτύσσεται σε σειρά Taylor κέντρου* 0 *για* $x \in (-1, 1]$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n, \quad \forall\ x \in (-1, 1].$$

Για $x > 1$ *η συνάρτηση* $\log(1+x)$, $x > -1$, *δεν αναπτύσσεται σε σειρά Taylor με κέντρο το* 0, *δηλαδή για* $x > 1$ *δεν ισχύει* $R_{n,0,\log(1+\cdot)}(x) \to 0$ *για* $n \to \infty$. *Αυτό δεν προκύπτει από την κατά τα άλλα σωστή εκτίμηση*

$$|R_{n,0,\log(1+\cdot)}(x)| \le \frac{x^{n+1}}{n+1} \to \infty \quad \text{για } n \to \infty \quad \forall\ x > 1,$$

αφού αυτή θα ίσχυε ακόμα και αν $\lim_{n\to\infty} R_{n,0,\log(1+\cdot)}(x) = 0$.

Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε την (6.21) *από την οποία προκύπτει για* $x \ge 1$ *και* $0 \le t \le x \Rightarrow 1 \le 1 + t \le 1 + x \le 2x$

$$|R_{n,0,\log(1+\cdot)}(x)| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \ge \frac{1}{2x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \to \infty \quad \text{για } n \to \infty \quad \forall\ x > 1.$$

Παρατήρηση 6.2.4. *Από τα αναπτύγματα σε σειρές Taylor των παραπάνω συναρτήσεων προκύπτουν και ενδιαφέροντα αναπτύγματα σε σειρές για συγκεκριμένους αριθμούς, π.χ.,*

$$\begin{aligned} e &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} \\ \log 2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Παρατήρηση 6.2.5. *Οι σειρές Taylor με κέντρο το* $a \in \mathbb{R}$ *που γνωρίσαμε μόλις αποτελούν παραδείγματα* **δυναμοσειρών με κέντρο** $a \in \mathbb{R}$, *δηλαδή* **σειρών συναρτήσεων** *της μορφής*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n, \quad f_n(x) := a_n (x - a)^n, \quad x, a, a_n \in \mathbb{R},$$

οι οποίες στο **πεδίο σύγκλισής** *τους, έστω* $D \subset \mathbb{R}$, *δηλαδή στα σημεία* $x \in \mathbb{R}$ *για τα οποία η σειρά (αριθμών)* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *συγκλίνει, ορίζουν μία συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - a)^n, \quad x \in D,$$

η οποία λέμε ότι **αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά στο** D *και η εν λόγω δυναμοσειρά ονομάζεται* **ανάπτυγμα της** f **σε δυναμοσειρά**.

Πρέπει να προσεχθεί ότι παρ' όλο που οι **όροι** f_n **της δυναμοσειράς** *ορίζονται σε όλο το* $\mathbb{R}$ *και τα μερικά αθροίσματα* $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ *μιας δυναμοσειράς είναι πολυώνυμα στο* $\mathbb{R}$, *το πεδίο σύγκλισης* $D \subset \mathbb{R}$ *της δυναμοσειράς ενδέχεται να μην είναι ολόκληρο το* $\mathbb{R}$ *και επίσης ενδέχεται να είναι μικρότερο του πεδίου ορισμού της* f *της οποίας αποτελεί ανάπτυγμα, βλ. π.χ. το Παράδειγμα 6.15 (δ΄) και την προηγούμενη Παρατήρηση 6.2.3,*

Το πεδίο σύγκλίσης $D \subset \mathbb{R}$ *καθορίζεται αποκλειστικά από τους* **συντελεστές** a_n **της δυναμοσειράς** *και είναι ανεξάρτητο του κέντρου της,* a.[30] *Σε ακραίες περιπτώσεις μπορεί το πεδίο σύγκλισης να αποτελείται και μόνο από το κέντρο της δυναμοσειράς.*[31]

Σε κάθε περίπτωση, συναρτήσεις που αναπτύσσονται σε δυναμοσειρά σε κάποιο $D \subset \mathbb{R}$ *έχουν εκεί πολύ καλές ιδιότητες. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο διατυπώνουμε για δυναμοσειρές με κέντρο* $a = 0$ *και το οποίο αναφέρουμε εδώ χωρίς απόδειξη.*[32]

Θεώρημα 6.13. *Έστω ότι η σειρά*

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n, \quad x_0 \neq 0,$$

συγκλίνει. Τότε η δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε $[-a, a] \subset (-|x_0|, |x_0|)$ *για* $a \in (0, |x_0|)$.[33] *Αυτό ισχύει και για την* **κατά όρο παράγωγο της δυναμοσειράς**

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

η οποία είναι το ανάπτυγμα της παραγώγου της f *στο* $(-|x_0|, |x_0|)$

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \quad x \in (-|x_0|, |x_0|).$$

[30] Αυτό δεν φαίνεται ίσως άμεσα, αλλά αποδεικνύεται σχετικά εύκολα. Χωρίς απόδειξη εδώ.

[31] Παράδειγμα αποτελεί η δυναμοσειρά με συντελεστές $a_n = n!$, όπως αποδεικνύεται εύκολα με το Κριτηρίου Λόγου.

[32] Βλ. [1, Θεώρημα 24-6].

[33] Μια σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα σε ένα $D \subset \mathbb{R}$ αν συγκλίνει ομοιόμορφα στο D η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της. Μία **ακολουθία συναρτήσεων** $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, **συγκλίνει ομοιόμορφα στο** D **σε μία** $f : D \to \mathbb{R}$ αν

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > N : \quad \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Για τις ιδιότητες της ομοιομόρφης σύγκλισης ακολουθιών και σειρών πραγματικών συναρτήσεων, οι οποίες απαιτούνται για την απόδειξη του παρόντος θεωρήματος, παραπέμπουμε στο [1, Κεφάλαιο 24].

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι αν μια $f : D \to \mathbb{R}$ αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 στο $D = (-R, R) \subset \mathbb{R}$ για κάποιο $R > 0$, τότε είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της f' ισούται με την κατά όρο παράγωγο της δυναμοσειράς που έχει το ίδιο πεδίο σύγκλισης D με την αρχική. Συνεπώς, αφού η f' αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά, θα είναι και αυτή με τη σειρά της παραγωγίσιμη, κ.ο.κ. Το αποτέλεσμα είναι ότι μια συνάρτηση f που αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά είναι άπειρες φορές διαφορίσιμη στο πεδίο σύγκλισης της δυναμοσειράς και ότι

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x \in D,$$

από το οποίο προκύπτει ότι οι συντελεστές a_n του αναπτύγματος της f σε δυναμοσειρά κέντρου 0 είναι οι συντελεστές $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ της σειράς Taylor της f με κέντρο το 0.[34] *Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται από τα Παραδείγματα 6.15.*

Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι η δυναμοσειρά (σειρά Taylor) με κέντρο το 0 στην οποία αναπτύσσεται η συνάρτηση $\log(1 + x)$, $x > -1$, για $x \in (-1, 1]$ δεν μπορεί να συγκλίνει για $x_0 > 1$ γιατί τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 6.13, θα συνέκλινε στο $(-x_0, x_0) \supset [-1, 1]$ και άρα η συνάρτηση f που ορίζεται ως το κατά σημείο όριο της δυναμοσειράς θα ήταν παραγωγίσιμη και άρα συνεχής στο $(-x_0, x_0)$ και άρα φραγμένη στο $(-1, 1]$. Όμως η συνάρτηση f είναι στο $(-1, 1]$ η συνάρτηση $\log(1 + \cdot)$ και αυτή δεν είναι φραγμένη στο $x = -1$. Αυτό σημαίνει ότι το γεγονός ότι η $\log(1 + \cdot)$ δεν αναπτύσσεται σε σειρά Taylor με κέντρο το 0 σε σημεία $x > 1$ οφείλεται στο ότι η εν λόγω δυναμοσειρά δεν συγκλίνει καν σε τέτοια σημεία,[35] *και αυτό παρ' όλο που η συνάρτηση $\log(1 + \cdot)$ είναι καλά ορισμένη στο $(-1, \infty)$.*[36]

6.2.1 Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις από το [1, Κεφάλαιο 23]:
1, 4, 16

6.3 Δυναμοσειρές

Κατά το ΧΕ 2024/2025 δεν αναφερθήκαμε αναλυτικά στην έννοια και στις ιδιότητες των δυναμοσειρών ως ειδικής μορφής σειρών συναρτήσεων.[37] Ενημερωτικά και για λόγους πληρότητας αναφέρουμε τα βασικότερα στοιχεία στην Παρατήρηση 6.2.5.

[34] Για μια πιο λεπτομερή ανάλυση των παραπάνω και για τις ιδιότητες των δυναμοσειρών παραπέμπουμε στο [1, Κεφάλαιο 24], ιδίως στο τμήμα του μετά την απόδειξη του Θεωρήματος 6 εκεί.

[35] Αυτό θα μπορούσε βέβαια να αποδειχθεί και πιο άμεσα: Αν η εν λόγω δυναμοσειρά συνέκλινε σε σημεία $x_0 > 1$ τότε θα συνέκλινε και σε όλα τα σημεία $x \in (-x_0, x_0)$, σύμφωνα με το Θεώρημα 6.13, και άρα και στο σημείο $x = -1$, όπου όμως είναι η αρμονική σειρά με αρνητικό πρόσημο, η οποία είδαμε ότι δεν συγκλίνει. (Βλέπουμε εδώ ότι καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα επιχειρηματολογώντας από τη μία μέσω της συμπεριφοράς του ορίου f της δυναμοσειράς για $x \to -1^+$ και από την άλλη εξετάζοντας τη σύγκλιση της σειράς για $x_0 = -1$. Αυτό έχει να κάνει με το ότι στον ορισμό των δυναμοσειρών εμπλέκονται τόσο το x όσο και το n.)

[36] Για περισσότερα για δυναμοσειρές, εκτός από αυτά που αναφέρονται στο [1, Κεφάλαιο 24] για πραγματικές δυναμοσειρές, παραπέμπουμε και στο [1, Κεφάλαιο 27] που αναφέρεται σε μιγαδικές δυναμοσειρές.

[37] Βλ. [1, Κεφάλαιο 24].

Βιβλιογραφία

[1] Michael Spivak, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (μετάφραση της 4ης αγγλικής έκδοσης). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015.

[2] Σωτήρης Κ. Ντούγιας, *Απειροστικός Λογισμός I* (γ' έκδοση). Leader Books, 2007.

[3] Σωτήρης Κ. Ντούγιας, *Απειροστικός Λογισμός II* (β' έκδοση). Leader Books, 2007.