

**Εξεταστέα ύλη για το μάθημα Απειροστικός Λογισμός Ι**  
**Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**  
**Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης**

**Από το βιβλίο του Spivak (δείτε τις σημειώσεις σας από το μάθημα):**

Κεφάλαιο 1:

Γνώση των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών (I1-I12) (δείτε σελίδες 8,9), γνώση του ορισμού και των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής, ιδίως της τριγωνικής ανισότητας  $|a - b| \leq |a| + |b| \forall a, b \in \mathbb{R}$  και της αντίστροφης τριγωνικής ανισότητας  $||a| - |b|| \leq |a - b| \forall a, b \in \mathbb{R}$

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 1, Προβλήματα 7, 11, 13, 20

Κεφάλαιο 2:

Γνώση της μεθόδου απόδειξης με μαθηματική επαγωγή.

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 2, Προβλήματα 1, 2, 3 (α), (δ), 5, 19

Κεφάλαια 3 και 4:

Γνώση των εννοιών των συναρτήσεων: πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών, σύνολο τιμών (ή εικόνα), γράφημα (ή γραφική παράσταση) συνάρτησης· άθροισμα, διαφορά, γινόμενο, πηλίκο, σύνθεση συναρτήσεων· σταθερή, ταυτοτική, γραμμική, πολυωνυμική, ρητή συνάρτηση.

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 3, Προβλήματα 1, 3, 14, 15, Κεφάλαιο 4, Προβλήματα 1, 2, 13, 14

**Από τις σημειώσεις του διδάσκοντα (έκδοση: 24.12.2024)**

Κεφάλαιο 2:

Ότι αναφέρεται στην ενότητα χωρίς τις αποδείξεις του Θεωρήματος 2.2, του Παραδείγματος 2.3 και της Πρότασης 2.5. Επίσης μπορείτε να θεωρήσετε ότι σε όλη την ενότητα το  $D \subset \mathbb{R}$  είναι διάστημα και ότι το  $a$  ανήκει στο  $D$  ή είναι ένα από τα άκρα του διαστήματος.

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 5, Προβλήματα 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 33, 34, 35, 39

Ενότητα 3.1:

Ότι αναφέρεται στην ενότητα, χωρίς τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 3.1 και 3.2, αλλά με τις αποδείξεις των Προτάσεων 3.1 και 3.2.

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 6, Προβλήματα 1, 3 (α), (γ), 7, 14, 15

Ενότητα 3.2:

Μόνο οι Ορισμοί 3.2 και 3.3 του supremum και του infimum, αντίστοιχα, και γνώση του Αξιώματος Πληρότητας του  $\mathbb{R}$  (I13).

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 8, Προβλήματα 1, 2, 12, 13

Ενότητα 3.3:

Ότι αναφέρεται στην ενότητα, χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων.

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 7, Προβλήματα 1 (i) - (vi), (xi), 8, 10, 11

Ενότητα 3.4:

Μόνο γνώση του Ορισμού 3.5 και του Θεωρήματος 3.6 χωρίς απόδειξη.

Ασκήσεις: Spivak, Παράρτημα Κεφαλαίου 8, Πρόβλημα 2 (α)

Ενότητα 4.1:

Ότι περιέχεται στις σημειώσεις χωρίς τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 4.2 και 4.4.

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 10, Προβλήματα 1, 2, 4, 5, 6, 11, 12, 28, 29, 32

Ενότητα 4.2:

Ότι περιέχεται στις σημειώσεις χωρίς τις αποδείξεις των προτάσεων και θεωρημάτων, αλλά με τις αποδείξεις των πορισμάτων.

Ασκήσεις: Πρόσχημα 4.10, Παρατήρηση 4.5, Spivak, Κεφάλαιο 11, Προβλήματα 1, 4 (α), 6, 28 (α), (β), 53, 65 (για  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ · για  $n = 1$  δεν ισχύει)

#### Ενότητα 4.3:

Ότι περιέχεται στις σημειώσεις χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων. Στην Παρατήρηση 4.9 δεν χρειάζεται να γνωρίζετε τις αποδείξεις, αλλά καλό θα ήταν να κατανοείτε τις περιπτώσεις που μπορούν να προκύψουν και τα σχετικά παραδείγματα.

Ασκήσεις: Παραδείγματα 4.5 και 4.6, τα παραδείγματα που ζητούνται στην Παρατήρηση 4.9 (όχι οι θεωρητικές αποδείξεις που ζητούνται εκεί), Spivak, Κεφάλαιο 12, Προβλήματα 1 χωρίς τα (iii), (v), (vii), 2, 3, 4, 5, 6

Παρατήρηση/Υπενθύμιση/Υπόδειξη: Αν θέλουμε να δείξουμε ότι μια μαθηματική πρόταση δεν είναι σωστή, αρκεί να βρούμε ένα - όσο γίνεται πιο εύκολο - αντιπαράδειγμα.

#### Ενότητα 5.1:

Ορισμός 5.1, Παρατήρηση 5.1, Ορισμός 5.2, Παράδειγμα 5.1, Θεώρημα 5.2 χωρίς απόδειξη, Παράδειγμα 5.2, Θεωρήματα 5.2 έως 5.6 χωρίς αποδείξεις, Παρατήρηση 5.3.

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 13, Προβλήματα 5, 8 (i)-(iii), 9, 13, 20

#### Ενότητα 5.2:

Θεωρήματα 5.7 και 5.8 χωρίς αποδείξεις, Πρόσιμα 5.9 με απόδειξη.

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 14, Προβλήματα 1, 8, 9, 10, 18

#### Ενότητα 5.3:

Μπορείτε να θεωρήσετε τον ορισμό και τις ιδιότητες των  $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  γνωστά από το σχολείο.

Παρατήρηση 5.3.3, Ορισμοί 5.7, 5.8, Πρόταση 5.4 με απόδειξη, Θεώρημα 5.11 με απόδειξη.

Σημειώνουμε ότι το πρώτο και το δεύτερο βήμα της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1, αφορούν την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών για τη γραμμική ομογενή Συνήθη Διαφορική Εξίσωση δεύτερης τάξης  $f''(x) + f(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , με αρχικές τιμές  $f(0) = a$ ,  $f'(0) = b$ .

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 15, Προβλήματα 1, 2, 3, 6, 7

#### Ενότητα 5.4:

Ορισμός 5.9 έως Παρατήρηση 5.4.7. Τα Θεωρήματα 5.17 και 5.18 χωρίς απόδειξη.

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 18, Προβλήματα 1, 2, 3, 5, 6, 13, 17, 20

#### Ενότητα 5.5:

Ορισμός 5.12 έως Παράδειγμα 5.13.

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 19, Προβλήματα 1, 2, 3 εκτός από το (vii), 5, 6 εκτός από το (viii) (το οποίο έγινε στο Παράδειγμα 5.14)

Παρατήρηση: Καλό είναι να γνωρίζετε τις πιο βασικές αντικαταστάσεις και τεχνικές, όπως αυτές περιγράφονται στην Ενότητα 5.5, και να μπορείτε να τις εφαρμόσετε. Στην εξέταση σίγουρα δεν ζητηθεί να βρείτε κάποια πολύ εξεζητημένη αντικατάσταση, ούτε να κάνετε μακροσκελείς υπολογισμούς.

#### Ενότητα 5.6:

Μέχρι και το Παράδειγμα 5.15, χωρίς αποδείξεις προτάσεων και θεωρημάτων.

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 20, Πρόβλημα 1.

#### Ενότητα 6.1:

Μέχρι και το Παράδειγμα 6.4, χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων.

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 22, Προβλήματα 1 (i)-(viii), 2, 3 (α), 11.

#### Ενότητα 6.2:

Μέχρι και το Παράδειγμα 6.12, χωρίς τις Προτάσεις 6.2, 6.4, χωρίς τις αποδείξεις των προτάσεων. Επίσης, Παρατήρηση 6.2.3 και Παράδειγμα 6.15 (α') για  $x > 0$ .

Ασκήσεις: Spivak, Κεφάλαιο 23, Πρόβλημα 1, εκτός από τα (ii), (iii), (iv) και (xii).