4. Προτεινομενεσ Ασκησεισ απο το Κεφαλαιο 4, Spivak

Οι ακόλουθες ασκήσεις έχουν ως σκοπό να μάθουμε κατά το δυνατό να ≪βλέπουμε≫ διάφορα σύνολα στον $\mathbb{R}$, διάφορα σύνολα σημείων στο επίπεδο και ιδιαίτερα διάφορες συναρτήσεις $f : D \to \mathbb{R}$, ούτως ώστε να μπορούμε να τις χειριστούμε καλύτερα. (Πολλές φορές η ιδέα για το πως να αποδείξουμε κάτι για μία συνάρτηση ή για το πως συμπεριφέρεται προκύπτει από ένα σχήμα.)

Συνιστώνται ιδιαίτερα οι Ασκήσεις 4.1, 4.2, 4.5, 4.6, 4.7, καθώς και η Άσκηση 4.8, η οποία θα μας χρειαστεί σε επόμενες ασκήσεις.

Άσκηση 4.1 (Πρόβλημα 1, Κεφάλαιο 4, Spivak)**.** Δείξτε σε μια ευθεία το σύνολο όλων των x που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες. Επίσης ονομάστε κάθε σύνολο, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό για τα διαστήματα (σε μερικές περιπτώσεις θα χρειαστείτε και το σύμβολο $\cup$).

(i) $|x-3| < 1$.
(ii) $|x-3| \leq 1$.
(iii) $|x-\alpha| < \varepsilon$.
(iv) $|x^2-1| < \frac{1}{2}$.
(v) $\frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{5}$.
(vi) $\frac{1}{1+x^2} \leq \alpha$ (δώστε μια απάντηση συναρτήσει του α, διακρίνοντας διάφορες περιπτώσεις).
(vii) $x^2+1 \geq 2$.
(viii) $(x+1)(x-1)(x-2) > 0$.

Άσκηση 4.2 (Πρόβλημα 2, Κεφάλαιο 4, Spivak)**.** Υπάρχει ένας πολύ χρήσιμος τρόπος περιγραφής των σημείων του κλειστού διαστήματος $[a,b]$ (όπου υποθέτουμε, ως συνήθως, ότι $a < b$).

(α) Θεωρήστε πρώτα το διάστημα $[0,b]$, για $b > 0$. Αποδείξτε ότι αν το x είναι στο $[0,b]$, τότε $x = tb$ για κάποιο t με $0 \leq t \leq 1$. Ποια η σημασία του αριθμού t; Ποιο είναι το μεσαίο σημείο του $[0,b]$;
(β) Τώρα αποδείξτε ότι αν το x είναι στο $[a,b]$, τότε $x = (1-t)a + tb$ για κάποιο t με $0 \leq t \leq 1$. Υπόδειξη: Η έκφραση αυτή γράφεται επίσης με τη μορφή $a + t(b-a)$. Ποιο είναι το μέσον του $[a,b]$; Ποιο είναι το σημείο που βρίσκεται στο $1/3$ της απόστασης του a από το b;
(γ) Αποδείξτε, αντιστρόφως, ότι αν $0 \leq t \leq 1$, τότε το $(1-t)a + tb$ είναι στο $[a,b]$.
(δ) Τα σημεία του ανοικτού διαστήματος (a,b) είναι αυτά της μορφής $(1-t)a+tb$ για $0 < t < 1$.

Άσκηση 4.3 (Πρόβλημα 3, Κεφάλαιο 4, Spivak)**.** Σχεδιάστε το σύνολο όλων των σημείων (x,y) που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες. (Στις περισσότερες περιπτώσεις το σχήμα σας θα είναι ένα αρκετά μεγάλο κομμάτι του επιπέδου, όχι μόνο μια ευθεία ή καμπύλη.)

(i) $x > y$.
(ii) $x + a > y + b$.
(iii) $y < x^2$.

(iv) $y \leq x^2$.
(v) $|x-y| < 1$.
(vi) $|x+y| < 1$.
(vii) Ο $x+y$ είναι ακέραιος.
(viii) Ο $\frac{1}{x+y}$ είναι ακέραιος.
(ix) $(x-1)^2 + (y-2)^2 < 1$.
(x) $x^2 < y < x^4$.

Άσκηση 4.4 (Πρόβλημα 4, Κεφάλαιο 4, Spivak)**.** Σχεδιάστε το σύνολο όλων των σημείων (x, y) που ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

(i) $|x| + |y| = 1$.
(ii) $|x| - |y| = 1$.
(iii) $|x-1| = |y-1|$.
(iv) $|1-x| = |y-1|$.
(v) $x^2 + y^2 = 0$.
(vi) $xy = 0$.
(vii) $x^2 - 2x + y^2 = 4$.
(viii) $x^2 = y^2$.

Άσκηση 4.5 (Πρόβλημα 11, Κεφάλαιο 4, Spivak)**.** Περιγράψτε τη γενική εικόνα της γραφικής παράστασης της f αν

(i) η f είναι άρτια.
(ii) η f είναι περιττή.
(iii) η f είναι μη αρνητική.
(iv) $f(x) = f(x+\alpha)$ για κάθε x. (Μια συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα λέγεται **περιοδική** με **περίοδο** α.)

Άσκηση 4.6 (Πρόβλημα 13, Κεφάλαιο 4, Spivak)**.** (α) Σχεδιάστε την $f(x) = |x|$ και την $f(x) = x^2$.

(β) Σχεδιάστε την $f(x) = |\sin x|$ και την $f(x) = \sin^2 x$. (Υπάρχει μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις, που δεν μπορούμε για την ώρα να την περιγράψουμε αυστηρά. Δείτε αν μπορείτε να την ανακαλύψετε· το μέρος (α) δίνεται ως ένδειξη.)

Άσκηση 4.7 (Πρόβλημα 14, Κεφάλαιο 4, Spivak)**.** Περιγράψτε τη γραφική παράσταση της g με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f αν

(i) $g(x) = f(x) + c$.
(ii) $g(x) = f(x+c)$. (Είναι εύκολο να κάνετε λάθος εδώ.)
(iii) $g(x) = cf(x)$. (Διακρίνεται τις περιπτώσεις $c = 0$, $c > 0$, $c < 0$.)
(iv) $g(x) = f(cx)$. (Διακρίνεται τις περιπτώσεις $c = 0$, $c > 0$, $c < 0$.)
(v) $g(x) = f(1/x)$.
(vi) $g(x) = f(|x|)$.
(vii) $g(x) = |f(x)|$.
(viii) $g(x) = \max(f, 0)$.

(ix) $g(x) = \min(f, 0)$.
(x) $g(x) = \max(f, 1)$.

Άσκηση 4.8 (Πρόβλημα 17, Κεφάλαιο 4, Spivak)**.** Το σύμβολο $[x]$ παριστάνει τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι $\leq x$. Έτσι $[2,1] = [2] = 2$, και $[-0,9] = [-1] = -1$. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων. (Είναι όλες πολύ ενδιαφέρουσες, και αρκετές από αυτές θα εμφανίζονται συχνά σε άλλα προβλήματα.)

(i) $f(x) = [x]$.
(ii) $f(x) = x - [x]$.
(iii) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$.
(iv) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$.
(v) $f(x) = [\frac{1}{x}]$.
(vi) $f(x) = \frac{1}{[\frac{1}{x}]}$.