6. Προτεινομενες Ασκησεις απο το Κεφαλαιο 6, Spivak

Άσκηση 6.1 (Πρόβλημα 1, Κεφάλαιο 6, Spivak)**.** Για ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις f υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση F με πεδίο ορισμού το R τέτοια ώστε $F(x) = f(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f;

(i) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.
(ii) $f(x) = \frac{|x|}{x}$.
(iii) $f(x) = 0$, x άρρητος.
(iv) $f(x) = 1/q$, $x = p/q$ ρητός όπου p/q ανάγωγο.

Άσκηση 6.2 (Πρόβλημα 2, Κεφάλαιο 6, Spivak)**.** Σε ποια σημεία είναι συνεχείς οι συναρτήσεις των Προβλημάτων 4-17;

Άσκηση 6.3 (Πρόβλημα 3, Κεφάλαιο 6, Spivak)**.** (α) Έστω ότι f είναι συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε x. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0. (Παρατηρήστε ότι το $f(0)$ πρέπει να είναι ίσο με 0.)

(γ) Έστω ότι η g είναι συνεχής στο 0 και $g(0) = 0$, και $|f(x)| \leq |g(x)|$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Άσκηση 6.4 (Πρόβλημα 7, Κεφάλαιο 6, Spivak)**.** Έστω ότι η f ικανοποιεί την $f(x + y) = f(x) + f(y)$, και ότι η f είναι συνεχής στο 0. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο a για κάθε a.

Άσκηση 6.5 (Πρόβλημα 8, Κεφάλαιο 6, Spivak)**.** Έστω ότι η f είναι συνεχής στο a και $f(a) = 0$. Αποδείξτε ότι αν $\lambda \neq 0$, τότε η $f + \lambda$ είναι μη μηδενική σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το a.

Άσκηση 6.6 (Πρόβλημα 9, Κεφάλαιο 6, Spivak)**.** (α) Έστω ότι η f ορίζεται στο a αλλά δεν είναι συνεχής στο a. Αποδείξτε ότι για κάποιον αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχουν αριθμοί x οσοδήποτε κοντά στο a με $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Εξηγήστε με ένα σχήμα.

(β) Συμπεράνετε ότι για κάποιον αριθμό $\varepsilon > 0$, είτε υπάρχουν αριθμοί x οσοδήποτε κοντά στο a με $f(x) < f(a) - \varepsilon$ είτε υπάρχουν αριθμοί x οσοδήποτε κοντά στο a με $f(x) > f(a) + \varepsilon$.

Άσκηση 6.7 (Πρόβλημα 10, Κεφάλαιο 6, Spivak)**.** (α) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στο a, τότε το ίδιο ισχύει και για την $|f|$.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση f συνεχής στο R γράφετε $f = E + O$, όπου η E είναι άρτια και συνεχής κα η O είναι περιττή και συνεχής.

(γ) Αποδείξτε ότι, αν η f και η g είναι συνεχείς, τότε είναι συνεχείς και οι $\max(f, g)$ και $\min(f, g)$.

(δ) Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής f γράφεται $f = g - h$, όπου η g και η h είναι μη αρνητικές και συνεχείς.

Άσκηση 6.8 (Πρόβλημα 13, Κεφάλαιο 6, Spivak). (α) Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει μια συνάρτηση g συνεχής στο R, τέτοια ώστε $g(x) = f(x)$ για κάθε x στο $[a,b]$. Υπόδειξη: Αφού είναι φανερό ότι έχετε πλήθος επιλογών, προσπαθήστε να κάνετε τη g σταθερή στο $(-\infty, a]$ και $[b, \infty)$.

(β) Δώστε ένα παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτός ο ισχυρισμός δεν είναι σωστός αν αντικαταστήσουμε το $[a,b]$ με (a,b).

Άσκηση 6.9 (Πρόβλημα 14, Κεφάλαιο 6, Spivak). (α) Έστω ότι η g και η h είναι συνεχείς στο a, και ότι $g(a) = h(a)$. Ορίζουμε το $f(x)$ να είναι $g(x)$ αν $x \geq a$ και $h(x)$ αν $x \leq a$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο a.

(β) Έστω ότι η g είναι συνεχής στο $[a,b]$ και η h συνεχής στο $[b,c]$ και $g(b) = h(b)$. Θέτουμε $f(x)$ να είναι $g(x)$ για x στο $[a,b]$ και $h(x)$ για x στο $[b,c]$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $[a,c]$. (Έτσι, δύο συνεχείς συναρτήσεις μπορούν να «συγκολληθούν».)

Άσκηση 6.10 (Πρόβλημα 15, Κεφάλαιο 6, Spivak). Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο a, τότε για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε όποτε $|x-a| < \delta$ και $|y-a| < \delta$, να έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Άσκηση 6.11 (Πρόβλημα 17, Κεφάλαιο 6, Spivak). Αν το $\lim_{x\to a} f(x)$ υπάρχει, αλλά είναι $\neq f(a)$, τότε λέμε ότι η f έχει «αιρόμενη ασυνέχεια» στο a.

(α) Αν $f(x) = \sin 1/x$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 1$, έχει η f αιρόμενη ασυνέχεια στο 0; Το ίδιο ερώτημα αν $f(x) = x \sin 1/x$ για $x \neq 0$, και $f(0) = 1$.

(β) Έστω ότι η f έχει αιρόμενη ασυνέχεια στο a. Θέτουμε $g(x) = f(x)$ για $x \neq a$, και $g(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. Αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής στο a. (Μην κουραστείτε πολύ· αυτό είναι μάλλον εύκολο.)

(γ) Θέτουμε $f(x) = 0$ αν ο x είναι άρρητος, και $f(p/q) = 1/q$ αν το p/q είναι ανάγωγο. Ποιά είναι η συνάρτηση g που ορίζεται από την $g(x) = \lim_{y\to x} f(y)$;