8. Προτεινομενες Ασκησεις απο το Κεφαλαιο 8, Spivak

Άσκηση 8.1 (Πρόβλημα 1, Κεφάλαιο 8, Spivak)**.** Βρείτε το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα (αν υπάρχουν) των ακόλουθων συνόλων. Εξετάστε ακόμα ποια σύνολα έχουν μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο (δηλαδή εξετάστε αν το ελάχιστο άνω φράγμα ή το μέγιστο κάτω φράγμα συμβαίνει να ανήκει στο σύνολο).

(i) $\{\frac{1}{n} : n$ στο $\mathrm{N}\}$.
(ii) $\{\frac{1}{n} : n$ στο Z και $n \neq 0\}$.
(iii) $\{x : x = 0$ ή $x = 1/n$ για κάποιο n στο $\mathrm{N}\}$.
(iv) $\{x : 0 \leq x \leq \sqrt{2}$ και ο x είναι ρητός$\}$.
(v) $\{x : x^2 + x + 1 \geq 0\}$.
(vi) $\{x : x^2 + x - 1 < 0\}$.
(vii) $\{x : x < 0$ και $x^2 + x - 1 < 0\}$.
(viii) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n : n$ στο $\mathrm{N}\}$.

Άσκηση 8.2 (Πρόβλημα 2, Κεφάλαιο 8, Spivak)**.**

(α) Έστω ότι το $A \neq \emptyset$ είναι κάτω φραγμένο. Ας συμβολίσουμε με $-A$ το σύνολο όλων των $-x$ για x στο A. Αποδείξτε ότι $-A \neq \emptyset$, ότι το $-A$ είναι άνω φραγμένο, και ότι το $-\sup(-A)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A.
(β) Αν το $A \neq \emptyset$ είναι κάτω φραγμένο, έστω B το σύνολο όλων των κάτω φραγμάτων του A. Δείξτε ότι $B \neq \emptyset$, ότι το B είναι άνω φραγμένο, και ότι το $\sup B$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A.

Άσκηση 8.3 (Πρόβλημα 12, Κεφάλαιο 8, Spivak)**.** Έστω ότι A και B είναι δύο μη κενά σύνολα αριθμών τέτοια ώστε $x \leq y$ για κάθε x στο A και κάθε y στο B.

(α) Αποδείξτε ότι $\sup A \leq y$ για κάθε y στο B.
(β) Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$.

Άσκηση 8.4 (Πρόβλημα 13, Κεφάλαιο 8, Spivak)**.** Έστω A και B δύο μη κενά σύνολα αριθμών που είναι άνω φραγμένα, και ας συμβολίσουμε με $A + B$ το σύνολο όλων των αριθμών $x + y$ με x στο A και y στο B. Αποδείξτε ότι $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Υπόδειξη: Η ανισότητα $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$ είναι εύκολη. Γιατί; Για να αποδείξουμε ότι $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B) + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0\cdot$ ξεκινήστε διαλέγοντας x στο A και y στο B με $\sup A - x < \varepsilon/2$ και $\sup B - y < \varepsilon/2$.