

ΟΡΜΗ

Η ορμή (γραμμική ορμή) ενός σώματος ορίζεται ως το γινόμενο της μάζας του με την ταχύτητά του:

$$p = mv.$$

Η ορμή είναι διανυσματική ποσότητα με κατεύθυνση ίδια με της ταχύτητας και με συνιστώσες:

$$p_x = mv_x, \quad p_y = mv_y, \quad p_z = mv_z.$$

Χρησιμοποιώντας την ορμή ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\Sigma F = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \Sigma F = \frac{dp}{dt}.$$

Η ολική δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος.

(Ισχύει μόνο σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς).

Μονάδες μέτρησης της ορμής (SI): $1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

ΩΘΗΣΗ

Η ώθηση είναι μια διανυσματική φυσική ποσότητα στενά συνδεδεμένη με την ορμή. Για μια σταθερή δύναμη F που ασκείται σε ένα σώμα από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι την t_2 έχουμε:

$$J = F (t_2 - t_1) = F \Delta t.$$

Στη γενική περίπτωση μεταβαλλόμενης δύναμης:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F dt.$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dp}{dt} dt = \int_{p_1}^{p_2} dp = p_2 - p_1.$$

$\Rightarrow$

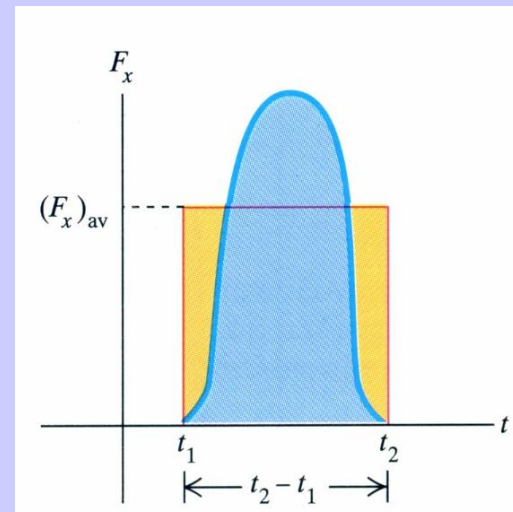
$$J = p_2 - p_1.$$

**Θεώρημα
Ωθησης-Ορμής**

Μέση δύναμη F_{av} :

$$J = F_{av} (t_2 - t_1).$$

Μονάδες μέτρησης (SI): $1 \text{ N} \cdot \text{s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
(ίδιες με τις μονάδες της ορμής).



ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

- Η έννοια της ορμής είναι πολύ χρήσιμη και σημαντική στην περίπτωση που έχουμε δυο ή περισσότερα σώματα που αλληλεπιδρούν (**σύστημα σωμάτων**).
- Ο ορισμός του συστήματος των σωμάτων είναι αυθαίρετος και εξαρτάται από εμάς.
- Ορίζουμε το σύστημα ανάλογα με την ανάλυση που θέλουμε να κάνουμε ή το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε.

Εσωτερικές δυνάμεις: ασκούνται μεταξύ των σωμάτων ενός συστήματος (από το ένα στο άλλο).

Εξωτερικές δυνάμεις: ασκούνται στο σύστημα από το περιβάλλον.

Αν η συνολική εξωτερική δύναμη είναι μηδενική, τότε το σύστημα ονομάζεται **απομονωμένο**.

Αρχή Διατήρησης της Ορμής

Όταν το διανυσματικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω σε ένα σύστημα είναι ίσο με μηδέν, η ολική ορμή του συστήματος είναι σταθερή.

(Βασίζεται στο 2ο νόμο του Νεύτωνα, άρα ισχύει μόνο σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς).

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Απόδειξη: έστω ένα απομονωμένο σύστημα δύο σημειακών σωμάτων (1) και (2) που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.$$

(Ολική ορμή συστήματος)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}.$$

(Ρυθμός μεταβολής ολικής ορμής)

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}.$$

(3ος νόμος του Νεύτωνα)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}.$$

(Ολική ορμή σταθερή)

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για απομονωμένο σύστημα με τυχαίο αριθμό σωμάτων.

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΟΡΜΗΣ: ΑΝΑΚΡΟΥΣΗ ΚΑΡΑΜΠΙΝΑΣ



Ποια είναι η ταχύτητα ανάκρουσης του όπλου;

Απομονωμένο σύστημα: συνολική ορμή = 0 πριν και μετά την εκπυρσοκρότηση:

$$P_x = 0 = (0,00500 \text{ kg})(300 \text{ m/s}) + (3,00 \text{ kg})v_R,$$
$$v_R = -0,500 \text{ m/s}.$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι το όπλο κινείται προς τα αριστερά μετά την εκπυρσοκρότηση.

Μπάλα μάζας 0,40 kg χτυπά σε τοίχο όπως στο σχήμα. Βρείτε (α) την ώθηση της δύναμης που άσκησε ο τοίχος στη μπάλα, και (β) τη μέση δύναμη που άσκησε ο τοίχος στη μπάλα αν η διάρκεια της πρόσκρουσης είναι 0,010 s.

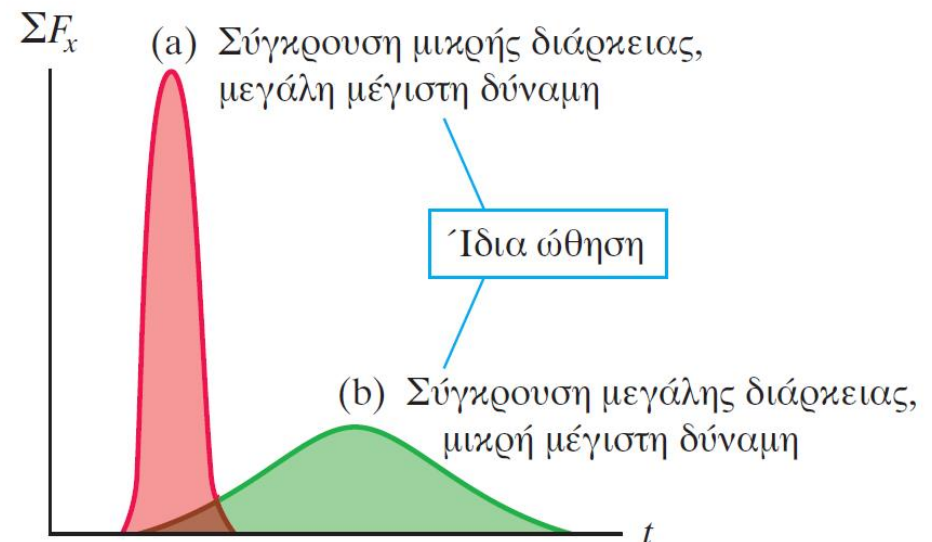
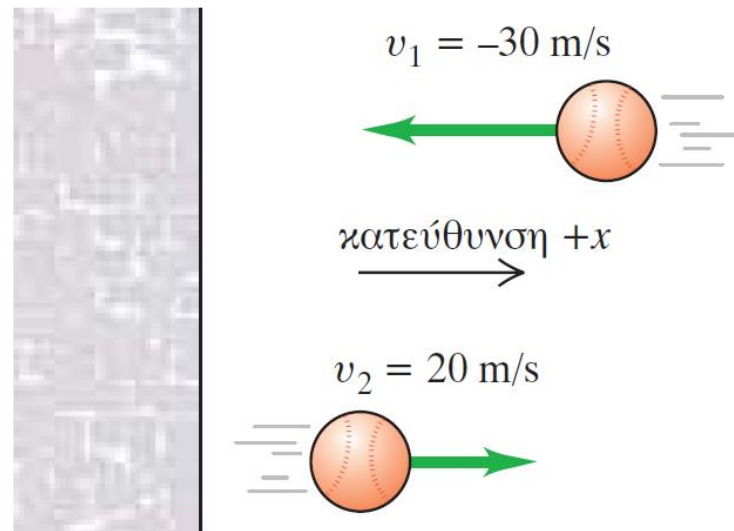
Λύση: (α)

$$p_1 = mv_1 = (0,40 \text{ kg})(-30 \text{ m/s}) = -12 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

$$p_2 = mv_2 = +8,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= mv_2 - mv_1 = 8,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s} - (-12 \text{ kg} \cdot \text{m/s}) \\ &= 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

$$(\beta) \quad F_{\text{av}} (0,010 \text{ s}) = 20 \text{ N} \cdot \text{s} \Rightarrow F_{\text{av}} = 2000 \text{ N}.$$



ΕΙΔΗ ΚΡΟΥΣΕΩΝ

Ελαστική κρούση: Η ολική κινητική ενέργεια διατηρείται.

Μη ελαστική κρούση: Η ολική κινητική ενέργεια δεν διατηρείται. Κάποιο ποσοστό χάνεται (π.χ. μετατρέπεται σε θερμότητα). Το πόσο χάνεται εξαρτάται από τις λεπτομέρειες της αλληλεπίδρασης.

Πλαστική κρούση (ή τελείως μη ελαστική κρούση): Τα σώματα ενώνονται κατά την κρούση και κινούνται κατόπιν σαν ένα. Η ολική κινητική ενέργεια δεν διατηρείται.

- Η ολική ορμή διατηρείται πάντα σε κάθε είδος κρούσης (πρέπει πάντα η ολική εξωτερική δύναμη να είναι μηδέν).
- Η ολική κινητική ενέργεια διατηρείται μόνο στις ελαστικές κρούσεις.
- Η διατήρηση της ορμής μας δίνει τρεις εξισώσεις (μία για κάθε διάσταση) επειδή η ορμή είναι διανυσματική ποσότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Κρούση δυο σωμάτων

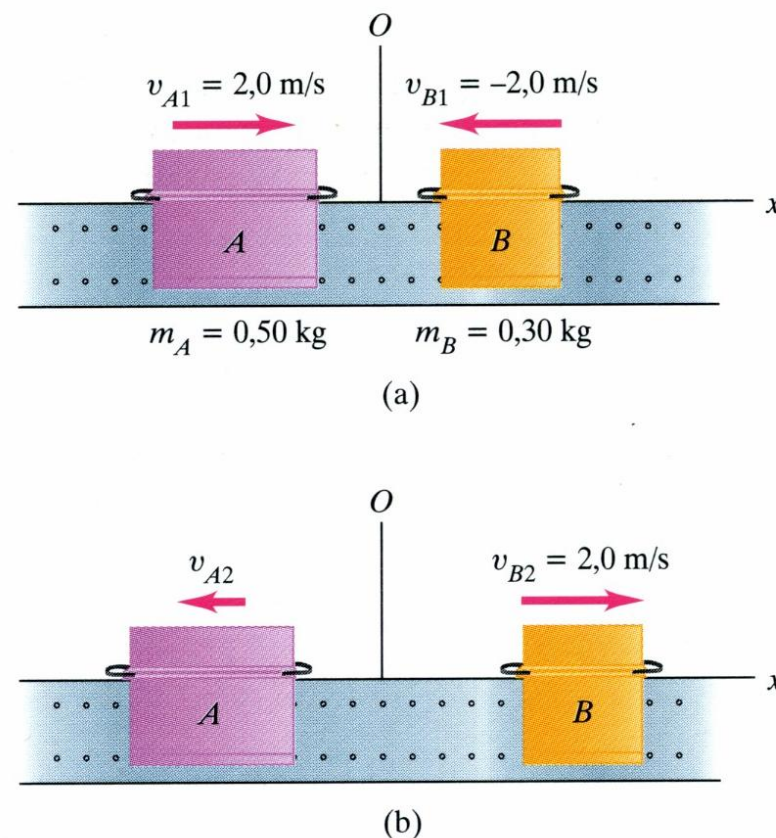
Σύγκρουση πάνω σε ευθεία Δύο βαγόνια κινούνται το ένα προς το άλλο πάνω σε μια ευθύγραμμη αεροτροχιά (Σχ. 8-4). Αφού συγκρουστούν, το B απομακρύνεται με μια τελική ταχύτητα $+ 2,0 \text{ m/s}$. Ποια είναι η τελική ταχύτητα του A ;

ΛΥΣΗ Η ολική κατακόρυφη δύναμη πάνω σε κάθε βαγόνι είναι ίση με μηδέν· η συνισταμένη δύναμη πάνω σε κάθε βαγόνι είναι η οριζόντια δύναμη που ασκείται πάνω του από το άλλο βαγόνι. Ο συνδυασμός αποτελεί απομονωμένο σύστημα και επομένως η ολική του ορμή είναι σταθερή. Πάρτε τον άξονα των x κατά μήκος της αεροτροχιάς, με τη θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά. Οι μάζες των βαγονιών και οι αρχικές τους ταχύτητες φαίνονται στο Σχ. 8-4. Έστω ότι η τελική ταχύτητα του A είναι v_{A2} . Τότε, η εξίσωση που εκφράζει τη διατήρηση της συνιστώσας x της ολικής ορμής πριν και μετά την κρούση είναι:

$$\begin{aligned} P_x &= m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = (0,50 \text{ kg})(2,0 \text{ m/s}) \\ &\quad + (0,30 \text{ kg})(- 2,0 \text{ m/s}) \\ &= m_A v_{A2} + m_B v_{B2} = (0,50 \text{ kg})v_{A2} + (0,30 \text{ kg})(+ 2,0 \text{ m/s}). \end{aligned}$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση για το v_{A2} , βρίσκουμε

$$v_{A2} = - 0,40 \text{ m/s}.$$



8-4 Δύο βαγόνια (a) πριν και (b) μετά τη σύγκρουσή τους.

ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Ελαστικές κρούσεις ονομάζονται οι κρούσεις κατά τις οποίες η ολική κινητική ενέργεια διατηρείται. Αυτό συμβαίνει όταν οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης είναι διατηρητικές.

Παράδειγμα: κρούση δύο σωμάτων A και B:

$$\frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B1}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2,$$

(Διατήρηση Ενέργειας)

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2}.$$

(Διατήρηση Ορμής)

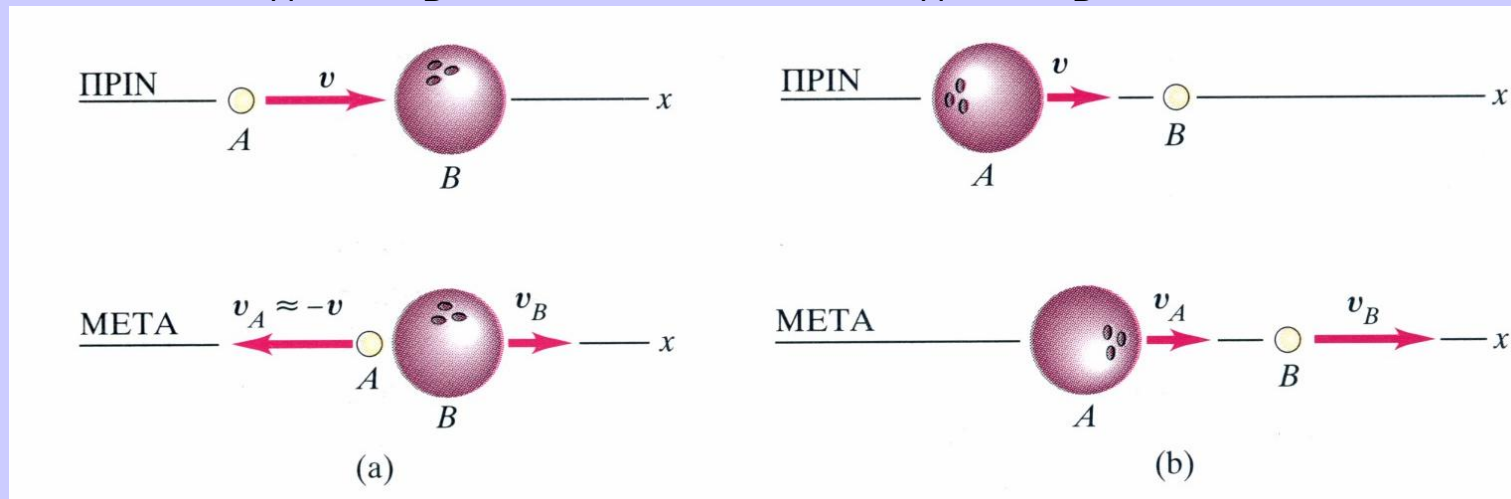
Αν $v_{B1} = 0 \Rightarrow$

$$v_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v,$$

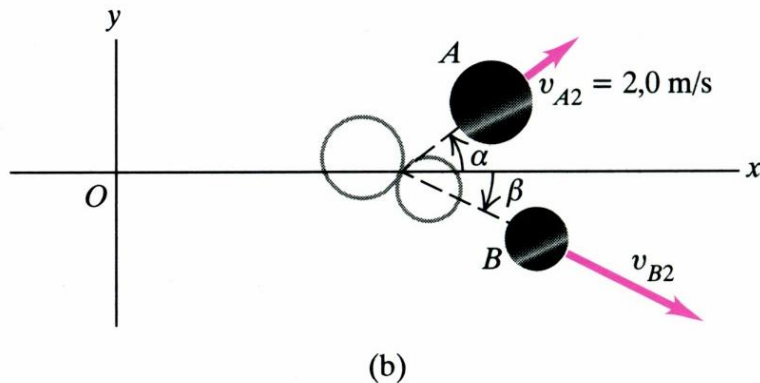
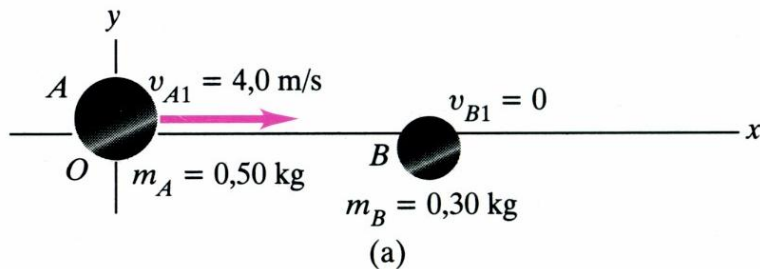
$$v_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v,$$

$m_A \ll m_B$

$m_A \gg m_B$



ΜΗ ΜΕΤΩΠΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ



Ποια η τελική ταχύτητα του σώματος Β (μετά την κρούση) και ποιες οι γωνίες α και β ;

Διατήρηση κινητικής ενέργειας

$$\frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2,$$

$$\frac{1}{2}(0,50 \text{ kg})(4,0 \text{ m/s})^2 = \frac{1}{2}(0,50 \text{ kg})(2,0 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(0,30 \text{ kg})v_{B2}^2,$$

$$v_{B2} = 4,47 \text{ m/s}.$$

Διατήρηση ορμής (x-συνιστώσα)

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}.$$

$$(0,50 \text{ kg})(4,0 \text{ m/s}) = (0,50 \text{ kg})(2,0 \text{ m/s})(\cos \alpha)$$

$$+ (0,30 \text{ kg})(4,47 \text{ m/s})(\cos \beta).$$

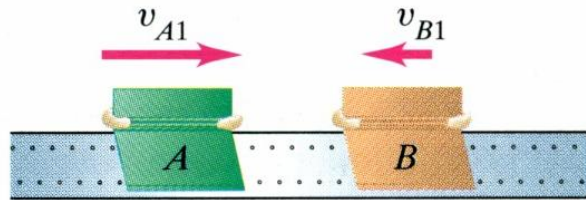
Διατήρηση ορμής (y-συνιστώσα)

$$0 = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y},$$

$$0 = (0,50 \text{ kg})(2,0 \text{ m/s})(\sin \alpha) - (0,30 \text{ kg})(4,47 \text{ m/s})(\sin \beta).$$

$$\alpha = 36,9^\circ \quad \beta = 26,6^\circ.$$

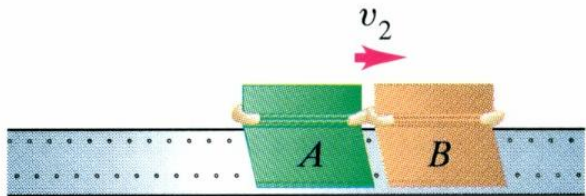
ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ



(a)



(b)



(c)

$$v_{A2} = v_{B2} = v_2.$$

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = (m_A + m_B) v_2.$$

Αν το δεύτερο σώμα είναι ακίνητο πριν τη κρούση:

$$v_{A1} = v_1 \quad (v_{B1} = 0).$$

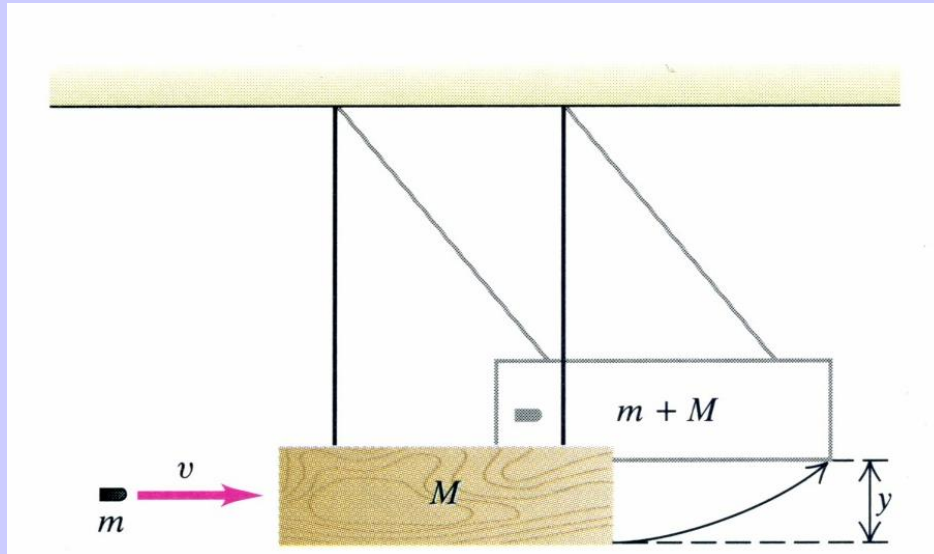
$$v_2 = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_1.$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_A v_1^2,$$

$$K_2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_2^2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) \left(\frac{m_A}{m_A + m_B} \right)^2 v_1^2.$$

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_A}{m_A + m_B}.$$

ΒΑΛΛΙΣΤΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ



Σφαίρα σφηνώνεται σε ξύλο που κρέμεται από σχοινιά σε ηρεμία όπως στο σχήμα. Το ξύλο ανεβαίνει σε μέγιστο ύψος y . Αν οι μάζες είναι γνωστές, ποια η αρχική ταχύτητα της σφαίρας;

Λύση

α) Διατήρηση Ορμής (σφηνώνεται η σφαίρα και πριν αρχίσει να κινείται το ξύλο).

$$mv = (m + M)V, \quad v = \frac{m + M}{m}V.$$

β) Διατήρηση ενέργειας (αφού σφηνωθεί η σφαίρα και αρχίσει να κινείται το ξύλο)

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gy,$$

$$V = \sqrt{2gy}. \quad \Rightarrow$$

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gy}.$$

Παραλλαγή του προβλήματος:
θα μπορούσε να είναι γνωστή η ταχύτητα της σφαίρας και να ζητείται το μέγιστο ύψος y .

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ

Μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε το θεώρημα διατήρησης της ορμής χρησιμοποιώντας την έννοια του κέντρου μάζας.

Έστω σύστημα N σημειακών σωματίων. Το κέντρο μάζας ορίζεται ως εξής:

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i},$$
$$y_{\text{cm}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i},$$

Το διάνυσμα της θέσης του κέντρου μάζας είναι:

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}.$$

Στη γλώσσα της στατιστικής, το κέντρο μάζας είναι η μέση τιμή της θέσης των σωματίων με στατιστικό βάρος τη μάζα τους.

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ

Για στερεά σώματα με συνεχή κατανομή ύλης τα αθροίσματα γίνονται ολοκληρώματα (οι υπολογισμοί μπορεί να είναι πολύπλοκοι).

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV}{\int \rho(\vec{r}) dV}$$

Για ομογενή σώματα όμως:

- Το κέντρο μάζας συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο του σώματος π.χ. μπάλα του μπιλιάρδου, ζάρι, κ.α.
- Αν το σώμα έχει άξονα συμμετρίας (π.χ. κύλινδρος) τότε το κέντρο μάζας βρίσκεται πάνω στον άξονα.

Το κέντρο μάζας δεν είναι απαραίτητο να βρίσκεται μέσα στο σώμα.

Μπορούμε τώρα να βρούμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κέντρου μάζας παραγωγίζοντας διαδοχικά ως προς το χρόνο.

TAXYTHHTA TOY KENTPOY MAZAS

$$v_{xcm} = \frac{m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2} + m_3 v_{x3} + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots},$$

$$v_{ycm} = \frac{m_1 v_{y1} + m_2 v_{y2} + m_3 v_{y3} + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}.$$

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + m_3 \mathbf{v}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}.$$

Η ολική ορμή του συστήματος είναι ίση με την ολική μάζα επί την ταχύτητα του κέντρου μάζας.

$$M \mathbf{v}_{cm} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + m_3 \mathbf{v}_3 + \dots = \mathbf{P}.$$

Για ένα απομονωμένο σύστημα του οποίου η ορμή είναι σταθερή, η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι σταθερή.

Αν η ολική ορμή του συστήματος είναι μηδέν τότε το κέντρο μάζας είναι ακίνητο.

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

$$Ma_{\text{cm}} = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 + \dots$$

$$a_{\text{cm}} = dv_{\text{cm}}/dt$$

$$\Sigma F = \Sigma F_{\text{ext}} + \Sigma F_{\text{int}} = Ma_{\text{cm}}.$$

Λόγω του τρίτου νόμου του Νεύτωνα, οι εσωτερικές δυνάμεις απλοποιούνται κατά ζεύγη και $\Sigma F_{\text{int}} = 0$. Μόνο το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων απομένει και έχουμε

$$\Sigma F_{\text{ext}} = Ma_{\text{cm}}.$$

Όταν πάνω σε ένα σώμα ή σύστημα σωματίων ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, το κέντρο μάζας του σώματος ή του συστήματος κινείται όπως θα εκινείτο αν όλη η μάζα ήταν συγκεντρωμένη στο σημείο όπου βρίσκεται το κέντρο μάζας και δρούσε επάνω του μια συνισταμένη δύναμη ίση με το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο σώμα ή σύστημα σωματίων.

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να μη φαίνεται πολύ εντυπωσιακό, στην πραγματικότητα όμως παίζει κεντρικό ρόλο στη Μηχανική. Χωρίς αυτό δεν θα μπορούσαμε να παριστάνουμε ένα μακροσκοπικό σώμα με ένα σημείο όταν εφαρμόζουμε τους νόμους του Νεύτωνα, κάτι που κάνουμε συνεχώς.

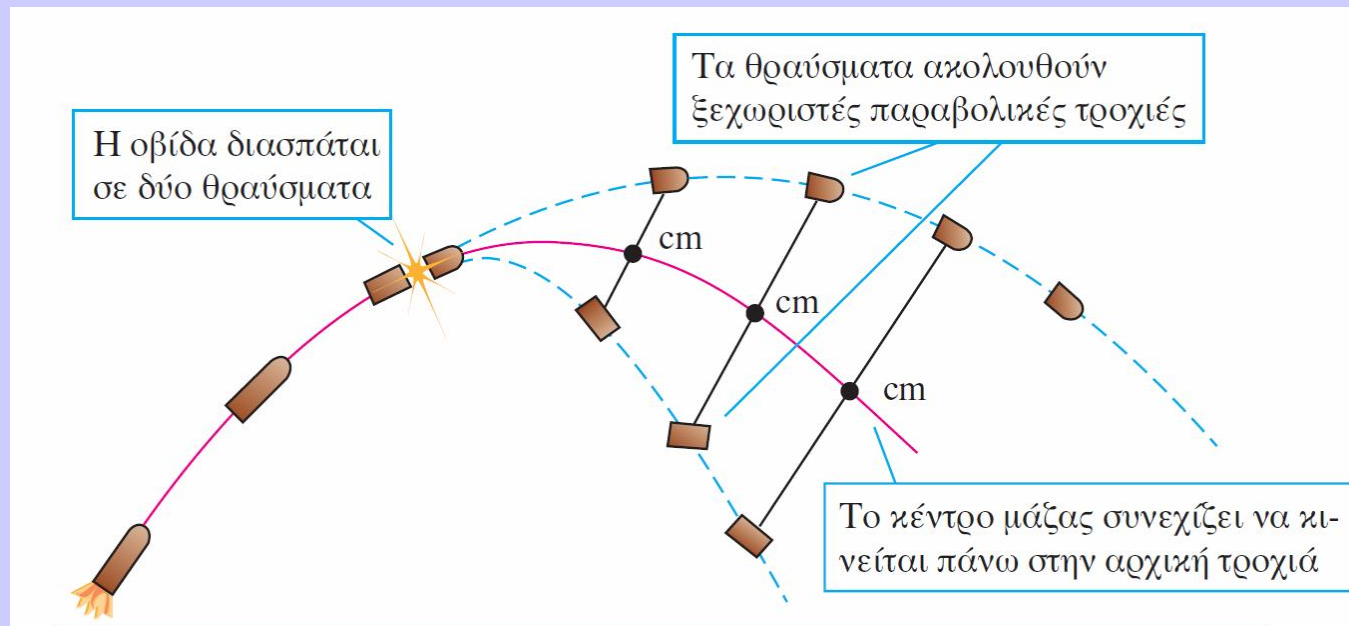
ΚΙΝΗΣΗ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ



Το κέντρο μάζας αυτού του γαλλικού κλειδιού έχει σημαδευτεί με ένα X. Η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω στο κλειδί είναι σχεδόν ίση με μηδέν. Καθώς περιστρέφεται κινούμενο πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια, το κέντρο μάζας κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα.

Για ένα απομονωμένο σύστημα η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν. Επομένως, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι μηδενική και η ταχύτητά του και η ορμή του είναι σταθερές. Έτσι επιβεβαιώνει αυτό που έχουμε μάθει πιο πριν, ότι δηλαδή η ορμή ενός απομονωμένου συστήματος είναι σταθερή.

ΚΙΝΗΣΗ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ



Ένα βλήμα διασπάται σε δύο κομμάτια στον αέρα. Αν αγνοηθεί η αντίσταση του αέρα, το κάθε θραύσμα διαγράφει τη δική του παραβολική τροχιά, αλλά το κέντρο μάζας εξακολουθεί να κινείται πάνω στην ίδια τροχιά που είχε το κέντρο μάζας του βλήματος πριν εκραγεί. Αυτό ισχύει μέχρις ότου ένα από τα θραύσματα κτυπήσει το έδαφος.

Για απομονωμένο σύστημα:

Μπορούμε να επιλέξουμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς του οποίου η αρχή συμπίπτει με το κέντρο μάζας του συστήματος. Τότε η ολική ορμή του συστήματος είναι εξ' ορισμού μηδέν (σ' αυτό το σύστημα αναφοράς) πράγμα που απλοποιεί πολύ την ανάλυση σε αρκετές περιπτώσεις (π.χ. κρούσεις).