3. Προτεινομενες Ασκησεις απο το Κεφαλαιο 3, Spivak

Οι ακόλουθες ασκήσεις έχουν σκοπό να εξοικειωθείτε με την έννοια της συνάρτησης, του πεδίου ορισμού της, κ.λ.π. Συνιστώνται ιδιαίτερα οι Ασκήσεις 3.1, 3.3 και 3.4. Οι Ασκήσεις 3.5 και 3.6 μοιάζουν ίσως πιο περίπλοκες, είναι όμως πολύ χρήσιμες για μια εξοικείωση με τα $\max(a, b)$, $\min(a, b)$ και $|a|$για $a, b \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 3.1 (Πρόβλημα 1, Κεφάλαιο 3, Spivak)**.** Θέτουμε $f(x) = 1/(1+x)$. Βρείτε τα:

(i) $f(f(x))$ (Για ποια x έχει έννοια αυτό;).
(ii) $f(\frac{1}{x})$.
(iii) $f(cx)$.
(iv) $f(x + y)$.
(v) $f(x) + f(y)$.
(vi) Για ποιους αριθμούς c υπάρχει ένας αριθμός x τέτοιος ώστε $f(cx) = f(x)$; Υπόδειξη: Υπάρχουν πολύ περισσότεροι από όσους θα φαντάζεστε με την πρώτη ματιά.
(vii) Για ποιους αριθμούς c αληθεύει ότι $f(cx) = f(x)$ για δύο διαφορετικούς αριθμούς x;

Άσκηση 3.2 (Πρόβλημα 2, Κεφάλαιο 3, Spivak)**.** Θέτουμε $g(x) = x^2$, και

$$h(x)) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 1, & \text{αν } x \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

(i) Για ποια y είναι $h(y) \leq y$;
(ii) Για ποια y είναι $h(y) \leq g(y)$;
(iii) Ποιο είναι το $g(h(z)) - h(z)$;
(iv) Για ποια w είναι $g(w) \leq w$;
(v) Για ποια ε είναι $g(g(\varepsilon)) = g(\varepsilon)$;

Άσκηση 3.3 (Πρόβλημα 3, Κεφάλαιο 3, Spivak)**.** Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που ορίζονται με τους εξής τύπους:

(i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
(ii) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.
(iii) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.
(iv) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$.
(v) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2}$.

Άσκηση 3.4 (Πρόβλημα 12, Κεφάλαιο 3, Spivak)**.** Μια συνάρτηση f λέγεται **άρτια** αν $f(x) = f(-x)$, και **περιττή** αν $f(x) = -f(-x)$. Για παράδειγμα, η f είναι άρτια αν $f(x) = x^2$ ή $f(x) = |x|$ ή $f(x) = \cos x$, ενώ η f είναι περιττή αν $f(x) = x$ ή $f(x) = \sin x$.

(α) Εξετάστε αν η $f + g$ είναι άρτια, περιττή, ή τίποτα από τα δύο αναγκαστικά, στις τέσσερις περιπτώσεις που παίρνουμε αν διαλέξουμε την f άρτια ή περιττή, και τη g άρτια ή περιττή. (Μπορείτε για ευκολία να εκθέσετε τις απαντήσεις σας σε έναν 2×2 πίνακα.)

(β) Κάντε το ίδιο για την $f \cdot g$.

(γ) Κάντε το ίδιο για την $f \circ g$.

(δ) Αποδείξτε ότι κάθε άρτια συνάρτηση f γράφεται $f(x) = g(|x|)$, για άπειρες το πλήθος συναρτήσεις g.

Άσκηση 3.5 (Πρόβλημα 14, Κεφάλαιο 3, Spivak)**.** Αν f είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, ορίζουμε μια καινούργια συνάρτηση $|f|$ με $|f|(x) = |f(x)|$. Αν f και g είναι συναρτήσεις, ορίζουμε δυο καινούργιες συναρτήσεις, $\max(f, g)$ και $\min(f, g)$, με

$$\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)),$$
$$\min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x)).$$

Βρείτε μια έκφραση των $\max(f, g)$ και $\min(f, g)$ με τη βοήθεια της $|\ |$.

Άσκηση 3.6 (Πρόβλημα 15, Κεφάλαιο 3, Spivak)**.** (α) Δείξτε ότι $f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$. Αυτός ο ειδικός τρόπος γραφής της f είναι εξαιρετικά χρήσιμος· οι συναρτήσεις $\max(f, 0)$ και $\min(f, 0)$ λέγονται το **θετικό** και το **αρνητικό μέρος** της f.

(β) Μια συνάρτηση f λέγεται **μη αρνητική** αν $f(x) \geq 0$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση f γράφεται $f = g - h$, όπου η g και η h είναι μη αρνητικές, με άπειρους τρόπους. (Ο «συνηθισμένος τρόπος» είναι $g = \max(f, 0)$ και $h = -\min(f, 0)$.) Υπόδειξη: Κάθε αριθμός σίγουρα γράφεται ως διαφορά δύο μη αρνητικών αριθμών με άπειρους τρόπους.