5. Προτεινομενες Ασκησεις απο το Κεφαλαιο 5, Spivak

Άσκηση 5.1 (Πρόβλημα 1, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Βρείτε τα εξής όρια. ('Ολα αυτά τα όρια έπονται, μετά από κάποιους αλγεβρικούς χειρισμούς, από τα διάφορα μέρη του Θεωρήματος 2· βεβαιωθείτε ότι ξέρετε ποια χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση, μη μπείτε όμως στον κόπο να τα αναφέρετε.)

(i) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.
(ii) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.
(iii) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.
(iv) $\lim_{x\to y}\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$.
(v) $\lim_{y\to x}\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$.
(vi) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{\alpha+h}-\sqrt{\alpha}}{h}$.

Άσκηση 5.2 (Πρόβλημα 2, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Βρείτε τα εξής όρια.

(i) $\lim_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$.
(ii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.
(iii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

Άσκηση 5.3 (Πρόβλημα 4, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Για καθεμιά από τις συναρτήσεις στο Πρόβλημα 4-17, εξετάστε για ποιους αριθμούς α υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\alpha} f(x)$.

Άσκηση 5.4 (Πρόβλημα 8, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.**
(α) Αν το $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ και το $\lim_{x\to\alpha} g(x)$ δεν υπάρχουν, είναι δυνατόν να υπάρχει το $\lim_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]$ ή το $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x)$;
(β) Αν το $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ υπάρχει και το $\lim_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]$ υπάρχει, πρέπει να υπάρχει και το $\lim_{x\to\alpha} g(x)$;
(γ) Αν το $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ υπάρχει και το $\lim_{x\to\alpha} g(x)$ δεν υπάρχει, μπορεί να υπάρχει το $\lim_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]$;
(β) Αν το $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ υπάρχει και το $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x)$ υπάρχει, έπεται ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\alpha} g(x)$;

Άσκηση 5.5 (Πρόβλημα 9, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{h\to 0} f(\alpha+h)$. (Αυτή είναι μια άσκηση που ελέγχει κυρίως αν έχετε καταλάβει καλά την ορολογία.)

Άσκηση 5.6 (Πρόβλημα 10, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** (α) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\alpha}[f(x) - l] = 0$. (Δείτε πρώτα γιατί αυτός ο ισχυρισμός είναι προφανής· δώστε μετά μια αυστηρή απόδειξη. Σε αυτό το κεφάλαιο, τα πιο πολλά προβλήματα που ζητούν αποδείξεις πρέπει να τα χειριστείτε με αυτόν τον τρόπο.)

(β) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x - \alpha)$.

Άσκηση 5.7 (Πρόβλημα 11, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Έστω ότι υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) = g(x)$ όταν $0 < |x - \alpha| < \delta$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x)$. Με άλλα λόγια, το $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές του $f(x)$ για x κοντά στο α – συχνά εκφράζουμε αυτό το γεγονός λέγοντας ότι τα όρια είναι «τοπική ιδιότητα». (Θα σας βοηθήσει οπωσδήποτε να χρησιμοποιήσετε το δ', ή κάποιο άλλο γράμμα, αντί για το δ, στον ορισμό των ορίων.)

Άσκηση 5.8 (Πρόβλημα 12, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** (α) Έστω ότι $f(x) \le g(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) \le \lim_{x\to\alpha} g(x)$, αρκεί βέβαια να υπάρχουν αυτά τα όρια.

(β) Πώς μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ασθενέστερη;

(γ) Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε x, έπεται αναγκαστικά ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) < \lim_{x\to\alpha} g(x)$;

Άσκηση 5.9 (Πρόβλημα 13, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Έστω ότι $f(x) \le g(x) \le h(x)$ και ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x)$. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\alpha} g(x)$ υπάρχει, και ότι $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x)$. (Κάντε ένα σχήμα!)

Άσκηση 5.10 (Πρόβλημα 15, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Υπολογίστε τα εξής όρια συναρτήσει του αριθμού $\alpha = \lim_{x\to 0}(\sin x)/x$.

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

(iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x}$.

(iv) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$.

(v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

(vi) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x + 2x}{x + x^2}$.

(vii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$.

(viii) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$.

(ix) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\big(x^2-1\big)}{x-1}$.

(x) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(3+\sin x)}{(x+\sin x)^2}$.

(xi) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)^3\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3$.

Άσκηση 5.11 (Πρόβλημα 16, Κεφάλαιο 5, Spivak). (α) Αποδείξτε ότι, αν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha} |f|(x) = |l|$.

Άσκηση 5.12 (Πρόβλημα 17, Κεφάλαιο 5, Spivak). (α) Αποδείξτε ότι το $\lim\limits_{x\to 0} 1/x$ δεν υπάρχει, δηλαδή, δείξτε ότι για κάθε αριθμό l δεν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} 1/x = l$.

(β) Αποδείξτε ότι το $\lim\limits_{x\to 1} 1/(x-1)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 5.13 (Πρόβλημα 18, Κεφάλαιο 5, Spivak). Αποδείξτε ότι, αν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$, τότε υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ και ένας αριθμός M τέτοιος ώστε $|f(x)| < M$ αν $0 < |x-\alpha| < \delta$. (Τι σημαίνει αυτό σε ένα σχήμα;) Υπόδειξη: Γιατί είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $l-1 < f(x) < l+1$ για $0 < |x-\alpha| < \delta$;

Άσκηση 5.14 (Πρόβλημα 21, Κεφάλαιο 5, Spivak). (α) Αποδείξτε ότι, αν $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x)\sin 1/x = 0$.

(β) Γενικεύστε το παραπάνω ως εξής: Αν $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ και $|h(x)| \leq M$ για κάθε x, τότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x)h(x) = 0$. (Φυσικά δεν υπάρχει λόγος να κάνετε το μέρος (α) αν κατορθώσετε να κάνετε το μέρος (β)· στην πραγματικότητα η διατύπωση του μέρους (β) μπορεί να το κάνει ευκολότερο από το (α) – αυτή είναι μια από τις αρετές της γενίκευσης.

Άσκηση 5.15 (Πρόβλημα 27, Κεφάλαιο 5, Spivak). Για καθεμιά από τις συναρτήσεις στο Πρόβλημα 4-17 βρείτε για ποιους αριθμούς a υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Άσκηση 5.16 (Πρόβλημα 29, Κεφάλαιο 5, Spivak). Αποδείξτε ότι το $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ υπάρχει αν $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Άσκηση 5.17 (Πρόβλημα 32, Κεφάλαιο 5, Spivak). Αποδείξτε ότι το

$$\lim_{x\to\infty} (a_n x^n + \cdots + a_0)/(b_m x^m + \cdots + b_0)$$

(με $a_n \neq 0$ και $b_m \neq 0$) υπάρχει αν και μόνο αν $m \geq n$. Ποιο είναι το όριο αν $m = n$; Αν $m > n$; Υπόδειξη: Ένα εύκολο όριο είναι το $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x^k = 0$· κάντε λίγες αλγεβρικές πράξεις ώστε αυτή να είναι η μόνη πληροφορία που χρειάζεστε.

Άσκηση 5.18 (Πρόβλημα 33, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Βρείτε τα εξής όρια.

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin^3 x}{5x+6}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2+5}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-x$.

(iv) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1+\sin^2 x)}{(x+\sin x)^2}$.

Άσκηση 5.19 (Πρόβλημα 34, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Άσκηση 5.20 (Πρόβλημα 35, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Βρείτε τα εξής όρια συναρτήσει του αριθμού $\alpha = \lim\limits_{x\to 0}(\sin x)/x$.

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

Άσκηση 5.21 (Πρόβλημα 36, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** (α) Ορίστε το «$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$».

(β) Βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}(a_n x^n + \cdots + a_0)/(b_m x^m + \cdots + b_0)$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(-x)$.

(δ) Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(1/x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Άσκηση 5.22 (Πρόβλημα 37, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Ορίζουμε το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ να σημαίνει ότι για κάθε N υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x, αν $0 < |x-\alpha| < \delta$, τότε $f(x) > N$. (Ζωγραφίστε ένα σχήμα που να ταιριάζει!) (Φυσικά, παρ'όλα αυτά μπορούμε να πούμε ότι το «$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$» δεν υπάρχει κατά τη σύνηθη έννοια.)

Άσκηση 5.23 (Πρόβλημα 38, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** (α) Ορίστε το $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = \infty$ και $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) = \infty$. (Ή τουλάχιστον πεισθείτε ότι θα μπορούσατε να γράψετε τους ορισμούς αν δεν βαριόσασταν. Πόσα άλλα τέτοια σύμβολα μπορείτε να ορίσετε;)

(β) Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} 1/x = \infty$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to\infty} f(1/x) = \infty$.

Άσκηση 5.24 (Πρόβλημα 39, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Βρείτε τα εξής όρια, όταν υπάρχουν.

(i) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 4x - 7}{7x^2 - x + 1}$.

(ii) $\lim_{x \to \infty} x(1 + \sin^2 x)$.

(iii) $\lim_{x \to \infty} x \sin^2 x$.

(iv) $\lim_{x \to \infty} x^2 \sin \dfrac{1}{x}$.