1. Προτεινομενες Ασκησεις απο το Κεφαλαιο 2, Spivak

Οι ακόλουθες ασκήσεις έχουν ως σκοπό την εξάσκησή σας στην εφαρμογή της μεθόδου απόδειξης ενός ισχυρισμού της μορφής «η πρόταση (ιδιότητα) $P(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$». Η μέθοδος αυτή ονομάζεται **(μαθηματική) επαγωγή** (και όταν τη χρησιμοποιούμε λέμε ότι η ισχύς της $P(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αποδεικνύεται **επαγωγικά**) και είναι **πολύ σημαντική**.

Πολλές από τις πιο κάτω ασκήσεις παρουσιάστηκαν στο μάθημα.

Άσκηση 1.1 (Πρόβλημα 1, Κεφάλαιο 2, Spivak)**.** Αποδείξτε με επαγωγή τους εξής τύπους:

(i) $1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
(ii) $1^3 + \ldots + n^3 = (1 + \cdots + n)^2$.

Άσκηση 1.2 (Πρόβλημα 2, Κεφάλαιο 2, Spivak)**.** Βρείτε έναν τύπο για το

(i)

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1).$$

(ii)

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2.$$

Υπόδειξη: Ποια σχέση έχουν αυτές οι παραστάσεις με το $1 + 2 + 3 + \cdots + 2n$ και με το $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n)^2$;

Άσκηση 1.3 (Πρόβλημα 3, Κεφάλαιο 2, Spivak)**.** Αν $0 \leq k \leq n$, ο «διωνυμικός συντελεστής» $\binom{n}{k}$ ορίζεται από την

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \quad \text{αν } k \neq 0, n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ (μια ειδική περίπτωση του πρώτου τύπου αν ορίσουμε } 0! = 1\text{)},$$

και για $k < 0$ ή $k > n$ ορίζουμε τον διωνυμικό συντελεστή να είναι 0.

(α) Αποδείξτε ότι

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

(Η απόδειξη δεν απαιτεί επιχείρημα επαγωγής.)
Αυτή η σχέση οδηγεί στο ακόλουθο σχήμα, γνωστό ως «τρίγωνο του Pascal» – ένας αριθμός που δεν βρίσκεται πάνω σε μια από τις πλευρές είναι το άθροισμα των δύο αριθμών από πάνω του· ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k}$ είναι ο $(k+1)$-οστός αριθμός στην $(n+1)$-οστή σειρά.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \dots & & & & &
\end{array}
$$

(δ) Αποδείξτε το ≪διωνυμικό θεώρημα≫: Αν a και b είναι τυχαίοι αριθμοί και n είναι ένας φυσικός αριθμός, τότε

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}b^j.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 1.4 (Πρόβλημα 5, Κεφάλαιο 2, Spivak)**.** (α) Αποδείξτε με επαγωγή στο n ότι

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$

αν $r \neq 1$ (αν $r = 1$, ο υπολογισμός του αθροίσματος προφανώς δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα).

(β) Αποδείξτε αυτό το αποτέλεσμα θέτοντας $S = 1 + r + \cdots + r^n$, πολλαπλασιάζοντας αυτήν την εξίσωση με r, και λύνοντας τις δύο εξισώσεις ως προς S.

Άσκηση 1.5 (Πρόβλημα 19, Κεφάλαιο 2, Spivak)**.** Αποδείξτε την ανισότητα Bernoulli: Αν $h > -1$, τότε

$$(1+h)^n \geq 1 + nh,$$

για κάθε φυσικό αριθμό n. Γιατί αυτό είναι τετριμμένο αν $h > 0$;

Άσκηση 1.6 (Πρόβλημα 22, Κεφάλαιο 2, Spivak)**.** Το αποτέλεσμα του Προβλήματος 1-7 έχει μια σημαντική γενίκευση: Αν

$$a_1, \dots, a_n \geq 0$$

τότε ο ≪αριθμητικός μέσος≫

$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

και ο ≪γεωμετρικός μέσος≫

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

ικανοποιούν την

$$G_n \leq A_n.$$

(α) Έστω ότι $a_1 < A_n$. Τότε κάποια a_i ικανοποιούν την $a_i > A_n$· για ευκολία ας θεωρήσουμε ότι $a_2 > A_n$. Έστω $\bar{a}_1 = A_n$ και $\bar{a}_2 = a_1 + a_2 - \bar{a}_1$. Αποδείξτε ότι

$$\bar{a}_1\bar{a}_2 \geq a_1 a_2.$$

Γιατί αν επαναλάβουμε αυτήν τη διαδικασία αρκετές φορές τελικά αποδεικνύουμε ότι $G_n \leq A_n$; (Να μια περίπτωση, όπου είναι καλή άσκηση το να δώσετε μια τυπική απόδειξη με επαγωγή, καθώς και ένα άτυπο επιχείρημα.) Πότε ισχύει η ισότητα στη σχέση $G_n \leq A_n$;

Η αιτιολόγηση στην προηγούμενη απόδειξη συνδέεται στενά με μια άλλη ενδιαφέρουσα απόδειξη.

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $G_n \leq A_n$ για $n = 2$, αποδείξτε, με επαγωγή στο k, ότι $G_n \leq A_n$ για $n = 2^k$.

(γ) Για τυχαίο n, έστω $2^m > n$. Εφαρμόστε το (β) μέρος στους 2^m αριθμούς

$$a_1, \ldots, a_n, \underbrace{A_n, \ldots, A_n}_{2^m - n \text{ φορές}}$$

για να αποδείξετε ότι $G_n \leq A_n$.