## 1. Προτεινομενες ασκησεις απο το Κεφαλαιο 1, Spivak

Στις ακόλουθες ασκήσεις, η ιδέα είναι να τις λύσετε χρησιμοποιώντας *μόνο* τις ιδιότητες Ι1 - Ι12 των (πραγματικών) αριθμών και όσες προέκυψαν από αυτές (όπως π.χ. οι ιδιότητες Ι'10-Ι'13 της διάταξης, βλ. και Πρόβλημα 8, Κεφάλαιο 1, Spivak), καθώς και τους ορισμούς που εισήχθησαν (ιδιαίτερα της απόλυτης τιμής).

Σε κάθε περίπτωση, θα ήταν καλό να τις λύσετε, έστω και χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε γνώση έχετε από το σχολείο, χωρίς να γνωρίζετε από ποιες ιδιότητες προκύπτουν οι υπολογισμοί που κάνετε.

Μερικές από τις ασκήσεις αυτές έχουν συζητηθεί στο μάθημα.

**Άσκηση 1.1** (Πρόβλημα 1, Κεφάλαιο 1, Spivak)**.** Αποδείξτε τα εξής:

(i) Αν $ax = a$ για κάποιον αριθμό $a \neq 0$, τότε $x = 1$.
(ii) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.
(iii) Αν $x^2 = y^2$, τότε $x = y$ ή $x = -y$.
(iv) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$.
(v) $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})$.
(vi) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$. (Υπάρχει ένας πολύ εύκολος τρόπος για να το κάνετε αυτό, χρησιμοποιώντας το (iv), και θα σας δείξει πώς να παραγοντοποιήσετε το $x^n + y^n$ όταν ο $n$ είναι περιττός.)

**Άσκηση 1.2** (Πρόβλημα 3, Κεφάλαιο 1, Spivak)**.** Αποδείξτε τα εξής:

(i) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, αν $b, c \neq 0$.
(ii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, αν $b, d \neq 0$.
(iii) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, αν $a, b \neq 0$. (Για να το κάνετε αυτό, πρέπει να θυμηθείτε την ιδιότητα που ορίζει τον $(ab)^{-1}$.)
(iv) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{db}$, αν $b, d \neq 0$.
(v) $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, αν $b, c, d \neq 0$.
(vi) Αν $b, d \neq 0$, τότε $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ αν και μόνο αν $ad = bc$. Εξετάστε επίσης πότε $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$.

**Άσκηση 1.3** (Πρόβλημα 4, Κεφάλαιο 1, Spivak)**.** Βρείτε όλους τους αριθμούς $x$ για τους οποίους

(i) $4 - x < 3 - 2x$.
(ii) $5 - x^2 < 8$.
(iii) $5 - x^2 < -2$.
(iv) $(x-1)(x-3) > 0$. (Πότε είναι θετικό το γινόμενο δύο αριθμών;)
(v) $x^2 - 2x + 2 > 0$.
(vi) $x^2 + x + 1 > 2$.
(vii) $x^2 - x + 10 > 16$.
(viii) $x^2 + x + 1 > 0$.
(ix) $(x-\pi)(x+5)(x-3) > 0$.
(x) $(x - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt{2}) > 0$.
(xi) $2^x < 8$.
(xii) $x + 3^x < 4$.
(xiii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$.
(xiv) $\frac{x-1}{x+1} > 0$.

**Άσκηση 1.4** (Πρόβλημα 5, Κεφάλαιο 1, Spivak)**.** Αποδείξτε τα εξής:

(i) Αν $a < b$ και $c < d$, τότε $a + c < b + d$.
(ii) Αν $a < b$, τότε $-b < -a$.
(iii) Αν $a < b$ και $c > d$, τότε $a - c < b - d$.
(iv) Αν $a < b$ και $c > 0$, τότε $ac < bc$.
(v) Αν $a < b$ και $c < 0$, τότε $ac > bc$.
(vi) Αν $a > 1$, τότε $a^2 > a$.
(vii) Αν $0 < a < 1$, τότε $a^2 < a$.
(viii) Αν $0 \leq a < b$ και $0 \leq c < d$, τότε $ac < bd$.
(ix) Αν $0 \leq a < b$, τότε $a^2 < b^2$. (Χρησιμοποιήστε την (viii).)
(x) Αν $a, b \geq 0$ και $a^2 < b^2$, τότε $a < b$. (Χρησιμοποιήστε την (ix), αντιστρόφως.)

**Άσκηση 1.5** (Πρόβλημα 6, Κεφάλαιο 1, Spivak). (α) Αποδείξτε ότι αν $0 \leq x < y$, τότε $x^n < y^n$, $n = 1, 2, 3, ...$
(β) Αποδείξτε ότι αν $x < y$ και ο $n$ είναι περιττός, τότε $x^n < y^n$.
(γ) Αποδείξτε ότι αν $x^n = y^n$ και ο $n$ είναι περιττός, τότε $x = y$.
(δ) Αποδείξτε ότι αν $x^n = y^n$ και ο $n$ είναι άρτιος, τότε $x = y$ ή $x = -y$.

**Άσκηση 1.6** (Πρόβλημα 7, Κεφάλαιο 1, Spivak). Αποδείξτε ότι, αν $0 < a < b$, τότε

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ ισχύει για κάθε $a, b \geq 0$. Μια γενίκευση αυτού του γεγονότος εμφανίζεται στο Πρόβλημα 2-22.

**Άσκηση 1.7** (Πρόβλημα 11, Κεφάλαιο 1, Spivak). Βρείτε όλους τους αριθμούς $x$ για τους οποίους

(i) $|x - 3| = 8$.
(ii) $|x - 3| < 8$.
(iii) $|x + 4| < 2$.
(iv) $|x - 1| + |x - 2| > 1$.
(v) $|x - 1| + |x + 1| < 2$.
(vi) $|x - 1| + |x + 1| < 1$.
(vii) $|x - 1| \cdot |x + 1| = 0$.
(viii) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$.

**Άσκηση 1.8** (Πρόβλημα 12, Κεφάλαιο 1, Spivak). Αποδείξτε τα εξής:

(i) $|xy| = |x| \cdot |y|$.
(ii) $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$, αν $x \neq 0$. (Ο καλύτερος τρόπος για να το κάνετε αυτό είναι να θυμηθείτε τι είναι το $|x|^{-1}$.)
(iii) $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$, αν $y \neq 0$.
(iv) $|x - y| \leq |x| + |y|$. (Δώστε μια πολύ σύντομη απόδειξη.)
(v) $|x| - |y| \leq |x - y|$. (Μπορείτε να κάνετε μια πολύ σύντομη απόδειξη, αν γράψετε τα πράγματα με τον σωστό τρόπο.)
(vi) $|(|x| - |y|)| \leq |x - y|$. (Γιατί αυτό είναι άμεση συνέπεια του (v);)
(vii) $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$. Υποδείξτε πότε ισχύει ισότητα, και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

**Άσκηση 1.9** (Πρόβλημα 13, Κεφάλαιο 1, Spivak). Ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς $x$ και $y$ συμβολίζεται με $\max(x, y)$. Έτσι, $\max(-1, 3) = \max(3, 3) = 3$ και $\max(-1, -4) = \max(-4, -1) = -1$. Ο μικρότερος από τους $x$ και $y$ συμβολίζεται με

$\min(x, y)$. Αποδείξτε ότι

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |y - x|}{2},$$

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |y - x|}{2}.$$

Εξαγάγετε έναν τύπο για το $\max(x, y, z)$ και το $\min(x, y, z)$, χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, την

$$\max(x, y, z) = \max(x, \max(y, z)).$$

**Άσκηση 1.10** (Πρόβλημα 14, Κεφάλαιο 1, Spivak). (α) Αποδείξτε ότι $|a| = |-a|$. (Το θέμα είναι να μην μπερδευτείτε με πάρα πολλές περιπτώσεις. Πρώτα αποδείξτε τον ισχυρισμό για $a \geq 0$. Γιατί τότε είναι προφανής για $a \leq 0$;)

(β) Αποδείξτε ότι $-b \leq a \leq b$ αν και μόνο αν $|a| \leq b$. Ειδικότερα, έπεται ότι $-|a| \leq a \leq |a|$.

(γ) Χρησιμοποιήστε αυτό το γεγονός για να δώσετε μια νέα απόδειξη της $|a+b| \leq |a| + |b|$.

**Άσκηση 1.11** (Πρόβλημα 20, Κεφάλαιο 1, Spivak). Αποδείξτε ότι, αν

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

τότε

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon,$$

$$|(x - y) - (x_0 - y_0)| < \varepsilon.$$