7. Προτεινομενες Ασκησεις απο το Κεφαλαιο 7, Spivak

Άσκηση 7.1 (Πρόβλημα 1, Κεφάλαιο 7, Spivak)**.** Για καθεμιά από τις συναρτήσεις που ακολουθούν, ελέγξτε ποιες είναι άνω ή κάτω φραγμένες στο διάστημα που σας υποδεικνύουμε, και ποιες παίρνουν τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή τους. (Παρατηρήστε ότι μια f θα μπορούσε να έχει αυτές τις ιδιότητες ακόμα και αν δεν είναι συνεχής, και ακόμα και αν το διάστημα δεν είναι κλειστό.)

(i) $f(x) = x^2$ στο $(-1, 1)$.
(ii) $f(x) = x^3$ στο $(-1, 1)$.
(iii) $f(x) = x^2$ στο R.
(iv) $f(x) = x^2$ στο $[0, \infty)$.
(v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ a+2, & x > a \end{cases}$ στο $(-a-1, a+1)$. (Υποθέτουμε ότι $a > -1$, έτσι ώστε $-a-1 < a+1\cdot$ θα χρειαστεί να διακρίνετε διάφορες περιπτώσεις για το a.)
(vi) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$ στο $[-a-1, a+1]$. (Υποθέστε και πάλι ότι $a > -1$.)
(vii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ άρρητος} \\ 1/q, & x = p/q \text{ και } p/q \text{ ανάγωγο} \end{cases}$ στο $[0, 1]$.
(viii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ άρρητος} \\ 1/q, & x = p/q \text{ και } p/q \text{ ανάγωγο} \end{cases}$ στο $[0, 1]$.
(ix) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ άρρητος} \\ -1/q, & x = p/q \text{ και } p/q \text{ ανάγωγο} \end{cases}$ στο $[0, 1]$.
(x) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$ στο $[0, a]$.
(xi) $f(x) = \sin^2(\cos x + \sqrt{a + a^2})$ στο $[0, a^3]$.
(xii) $f(x) = [x]$ στο $[0, a]$.

Άσκηση 7.2 (Πρόβλημα 8, Κεφάλαιο 7, Spivak)**.** Έστω ότι η f και η g είναι συνεχείς, ότι $f^2 = g^2$, και ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι, είτε $f(x) = g(x)$ για κάθε x, ή αλλιώς $f(x) = -g(x)$ για κάθε x.

Άσκηση 7.3 (Πρόβλημα 10, Κεφάλαιο 7, Spivak)**.** Έστω ότι η f και η g είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και ότι $f(a) < g(a)$, αλλά $f(b) > g(b)$. Αποδείξτε ότι $f(x) = g(x)$ για κάποιο x στο $[a, b]$. (Αν η απόδειξή σας δεν είναι πολύ σύντομη, τότε δεν είναι αυτή που θα έπρεπε.)

Άσκηση 7.4 (Πρόβλημα 11, Κεφάλαιο 7, Spivak)**.** Έστω ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1]$ και ότι το $f(x)$ ανήκει στο $[0, 1]$ για κάθε x (κάντε ένα σχήμα). Αποδείξτε ότι $f(x) = x$ για κάποιον αριθμό x.