5. Προτεινομενες Ασκησεις απο το Κεφαλαιο 5, Spivak

Οι επόμενες ασκήσεις είναι οι πρώτες που αφορούν τα όρια. Στόχος είναι να χρησιμοποιήσετε τις γνώσεις σας σχετικά (βλ. Σημειώσεις) και να βρείτε τα όρια βάσει του ορισμού του ορίου και των θεωρημάτων που έχουμε για αυτά. Με άλλα λόγια, στόχος είναι να γνωρίζουμε πως βρίσκουμε ένα όριο *αιτιολογημένα*.

Κάποιες από τις θεωρητικές ασκήσεις βρίσκονται ως προτάσεις στις σημειώσεις.

Άσκηση 5.1 (Πρόβλημα 1, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Βρείτε τα εξής όρια. ('Ολα αυτά τα όρια έπονται, μετά από κάποιους αλγεβρικούς χειρισμούς, από τα διάφορα μέρη του Θεωρήματος 2· βεβαιωθείτε ότι ξέρετε ποια χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση, μη μπείτε όμως στον κόπο να τα αναφέρετε.)

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$.

(v) $\lim\limits_{y\to x}\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$.

(vi) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{\alpha+h}-\sqrt{\alpha}}{h}$.

Άσκηση 5.2 (Πρόβλημα 2, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Βρείτε τα εξής όρια.

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

Άσκηση 5.3 (Πρόβλημα 4, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Για καθεμιά από τις συναρτήσεις στο Πρόβλημα 4-17, εξετάστε για ποιους αριθμούς α υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$.

Άσκηση 5.4 (Πρόβλημα 8, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** (α) Αν το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ και το $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ δεν υπάρχουν, είναι δυνατόν να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]$ ή το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x)$;

(β) Αν το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]$ υπάρχει, πρέπει να υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$;

(γ) Αν το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ δεν υπάρχει, μπορεί να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]$;

(δ) Αν το $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ υπάρχει και το $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x)$ υπάρχει, έπεται ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\alpha} g(x)$;

Άσκηση 5.5 (Πρόβλημα 9, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{h\to 0} f(\alpha+h)$. (Αυτή είναι μια άσκηση που ελέγχει κυρίως αν έχετε καταλάβει καλά την ορολογία.)

Άσκηση 5.6 (Πρόβλημα 10, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** (α) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\alpha}[f(x)-l] = 0$. (Δείτε πρώτα γιατί αυτός ο ισχυρισμός είναι προφανής· δώστε μετά μια αυστηρή απόδειξη. Σε αυτό το κεφάλαιο, τα πιο πολλά προβλήματα που ζητούν αποδείξεις πρέπει να τα χειριστείτε με αυτόν τον τρόπο.)

(β) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x-\alpha)$.

Άσκηση 5.7 (Πρόβλημα 11, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Έστω ότι υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) = g(x)$ όταν $0 < |x-\alpha| < \delta$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x)$. Με άλλα λόγια, το $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές του $f(x)$ για x κοντά στο α – συχνά εκφράζουμε αυτό το γεγονός λέγοντας ότι τα όρια είναι «τοπική ιδιότητα». (Θα σας βοηθήσει οπωσδήποτε να χρησιμοποιήσετε το δ', ή κάποιο άλλο γράμμα, αντί για το δ, στον ορισμό των ορίων.)

Άσκηση 5.8 (Πρόβλημα 12, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** (α) Έστω ότι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) \leq \lim_{x\to\alpha} g(x)$, αρκεί βέβαια να υπάρχουν αυτά τα όρια.

(β) Πώς μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ασθενέστερη;

(γ) Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε x, έπεται αναγκαστικά ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) < \lim_{x\to\alpha} g(x)$;

Άσκηση 5.9 (Πρόβλημα 13, Κεφάλαιο 5, Spivak)**.** Έστω ότι $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ και ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x)$. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\alpha} g(x)$ υπάρχει, και ότι $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x)$. (Κάντε ένα σχήμα!)