Θεωρία πιθανοτήτων

Βασικές έννοιες πιθανοτήτων

- Δειγματοχώρος
- Ενδεχόμενα
- ´Ενωση ενδεχομένων $\cup$
- Τομή ή γινόμενο ενδεχομένου $\cap$
- Συμπλήρωμα

Πιθανότητα

Ορισμοί

- Κλασσικός
- Εμπειρικός
- Αξιωματικός

Πιθανότητα

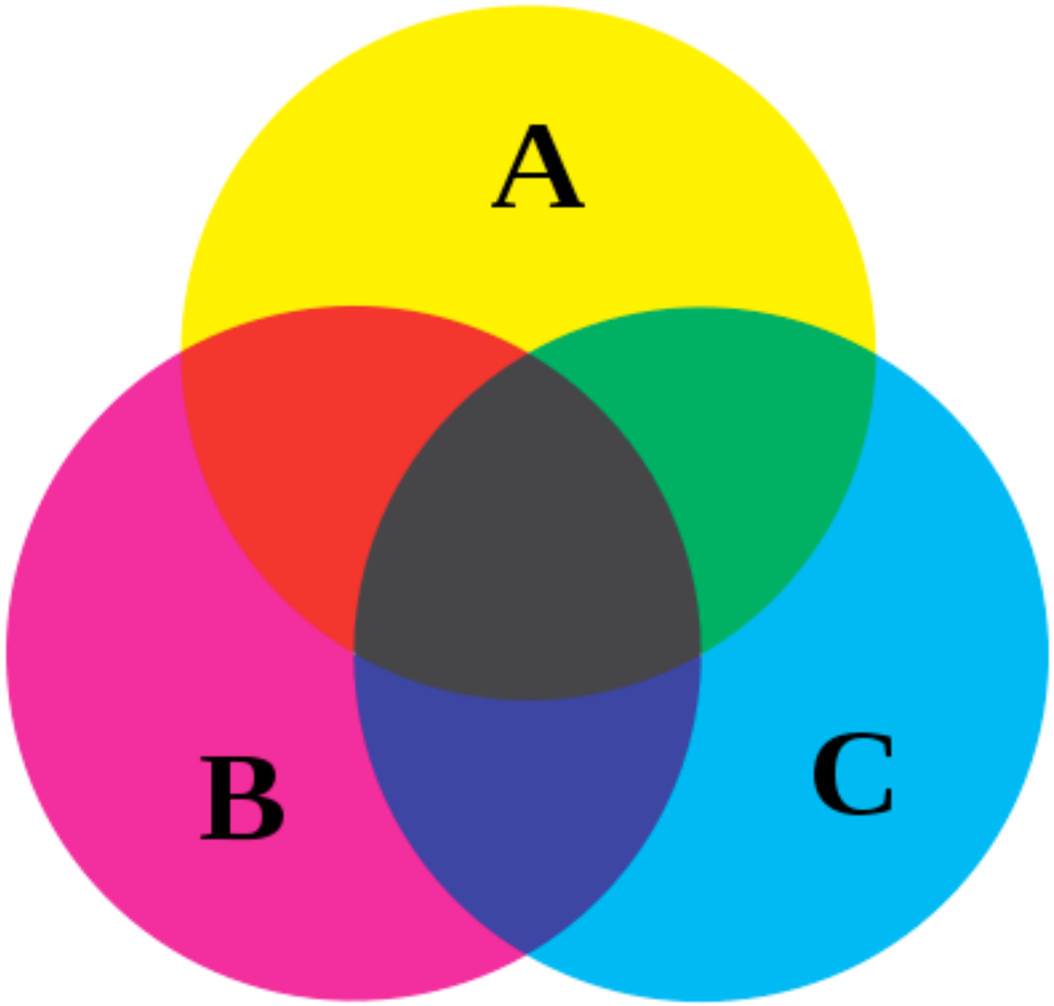
- Ικανοποιεί τρία κριτήρια- αξιώματα του Kolmogof
  - α) $P(\Omega)=1$
  - $P(A)>=0$
  - Για κάθε ακολουθία ασυμβίβαστων ενδεχομένων ισχύει

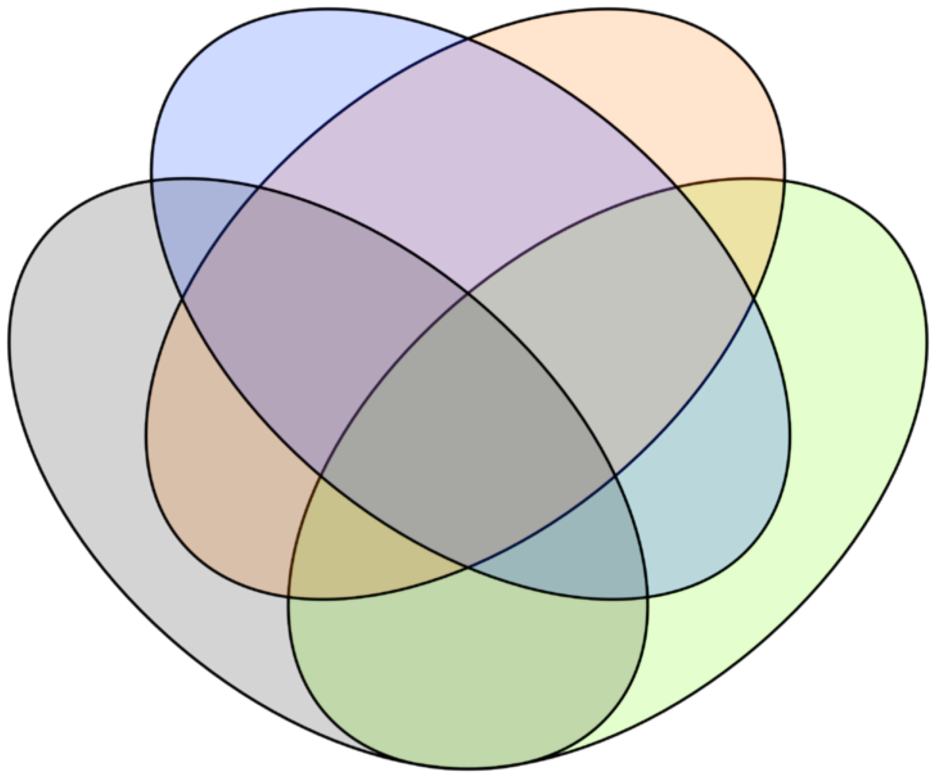
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n)$$

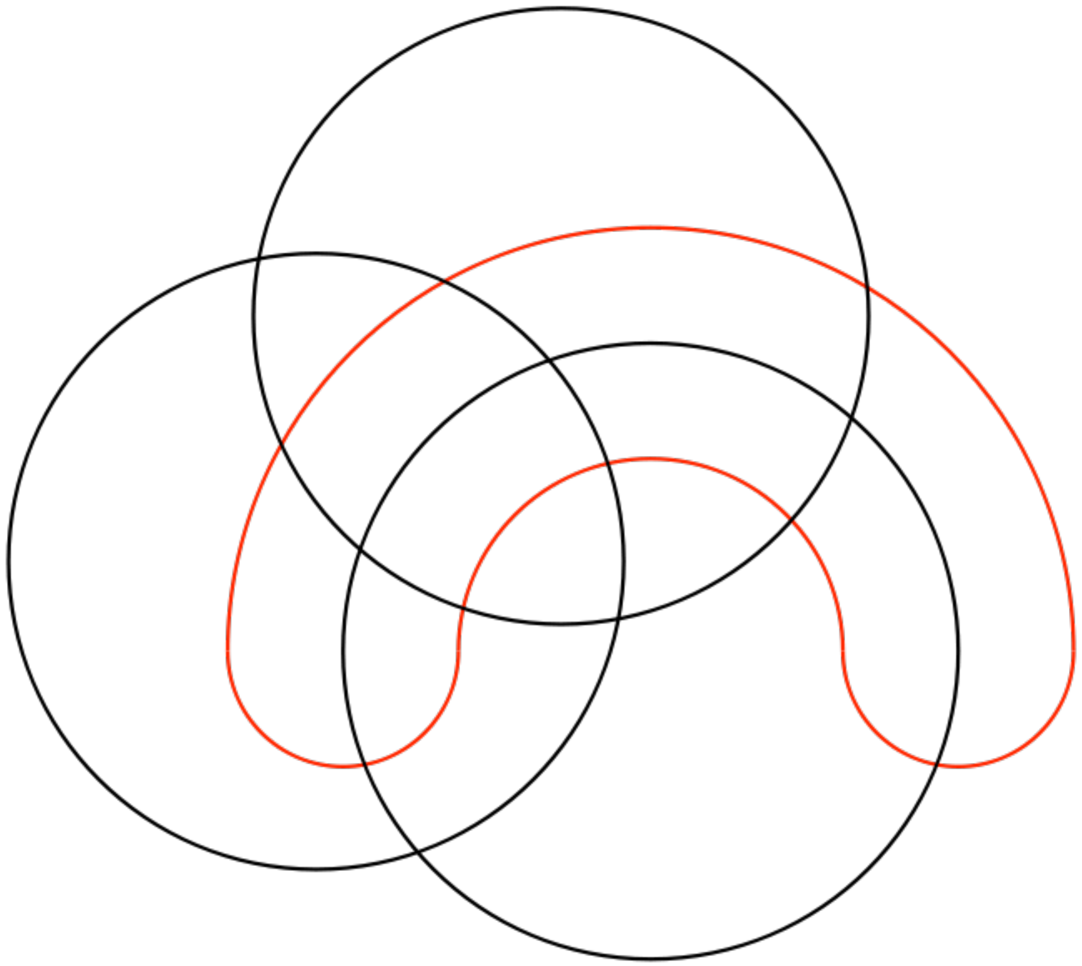
Βασικές έννοιες

- Προσθετικό θεώρημα
  - $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
- Δεσμευμένη πιθανότητα
  - $P(B|A)=P(AB)/P(A)$
- Πολλαπλασιαστικός κανόνας
  - $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$
- Ανεξάρτητα ενδεχόμενα
  - Ισχύει όταν $P(AB)=P(A)P(B)$

Διάγραμμα Venn







Παραδείγματα

- Έστω Ω δειγματικός χώρος και Α,Β,Γ ενδεχόμενα του Ω. Να εκφράσετε τα ακόλουθα ενδεχόμενα χρησιμοποιώντας ενώσεις τομές και συμπληρώματα. Δώστε τα διαγράμματα του Venn
  - Τουλάχιστον ένα απο τα Α,Β,Γ συμβαίνει
  - Το πολύ ένα απο τα ενδεχόμενα Α,Β,Γ συμβαίνει
  - Κάνενα από τα τρία ενδεχόμενα συμβαίνει
  - Και τα τρία συμβαίνουν
  - Ακριβώς ένα από τα Α, Β, Γ συμβαίνει
  - Συμβαίνει το Α κι όχι τα Β και Γ
  - Πραγματοποιείται το Α κι αν όχι, τότε ούτε το Β πραγματοποιείται

Δειγματικός χώρος

- Όλες οι πιθανές εκβάσεις
  - Ρίχνω ένα κέρμα
  - Ρίχνω ένα ζάρι
  - Ρίχνω ένα κέρμα δύο φορές

Δεσμευμένη πιθανότητα

- Έστω δύο ενδεχόμενα Α και Β
- Ποια η πιθανότητα να συμβεί το Α δεδομένου πως έχει συμβεί το Β;
- Ζάρι, Α={1,2,3}, Β={2,4,6}
- $P(A|B)=P(AB)/P(B)=(1/6)/(3/6)=1/3$

Παράδειγμα

Δεδομένου ότι: P(A)=1/3, P(B)=1/4, P(AB)=1/6
να βρείτε τις παρακάτω πιθανότητες

$$P(A'),P(A' \cup B),P(A \cup B'),P(A'B'),P(A' \cup B')$$

Παράδειγμα

‘Εστω ένας πληθυσμός με ίσο αριθμό ανδρών και γυναικών. Πέντε άντρες στους 100 και εικοσιπέντε γυναίκες στις 10000 έχουν αχρωματοψία. ΄Εαν εκλέξουμε ένα άτομο στην τύχη ποια η πιθανότητα να έχει αχρωματοψία

Θεώρημα του Bayes

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{k} \Pr(B_j)\Pr(A \mid B_j)}$$

Παράδειγμα

Το τεστ Παπανικολάου κάνει σωστή διάγνωση σε 95% των περιπτώσεων δηλ. το τεστ ειναι θετικό με πιθανότητα 0.95 αν μια γυναίκα πράγματι πάσχει από καρκίνο και είναι αρνητικό με πιθανότητα 0.95 αν μια γυναίκα δεν έχει την ασθένεια. Αν το τεστ είναι θετικό ποιά είναι η πιθανότητα να πάσχει πράγματι απο την ασθένεια; Υποθέστε πως το ποσοστό των γυναικών που πάσχουν από την ασθένεια είναι 0.0005. Είναι δικαιολογημένος ο υπερβολικός φόβος;

Παράδειγμα

Έστω ότι το 6% των εγκύων γυναικών σε μια κλινική πάσχουν από βακτηριουρία. Είναι γνωστό επίσης ότι το 30% από αυτές που πάσχουν και 1% από αυτές που δεν πάσχουν, προσβάλλονται από πυελονεφρίτιδα. α) Ποιά η πιθανότητα μια έγκυος γυναίκα να έχει βακτηριουρία και πυελονεφρίτιδα; β) Ποιά η πιθανότητα μια έγκυος γυναίκα να μην έχει βακτηριουρία και να έχει πυελονεφρίτιδα; γ) Ποιά η πιθανότητα μια έγκυος γυναίκα να έχει πυελονεφρίτιδα; δ) Εάν γνωρίζουμε ότι μια έγκυος γυναίκα έχει πυελονεφρίτιδα, ποιά η πιθανότητα να έχει βακτηριουρία;

Γενετική

	Μητέρα	
Πατέρας	A	α
A	AA	Aα
α	αA	αα

Ισορροπία κατά Hardy-Weinberg:

Results of Clinical depression study

	Imipramine	Lithium	Combination	Placebo	Total
Relapse	18	13	22	24	77
No relapse	22	25	16	10	73
Total	40	38	38	34	150

P (relapse|placebo)? P(relapse|lithium)?

Κατανομές

- Διακριτές
  - Διωνυμική, Poisson
- Συνεχείς
  - Ομοιόμορφη, κανονική, κατανομή Student