ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΔΙΑΤΜΗΜΕΝΗ ΡΟΗ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Γ.Α. Πουλιπούλης

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2005

Αφιερώνεται στους γονείς μου

Every time you look up at the sky, every one of
those points of light is a reminder that fusion power
is extractable from hydrogen and other light elements
and it is an everyday reality throughout the Milky Way Galaxy

Carl Sagan

Ευχαριστίες - Αναγνωρίσεις

Η παρούσα εργασία αποτελεί προϊόν προσωπικής μελέτης και εργασίας με καίρια συμβολή κάποιων άλλων ανθρώπων. Ολοκληρώνοντας την λοιπόν, νοιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους αυτούς που με τον ένα ή τον άλλο τρόπο συνέβαλλαν ουσιαστικά σε αυτήν.

Εκφράζω την ευγνωμοσύνη μου στον επιβλέποντα μου Επίκουρο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κ. Γ.Ν. Θρουμουλόπουλο, ο οποίος πρώτα από όλα με την ικανότητα του ως δάσκαλος με μύησε στη φυσική πλάσματος και με την ερευνητική του πληρότητα με καθοδήγησε με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Επίσης τον ευχαριστώ διότι πάντοτε ήταν διαθέσιμος να απαντήσει στις ερωτήσεις μου αλλά και διότι πάντοτε με στήριξε σε οποιοδήποτε πρόβλημα προέκυπτε κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

I ought a big thanks to Dr. H. Tasso researcher at Max Planck Institute für Plasmaphysik at Garching of Munich, Germany for his very useful critical comments on my work as well as for the long talks on physics and mathematics. It was very beneficial for me to collaborate with such an experienced physicist as he is.

Ευχαριστώ τα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κ. Γ. Παντή και τον Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κ. Κ. Χιτζανίδη που δέχτηκαν αυτό το ρόλο αλλά και για τα χρήσιμα τους σχόλια κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής.

Ευχαριστίες εκφράζω προς τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κ. Κ. Αλυσσανδράκη, τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Θεσαλλονίκης κ. Λ. Βλάχο, τον Επίκουρο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κ. Α. Νίντο και τον Επίκουρο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθήνας κ. Ι. Τίγκελη για την απόφαση τους να συμμετάσχουν σε αυτή την επιτροπή, τα εποικοδομητικά τους σχόλια όσον αφορά την παρούσα εργασία αλλά και τις ιδέες τους για μελλοντική έρευνα.

Τέλος πρέπει να αναφέρω την υποστήριξη μου καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών από το Εθνικό Πρόγραμμα Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης στα πλαίσια του συμβολαίου ERB 5005 CT 99 0100 του συνδέσμου μεταξύ της Euratom και της Ελληνικής Δημοκρατίας. Η εν λόγω υποστήριξη εκφράστηκε είτε μέσω οικονομικής ενίσχυσης είτε μέσω της δυνατότητας πραγματοποίησης επισκέψεων σε ερευνητικά κέντρα και Πανεπιστήμια. Την τελευταία δυνατότητα αξιοποίησα με την πραγματοποίηση επισκέψεων στο Max Planck Institute für Plasmaphysik στο Μόναχο της Γερμανίας, το οποίο και ευχαριστώ για την φιλοξενία, όπου είχα καρποφόρα συνεργασία.

Περιεχόμενα

Επιτομή

Στην παρούσα διατριβή μελετώνται στάσιμες καταστάσεις ισορροπίας μαγνητικά περιορισμένου πλάσματος που σχετίζονται με την έρευνα στη σύντηξη. Οι καταστάσεις χαρακτηρίζονται στάσιμες λόγω του ότι στη μελέτη συμπεριλαμβάνεται ο όρος ροής στην εξίσωση διατήρησης της ορμής. Αυτό γίνεται διότι τα τελευταία χρόνια πολλά πειραματικά αποτελέσματα καταδεικνύουν τον πιθανό ρόλο της ροής στην επίτευξη βελτιωμένου τρόπου περιορισμού στις μηχανές σύντηξης. Συγκεκριμένα, η ροή φαίνεται να συνδέεται με το σχηματισμό φραγμάτων μεταφοράς τα οποία βελτιώνουν τον περιορισμό και αποτελούν τις πιο ελπιδοφόρες διαμορφώσεις για την επίτευξη σταθερής και αυτοσυντηρούμενης κατάστασης λειτουργίας των μηχανών. Η μελέτη αποτελείται από τρία μέρη.

Στο πρώτο μέρος εξετάζεται η επίδραση της διατμημένης ταχύτητας ροής και της αντίστροφης μαγνητικής διάτμησης στην ισορροπία πλάσματος με εφαρμογή σε tokamak στο όριο απείρου λόγου όψης. Η μελέτη πραγματοποιείται στα πλαίσια του μοντέλου των δύο ρευστών. Οι δύο προαναφερόμενες ποσότητες φαίνεται πως σχετίζονται με το σχηματισμό εσωτερικών φραγμάτων μεταφοράς (ITB). Έτσι, εξετάζεται πώς επιδρούν στα χαρακτηριστικά της πίεσης, της τοροειδούς πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος, του ακτινικού ηλεκτρικού πεδίου και της διάτμησης της ταχύτητας $\vec{E}\times\vec{B}$, $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}} = |d/dr(\vec{E}\times\vec{B}/B^2)|$. Προκύπτει ότι η μαγνητική διάτμηση και οι διατμημένες πολοειδής και τοροειδής συνιστώσες της ταχύτητας ροής δρουν συνεργετικά στο σχηματισμό profile ηλεκτρικού πεδίου και κατ΄ επέκταση $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ συμβατών με αυτά που παρατηρούνται σε πειράματα με ITB.

Αντικείμενο του δεύτερου μέρους αποτελεί η επίδραση της ροής στη τοπολογία του μαγνητικού πεδίου σε αξονικά συμμετρικό σχηματισμό στα πλαίσια της ιδανικής μαγνητοϋδροδυναμικής (MHD). Συγκεκριμένα, βρίσκουμε ότι η τοροειδής ροή προκαλεί αλλαγή στη τοπολογία των μαγνητικών επιφανειών σχηματισμού tokamak που περιβάλεται από σύνορο τετραγωνικής πολοειδούς διατομής με αποτέλεσμα τη δημιουργία πολυτοροειδών σχηματισμών. Περαιτέρω, εξετάζεται ο ρόλος του λόγου όψης, που σχετίζεται με το τοροειδές σχήμα, σε αυτή την αλλαγή καθώς και στη μετατόπιση Shafranov. Επίσης, πραγματοποιείται μια σύνδεση της μαγνητικής τοπολογίας με το profile του παράγοντα ασφάλειας.

Το τελευταίο μέρος αφορά αξονικά συμμετρικές καταστάσεις ισορροπίας μαγνητικά περιορισμένου πλάσματος με ανισοτροπική ηλεκτρική αγωγιμότητα και τοροειδή ροή. Συγκεκριμένα, παράγονται ανηγμένες εξισώσεις ισορροπίας για το εν λόγω σύστημα και αντίστοιχες ακριβείς λύσεις. Με βάση τις λύσεις

αυτές, μελετάται η επίδραση της ροής και του λόγου όψης σε ποσότητες ισορροπίας όπως οι συνιστώσες της ειδικής αντίστασης παράλληλα και κάθετα στο μαγνητικό πεδίο, το ηλεκτρικό πεδίο και η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος.

Abstract

In the present thesis stationary equilibrium states of magnetically confined plasmas of fusion concern are studied. The states are characterized stationary due to the inclusion of the flow term in the momentum equation. The study was motivated from recent experimental evidence clearly indicating that flow may play a role in achieving high confinement modes in fusion devices. Specifically, flow may play a role in the formation of transport barriers associated with improved confinement which seems to be the most prominent configurations for achieving steady self-sustained device operation. The study consists of three parts.

In the first part the impact of sheared flow and reversed magnetic shear, quantities which may play role in the formation of internal transport barriers (ITBs), in plasma equilibrium of a tokamak is examined in the infinite aspect ratio approximation. The study is conducted within the framework of two-fluid model. In particular, it is examined in which way the aforementioned quantities affect the pressure, the toroidal current density, the radial electric field and the shear of the $\vec{E} \times \vec{B}$ velocity, $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}} = |d/dr(\vec{E} \times \vec{B}/B^2)|$, profiles. It turns out that the magnetic shear and the sheared toroidal and poloidal velocities act synergetically in producing electric fields and therefore $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ profiles compatible with ones observed in discharges with ITBs.

The subject of the second part is the impact of flow in the magnetic topology of axisymmetric equilibrium configurations within the framework of ideal magnetohydrodynamics. We found that the toroidal flow can change the magnetic topology of equilibrium eigenstates of a tokamak plasma bounded by a conducting boundary of rectangular cross-section in forming multi-toroidal configurations. The impact of the aspect ratio, related to the toroidicity, on the change of magnetic topology and on the Shafranov shift is further examined. In addition, a connection between the magnetic topology and the profile of the safety factor is established.

The final part concerns axisymmetric equilibrium states of a magnetically confined plasma with anisotropic resistivity and toroidal flow. Specifically, a reduced set of equilibrium equations and respective exact solutions are obtained. On the basis of these solutions the impact of the flow and the aspect ratio on equilibrium quantities such as the resistivity components parallel and perpendicular to the magnetic field, the electric field perpendicular to the magnetic surfaces and the toroidal current density is evaluated.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ορισμένα εισαγωγικά στοιχεία που αφορούν το πλάσμα και συνδέονται με το θέμα της παρούσας εργασίας αποτελούν το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου. Συγκεκριμένα, προεισαγωγικά θα δούμε πώς ορίζεται αυτό και θα συζητήσουμε για την ελεγχόμενη θερμοπυρηνική σύντηξη μια από τις πιο σημαντικές επιδιωκόμενες εφαρμογές του. Επίσης θα παρουσιάσουμε δυο μοντέλα περιγραφής αυτού, το μοντέλο των δύο ρευστών και τη μαγνητοϋδροδυναμική (MHD) που είναι και το πιο απλό. Ένα ενδιαφέρον φαινόμενο, η διάχυση Pfirsch-Shlüter, που συνδέεται με καταστάσεις ισορροπίας, κεντρικό ζήτημα της παρούσας διατριβής, θα μας απασχολήσει στη συνέχεια. Έπειτα, θα αναφερθούμε στους πρόσφατους βελτιωμένους τρόπους περιορισμού σε σχέση με την έρευνα του θερμοπυρηνικού πλάσματος σύντηξης. Τέλος, θα δοθεί ο σκοπός, τα βήματα και το οργανόγραμμα της εργασίας.

1.1 Πλάσμα

1.1.1 Γενικά περί πλάσματος

Το πλάσμα, που θεωρείται ώς η τέταρτη κατάσταση της ύλης, ορίζεται σαν ένα ιονισμένο αέριο που αποτελείται από φορτισμένα και ουδέτερα σωμάτια και εμφανίζει συλλογική συμπεριφορά, είναι οιονεί ουδέτερο (quasi-neutral) και για τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα σ΄ αυτό κυρίαρχες είναι οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις.

Η συλλογική συμπεριφορά είναι απόρροια του γεγονότος ότι οι μεγάλης εμβέλειας δυνάμεις Coulomb κυριαρχούν και καθορίζουν την κίνηση των σωματιδίων που αποτελούν το πλάσμα. Απόρροια αυτής είναι π.χ. η διάδοση κυμάτων. Ας θεωρήσουμε δύο περιοχές του πλάσματος A και B, όπου λόγω τοπικής διαταραχής εμφανίζονται μικρές ποσότητες περίσσειας φορτίου και έστω ότι η απόσταση μεταξύ τους είναι r. Η δύναμη Coulomb ανάμεσα στα φορτία των A και B μειώνεται σαν $1/r^2$, όμως για δεδομένη στερεά γωνία ο όγκος του πλάσματος της B που επιδρά στην A αυξάνει σαν r^3. Κατ΄ αυτό το τρόπο περιοχές του πλάσματος αλληλεπιδρούν σε μεγάλες αποστάσεις. Η οιονεί ουδετερότητα έγκειται στο ότι το πλάσμα μακροσκοπικά εμφανίζεται ηλεκτρικά ουδέτερο και χωρίς μεγάλα τοπικά δυναμικά.

Ποσοτικά, κατά πόσο ένα ιονισμένο αέριο θεωρείται πλάσμα καθορίζεται από το μήκος Debye (σελ. 8 της [1]). Το μήκος Debye χαρακτηρίζει την ομώνυμη θωράκιση που έχει να κάνει με την απομόνωση ενός ηλεκτρικού πεδίου που επιδρά στο πλάσμα. Δηλαδή, αν υποθέσουμε ότι μέσα στο πλάσμα τοποθετηθεί ένα ηλεκτρόδιο που βρίσκεται σε δυναμικό ϕ_0, τότε γύρω από το ηλεκτρόδιο θα συγκεντρωθούν σωματίδια με φορτίο αντίθετο από αυτό του ηλεκτροδίου σχηματίζοντας ένα νέφος. Έτσι, στην περίπτωση που δεν έχουμε θερμική κίνηση το εξωτερικό αυτό δυναμικό θα θωρακιστεί τελείως. Επειδή όμως η θερμοκρασία δεν είναι μηδενική, λόγω της θερμικής κίνησης, κάποια από τα ηλεκτρόνια θα έχουν αρκετή κινητική ενέργεια ώστε να διαπεράσουν το νέφος. Έτσι θα δημιουργηθεί ηλεκτρικό πεδίο και επομένως η θωράκιση δεν είναι τέλεια. Ποσοτικά το βαθμωτό δυναμικό σαν συνάρτηση της απόστασης r από τη θέση του εξωτερικού δυναμικού θα δίνεται από τη σχέση (δες για παράδειγμα [1] σελ. 8):

$$\phi(r) = \phi_0 \exp(-\frac{r}{\lambda_D}) \ , \ \lambda_D = \sqrt{\frac{T_e}{n_e e^2}},$$

όπου T_e είναι η θερμοκρασία και n_e η πυκνότητα των ηλεκτρονίων μακριά από το δυναμικό (στην εργασία θα θεωρηθεί ότι όλες οι φυσικές σταθερές έχουν τιμή μονάδα). Βλέπουμε λοιπόν ότι το πάχος του νέφους, που χαρακτηρίζεται από το μήκος Debye, λ_D, εξαρτάται από τη θερμοκρασία και την αδιατάρακτη πυκνότητα των ηλεκτρονίων μιας και αυτά λόγω μικρής αδράνειας είναι πολύ πιο ευκίνητα από τα μεγάλης μάζας ιόντα. Επίσης, όσα σωμάτια βρίσκονται σε απόσταση $r > \lambda_D$ αισθάνονται τη δύναμη Coulomb ελαττωμένη κατά τον παράγοντα $\exp(-r/\lambda_D)$. Κατά συνέπεια το μήκος Debye είναι ένα μέτρο της εμβέλειας των ηλεκτρικών δυνάμεων μέσα στο πλάσμα. Σύμφωνα με τα παραπάνω για να θεωρείται ένα ιονισμένο αέριο πλάσμα θα πρέπει οι μακροσκοπικές του διαστάσεις, L, να είναι πολύ μεγαλύτερες από λ_D. Έτσι ορίζεται ποσοτικά η οιονεί ουδετερότητα. Οι διαστάσεις του πλάσματος L θα πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερες από το μήκος Debye, έτσι ώστε αν εμφανιστούν ηλεκτρικά δυναμικά λόγω τοπικών συγκεντρώσεων φορτίου ή λόγω εξωτερικής παρέμβασης, αυτά να απομονωθούν και να αφήσουν το μεγαλύτερο μέρος πρακτικά ανεπηρέαστο από ηλεκτρικές δυνάμεις. Αυτή η κατάσταση δεν είναι πλήρως ουδέτερη διότι τότε δε θα επενεργούσαν ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις, αλλά τέτοια ώστε να μπορεί να οριστεί η πυκνότητα πλάσματος μέσω της σχέσης:

$$n_i \approx n_e \approx n$$

Για να είναι αποδεκτό να μιλάμε για θωράκιση καθώς και για να συμβαίνουν φαινόμενα συλλογικής συμπεριφοράς θα πρέπει ο αριθμός των ηλεκτρονίων μέσα στη σφαίρα Debye να είναι αρκετά μεγάλος. Αν προσεγγίσουμε το πλάσμα ως ιδανικό αέριο πυκνότητας n, ο αριθμός των σωματίων στη σφαίρα με ακτίνα λ_D είναι:

$$N_D = n\frac{4}{3}\pi\lambda_D^3.$$

Έτσι η συλλογική συμπεριφορά απαιτεί:

$$N_D \gg 1$$

ή ισοδύναμα:

$$\lambda_D \gg n^{-1/3}.$$

Η τελευταία συνθήκη είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι η δυναμική ενέργεια είναι μικρότερη από την κινητική ώστε η πιθανότητα επανασύνδεσης ιόντων και ηλεκτρονίων να είναι πολύ μικρή και κατά συνέπεια εξασφαλίζει τη διατήρηση της ύλης σε μορφή πλάσματος.

Μία ακόμη συνθήκη είναι απαραίτητη ώστε ένα ιονισμένο αέριο να θεωρείται πλάσμα: Οι κρούσεις των φορτισμένων σωματίων με τα ουδέτερα δε θα πρέπει να είναι συχνές διότι σ' αυτή την περίπτωση η κίνηση των σωματίων υπακούει σε υδροδυναμικές δυνάμεις και όχι σε ηλεκτρομαγνητικές. Έτσι αν ω είναι η συχνότητα ηλεκτρονικών ταλαντώσεων στο πλάσμα που συνδέεται με την αλληλεπίδραση Coulomb (σελ 184 της [1]) και τ ο μέσος χρόνος μεταξύ συγκρούσεων των φορτισμένων με ουδέτερα σωμάτια, τότε για να θεωρηθεί ένα ιονισμένο αέριο σαν πλάσμα θα πρέπει να ισχύει:

$$\omega\tau > 1.$$

Συνοψίζοντας, για να χαρακτηριστεί ένα αέριο ως πλάσμα θα πρέπει να ικανοποιούνται οι τρείς παρακάτω συνθήκες:

1. $L \gg \lambda_D$
2. $N_D \gg 1$
3. $\omega\tau > 1$

1.1.2 Ελεγχόμενη Σύντηξη

Η σημαντικότερη επιδιωκόμενη εφαρμογή του πλάσματος είναι η παραγωγή ενέργειας μέσω θερμοπυρηνικών αντιδράσεων σύντηξης. Μεγάλη προσπάθεια καταβάλλεται παγκοσμίως για την επίτευξη ελεγχόμενης και αυτοσυντηρούμενης σύντηξης η οποία θα οδηγεί στην παραγωγή ενέργειας. Ο πρώτος αντιδραστήρας σύντηξης θα βασίζεται στην αντίδραση:

$$D + T \longrightarrow {}^4He\ (3.5MeV) + n\ (14.1MeV)$$

κι αυτό διότι η ενεργός διατομή σκέδασης της σε θερμοκρασίες που είναι δυνατό να επιτευχθούν είναι μεγαλύτερη από αυτή άλλων αντιδράσεων σύντηξης. Για να επιτευχθεί ο σκοπός της παραγωγής ενέργειας θα πρέπει στο πλάσμα να επικρατούν συγκεκριμένες συνθήκες όσον αφορά την πυκνότητα, τη θερμοκρασία και το χρόνο περιορισμού της ενέργειας εντός του όγκου του. Ο σκοπός της επίτευξης υψηλής πυκνότητας και θερμοκρασίας καθώς και μεγάλου χρόνου περιορισμού της ενέργειας απαιτεί την ικανοποίηση του κριτηρίου της ανάφλεξης που για την αντίδραση $D-T$ και για θερμοκρασία 10 keV γράφεται:

$$n\tau_E \geq 3 \times 10^{14}\ cm^{-3}\ sec.$$

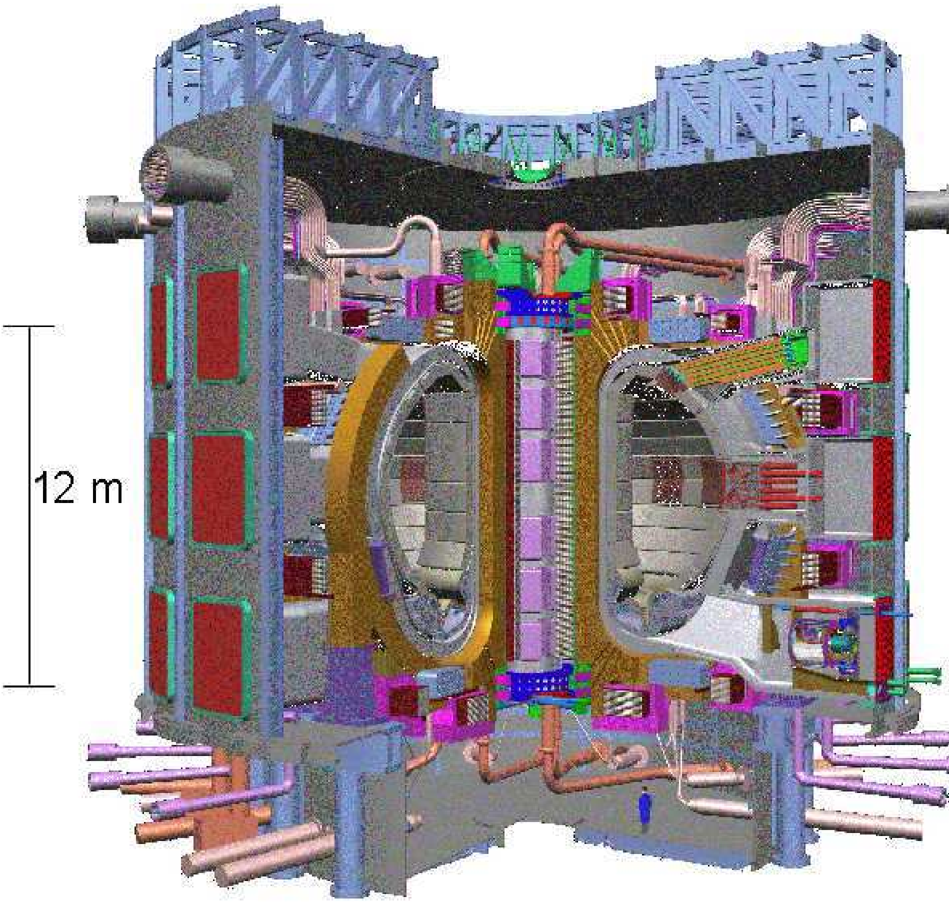
Το ίσον στη σχέση αυτή συνδέεται με την απαίτηση η κατάσταση περιορισμού να συντηρείται από την κινητική ενέργεια των παραγόμενων πυρήνων ηλίου καλύπτοντας τις απώλειες ενέργειας λόγω ακτινοβολίας και άλλων αιτίων και επιπλέον θερμαίνοντας το πλάσμα. Για τον χωρικό περιορισμό του πλάσματος χρησιμοποιούνται κυρίως ισχυρά μαγνητικά πεδία αλλά και ισχυρές δέσμες laser. Η έρευνα για την θερμοπυρηνική σύντηξη έχει επικεντρωθεί κυρίως στο μαγνητικό περιορισμό, οπότε κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν κάποια από τα ζητήματα σχετικά με αυτόν. Η θέρμανση επιτυγχάνεται Ωμικά μέσω του φαινομένου Joule λόγω του ρεύματος που διαρρέει το ίδιο το πλάσμα, με ακτινοβολία καθώς και με εμβολή δεσμών ουδέτερων σωματιδίων. Το θέμα του περιορισμού της ενέργειας έχει τύχει μεγάλης προσοχής τα τελευταία χρόνια με αποτέλεσμα να έχουν αναγνωριστεί βελτιωμένοι τρόποι περιορισμού (improved confinement modes) μέσω φραγμάτων μεταφοράς όπως η μετάβαση από χαμηλό τρόπο περιορισμού σε υψηλό (L-H transition) ή τα εσωτερικά φράγματα μεταφοράς (Internal Transport Barriers). Οι βελτιωμένοι τρόποι περιορισμού συμβάλλουν και στο χωρικό περιορισμό του πλάσματος. Περισσότερα στοιχεία για αυτούς στα εδάφια 1.4.1 και 1.4.2. Το πεδίο έρευνας στη φυσική πλάσματος σύντηξης αφορά τον καθορισμό καταστάσεων ισορροπίας (με την έννοια της μηχανικής, αλλά όχι της θερμοδυναμικής), τη σταθερότητα αυτών, τη μελέτη φαινομένων μεταφοράς, τη θέρμανση του, τον ανεφοδιασμό με πυρήνες προς σύντηξη και άλλα ζητήματα τεχνολογικής φύσεως όπως για παράδειγμα η δημιουργία ισχυρών μαγνητικών πεδίων (1-10T) ή η ανάπτυξη υλικών κατάλληλων για τα τοιχώματα του αντιδραστήρα.

Το ζήτημα του χωρικού περιορισμού του πλάσματος σύντηξης ήταν το πρώτο που απασχόλησε τους ερευνητές και συγκεκριμένα ο περιορισμός με μαγνητικά πεδία. Τα πρώτα συστήματα είχαν κυλινδρική μορφή, ενώ η προσπάθεια απαλοιφής μειονεκτημάτων, όπως οι απώλειες από τα άκρα τους, οδήγησε σε κλειστά τοροειδή συστήματα όπως τα tokamak και τα stellarator ή διάφορες παραλλαγές αυτών. Σήμερα αν και έρευνα διεξάγεται και στην κατεύθυνση του περιορισμού με laser περισσότερο υποσχόμενος, όσον αφορά την ελεγχόμενη σύντηξη, εμφανίζεται ο μαγνητικός περιορισμός. Ο κύριος υποψήφιος για την κατασκευή ενός πρότυπου αντιδραστήρα σύντηξης είναι το tokamak (σχήμα 1.1). Το σχήμα του είναι τοροειδές και ορίζονται δύο διευθύνσεις, κατά μήκος του τόρου η τοροειδής (toroidal) και κάθετα σε αυτή η πολοειδής (poloidal). Σε σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων οι δύο διευθύνσεις αντιστοιχούν στις γωνίες θ και ϕ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2. Ο ορισμός αυτών των δύο διευθύνσεων συνδέεται με το γεγονός ότι έχει αποδειχτεί η αναγκαιότητα ύπαρξης μαγνητικού πεδίου και στις δύο αυτές διευθύνσεις ώστε να επιτευχθεί περιορισμός του πλάσματος. Μια παράμετρος που παίζει σημαντικό ρόλο στην ισορροπία και σταθερότητα των τοροειδών συστημάτων είναι ο λόγος όψης (aspect ratio)[1] ο οποίος ορίζεται ως το πηλίκο της τοροειδούς ακτίνας ως προς την πολοειδή (δες και σχήμα 1.2):

$$\alpha = \frac{R}{r}$$

Σε ένα tokamak η τοροειδής συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου δημιουργείται από εξωτερικά πηνία, ενώ η πολοειδής από το ηλεκτρικό ρεύμα του πλάσματος στη τοροειδή διεύθυνση το οποίο δημιουργείται επαγωγικά. Δηλαδή,

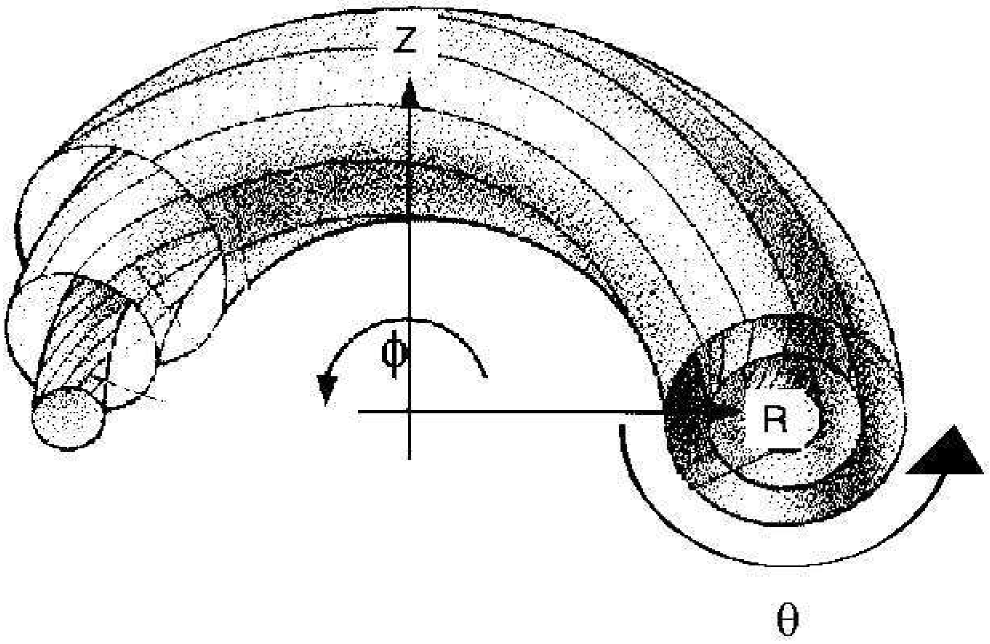
[1] Ο όρος λόγος όψης είναι ακριβής μετάφραση του Αγγλικού. Εναλλακτικά θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν οι: λόγος ακτίνων των διατομών ή διάταμα.



Σχήμα 1.1: Σχηματική αναπαράσταση του ITER ενός tokamak που πιστεύεται ότι θα αποτελέσει το προοίμιο ενός αντιδραστήρα σύντηξης και το οποίο αναμένεται να κατασκευαστεί με παγκόσμια συγχρηματοδότηση.

το πλάσμα σε αυτή την περίπτωση παίζει το ρόλο του δευτερεύοντος πηνίου ενός μετασχηματιστή. Προφανώς το tokamak λειτουργεί παλμικά, πράγμα που δεν είναι επιθυμητό για έναν αντιδραστήρα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας γι΄ αυτό και πραγματοποιείται έρευνα πρός την κατεύθυνση παραγωγής μη επαγωγικού ρεύματος (non-inductive) και κατά συνέπεια επίτευξης σταθερής λειτουργίας (steady state) μέσω και των βελτιωμένων τρόπων περιορισμού.

Ο μαγνητικός περιορισμός του πλάσματος βασίζεται στην εξισορρόπηση των δυνάμεων που επενεργούν σ΄ αυτό από τις μαγνητικές δυνάμεις. Συγκεκριμέ-



Σχήμα 1.2: Η γεωμετρία μιας κλειστής, αξονικά συμμετρικής τοροειδούς διάταξης με τις διευθύνσεις να εκφράζονται σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Ο άξονας z είναι ο άξονας συμμετρίας, θ και ϕ η τοροειδής και πολοειδής διεύθυνση αντίστοιχα. Οι κλειστές επιφάνειες που φαίνονται στο σχήμα είναι οι μαγνητικές επιφάνειες. Το χαρακτηριστικό τους είναι το ότι οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι εφαπτομενικό σ' αυτές.

να, θεωρώντας την περίπτωση MHD ισορροπίας χωρίς ροή (δες εδάφιο 1.2 για περισσότερες λεπτομέρειες όσον αφορά το MHD μοντέλο), θα πρέπει να ικανοποιείται η εξίσωση ορμής:

$$\vec{\nabla} P = \vec{J} \times \vec{B}, \tag{1.1}$$

η οποία δηλώνει ότι η δύναμη λόγω της βαθμίδας πίεσης πρέπει να εξισορροπείται από την μαγνητική δύναμη Lorentz. Από αυτή προκύπτει ακόμα ότι το ρεύμα και το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι κάθετα ως προς τη βαθμίδα πίεσης. Σε κυλινδρική γεωμετρία αυτή η εξισορρόπηση είναι στην ακτινική διεύθυνση και ουσιαστικά είναι η εξισορρόπηση της βαθμίδας πίεσης, που θα είχε σαν αποτέλεσμα την αύξηση της ακτίνας του κυλίνδρου, από τη μαγνητική δύναμη, ενώ σε τοροειδή γεωμετρία η κατάσταση διαφοροποιείται. Συγκεκριμένα στη τελευταία περίπτωση η επίτευξη τοροειδούς ισορροπίας χωρίζεται, σε πολύ καλή προσέγγιση, σε δύο μέρη. Πρώτα, ο μαγνητικός σχηματισμός θα πρέπει να παρέχει περιορισμό ακτινικά στο πολοειδές επίπεδο, όπως και στην περίπτωση κυλινδρικής συμμετρίας. Δεύτερο, θα πρέπει να περιορίζεται και η ακτινική διαστολή του τοροειδούς σχηματισμού, δηλαδή η αύξηση της τοροειδούς ακτίνας του σχηματισμού, λόγω της τοροειδούς δακτυλιοειδούς δύναμης (toroidal hoop force) που οφείλεται στη βαθμίδα ολικής πίεσης (μαγνητικής και θερμοδυναμικής). Παρόλο που οι δυνάμεις που προκαλούν τη τοροειδή διαστολή είναι μικρότερες απ΄ ότι αυτές που προκαλούν τη διαστολή στο πολοειδές επίπεδο είναι δυσκολότερο να εξισορροπηθούν. Περισσότερα για το ζήτημα του περιορισμού μπορούν να βρεθούν στις αναφορές [2] και [3].

Η εύρεση καταστάσεων ισορροπίας είναι ένα σκέλος της έρευνας για την επίτευξη του σκοπού παραγωγής ενέργειας μέσω της ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης. Ένα άλλο σκέλος αφορά την μελέτη σταθερότητας αυτών των καταστάσεων έναντι των αναπόφευκτων ασταθειών που αναπτύσσονται στο πλάσμα. Η ανάπτυξη ασταθειών οφείλεται στο γεγονός ότι όταν συζητούμε για ισορροπία το πλάσμα δεν βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής αλλά μηχανικής ισορροπίας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η εσωτερική του ενέργεια να μην εμφανίζει ελάχιστο και έτσι να είναι δυνατό να τροφοδοτηθούν αστάθειες. Οι ισχυρότερες αστάθειες στα tokamak περιγράφονται από το MHD μοντέλο (δες εδάφιο 1.2) και κύρια προκαλούνται από υψηλές τιμές των βαθμίδων πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος και πίεσης σε συνδυασμό με αρνητική καμπυλότητα του μαγνητικού πεδίου[2]. Εκτός των MHD ασταθειών υπάρχουν βεβαιώς και άλλες, οι οποίες απαντώνται και στην υδροδυναμική. Παράδειγμα αποτελεί η αστάθεια ανταλλαγής που είναι η αντίστοιχη της υδροδυναμικής Rayleigh-Taylor για μαγνητισμένο πλάσμα. Οι MHD αστάθειες μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες με βάση την εξάρτηση τους από την ειδική αντίσταση του πλάσματος:

1. «Ιδανικές αστάθειες» (ideal modes)

[2]Η αρνητική καμπυλότητα αναφέρεται στην περίπτωση που η κοίλη πλευρά των μαγνητικών επιφανειών (επιφάνειες πάνω στις οποίες το μαγνητικό πεδίο είναι εφαπτομενικό) είναι προς το μέρος του πλάσματος όπως συμβαίνει στην εξωτερική πλευρά ενός tokamak (δες σχήμα 1.2). Θεωρούμε πάντοτε ότι η πίεση του πλάσματος είναι μεγαλύτερη στο κέντρο του, οπότε η βαθμίδα πίεσης κατευθύνεται από την επιφάνεια προς αυτό.

Αστάθειες οι οποίες εμφανίζονται ακόμη κι αν η ειδική αντίσταση του πλάσματος είναι μηδενική.

2. «Αγώγιμες αστάθειες» (resistive modes)
Αστάθειες οι οποίες εμφανίζονται στην περίπτωση πεπερασμένης ειδικής αντίστασης. Στις «αγώγιμες» αστάθειες περιλαμβάνονται και οι «ιδανικές» μιας και η πηγή της ενέργειας που τροφοδοτεί τις αστάθειες παραμένει όταν ο περιορισμός της μηδενικής ειδικής αντίστασης δεν υπάρχει.

Εδώ ας σημειωθεί πως η κλίμακα του χρόνου ανάπτυξης των δύο κατηγοριών διαφέρει. Συγκεκριμένα, οι «ιδανικές» αστάθειες έχουν πολύ μικρούς χρόνους ανάπτυξης σε σύγκριση με τις «αγώγιμες» μιας και για να γίνουν σημαντικά τα φαινόμενα απόσβεσης λόγω πεπερασμένης ειδικής αντίστασης απαιτείται κάποιος χρόνος.

Οι μελέτες σταθερότητας μπορούν να πραγματοποιηθούν είτε στα πλαίσια γραμμικής θεωρίας είτε μη γραμμικής. Η μελέτη σταθερότητας βασίζεται στις ακόλουθες τρείς βασικές διαδικασίες:

1. *Η ενεργειακή αρχή*, κατά την οποία υπολογίζεται η αλλαγή στη δυναμική ενέργεια λόγω μιας μετατόπισης του πλάσματος στο χώρο.

2. Υπολογισμος των ιδιοσυναρτήσεων και των ιδιοσυχνοτήτων της της αστάθειας. Το πρόσημο του φανταστικού μέρους της ιδιοσυχνότητας καθορίζει την ευστάθεια.

3. Επίλυση της οριακής εξίσωσης ευστάθειας (το φανταστικό μέρος της ιδιοσυχνότητας είναι μηδέν.

Η βασική μέθοδος για να εξεταστεί η μελέτη σταθερότητας ενός συστήματος είναι η εξέταση της συμπεριφοράς διαταραχών από την κατάσταση ισορροπίας. Η γραμμική μελέτη καθορίζεται από την μελέτη της συμπεριφοράς πολύ μικρών διαταραχών γύρω από καταστάσεις ισορροπίας που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. Εναλλακτικά στην περίπτωση των «ιδανικών» ασταθειών μπορεί να υπολογιστεί η αλλαγή στη δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση του πλάσματος στο χώρο. Σε αυτή την περίπτωση το πλάσμα είναι ασταθές σε κάθε μετατόπιση που κάνει την αλλαγή στη δυναμική ενέργεια αρνητική. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι οι περισσότερες θεωρητικές μελέτες που αφορούν ευστάθεια έχουν πραγματοποιηθεί για στατικές ισορροπίες (δηλαδή χωρις ροή του πλάσματος). Αυτό συμβαίνει διότι αφενός η σημασία της ροής για την επίτευξη υψηλού τρόπου περιορισμού αναδείχτηκε τα τελευταία είκοσι χρόνια και αφετέρου διότι το πρόβλημα της σταθερότητας με ροή, ιδιαίτερα σε ρεαλιστικές γεωμετρίες, παρουσιάζει πάρα πολλές δυσκολίες από μαθηματικής απόψεως.

Κλείνοντας την αναφορά στις αστάθειες κρίνεται σκόπιμο να ανφερθούν ως παραδείγματα κύριων μορφών επικίνδυνων ασταθειών στα toakamak οι παρακάτω:

1. Αστάθεια «λαιμού» (kink instability), είτε εσωτερική είτε εξωτερική και οι αντίστοιχες «αγώγιμες» «απόσχισης» (tearing mode) και $m = 1$ (resistive $m = 1$ instability). Ο χαρακτηρισμός ως εσωτερική ή εξωτερική εξαρτάται από το αν το πλάσμα έρχεται σε επαφή με σταθερό αγώγιμο τοίχωμα ή αν μεταξύ του πλάσματος και του τοιχώματος παρεμβάλλεται περιοχή μαγνητικού πεδίου κενού.

2. Αστάθεια «μπαλονιού» (ballooning modes).

Πρέπει να γίνει σαφές ότι κάποιες αστάθειες είναι πολύ επικίνδυνες για τον περιορισμό του πλάσματος αφού, υπό ορισμένες συνθήκες, μπορούν να οδηγήσουν σε κατάρρευση του συστήματος.

Η ποιότητα του περιορισμού του πλάσματος εκτιμάται μέσω κάποιων παραμέτρων όπως είναι η παράμετρος β και ο παράγοντας ασφάλειας q. Η παράμετρος β μετράει την ικανότητα του μαγνητικού πεδίου να περιορίσει το πλάσμα στον επιθυμητό χώρο και είναι ουσιαστικά ο λόγος της πυκνότητας της θερμικής ενέργειας προς την αντίστοιχη της μαγνητικής ενέργειας. Με τον παράγοντα ασφάλειας εκτιμάται η ποιότητα του περιορισμού ως προς τη σταθερότητα. Ο παράγοντας ασφάλειας ορίζεται ώς ο αριθμός των περιελίξεων μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής στη τοροειδή διεύθυνση προς τον αντίστοιχο αριθμό στην πολοειδή διεύθυνση στο όριο που η δυναμική γραμμή πραγματοποιεί άπειρους κύκλους στη τοροειδή διεύθυνση:

$$q \equiv \lim \frac{\text{περιελίξεις στη τοροειδή διεύθυνση}}{\text{περιελίξεις στην πολοειδή διεύθυνση}}.$$

Επειδή οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται η τιμή του παράγοντα ασφάλειας είναι η ίδια για κάθε γραμμή πάνω σε κάθε μια μαγνητική επιφάνεια, δηλαδή ο q είναι ποσότητα επιφανείας. Ο παράγοντας ασφάλειας συνήθως υπολογίζεται ως η μεταβολή της μαγνητικής ροής στη τοροειδή διεύθυνση ως προς τη μαγνητική ροή στη πολοειδή διεύθυνση με βάση τη σχέση (για μια απόδειξη της σχέσης ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [4]):

$$q(V) \equiv \frac{d\psi_t}{d\psi_p}$$

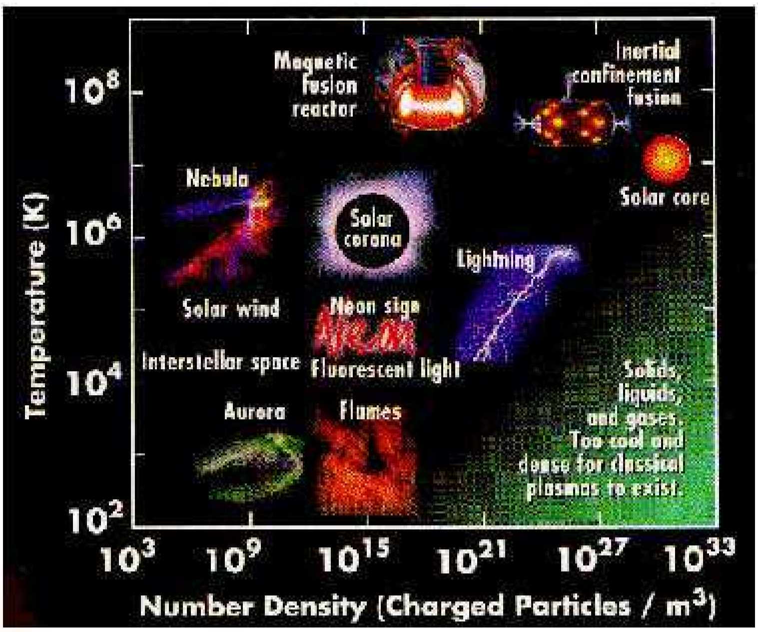
Έχει αποδειχθεί ότι για στατική ισορροπία, δηλαδή ισορροπία χωρίς μακροσκοπική ροή μάζας, οι τιμές του πρέπει να είναι ίσες ή μεγαλύτερες από τη μονάδα (όριο Kruskal-Shafranov) [2], ενώ προκύπτει πειραματικά [5] καθώς και αριθμητικά για κυλινδρική γεωμετρία [6] ότι πρέπει να είναι μεγαλύτερες από δύο. Το profile του παράγοντα ασφάλειας φαίνεται να παίζει ρόλο στο σχηματισμό των εσωτερικών φραγμάτων μεταφοράς. Περισσότερα για αυτό το θέμα συζητιούνται στο εδάφιο 1.4.2.

1.2 Μοντέλα περιγραφής του πλάσματος σύντηξης

Το πλάσμα, εξ' αιτίας του μεγάλου εύρους συνθηκών πυκνότητας και θερμοκρασίας στις οποίες μπορεί να υπάρξει (σχήμα 1.3), κάνει δύσκολη την επιλογή ενός μοναδικού μοντέλου για την περιγραφή του. Το πλάσμα σύντηξης, που αφορά την παρούσα εργασία, είναι ένα κλασσικό, οριακά μη σχετικιστικό σύστημα. Εκτός του χρησιμοποιούμενου μοντέλου θα πρέπει να καθοριστούν και οι αλληλεπιδράσεις που θα συμπεριληφθούν σ' αυτό. Για παράδειγμα η βαρυτική δύναμη δεν μπορεί να αγνοηθεί στην περίπτωση του αστροφυσικού πλάσματος, ενώ στην περίπτωση του εργαστηριακού είναι αμελητέα. Αυτό συμβαίνει διότι το αστροφυσικό πλάσμα συνήθως έχει πολύ μεγάλη μάζα κάτι που δε συμβαίνει με το εργαστηριακό όπου οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις κυριαρχούν. Έτσι το πόσο επιτυχημένο είναι ένα μοντέλο εξαρτάται από το αν οι υποθέσεις που έχουν χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή του ικανοποιούνται για το υπό μελέτη σύστημα.

Μια αρκετά ακριβή περιγραφή παρέχει η κινητική θεωρία, στα πλαίσια της οποίας το πλάσμα μελετάται ως ένα κλασσικό αέριο με τη διαφορά ότι οι δυνάμεις μεταξύ των σωματιδίων είναι ηλεκτρομαγνητικής φύσεως και όχι μηχανικής. Βασική ποσότητα στα πλαίσια της κινητικής θεωρίας είναι η συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων. Η κινητική θεωρία, αν και δίνει απαντήσεις σε φαινόμενα που διαφορετικά δε θα μπορούσαν να ερμηνευθούν[3], όταν εφαρμόζεται σε ρεαλιστικές γεωμετρίες και πεδία γίνεται πολύ δύσκολη στην εφαρμογή λόγω μαθηματικών δυσκολιών. Χάνοντας σε πληροφορία, αλλά κάνοντας το περισσότερο πρακτικά εφαρμόσιμο σε σχέση με το παραπάνω, μπορεί να παραχθεί, για πλήρως ιονισμένο πλάσμα, το μοντέλο των δύο ρευστών. Σε αυτό, το πλάσμα θεωρείται ότι αποτελείται από δύο αλληλοϊσχωρούντα ρευστά, το ένα των ιόν-

[3] Για παράδειγμα η απόσβεση Landau.



Σχήμα 1.3: Διάφορες μορφές πλάσματος συναρτήσει της πυκνότητας και της θερμοκρασίας.

των και το άλλο των ηλεκτρονίων. Οι εξισώσεις που περιγράφουν το πλάσμα σε αυτό το μοντέλο, γραμμένες στο Gaussian σύστημα μονάδων θέτοντας τη ταχύτητα του φωτός καθώς και τον παράγοντα 4π μονάδα, είναι οι ακόλουθες:

1. Εξίσωση διατήρησης της μάζας

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{v}_\alpha) = 0. \tag{1.2}$$

2. Εξίσωση διατήρησης της ορμής

$$n_\alpha m_\alpha \Big[\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + (\vec{v}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_\alpha \Big] = q_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \vec{v}_\alpha \times \vec{B}) \vec{\nabla} P_\alpha. \tag{1.3}$$

3. Μια εξίσωση διατήρησης της ενέργειας ή καταστατική εξίσωση.

4. Συνθήκη οιονεί-ουδετερότητας

$$Z_i n_i \approx n_e = n. \tag{1.4}$$

5. Οι εξισώσεις του Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{1.5}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.6}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \tag{1.7}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{1.8}$$

όπου ο δείκτης α καθορίζει το είδος των σωματιδίων και παίρνει τις τιμές i για τα ιόντα και e για τα ηλεκτρόνια, $d/dt \equiv \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ είναι η ολική παράγωγος (convective derivative), n_α είναι η αριθμητική πυκνότητα, Z_i είναι ο ατομικός αριθμός των ιόντων και q_α το φορτίο κάθε είδους σωματιδίων. Ο υπόλοιπος συμβολισμός στις εξισώσεις (1.2)-(1.8) είναι ο καθιερωμένος. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο νόμος του Gauss (1.7), ο οποίος αντικαθίσταται από τη συνθήκη οιονεί-ουδετερότητας (1.4), αναφέρεται για λόγους πληρότητας και μπορεί να χρησιμοποιηθεί εκ των υστέρων για τον υπολογισμό της πυκνότητας φορτίου.

Απλοποιώντας περαιτέρω το μοντέλο με ότι αυτό συνεπάγεται όσον αφορά την απώλεια πληροφορίας καταλήγουμε στο πιο απλό που ονομάζεται μαγνητοϋδροδυναμική (MHD), στα πλαίσια του οποίου το πλάσμα αντιμετωπίζεται πλέον ως ένα αγώγιμο ρευστό στο οποίο επενεργούν ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις, όπως είναι ο υδράργυρος.

Οι εξισώσεις που αποτελούν το MHD μοντέλο είναι οι εξής:

1. Εξίσωση διατήρησης της μάζας

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{v}) = 0. \tag{1.9}$$

2. Εξίσωση διατήρησης της ορμής

$$\varrho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{J} \times \vec{B} - \vec{\nabla} P. \tag{1.10}$$

3. Μια εξίσωση διατήρησης της ενέργειας ή καταστατική εξίσωση.

4. Ο νόμος του Ohm
$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \overleftrightarrow{\eta} \cdot \vec{J}. \tag{1.11}$$

5. Οι εξισώσεις του Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{1.12}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{1.13}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \tag{1.14}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{1.15}$$

όπου ϱ η πυκνότητα μάζας, $\overleftrightarrow{\eta}$ ο τανυστής της ειδικής αντίστασης του ρευστού και ρ η πυκνότητα φορτίου. Όπως και στην περίπτωση των δύο ρευστών ο νόμος του Gauss χρησιμεύει στον υπολογισμό της κατανομής φορτίου. Σ' αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να γίνουν κάποιες επισημάνσεις όσον αφορά τα μοντέλα των ρευστών. Καταρχάς όροι όπως το ρεύμα μετατόπισης στο νόμο του Amprére αγνοείται κι αυτό διότι συχνότητες με τις οποίες πραγματοποιούνται διάφορες διεργασιές είναι πολύ μικρές. Επίσης για την παραγωγή των μοντέλων έχει υποτεθεί ότι στο πλάσμα η συχνότητα κρούσεων είναι μεγάλη. Αυτή η συνθήκη στο πλάσμα σύντηξης δεν ικανοποιείται μιας και ισχύει:

$$\nu_{ie} \propto T^{-3/2}$$

όπου ν_{ie} η συχνότητα κρούσεων μεταξύ ιόντων και ηλεκτρονίων. Άρα θα μπορούσε κανείς να πεί πως η περιγραφή του πλάσματος ως ρευστό αποκλείει το πλάσμα σύντηξης. Παρ' όλα αυτά φαίνεται ότι το το πλάσμα σύντηξης περιγράφεται αρκετά καλά ως ρευστό. Αυτό συμβαίνει διότι κάθετα στο μαγνητικό πεδίο το ρόλο των κρούσεων παίζει η γυροκίνηση, ενώ όσον αφορά την παράλληλη σε αυτό διεύθυνση, επειδή οι κινήσεις ενδιαφέροντος είναι ασυμπίεστες, οι εξισώσεις ορμής και ενέργειας δεν παίζουν σημαντικό ρόλο. Για την παραγωγή του μοντέλου της MHD από αυτό των δύο ρευστών ο αναγνώστης παραπέμπεται στις αναφορές [2, 1]. Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα δύο προαναφερόμενα μοντέλα περιγραφής του πλάσματος μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία [2, 1, 7].

Όπως προαναφέρθηκε και στα δύο μοντέλα περιλαμβάνεται και μία εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, η οποία εν γένει είναι πολύπλοκη, ή μια καταστατική εξίσωση. Αυτή απαιτείται ώστε η μελέτη του πλάσματος να γίνει κατά αυτο-συνεπή τρόπο. Σχετικά απλές εξισώσεις ενέργειας με εφαρμογή στο πλάσμα σύντηξης, οι οποίες υιοθετούνται και στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, είναι οι:

$$\frac{dS_\alpha}{dt} = 0$$

και

$$\frac{dT_\alpha}{dt} = 0,$$

όπου S είναι η εντροπία και T η θερμοκρασία του εκάστοτε ρευστού (υπενθυμίζεται ότι ο δείκτης α δηλώνει το είδος των σωματιδίων). Αντίστοιχες εξισώσεις ισχύουν για την περίπτωση της MHD. Η επιλογή ισόθερμων μαγνητικών επιφανειών δικαιολογείται από το γεγονός ότι κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών του πεδίου τα σωματίδια κινούνται χωρίς την επίδραση κάποιας δύναμης, οπότε η θερμική αγωγιμότητα είναι πολύ μεγάλη. Εναλλακτικά, μια καταστατική εξίσωση η οποία επίσης χρησιμοποιείται στις στάσιμες καταστάσεις ισορροπίας (καταστάσεις με ροή μάζας) είναι η συνθήκη ασυμπιεστότητας $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω η έρευνα του πλάσματος σύντηξης περιλαμβάνει κυρίως την κατασκευή και μελέτη των χαρακτηριστικών των καταστάσεων ισορροπίας, τη σταθερότητα τους και τη μελέτη φαινομένων μεταφοράς. Η παρούσα διατριβή αφορά την κατασκευή και μελέτη καταστάσεων ισορροπίας που σχετίζονται με τους βελτιωμένους τρόπους περιορισμού του πλάσματος σύντηξης. Το βασικό χαρακτηριστικό αυτών των ισορροπιών είναι ότι περιλαμβάνουν μακροσκοπική ροή μάζας του πλάσματος η οποία φέρεται να παίζει σημαντικό ρόλο στους βελτιωμένους τρόπους περιορισμού. Παρακάτω δίνονται οι εξισώσεις που περιγράφουν τις εν λόγω καταστάσεις στα πλαίσια των δύο παραπάνω μοντέλων. Αυτές προκύπτουν από τις γενικές εξισώσεις θετοντας

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0,$$

όπου A οποιαδήποτε ποσότητα.

- Μοντέλο των δύο ρευστών:

$$\vec{\nabla} \cdot (n_\alpha \vec{v}_\alpha) = 0, \tag{1.16}$$
$$m_\alpha n_\alpha (\vec{v}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_\alpha = -\vec{\nabla} P_\alpha + q_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \vec{v}_\alpha \times \vec{B}), \tag{1.17}$$
$$\text{Μια εξίσωση ενέργειας ή καταστατική εξίσωση}, \tag{1.18}$$
$$Z_i n_i \approx n_e = n, \tag{1.19}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \tag{1.20}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{1.21}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha = \vec{J}. \tag{1.22}$$

  Η τελευταία σχέση αποτελεί στην ουσία δύο ξεχωριστές εξισώσεις. Η μία είναι ο νόμος του Ampére, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J}$, ενώ η δεύτερη, $\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha = \vec{J}$ επιτρέπει τον υπολογισμό της πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος κατά αυτοσυνεπή τρόπο μέσω των ταχυτήτων των ρευστών.

- Μαγνητοϋδροδυναμική (MHD):

$$\vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{v}) = 0, \tag{1.23}$$
$$-\vec{\nabla} P + \vec{J} \times \vec{B} = \varrho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}, \tag{1.24}$$
$$\text{Μια εξίσωση ενέργειας ή καταστατική εξίσωση}, \tag{1.25}$$
$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \overleftrightarrow{\eta} \cdot \vec{J}, \tag{1.26}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \tag{1.27}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{1.28}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J}. \tag{1.29}$$

Τονίζεται ότι και στα δύο μοντέλα περιλαμβάνεται στην εξίσωση ορμής ο όρος συναγωγής $[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}]$ που συνδέεται με τη ροή μάζας. Γι' αυτό το λόγο οι καταστάσεις ισορροπίας ονομάζονται στάσιμες.

Μια σύγκριση των εξισώσεων στάσιμης ισορροπίας των δύο μοντέλων οδηγεί στα παρακάτω συμπεράσματα:

1. Στο μοντέλο των δύο ρευστών το ηλεκτρικό πεδίο υπολογίζεται με αυτοσυνεπή τρόπο μέσω της εξίσωσης διατήρησης της ορμής. Στα πλαίσια της MHD αυτό δεν είναι δυνατό διότι το $\vec{E}$ δεν εμφανίζεται στην (1.24).

2. Στο ίδιο μοντέλο η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος υπολογίζεται αυτο-συνεπώς από την εξίσωση (1.22) μέσω των ταχυτήτων των ιόντων και των ηλεκτρονίων.

Εδώ θα πρέπει να γίνει ένα σχόλιο όσον αφορά το MHD μοντέλο και σχετίζεται το νόμο του Ohm. Πολλές φορές το δεξί μέλος της εξίσωσης (1.26) θεωρείται μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η ειδική αντίσταση του πλάσματος είναι μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση το μοντέλο ονομάζεται ιδανικό MHD. Αν και θα δούμε στο επόμενο εδάφιο ότι η ειδική αντίσταση είναι σημαντική για τη διάχυση Pfirsch-Shlüter, το να θεωρηθεί μηδέν είναι, εν γένει, μια καλή προσέγγιση. Αυτό, διότι τα φαινόμενα μεταφοράς που λαμβάνουν χώρα και εξαρτώνται από την ύπαρξη της ηλεκτρικής αντίστασης απαιτούν χρόνο μεγαλύτερο από αυτόν για τον οποίο πραγματοποιούνται οι περισσότερες μελέτες ισορροπίας οπότε και αγνοούνται (αυτό ήταν περισσότερο ακριβές πριν την ανακάλυψη των βελτιωμένων τρόπων περιορισμού μιας και τότε δεν υπήρχε ούτε πειραματικά η δυνατότητα να παρατηρηθούν τέτοια φαινόμενα μεταφοράς λόγω της μικρής διάρκειας των εκκενώσεων). Όλα τα παραπάνω μπορούν να εκφραστούν μέσω του νόμου του Spitzer:

$$\eta \propto T_e^{-3/2}. \tag{1.30}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση σε θερμοκρασίες της τάξης των $10^7 K$ στις οποίες βρίσκεται το πλάσμα σύντηξης, η ειδική αντίσταση μπορεί να θεωρηθεί μηδέν.

1.3 Διάχυση Pfirsch-Shlüter

Η συζήτηση της διάχυσης αυτής γίνεται εισαγωγικά για να βοηθήσει στην κατανόηση των καταστάσεων ισορροπίας της MHD με πεπερασμένη ηλεκτρική αντίσταση που αποτελεί το αντικείμενο του κεφαλαίου 4. Όπως προαναφέρθηκε ένα από τα πεδία ενδιαφέροντος στην έρευνα της φυσικής του πλάσματος σύντηξης είναι και τα φαινόμενα μεταφοράς. Ιδιαίτερα τα φαινόμενα διάχυσης κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες επηρεάζουν άμεσα την πυκνότητα του πλάσματος αλλά και το χρόνο περιορισμού της ενέργειας. Τα σωματίδια τείνουν να εξισορροπήσουν την πίεση και την θερμοκρασία σε όλο τον όγκο του πλάσματος κινούμενα από το εσωτερικό προς το εξωτερικό (κατά κανόνα στον πυρήνα είναι μεγαλύτερες). Σημειώνεται επίσης ότι η διάχυση σε χαμηλές θερμοκρασίες οφείλεται στις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις (κρούσεις) των σωματιδίων που συνδέονται με τη ακτίνα της κίνησης Larmor κάθετα στο μαγνητικό πεδίο (γύρο-ακτίνα).

Η διάχυση λόγω ηλεκτρικής αντίστασης, στην περίπτωση του MHD μοντέλου, κάθετα στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου περιγράφεται από το νόμο του Ohm μαζί με την εξίσωση ορμής που, αγνοώντας τον όρο ροής στην τελευταία, γράφονται:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \overleftrightarrow{\eta} \cdot \vec{J} \tag{1.31}$$

και

$$\vec{J} \times \vec{B} = \vec{\nabla} P, \tag{1.32}$$

όπου η ειδική ηλεκτρική αντίσταση είναι εν γένει ένας τανυστής δεύτερης τάξης με συνιστώσες $\eta_{\|}$ και $\eta_{\perp}$ για ρεύμα παράλληλα και κάθετα στο μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα.

Η ταχύτητα κάθετα στο μαγνητικό πεδίο προκύπτει παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο της (1.31) με το $\vec{B}$ και χρησιμοποιώντας τη (1.32) ώστε να απαλοιφθεί ο όρος $\vec{J} \times \vec{B}$:

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \eta_{\perp} \frac{\vec{\nabla} P}{B^2} \tag{1.33}$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της (1.33) έχει διαχυτική φύση, ενώ ο πρώτος είναι η ταχύτητα ολίσθησης (drift velocity) λόγω του ηλεκτρικού πεδίου.

Η ταχύτητα διάχυσης σε ένα κυκλικής διατομής κύλινδρο είναι στην ακτινική διεύθυνση, οπότε χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z) η εξίσωση (1.33) γράφεται:

$$v_r = \frac{1}{B^2} \left(E_\theta B_z - E_z B_\theta - \eta_{\perp} \frac{dP}{dr} \right). \tag{1.34}$$

Ο όρος

$$(v_r)^{res} = \eta_{\perp} \frac{dP}{dr} \tag{1.35}$$

είναι η διάχυση λόγω της πεπερασμένης ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης.

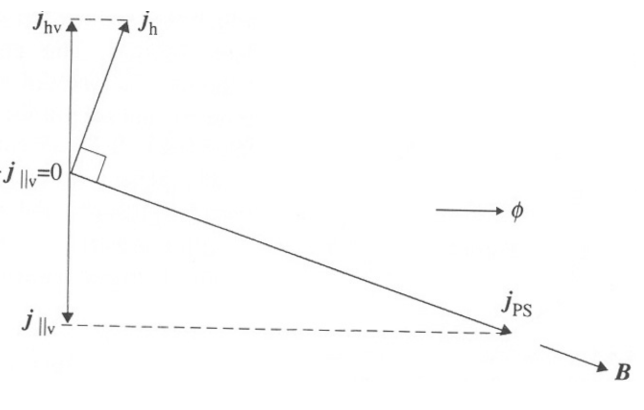
Η διάχυση λόγω ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης σε τοροειδή γεωμετρία είναι περισσότερο περίπλοκη απ΄ ότι σε κυλινδρική. Ο βασικός λόγος είναι η εξασφάλιση ισορροπίας της τοροειδούς γεωμετρίας, δηλαδή η εξισορρόπηση της τοροειδούς δακτυλιοειδούς δύναμης. Αυτή η δύναμη μπορεί να εξισορροπηθεί από μια εσωτερική μαγνητική δύναμη παραγόμενη από ρεύμα οφειλόμενο στη ροή του πλάσματος. Αυτή η ροή υπάρχει μόνο στην περίπτωση τοροειδούς γεωμετρίας και απουσιάζει στην αντίστοιχη κυλινδρικής. Το ρεύμα που απαιτείται για την εξισορρόπηση της τοροειδούς δακτυλιοειδούς δύναμης είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο, δηλαδή είναι ουσιαστικά ένα κατακόρυφο ρεύμα, όπως θα εξηγήσουμε στην επόμενη παράγραφο. Αυτό το ρεύμα θα οδηγούσε σε συσσώρευση φορτίου στο πάνω και κάτω τμήμα του σχηματισμού και έτσι θα καταστρεφόταν η ισορροπία. Η συσσώρευση φορτίου αποφεύγεται μέσω ενός ρεύματος εξισορόπησης το οποίο ρέει κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου και έτσι δεν επηρεάζει την ισορροπία δυνάμεων. Η ύπαρξη αυτού του ρεύματος αποδείχτηκε από τους Pfirsch και Schlüter οι οποίοι έδειξαν ότι μέσω της απόσβεσης του, λόγω πεπερασμένης ειδικής αντίστασης, παίζει σημαντικό ρόλο στη διάχυση του πλάσματος σε ένα τόρο.

Ας υπολογίσουμε το ρεύμα Pfirsch-Schlüter χρησιμοποώντας φυσικά επιχειρήματα. Η πίεση του πλάσματος παραμένει σταθερή πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες, αλλά λόγω της τοροειδούς γεωμετρίας η επιφάνεια του πλάσματος είναι μεγαλύτερη σε μεγαλύτερη ακτινική απόσταση R (δες σχήμα 1.2), οπότε προκύπτει μια συνολική δύναμη στη διεύθυνση της R προς τα έξω:

$$F \sim \frac{r}{R}\frac{dP}{dr}.$$

Αυτή εξισορροπείται από μια δύναμη $\vec{J} \times \vec{B}$. Έτσι το απαραίτητο κάθετο ρεύμα, J_h, που συνδέεται με αυτή τη δύναμη, έχει κατακόρυφη συνιστώσα (δες σχήμα 1.4)

$$J_{hv} \sim -\frac{1}{B}\frac{r}{R}\frac{dP}{dr}. \tag{1.36}$$



Σχήμα 1.4: Σε αυτό το σχήμα φαίνονται οι σχετικές διευθύνσεις των συνιστωσών των ηλεκτρικών ρευμάτων που σχετίζονται με τη διάχυση Pfirsch-Schlüter.

Για να αποφευχθεί η συσσώρευση φορτίου το ρεύμα Pfirsch-Schlüter, J_{PS}, παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι τέτοιο ώστε η κατακόρυφη συνιστώσα του να είναι ίση και αντίθετη με τη J_{hv}. Αφού αυτή η συνιστώσα είναι:

$$J_{\parallel v} \sim \frac{B_p}{B} J_{PS}, \tag{1.37}$$

όπου B_p είναι το πολοειδές μαγνητικό πεδίο, οι εξισώσεις (1.36) και (1.37) δίνουν:

$$J_{PS} \sim -\frac{1}{B_p}\frac{r}{R}\frac{dP}{dr}. \tag{1.38}$$

Η ακριβής έκφραση για πλάσμα κυκλικής διατομής στο όριο πολύ μεγάλου λόγου όψης διαφέρει από τη (1.38) κατά ένα παράγοντα 2 (δες [3]).

Η ταχύτητα ολίσθησης κάθετα στο μαγνητικό πεδίο σε τοροειδή γεωμετρία αντίστοιχη της (1.34) γράφεται (δες [3]):

$$\upsilon_\perp = \frac{B_\phi}{B_p B}\eta_\parallel J_{PS} - \eta_\perp \frac{\nabla_\perp P}{B^2} + \frac{1}{B_p}\left(\frac{\langle E_\phi B_\phi / B_p\rangle}{\langle B^2/B_p\rangle} B_\phi - E_\phi\right), \tag{1.39}$$

όπου η μέση τιμή αναφέρεται πάνω σε μια μαγνητική επιφάνεια. Οι τρείς τελευταίοι όροι στο δεξί μέλος αυτής της εξίσωσης αντιστοιχούν στους όρους της βαθμίδας πίεσης και του ηλεκτρικού πεδίου της κυλινδρικής περίπτωσης της εξίσωσης (1.34). Ο πρώτος όρος είναι ανάλογος του J_{PS} και δίνει τη διάχυση Pfirsch-Schlüter. Για την αντίστοιχη σχέση της (1.35) παίρνοντας μέση τιμή σε μία μαγνητική επιφάνεια προκύπτει:

$$\left(\frac{\langle \upsilon_\perp R\rangle}{R_0}\right)^{res} = -\frac{dP/dr}{B^2}\eta_{eff}, \tag{1.40}$$

όπου

$$\eta_{eff} = \eta_\perp \left(1 + 2\frac{\eta_\parallel}{\eta_\perp} q^2\right), \tag{1.41}$$

με q τον παράγοντα ασφάλειας.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η διάχυση Pfirsch-Schlüter ως αποτέλεσμα παράλληλων ρευμάτων είναι κατά $2q^2\eta_\parallel/\eta_\perp$ μεγαλύτερη από την κυλινδρική συνεισφορά που συνδέεται με κάθετα ρεύματα. Η ύπαρξη τοροειδούς ισορροπίας χωρίς διάχυση Pfirsch-Schlüter είναι δυνατή όπως θα φανεί και στην παρούσα εργασία (δες επίσης [8]). Η τοροειδής δακτυλιοειδής δύναμη μπορεί να εξισορροπηθεί και μέσω κατακόρυφου μαγνητικού πεδίου (πρακτικά αυτό γίνεται στις πειραματικές διατάξεις δες π.χ. [2] σελ. 78). Στην περίπτωση αυτή δεν είναι απαραίτητο το παράλληλο J_{PS}.

Όπως προαναφέρθηκε η αγωγιμότητα είναι εν γένει ένας τανυστής δεύτερης τάξης που συνήθως εκφράζεται μέσω των συνιστωσών της κάθετα και παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο. Πέρα από τη σημασία της για την Ωμική θέρμανση του πλάσματος συνδέεται και με καταστάσεις σταθερής λειτουργίας των tokamak όπου η χρονική κλίμακα είναι μεγαλύτερη από αυτή που απαιτείται για να γίνουν σημαντικά φαινόμενα μεταφοράς (όπως η διάχυση Pfirsch-Schlüter). Οι πρώιμες μελέτες ισορροπίας έγιναν στα πλαίσια του ιδανικού MHD μοντέλου και βασίζονταν στην εξίσωση Grad-Schlüter-Shafranov η οποία περιγράφει καταστάσεις σε αξονικά συμμετρική γεωμετρία. Για τους λόγους που αναφέρθηκαν όμως, μελέτες που περιλαμβάνουν αντίσταση είναι σημαντικές. Θεωρητικά αποδείχθηκε πριν αρκετό καιρό ότι δεν είναι δυνατή η ύπαρξη αξονικά συμμετρικών MHD ισορροπιών με βαθμωτή ηλεκτρική αντίσταση η οποία να παίρνει σταθερή τιμή στις μαγνητικές επιφάνειες [9] και έκτοτε έχει ξανά επιβεβαιωθεί στις αναφορές [10, 11]. Το να εξεταστεί κατά πόσο πρόσθετοι όροι (για παράδειγμα ροής ή ιξώδους) μπορούν να αναιρέσουν την παραπάνω ασυμβατότητα είναι πολύ δύσκολο και γι΄ αυτό είναι καλό η μελέτη να γίνει σε βήματα και σε ειδικές περιπτώσεις. Μελέτες που πραγματοποιήθηκαν με ισοτροπική αγωγιμότητα και είτε αμιγώς τοροειδή [12] είτε παράλληλη στο μαγνητικό πεδίο [13] ταχύτητα ροής έδειξαν ότι αυτή δεν είναι δυνατό να άρει την ασυμβατότητα. Σε αυτές τις περιπτώσεις μη ομοιογενής ειδική αντίσταση πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες είναι απαραίτητη.

1.4 Βελτιωμένοι τρόποι περιορισμού

1.4.1 Υψηλός τρόπος περιορισμού

Ο υψηλός τρόπος περιορισμού (H-mode) και ιδιαίτερα η μετάβαση από χαμηλό τρόπο περιορισμού σε υψηλό (L-H transition) ανακαλύφθηκε σχετικά πρόσφατα σε πείραμα του tokamak ASDEX-Upgrade [14] και είναι ένας από τους πλέον υποσχόμενους βελτιωμένους τρόπους περιορισμού. Πρόκειται για ένα φράγμα μεταφοράς ενέργειας αλλά και σωματιδίων που σχηματίζεται κοντά στην επιφάνεια του πλάσματος (Edge Transport Barrier) και έχει σαν συνέπεια την αύξηση του χρόνου περιορισμού της ενέργειας, τ_E, κατά έναν παράγοντα 2 ή 3 [15].

Ο σχηματισμός του φράγματος έχει συνδεθεί με μακροσκοπική διατμημένη ταχύτητα της ροής μάζας του πλάσματος και ειδικότερα της πολοειδούς συνιστώσας αυτής η οποία εμφανίζεται συνήθως όταν χρησιμοποιούνται πρόσθετοι μέθοδοι θέρμανσης του με εμβολή ενέργειας ή μάζας. Τα βασικά χαρακτηριστικά του υψηλού τρόπου περιορισμού είναι η αύξηση της κλίσης των profile ποσοτήτων όπως η πυκνότητα, η θερμοκρασία και η πίεση κοντά στην επιφάνεια του πλάσματος [16, 17]. Στην ίδια περιοχή ταυτόχρονα εμφανίζεται διατμημένο το profile του ηλεκτρικού πεδίου [18] με αρνητικές τιμές το οποίο αυξάνεται κατ΄ απόλυτη τιμή κατά ή μετά το σχηματισμό του φράγματος [19], ενώ η τύρβη μειώνεται. Ο υψηλός τρόπος περιορισμού, αν και αρχικά παρατηρήθηκε σε tokamak, έχει επιτευχθεί πλέον σε όλους τους τύπους πειραματικών διατάξεων, είτε κλειστής τοπολογίας είτε ανοικτής. Επιπλέον, η δημιουργία του φράγματος φαίνεται ότι δεν επηρεάζεται από το είδος της πρόσθετης θέρμανσης μιας και η μετάβαση έχει παρατηρηθεί για πολλούς τρόπους θέρμανσης (ακτινοβολία κυκλοτρονίου ιόντων, ICRH, ή ηλεκτρονίων, ECRH, εμβολή ουδετέρων δεσμών σωματιδίων, NBI, Ωμική). Λόγω των δύο παραπάνω λόγων η αιτία σχηματισμού του φράγματος θα πρέπει να έχει καθολικότητα. Σοβαρός υποψήφιος ο οποίος έχει αυτή την καθολικότητα είναι η διατμημένη ταχύτητα $\vec{E} \times \vec{B}$. Αυτή οφείλεται στην ύπαρξη μη μηδενικού ηλεκτρικού πεδίου και αντιπροσωπεύει μια κίνηση των στοιχειωδών όγκων του ρευστού με τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου «παγωμένες» εντός αυτών των όγκων. Πιστεύεται ότι η αποσύζευξη των δινο-ρευμάτων από την ταχύτητα $\vec{E} \times \vec{B}$ οδηγεί σε μείωση των συντελεστών μεταφοράς, στο σχηματισμό φράγματος μεταφοράς και κατ΄ επέκταση σε βελτίωση του περιορισμού της ενέργειας. Ένα ερώτημα που απασχόλησε την έρευνα αρχικά ώστε να καταστεί δυνατή η ανάπτυξη μιας θεωρίας για την L-H transition είναι η αλληλουχία των γεγονότων κατά το σχηματισμό του φράγματος: Πρώτα μειώνεται η τύρβη και έπειτα πραγματοποιείται η μεταβολή στα profile των ποσοτήτων, συμβαίνει το αντίθετο ή όλα γίνονται ταυτόχρονα; Μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στο ASDEX [20] αλλά και σε άλλα tokamak [21, 22] δείχνουν ότι πρώτα μειώνονται οι ροές προκαλούμενες από τη τύρβη και έπειτα τα profile των διαφόρων ποσοτήτων αντιδρούν σε αυτή τη μείωση. Αυτό προκύπτει και λόγω των αρχών διατήρησης των σωματιδίων και της ενέργειας αφού θα πρέπει η αλλαγή στις ροές κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου να διαρκέσει για κάποιο εύλογο χρονικό διάστημα πριν τα profile αντιδράσουν σε αυτή.

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, πιστεύεται ότι υπεύθυνη για τη μείωση της τύρβης και τον σχηματισμό του φράγματος μεταφοράς είναι η διατμημένη ταχύτητα $\vec{E} \times \vec{B}$, η οποία εξαρτάται ρητά από το ηλεκτρικό πεδίο οπότε θα πρέπει να μελετηθεί από ποιές ποσότητες εξαρτάται καθώς και η επίδραση τους σε αυτό. Οι ποσότητες από τις οποίες εξαρτάται το ακτινικό (κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες) ηλεκτρικό πεδίο προκύπτει από την αντίστοιχη συνιστώσα της εξίσωσης ισορροπίας. Συγκεκριμένα αν αμεληθεί ο όρος μεταφοράς στην εξίσωση (1.17) προκύπτει η σχέση:

$$E_r = \frac{1}{q_\alpha n_\alpha}\nabla P_\alpha - v_{\theta\alpha}B_\phi + v_{\phi\alpha}B_\theta, \tag{1.42}$$

όπου P_α η μερική πίεση, $v_{\theta\alpha}$ η πολοειδής συνιστώσα και $v_{\phi\alpha}$ η τοροειδής συνιστώσα της μακροσκοπικής ταχύτητας του ρευστού σωματιδίων α. B_θ και B_ϕ είναι η πολοειδής και η τοροειδής συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα. Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει λοιπόν, ότι η μακροσκοπική ροή του πλάσματος παίζει σημαντικό ρόλο στο ηλεκτρικό πεδίο, οπότε και στη ταχύτητα $\vec{E} \times \vec{B}$ η οποία σχετίζεται με την μετάβαση L-H. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση της ιδανικής MHD ο όρος της βαθμίδας πίεσης απουσιάζει από την αντίστοιχη έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο μιας και η τελευταία προκύπτει από το γενικευμένο νόμο του Ohm (Εξ. 1.26):

$$E_r = v_\phi B_\theta - v_\theta B_\phi. \tag{1.43}$$

1.4.2 Εσωτερικά φράγματα μεταφοράς

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, ο έτερος βελτιωμένος τρόπος περιορισμού του πλάσματος σύντηξης είναι τα εσωτερικά φράγματα μεταφοράς (ITB) και τέτοιες καταστάσεις είναι επιθυμητές και περιλαμβάνονται στα βελτιωμένα σενάρια για τη λειτουργία των tokamak, κυρίως όσον αφορά την επίτευξη σταθερής και όχι παλμικής λειτουργίας [23, 24]. Τα ITB είναι σχηματισμοί μέσα στον όγκο του πλάσματος που έχουν παρατηρηθεί σε ακτίνες $0.3r_0 < r < 0.8r_0$, όπου r_0 η ακτίνα της πολοειδούς διατομής και εκτείνονται από ένα πολύ μικρό ποσοστό εως και σε σχεδόν ολόκληρη τη διατομή. Το χαρακτηριστικό που τα κάνει πολύ ενδιαφέροντα είναι ότι στην περιοχή εμφάνισης τους ελαττώνεται η διάχυση της ενέργειας καθώς και των σωματιδίων από τον πυρήνα προς την επιφάνεια του πλάσματος και κατ' αυτό το τρόπο βελτιώνεται ο χρόνος περιορισμού των παραπάνω ποσοτήτων. Ένα επιπλέον όφελος που προκύπτει από την εμφάνιση εσωτερικών φραγμάτων μεταφοράς είναι η βελτίωση της ευστάθειας της ισορροπίας. Πειραματικά ο σχηματισμός τους επιτυγχάνεται με διάφορους τρόπους, όπως είναι η ακτινοβόληση του πλάσματος με κατάλληλες συχνότητες κυκλοτρονίου των ιόντων ή των ηλεκτρονίων, με εμβολή δεσμών ουδετέρων σωματίων, με εισαγωγή στερεών δίσκων καυσίμου ή με την κατάλληλη διαμόρφωση του τρόπου περιορισμού. Η εμφάνιση, όμως των φραγμάτων μεταφοράς μπορεί να γίνει και αυθόρμητα μέσω της δημιουργίας ροών εντοπισμένων σε μία μικρή περιοχή της διατομής (zonal flows) λόγω τύρβης. Εν συντομία τα βασικά τους χαρακτηριστικά, όπως και στον υψηλό τρόπο περιορισμού, είναι profile πυκνότητας, θερμοκρασίας και πίεσης με μεγάλη κλίση στην περιοχή του φράγματος [25] και ακτινικά ηλεκτρικά πεδία συνδεόμενα με διατμημένες ροές μάζας του πλάσματος [26, 27]. Λεπτομερής περιγραφή των βασικών χαρακτηριστικών των ITB γίνεται στην αναφορά [23]. Εδώ θα αναφερθούν κάποια πειραματικά και θεωρητικά αποτελέσματα που αφορούν την εξάρτηση σχηματισμού του φράγματος από διάφορες ποσότητες ισορροπίας.

Ο μηχανισμός που είναι υπεύθυνος για το σχηματισμό των ITB δεν είναι πλήρως κατανοητός, αλλά συνήθως ο σχηματισμός συνδέεται με μη μονοτονικά profile του παράγοντα ασφάλειας [4] [28, 29]. Τα περισσότερα θεωρητικά μοντέλα βασίζονται στην μείωση των φαινομένων μεταφοράς προκαλούμενα από μικροαστάθειες υποστηριζόμενα από πειραματικές παρατηρήσεις που δείχνουν την καταστολή των μικροασταθειών κοντά στα φράγματα [30]. Πιστεύεται ότι η ροή μάζας, το ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο, η διάτμηση του και περισσότερο η διάτμηση της ταχύτητας $\vec{E} \times \vec{B}$ [30] παίζουν ρόλο στο σχηματισμό των φραγμάτων μέσω της αποσύζευξης των καταστάσεων (modes) στις διαδοχικές μαγνητικές επιφάνειες που έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της διάχυσης προς την επιφάνεια του πλάσματος σωματιδίων και ενέργειας [24, 31, 32]. Στην προσπάθεια επίτευξης σταθερής κατάστασης λειτουργίας του tokamak έχουν επιτευχθεί χρόνοι διατήρησης της ισορροπίας με ITB έως 11 δευτερόλεπτα σε διαφορετικές συσκευές όπως στο JT-60U [33], στο Tore Supra [34] και στο JET [35].

Είδαμε ότι για την επίτευξη και των δύο βελτιωμένων τρόπων περιορισμού το ηλεκτρικό πεδίο φαίνεται να παίζει ρόλο, είτε το ίδιο (H-mode) είτε η διάτμηση του (ITB). Οι σχέσεις (1.42) και (1.43) μας επιτρέπουν να εξετάσουμε εξ' αρχής τους παράγοντες από τους οποίους αυτό εξαρτάται. Από τη σχέση (1.42) βλέπουμε ότι στο ηλεκτρικό πεδίο συνεισφέρουν τρείς όροι:

- Ο πρώτος όρος στα πλαίσια του μοντέλου των δύο ρευστών προέρχεται από την μερική πίεση των σωματιδίων τύπου α που αποτελούν το πλάσμα. Αυτός ο όρος απουσιάζει στο μοντέλο της MHD.

[4]Μη μονοτονικό profile του παράγοντα ασφάλειας αντιστοιχεί σε σχηματισμό με αρνητική μαγνητική διάτμηση (magnetic shear). Η μαγνητική διάτμηση είναι μέτρο της αλλαγής της κλίσης των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου από μία μαγνητική επιφάνεια σε άλλη. Αυτή η αλλαγή μπορεί να οφείλεται είτε στη μεταβολή του μέτρου του μαγνητικού πεδίου είτε στη μεταβολή της διεύθυνσης του. Όταν η κλίση αυξάνεται τότε η μαγνητική διάτμηση είναι θετική και το αντίστροφο.

Οι δύο όροι που περιέχουν τη ροή είναι κοινοί και στα δύο μοντέλα και συγκεκριμένα:

- Ο πρώτος όρος ροής περιέχει τη τοροειδή συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου και την πολοειδή συνιστώσα της ταχύτητας μακροσκοπικής ροής.
- Ο δεύτερος όρος ροής περιέχει τη πολοειδή συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου και την τοροειδή συνιστώσα της ταχύτητας μακροσκοπικής ροής.

Κατά συνέπεια η ροή συνεισφέρει στο ηλεκτρικό πεδίο και κατ΄ επέκταση επηρεάζει με τον ένα ή τον άλλο τρόπο το σχηματισμό των φραγμάτων είτε στην επιφάνεια (H-mode) είτε στο εσωτερικό (ITB) του πλάσματος βελτιώνοντας το χρόνο περιορισμού της ενέργειας και των σωματιδίων. Επομένως είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί η επίδραση της μακροσκοπικής ροής μάζας τόσο στα πλαίσια της MHD όσο και στα πλαίσια των δύο ρευστών. Μια MHD μελέτη αποτέλεσε το αντικείμενο του ΜΔΕ [7], ενώ η αντίστοιχη στα πλαίσια των δύο ρευστών αποτελεί το αντικείμενο του κεφαλαίου 2. Επιπλέον όπως δείχνεται στο κεφάλαιο 4 η ροή μπορεί να αλλάξει τη μαγνητική τοπολογία σε αξονικά συμμετρικούς σχηματισμούς.

1.5 Σκοπός και οργανόγραμμα της εργασίας

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι ο αναλυτικός προσδιορισμός συμμετρικών καταστάσεων ισορροπίας tokamak με διατμημένη ταχύτητα ροής και να εξεταστεί η επίδρασή της και του λόγου όψης, που συνδέεται με τη τοροειδή γεωμετρία (toroidicity), στα χαρακτηριστικά των καταστάσεων αυτών. Τα μοντέλα περιγραφής του πλάσματος που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία είναι το μοντέλο των δύο ρευστών και η MHD (ιδανική και με πεπερασμένη ειδική ηλεκτρική αντίσταση). Θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι παρόλο που τα μοντέλα αυτά περιγράφουν αρκετά καλά το πλάσμα, υπό την έννοια ότι τα συμπεράσματα στα πλαίσια αυτών των μοντέλων είναι γενικά αξιόπιστα, παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον και χρησιμοποιούνται ευρέως δεν παρέχουν πλήρη περιγραφή. Όπως προαναφέρθηκε όμως, η επίκληση πιο βασικών μοντέλων, π.χ. κινητικής θεωρίας, στις πολύπλοκες γεωμετρίες των συστημάτων μαγνητικού περιορισμού, τα καθιστά πρακτικά δύσχρηστα. Κίνητρο της εργασίας αποτέλεσαν ερευνητικά αποτελέσματα τα οποία καταδεικνύουν το ρόλο της ροής στο σχηματισμό φραγμάτων μεταφοράς όπως συζητήθηκε στα εδάφια 1.4.1

και 1.4.2 και κατά συνέπεια στην επίτευξη βελτιωμένου τρόπου περιορισμού που μπορεί να περιλαμβάνεται στη λειτουργία αντιδραστήρων tokamak παραγωγής ενέργειας. Συγκεκριμένα η εργασία έχει τους ακόλουθους τρεις στόχους:

1. Να εξεταστεί η επίδραση της ροής και της αρνητικής μαγνητικής διάτμησης στις ποσότητες ισορροπίας και ειδικότερα σε αυτές που σχετίζονται με το σχηματισμό φραγμάτων μεταφοράς (ηλεκτρικό πεδίο και διάτμηση του καθώς και ταχύτητα $\vec{E} \times \vec{B}$) στα πλαίσια του μοντέλου των δύο ρευστών στο όριο απείρου λόγου όψης.

2. Να μελετηθεί η επίδραση που έχει η τοροειδής ροή καθώς και ο λόγος όψης στη μαγνητική τοπολογία ενός αξονικά συμμετρικού συστήματος στα πλαίσια της ιδανικής MHD.

3. Τέλος να παραχθούν ανηγμένες εξισώσεις ισορροπίας αξονικά συμμετρικού συστήματος στα πλαίσια της MHD με πεπερασμένη αγωγιμότητα και αμιγώς τοροειδή ροή. Να κατασκευαστούν ακριβείς, αναλυτικές λύσεις για tokamak και να εξεταστεί με τη βοήθεια τους η επίδραση της ροής σε διάφορες ποσότητες ισορροπίας συμπεριλαμβανομένων των συνιστωσών $\eta_{\parallel}$ και $\eta_{\perp}$ του τανυστή ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης.

Πρέπει να σημειωθεί πως η χρησιμοποιούμενη γεωμετρία αν και έχει εφαρμογή στα tokamak διαφέρει από την πραγματική. Αυτό έγινε διότι η εργασία, αν και είναι σχετική με την εφαρμοσμένη έρευνα, σκοπό είχε την κατανόηση βασικών φαινομένων του μαγνητικού περιορισμού του πλάσματος σύντηξης, όπως η συνεργατικότητα διατμημένης ροής και αρνητικής μαγνητικής διάτμησης στο σχηματισμό φραγμάτων μεταφοράς και η, προκαλούμενη από τη ροή, αλλαγή μαγνητικής τοπολογίας. Επιλέχθηκαν, έτσι, σχετικά απλές γεωμετρίες ώστε η μελέτη να πραγματοποιηθεί με αυτοσυνέπεια και οι λύσεις των εξισώσεων ισορροπίας να είναι ακριβείς και αναλυτικές. Οι ακριβείς και αναλυτικές λύσεις μπορεί να μην εκφράζουν πλήρως το πλάσμα σε μία περίπλοκη γεωμετρία όπως αυτή των διατάξεων μαγνητικού περιορισμού, όμως παρέχουν πολύτιμη πληροφορία για τη φυσική του συστήματος. Βέβαια, η επιλογή της γεωμετρίας σχετίζεται με το χρησιμοποιούμενο μοντέλο. Όσο πιο βασικό το μοντέλο τόσο πιο απλή η γεωμετρία. Για παράδειγμα στο κεφάλαιο 2 η κυλινδρική συμμετρία αγνοεί φαινόμενα που σχετίζονται με το τοροειδές σχήμα αλλά και το σχήμα της πολοειδούς διατομής. Σε αυτή την περίπτωση όμως, οι εξισώσεις ισορροπίας του μοντέλου των δύο ρευστών θα γίνονταν περισσότερο περίπλοκες με πιθανό αποτέλεσμα τη δύσκολη εξαγωγή συμπερασμάτων και τη μη ύπαρξη αναλυτικών λύσεων. Αντίστοιχα, στα κεφάλαια 3 και 4, όπου χρησιμοποιείται το πιο απλό μοντέλο της MHD η γεωμετρία είναι τοροειδής. Σε αυτά τα κεφάλαια θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ελλειπτική πολοειδής διατομή ή σχήματος D, η οποία είναι περισσότερο ρεαλιστική από την ορθογώνια. Το αποτέλεσμα και εδώ θα ήταν η δυσκολία εξαγωγής συμπερασμάτων αλλά και η μη ύπαρξη ακριβών λύσεων μιας και αυτές θα εκφράζονταν σε μορφή σειράς αλλά και λόγω αριθμητικών προσεγγίσεων.

Το κύριο μέρος της εργασίας θα αναπτυχθεί στα επόμενα τρία κεφάλαια ώς ακολούθως:

Στο δεύτερο κεφάλαιο, από τις εξισώσεις στάσιμης ισορροπίας του μοντέλου των δύο ρευστών θα παραχθεί ένα ελαφρά τροποποιημένο, πιο εύχρηστο σύστημα εξισώσεων στο όριο απείρου λόγου όψης του tokamak και κυκλικής πολοειδούς διατομής. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εμφανίζει κυλινδρική συμμετρία. Το profile του παράγοντα ασφάλειας επιλέχθηκε τέτοιο ώστε η μαγνητική διάτμηση να είναι αρνητική στον πυρήνα του πλάσματος. Οι επιμέρους περιπτώσεις που θα εξεταστούν είναι οι εξής:

1. Profile της τοροειδούς συνιστώσας της ταχύτητας ροής είτε Gaussian είτε κορυφοειδούς μορφής.

2. Profile της πολοειδούς συνιστώσας της ταχύτητας ροής Gaussian μορφής.

3. Ροή εντοπισμένη είτε σε μία μικρή περιοχή είτε σε σχεδόν όλη την πολοειδή διατομή.

4. Σχετικός προσανατολισμός των συνιστωσών της ταχύτητας ροής τέτοιος ώστε $v_\theta \cdot v_z > 0$ ή $v_\theta \cdot v_z < 0$, όπου v_θ και v_z η πολοειδής και τοροειδής συνιστώσα της ταχύτητας ροής αντίστοιχα.

Τα φυσικά μεγέθη που θα υπολογιστούν για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των παραπάνω ποσοτήτων είναι η πίεση, η τοροειδής πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος, το ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο και η διάτμηση του καθώς και η διάτμηση της ταχύτητας $\vec{E} \times \vec{B}$. Για τις παραπάνω ποσότητες θα εξεταστεί η επίδραση της ροής, της διάτμησης της ταχύτητας της και της αρνητικής μαγνητικής διάτμησης σ' αυτές. Η μελέτη αυτή θα πραγματοποιηθεί μεταβάλλοντας τη τιμή των συνιστωσών της καθώς και το εύρος του profile τους, εφόσον αυτό είναι Gaussian, όσον αφορά την επίδραση της ροής και της διάτμησης της της, αντίστοιχα. Η επίδραση της μαγνητικής διάτμησης θα εξεταστεί μέσω της μεταβολής των ελευθέρων παραμέτρων του profile του παράγοντα ασφάλειας.

Στο τρίτο κεφάλαιο στα πλαίσια του ιδανικού MHD μοντέλου θα κατασκευαστούν αξονικά συμμετρικές ισορροπίες με αμιγώς τοροειδή ροή. Ειδικότερα θα μελετηθεί η επίδραση της ροής στη μαγνητική τοπολογία καταστάσεων ισορροπίας μαγνητικά περιορισμένου πλάσματος σύντηξης με profile πυκνότητας τοροειδούς ηλεκτρικού ρεύματος που μηδενίζεται στην επιφάνεια του. Θα εξεταστούν οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις ροής:

1. Ασυμπίεστη ροή

2. «Συμπιεστή» ροή, με την έννοια ότι η πυκνότητα μεταβάλλεται στις μαγνητικές επιφάνειες

Αρχικά θα γίνει επισκόπηση και σύγκριση των εξισώσεων ισορροπίας για «συμπιεστή» και ασυμπίεστη ροή με ενιαίο τρόπο και θα παρουσιαστούν αντίστοιχες ακριβείς λύσεις. Αποδεικνύεται ότι κάτω από ειδικές συνθήκες η εξίσωση ισορροπίας για «συμπιεστή» ροή γίνεται όμοια σε μορφή με την αντίστοιχη για ασυμπίεστη ροή. Με βάση τις ακριβείς λύσεις θα κατασκευαστούν ιδιοκαταστάσεις ισορροπίας ενός μαγνητικά περιορισμένου πλάσματος περιβαλλόμενου από τοιχώματα ορθογώνιας διατομής και αυθαίρετου λόγου όψης. Περαιτέρω θα αποδειχθεί ότι ο λόγος όψης παίζει σημαντικό ρόλο στην ενεργοποίηση της επίδρασης της ροής στην ισορροπία. Με τη βοήθεια των παραπάνω ιδιοκαταστάσεων μελετάται η επίδραση της ροής στη μαγνητική τοπολογία και στη μετατόπιση Shafranov σε συνδυασμό με το λόγο όψης. Επίσης, εξετάζεται η μεταβολή της πυκνότητας μάζας για «συμπιεστή» ροή και της θερμοκρασίας για ασυμπίεστη πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες και ο πιθανός ρόλος της διάτμησης της ροής.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα παραχθούν οι εξισώσεις ισορροπίας αξονικά συμμετρικής MHD ισορροπίας με αμιγώς τοροειδή ροή και ανισοτροπική ειδική αντίσταση. Με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας θα εξεταστεί γενικά η δυνατότητα ύπαρξης καταστάσεων με ομογενείς συνιστώσες της ειδικής αντίστασης παράλληλα και κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες. Ειδικότερα θα κατασκευαστούν ιδιοκαταστάσεις ισορροπίας ενός tokamak με ορθογώνια πολοειδή διατομή μέσω ακριβών αναλυτικών λύσεων οι οποίες περιγράφουν είτε απλά είτε πολλαπλά τοροειδείς σχηματισμούς. Στην περίπτωση απλά τοροειδών σχηματισμών θα μελετηθούν τα χαρακτηριστικά των συνιστωσών της ειδικής αντίστασης, της τοροειδούς πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος, του ηλεκτρικού πεδίου και της διάτμησης του καθώς και η επίδραση της ροής στις παραπάνω ποσότητες ισορροπίας. Αυτή η επίδραση θα εξεταστεί με μεταβολή, για «συμπιεστή» ροή των τιμών του αριθμού Mach ως προς την ταχύτητα του ήχου και μιας παραμέτρου

A για ασυμπίεστη ροή, που συνδέεται με τα profile πυκνότητας και κυκλικής συχνότητας της ροής.

Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο θα συνοψιστούν τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της εργασίας και θα προταθούν μερικά ζητήματα για περαιτέρω μελέτη.

Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί επιγραμματικά η κύρια συνεισφορά της παρούσας εργασίας στην προαγωγή της κατανόησης φαινομένων που σχετίζονται με το πλάσμα σύντηξης:

1. Συνεργατικότητα διατμημένης ροής και αρνητικής μαγνητικής διάτμησης στο σχηματισμό εσωτερικών φραγμάτων μεταφοράς.

2. Αναλυτικές και ακριβείς λύσεις των εξισώσεων ισορροπίας της MHD για ασυμπίεστη ροή.

3. Προκαλούμενη από τη ροή αλλαγή στη μαγνητική τοπολογία τοροειδούς σχηματισμού.

4. Παραγωγή ανηγμένων εξισώσεων MHD ισορροπίας και αναλυτικών ακριβών λύσεων με πεπερασμένη ειδική αντίσταση και ροή.

Μέρη της εργασίας αποτέλεσαν αντικείμενο παρουσιάσεων στο 2$^{\text{ο}}$ [36] και 3$^{\text{ο}}$ Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, στο 10$^{\text{th}}$ European Fusion Theory Conference [37], στο 12$^{\text{th}}$ International Congress on Plasma Physics [38] και στο 47$^{\text{th}}$ Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics [39]. Επίσης αποτελούν αντικείμενο των δημοσιεύσεων [40] και [41].

Κεφάλαιο 2

Ισορροπία tokamak με αρνητική μαγνητική διάτμηση και διατμημένη ροή στα πλαίσια του μοντέλου των δύο ρευστών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξεταστεί η επίδραση της διατμημένης ροής και της αρνητικής μαγνητικής διάτμησης στην ισορροπία πλάσματος με εφαρμογή σε tokamak στο όριο απείρου λόγου όψης. Συγκεκριμένα, θα εξεταστεί το πως οι δύο προαναφερόμενες ποσότητες επιδρούν στα χαρακτηριστικά της πίεσης, της τοροειδούς (αξονικής) πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος, του ακτινικού ηλεκτρικού πεδίου και της διάτμησης της ταχύτητας $\vec{E} \times \vec{B}$.

2.1 Διατμημένη ροή, αρνητική μαγνητική διάτμηση και εσωτερικά φράγματα μεταφοράς

Οι εκκενώσεις πλάσματος στις πειραματικές διατάξεις με εσωτερικά φράγματα μεταφοράς (ITB), πέρα από το βελτιωμένο περιορισμό της ενέργειας και των σωματιδίων, εμφανίζουν και άλλα επιθυμητά χαρακτηριστικά όπως το μεγάλο ποσοστό, επί του συνολικού ρεύματος, μη δημιουργούμενου επαγωγικά ηλεκτρικού ρεύματος (bootstrap current). Το παραπάνω χαρακτηριστικό ενισχύει την προοπτική επίτευξης σταθερής λειτουργίας tokamak που είναι επιθυμητή για έναν αντιδραστήρα σύντηξης. Τα εσωτερικά φράγματα μεταφοράς, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 1, συνδέονται συνήθως με μη μονοτονικά profile του παράγοντα ασφάλειας που αντιστοιχούν σε καταστάσεις περιορισμού με αρνητική μαγνητική διάτμηση [28, 29] και τα κύρια χαρακτηριστικά τους είναι profile πίεσης με μεγάλη κλίση στην περιοχή του φράγματος [25] και ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο του οποίου ο σχηματισμός σχετίζεται με διατμημένη ροή [26, 27]. Ο ακριβής τρόπος σχηματισμού των ITB δεν είναι πλήρως κατανοητός και τα περισσότερα θεωρητικά μοντέλα, υποστηριζόμενα και από τις πειραματικές παρατηρήσεις, βασίζονται στην μείωση της μεταφοράς λόγω των μικροασταθειών, σε συνδυασμό με αρνητική μαγνητική διάτμηση, $s < 0$, διατμημένη ροή, ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο, E_r, τη διάτμηση του, $E_r' \equiv dE_r/dr$, και τη διάτμηση της ταχύτητας $\vec{E} \times \vec{B}$,

$$\omega_{\vec{E}\times\vec{B}} = \left|\frac{d}{dr}\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}\right|, \tag{2.1}$$

η οποία θεωρείται και η πιο σημαντική ποσότητα για το σχηματισμό του φράγματος. Συγκεκριμένα, αυτό συμβαίνει διότι η ταχύτητα $\vec{E} \times \vec{B}$ μπορεί να οδηγήσει σε μείωση της έντασης των διακυμάνσεων της τύρβης, ακόμη και στην πλήρη καταστολή τους, ή να μειώσει το μήκος συσχετισμού τους [30]. Παρόλο που υπάρχουν πειραματικές παρατηρήσεις που υποστηρίζουν αυτό το σενάριο, υπάρχουν και άλλες αντιφατικές με αυτές με αποτέλεσμα να μην είναι σαφές το κατά πόσο η αρνητική μαγνητική διάτμηση ή η διατμημένη ροή παίζει σημαντικότερο ρόλο στο σχηματισμό του φράγματος. Τα θεωρητικά και πειραματικά δεδομένα ανακεφαλαιώθηκαν πρόσφατα στις αναφορές [30] και [42].

2.2 Κυλινδρική ισορροπία στα πλαίσια του μοντέλου των δύο ρευστών

Οι καταστάσεις ισορροπίας ενός ιδανικού, οιονεί ουδέτερου πλάσματος, στα πλαίσια του μοντέλου των δύο ρευστών περιγράφονται από το ακόλουθο σύνολο εξισώσεων (ο αναγνώστης παραπέμπεται επίσης στο εδάφιο 1.2):

$$\vec{\nabla} \cdot (n_\alpha \vec{v}_\alpha) = 0, \tag{2.2}$$

$$m_\alpha n_\alpha (\vec{v}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_\alpha = -\vec{\nabla} P_\alpha + q_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \tag{2.3}$$

$$\vec{v}_\alpha \cdot \vec{\nabla} T_\alpha = 0, \tag{2.4}$$

$$Z_i n_i \approx n_e = n, \tag{2.5}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \tag{2.6}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.7}$$

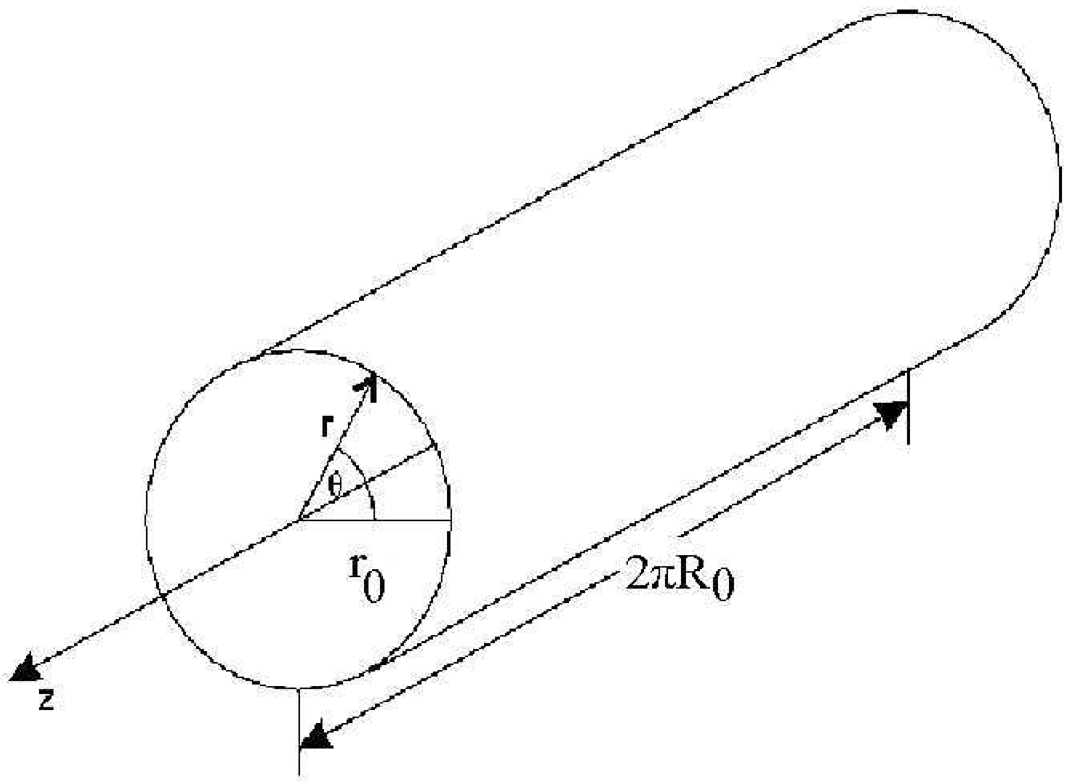
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha = \vec{J}, \tag{2.8}$$

όπου ο δείκτης α δηλώνει το είδος των σωματιδίων ($\alpha = i$ για τα ιόντα και e για τα ηλεκτρόνια), n_α είναι η αριθμητική πυκνότητα του ρευστού, που συνδέεται με τη σχέση οιονεί ουδετερότητας, (2.5), q_α το φορτίο του κάθε είδους σωματιδίων με Z_i τον ατομικό αριθμό. Ο υπολοιπός συμβολισμός είναι ο καθιερωμένος. Η εξίσωση ενέργειας (2.4) συνδέεται με το γεγονός της πολύ μεγάλης θερμικής αγωγιμότητας κατά μήκος του $\vec{B}$. Κατά συνέπεια η θερμοκρασία γίνεται σταθερή πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες σε μικρή κλίμακα χρόνου. Η προαναφερόμενη εξίσωση ενέργειας είναι κατάλληλη ειδικότερα για τα ηλεκτρόνια. Αυτό διότι λόγω της μικρής τους μάζας σε σχέση με τα ιόντα τα ηλεκτρόνια μπορούν να κινηθούν πολύ πιο γρήγορα. Εναλλακτικά, για τα ιόντα, κανείς μπορεί να χρησιμοποιήσει μια αδιαβατική εξίσωση ενέργειας:

$$\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla} P_i + \gamma P_i \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i = 0. \tag{2.9}$$

Συγκρίνοντας το σύστημα εξισώσεων στα πλαίσια του MHD μοντέλου (Εξ. (1.23)-(1.29)) με το αντίστοιχο στα πλαίσια του μοντέλου των δύο ρευστών παρατηρούμε ότι το τελευταίο πλεονεκτεί σε δύο σημεία i) η εξίσωση ορμής περιέχει το ηλεκτρικό πεδίο και έτσι η συνεισφορά της βαθμίδας πίεσης στο $\vec{E}$ μπορεί να υπολογιστεί από αυτή την εξίσωση (η οποία συνεισφορά δεν υπάρχει στα πλαίσια του MHD μοντέλου διότι το ηλεκτρικό πεδίο υπολογίζεται από το νόμο του Ohm, $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$) και ii) η πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$ συνδέεται με αυτοσυνεπή τρόπο με τις ταχύτητες των ρευστών του κάθε είδους σωματιδίων (Εξ. (2.8)).

Το σύστημα υπό μελέτη είναι ένα αξονικά συμμετρικό, τοροειδούς σχήματος πλάσμα κυκλικής διατομής, περιορισμένο από μαγνητικό πεδίο στο όριο απείρου λόγου όψης. Σε αυτό το όριο το πλάσμα μπορεί να θεωρηθεί κυλινδρικά συμμετρικό με τη διευθυνση z να δηλώνει τον άξονα συμμετρίας, τη θ να είναι η αζιμουθιακή γωνία και r η ακτινική συνιστώσα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1. Το μαγνητικό πεδίο που αντιστοιχεί σε αυτή τη γεωμετρία έχει τοροειδή



Σχήμα 2.1: Η κυλινδρική γεωμετρία του υπό μελέτη πλάσματος φαίνεται σε αυτό το σχήμα καθώς και οι σχετικές διευθύνσεις με τη χρήση σύστηματος κυλινδρικών συντεταγμένων.

(αξονική) συνιστώσα, B_z και πολοειδή (αζιμουθιακή) B_θ. Αντίστοιχα και η ροή έχει τοροειδή και πολοειδή συνιστώσα της ταχύτητας, ενώ το ηλεκτρικό πεδίο είναι ακτινικό. Λόγω της συμμετρίας κάθε ποσότητα ισορροπίας εξαρτάται μόνο από την ακτινική απόσταση r. Κατ΄ επέκταση οι εξισώσεις (2.2), (2.4) [ή εναλλακτικά η (2.9)], (2.6) και (2.7) ικανοποιούνται ταυτοτικά. Περαιτέρω, η ροή για κάθε είδος σωματιδίων είναι ασυμπίεστη ($\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\alpha = 0$). Με βάση τα παραπάνω 6 από τις 12 βαθμωτές ποσότητες που περιέχονται στο σύνολο των εξισώσεων (2.2)-(2.8) παραμένουν ελεύθερες και μπορούν να περιγραφούν.

Προσθέτοντας τις εξισώσεις ορμής (2.3) για το ιοντικό και το ηλεκτρονικό ρευστό προκύπτει η MHD εξίσωση διατήρησης ορμής:

$$\frac{d}{dr}\left(P + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2}\right) + (1 - M_\theta^2)\frac{B_\theta^2}{r} = 0, \tag{2.10}$$

όπου

$$M_\theta \equiv \left[\frac{n_i m_i v_{i\theta}^2 + n_e m_e v_{e\theta}^2}{B_\theta^2}\right]^{1/2}$$

είναι ο πολοειδής αριθμός Mach. Λόγω της συμμετρίας η τοροειδής συνιστώσα καθώς και οι διατμήσεις της ταχύτητας (τορειδούς και πολοειδούς) δεν εμφανίζονται στην (2.10). Είναι βολικότερο να χρησιμοποιήσουμε την (2.10) αντί της (2.3) για τα ηλεκτρόνια. Έτσι τώρα το ελαφρώς πιο απλό σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας αποτελείται από τις (2.2), (2.3), (2.4) για τα ιόντα μόνο και τις (2.5), (2.6), (2.7) και (2.10). Εκφράζοντας την πολοειδή συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου B_θ μέσω του παράγοντα ασφάλειας,

$$q = \frac{rB_z}{R_0 B_\theta},$$

με $2\pi R_0$ να αντιστοιχεί στο μήκος της στήλης του πλάσματος (δες σχ. 2.1) και εισάγοντας την κανονικοποιημένη ακτίνα $\rho = r/r_0$, με r_0 να αντιστοιχεί στην επιφάνεια του πλάσματος η εξ. (2.10) γράφεται στη μορφή

$$P'(\rho) = -B_z(\rho)B_z'(\rho)\left[1+\left(\epsilon\frac{\rho}{q(\rho)}\right)^2\right]+\left[M_\theta^2(\rho)+s(\rho)-2\right]\rho\left(\epsilon\frac{B_z(\rho)}{q(\rho)}\right)^2. \tag{2.11}$$

Εδώ $\epsilon = r_0/R_0$ είναι ο αντίστροφος λόγος όψης και

$$s(\rho) = \frac{r}{q}\frac{dq}{dr}$$

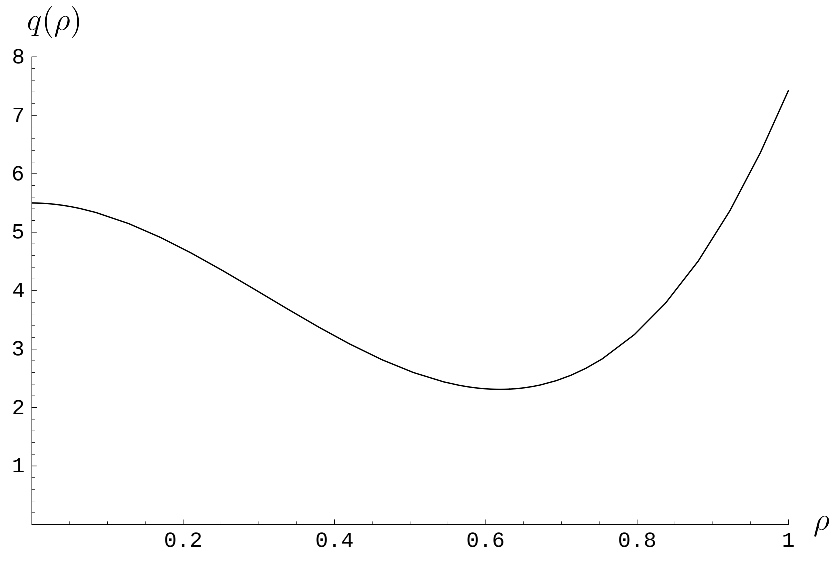
η μαγνητική διάτμηση.

Λαμβάνοντας υπ' όψη profile πειραματικών αποτελεσμάτων που αφορούν σχηματισμούς με ITB περιγράφουμε τις ποσότητες q, B_z, $v_{i\theta}$, v_{iz} και n ως ακολούθως:

Profile του q που αντιστοιχεί σε διαμόρφωση με αρνητική μαγνητική μαγνητική διάτμηση:

$$q(\rho) = q_c\Big(1 - \frac{3\Delta q}{q_c}\frac{r_0^2}{r_{min}^2}\rho^2 + \frac{2\Delta q}{q_c}\frac{r_0^3}{r_{min}^3}\rho^3\Big), \tag{2.12}$$

όπου $q_c = q(r=0)$, r_{min} η θέση του ελάχιστου, q_{min}, του profile και $\Delta q = q_c - q_{min}$. Το σχήμα του profile του q καθορίζεται δίνοντας κατάλληλες τιμές στα q_{min}, Δq και r_{min}. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η μαγνητική διάτμηση $|s|$ είναι ανάλογη του Δq, επομένως καθώς το Δq παίρνει μαγελύτερες τιμές η μαγνητική διάτμηση αυξάνει κατ΄ απόλυτο τιμή και στις δύο περιοχές όπου $s > 0$ και $s < 0$. Ένα profile του q συμβατό με πειραματικά αποτελέσματα φαίνεται στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Profile του παράγοντα ασφάλειας q παραγόμενο με βάση την εξίσωση (2.12) συμβατό με πειραματικά μετρούμενο στο tokamak JT-60U [43] (σχήμα 10 σε αυτή την αναφορά).

Profile τοροειδούς μαγνητικού πεδίου:

$$B_z = B_{z0}\big[1 + \delta(1-\rho^2)\big]^{1/2}, \tag{2.13}$$

όπου B_{z0} το τοροειδές μαγνητικό πεδίο κενού και η παράμετρος δ συνδέεται με τις μαγνητικές ιδιότητες του πλάσματος, δηλ. για $\delta < 0$ το πλάσμα είναι

διαμαγνητικό.
Profile της πολοειδούς συνιστώσας της ταχύτητας των ιόντων Gaussian σχήματος:

$$v_{i\theta} = 4v_{i\theta 0}\rho(1-\rho)\exp\Big(-\frac{(\rho-\rho_{min})^2}{h}\Big), \tag{2.14}$$

όπου η παράμετρος $h > 0$ σχετίζεται με τη διάτμηση της ταχύτητας, δηλαδή η $|v'_{i\theta}|$ αυξάνεται όταν το h παίρνει μικρότερες τιμές, ενώ το $v_{i\theta 0}$ καθορίζει το ακρότατο του profile.
Είτε κορυφοειδές (peaked) profile με το μέγιστο στο μαγνητικό άξονα για τη τοροειδή συνιστώσα της ταχύτητας:

$$v_{iz} = v_{iz0}(1-\rho^3)^3, \tag{2.15}$$

είτε Gaussian μορφής παρόμοιο με αυτό της πολοειδούς συνιστώσας (Εξ. (2.14)). Ας σημειωθεί επίσης ότι δεν παρατηρείται αλλαγή στα αποτελέσματα εαν χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά του (2.15) ένα κορυφοειδές profile της μορφής:

$$v_{iz} = v_{iz0}(1-\rho)\exp\Big(-\frac{\rho^2}{h}\Big).$$

Profile της αριθμητικής πυκνότητας:

$$n = n_0(1-\rho^3)^3. \tag{2.16}$$

Επιπλέον η πίεση των ιόντων μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της ολικής πίεσης μέσω της σχέσης:

$$P_i = \lambda P \quad , \quad 0 < \lambda < 1. \tag{2.17}$$

Αφού σε tokamak ισχύει ότι $M_\theta < 0.1$, ο όρος ροής στην (2.11) είναι διαταρακτικός γύρω από τη στατική ισορροπία, $M_\theta = 0$, και γι αυτό μπορεί να αγνοηθεί. Πρέπει να σημειωθεί ωστόσο, ότι αυτή η προσέγγιση πιθανόν να μην είναι καλή στην περίπτωση μη κυκλικής πολοειδούς διατομής ή για αξονικά συμμετρικό πλάσμα διότι σ' αυτές ο όρος ροής εξαρτάται από τη διάτμηση της ροής η οποία σε ορισμένες περιοχές μπορεί να γίνεται πολύ μεγάλη (δες για παράδειγμα την εξίσωση (23) για κυλινδρική ισορροπία της αναφοράς [44] και για αξονικά συμμετρική ασυμπίεστη ισορροπία την εξίσωση (22) της αναφοράς [45]). Στα πλαίσια της θεώρησης αυτής είναι δυνατό να υπολογιστούν με αυτοσυνεπή τρόπο οι ακόλουθες ποσότητες: το πολοειδές μαγνητικό πεδίο, $B_\theta = \epsilon\rho B_z/q$, η μαγνητική διάτμηση, $s = (r/q)(dq/dr)$, η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος μέσω του νόμου του Ampére, η πίεση με ολοκλήρωση της

(2.11) και θέτοντας $P(1) = 0$ (δηλαδή απαιτώντας η πίεση στην επιφάνεια του πλάσματος να μηδενίζεται), οι μερικές πιέσεις των ιόντων και των ηλεκτρονίων, $P_i = \lambda P$ και $P_e = (1-\lambda)P$ αντίστοιχα, το ηλεκτρικό πεδίο μέσω της (2.3) για τα ιόντα:

$$E_r(\rho) = \frac{1}{Z_i e r_0 n(\rho)} \frac{dP_i(\rho)}{d\rho} + v_{iz}(\rho)B_\theta(\rho) - v_{i\theta}(\rho)B_z(\rho), \qquad (2.18)$$

η διάτμηση του,

$$E_r' = \frac{d}{d\rho}E_r(\rho)$$

και το $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ μέσω της (2.1). Επίσης, οι συνιστώσες της ταχύτητας του ηλεκτρονικού ρευστού μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση $\vec{J} = ne(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$. Ο όρος της βαθμίδας της πίεσης στην (2.18) μπορεί να προκύψει, εναλλακτικά του μοντέλου των δυο ρευστών, στα πλαίσια του ιδανικού Hall-MHD μοντέλου το οποίο περιλαμβάνει το γενικευμένο νόμο του Ohm:

$$\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} = \frac{1}{en}(\vec{J}\times\vec{B} - \vec{\nabla}P_e). \qquad (2.19)$$

Αγνοώντας στην Hall-MHD εξίσωση ορμής τον όρο ροής (επιλογή που αντιστοιχεί σε $M_\theta = 0$ στην παρούσα θεώρηση), ο όρος $\vec{J}\times\vec{B}$ στη (2.19) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της βαθμίδας της ολικής πίεσης ως:

$$\vec{J}\times\vec{B} = \vec{\nabla}P = \vec{\nabla}(P_i + P_e).$$

Τότε η εξίσωση (2.19) οδηγεί στη (2.18).

Η πιο πάνω περιγραφόμενη διαδικασία και οι προτεινόμενοι υπολογισμοί αποσκοπούν στην αναλυτική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας του μοντέλου των δύο ρευστών. Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν αναλυτικά με την ανάπτυξη κατάλληλου προγράμματος [46] στο πακέτο Mathematica 5.0.

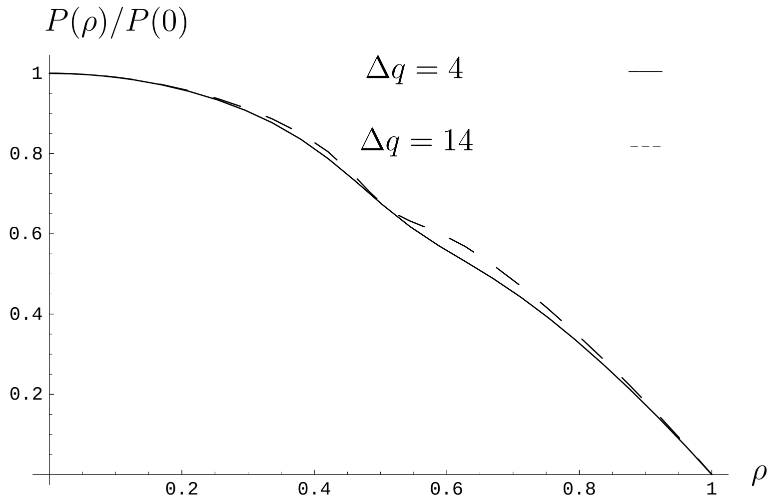
Από μια προκαταρκτική εξέταση της (2.18) προκύπτει ότι πέραν της εξάρτησης των E_r και E_r' από την s μέσω του όρου $dP_i/d\rho$ (δες εξ. (2.11)) εξάρτηση από τη μαγνητική διάτμηση εμφανίζεται και λόγω του όρου v_{iz} εξ' αιτίας της εξάρτησης της συνιστώσας B_θ από τον παράγοντα q. Αυτή η εξάρτηση από την s είναι ισχυρότερη για το $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$, μιας και η συνιστώσα B_θ πολλαπλασιάζει ολόκληρο το E_r, όπως θα φανεί λεπτομερώς στο εδάφιο 2.3.3. Αυτές οι παρατηρήσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει συνεργετική επίδραση της ροής και της μαγνητικής διάτμησης στο E_r, στο E'_r και κατ΄ επέκταση στο $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$. Στο επόμενο εδάφιο θα παρουσιαστούν αποτελέσματα που δεν είναι δυνατό να επιτευχθούν στα πλαίσια της MHD. Για MHD αποτελέσματα ο αναγνώστης παραπέμπεται στις αναφορές [7, 47].

2.3 Αποτελέσματα

Για κάποιες από τις παραμέτρους χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες τιμές: $B_{z0} = 1T$, $\delta = -0.00975$, $Z_i = 1$, $r_0 = 1m$, $R_0 = 3m$, $n_0 = 5 \times 10^{19} part./m^3$ $\lambda = 0.6$. Η επιλογή για το $q_{min} \geq 2$ έγινε διότι με βάση πειραματικά αποτελέσματα για $q_{min} < 2$ ισχυρή MHD δραστηριότητα καταστρέφει τον περιορισμό πιθανόν λόγω αστάθειας διπλού αποσχισμού (double tearing mode) [42]. Παρόμοιο αποτέλεσμα βρέθηκε αριθμητικά για μονοδιάστατη κυλινδρική ισορροπία με κοίλο profile του ρεύματος στην αναφορά [6]. Επιπλέον σε εκκενώσεις στο JET με αρνητική μαγνητική διάτμηση βρέθηκε συσχετισμός μεταξύ του σχηματισμού ITB και ακεραίων τιμών του q_{min} (2 ή 3) [48]. Η χρησιμοποίηση των παραπάνω τιμών των παραμέτρων, οι οποίες είναι σχετικές με τις αντίστοιχες πειραματικές εξασφαλίζει πως οι τιμές των υπολογιζόμενων ποσοτήτων θα είναι και αυτές σχετικές με τις πειραματικές. Ως παραδείγματα αναφέρονται ότι το μέγιστο της τοροειδούς πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος παίρνει την τιμή $5MA/m^2$ και για αμιγώς τοροειδή κορυφοειδούς μορφής ταχύτητα ροής η μέγιστη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι 13kV, τιμές που είναι ίδιας τάξης μεγέθους με πειραματικά αποτελέσματα σχηματισμών με ITB [28, 26]. Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι συμβατή και με τη σχέση οιονεί ουδετερότητας που υιοθετήθηκε στις εξισώσεις των δύο ρευστών.

Η επίδραση της μαγνητικής διάτμησης και της ροής στα χαρακτηριστικά της ισορροπίας μελετήθηκε μέσω της μεταβολής των παραμέτρων Δq, q_{min}, r_{min}, h, v_{iz0} και $v_{i\theta 0}$ σε εύρος (4-14), (2-3), (0.5-0.6), (0.001-0.01), $(10^5 - 10^6\ m/s)$ και $(10^4 - 10^5\ m/s)$ αντίστοιχα, οπότε το $q_c = q_{min} + \Delta q$ μεταβάλλεται σε εύρος 6 εως 16. Επιπλέον, η σχέση κλίμακας $M_\theta^2 \approx M_z^2$, τυπική για tokamak, εξασφαλίζεται μιας και $B_z \approx 10 B_\theta$ και $v_{iz0} \approx 10 v_{i\theta 0}$ [49, 50]. Η επίδραση της μεταβολής της μαγνητικής διάτμησης, μέσω της αντίστοιχης του Δq, μελετήθηκε κρατώντας σταθερά τα r_{min} και q_{min}, ενώ η επίδραση της τιμής των r_{min} και q_{min} εξετάστηκε με σταθερό Δq.

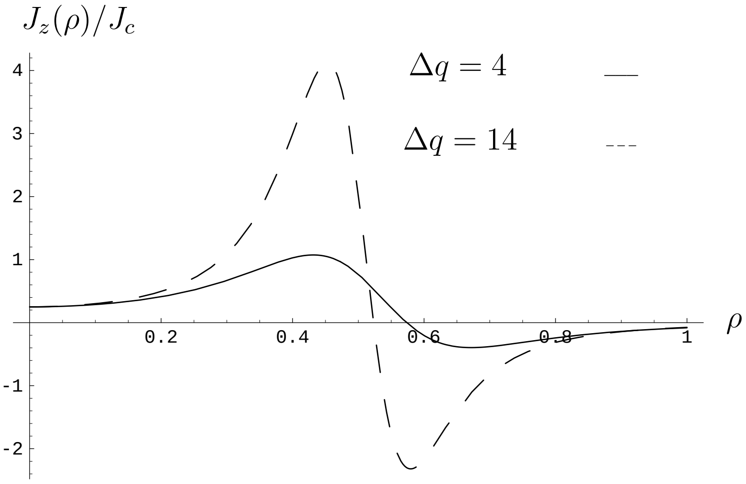
Πρώτα θα αναφερθούν συνοπτικά κάποια χαρακτηριστικά των profile της πίεσης και της τοροειδούς πυκνότητας ρεύματος, τα οποία παραμένουν όμοια με τα αντίστοιχα της MHD μελέτης. Το profile της ολικής πίεσης, και κατ΄ επέκταση της πίεσης των ιόντων και των ηλεκτρονίων, είναι κορυφοειδούς μορφής με το μέγιστο στο μαγνητικό άξονα και για $s < 0$ αυξάνεται η κλίση του καθώς η $|s|$ αυξάνεται, όπως προκύπτει και από την (2.11) (σχ. 2.3). Επιπλέον από



Σχήμα 2.3: Profile της πίεσης, για δύο τιμές της παραμέτρου Δq, κανονικοποιημένα ως προς τη τιμή της P στο μαγνητικό άξονα.

τη (2.11) προκύπτει ότι η κλίση του profile αυξάνει καθώς το πλάσμα γίνεται περισσότερο διαμαγνητικό, δηλαδή όταν το B_z' που συνδέεται με τη τιμή του δ παίρνει μεγαλύτερες τιμές. Το profile της πυκνότητας τοροειδούς ρεύματος, J_z, εμφανίζεται κοίλο με το μέγιστο του στην περιοχή του q_{min}, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.4. Αυτά τα χαρακτηριστικά έχουν παρατηρηθεί σε εκκενώσεις με ITB [30] και είναι επιθυμητά για το σχηματισμό φραγμάτων. Επιπλέον για $s > 2$ παρατηρείται μια αντιστροφή στη J_z στην περιοχή όπου $s > 0$. Αυτό το χαρακτηριστικό συζητιέται περαιτέρω στις αναφορές [7, 47]. Στο σημείο αυτό μπορεί να αναφερθεί ότι ένα ικανό κριτήριο σταθερότητας για ισορροπία με αντεστραμμένη πυκνότητα ρεύματος στην εξώτατη πλευρά του πλάσματος και μονοτονικά αυξανόμενο profile του q παρήχθη στην αναφορά [51].

Παρακάτω θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που αφορούν την επίδραση της μαγνητικής διάτμησης και της ροής, ξεχωριστά σε κάθε μια από τις ποσότητες E_r, $|E_r'|$ και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$.

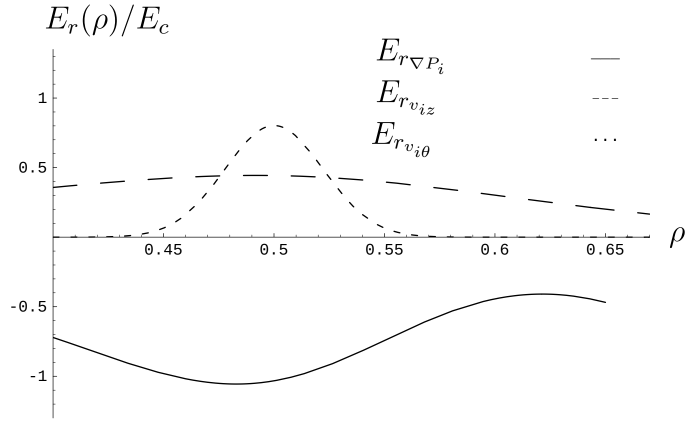


Σχήμα 2.4: Profile της τοροειδούς πυκνότητας ρεύματος για δυο τιμές του Δq τα οποία επιδεικνύουν το κοίλο σχήμα και την αντιστροφή στην εξώτατη περιοχή του πλάσματος. Η κανονικοποίηση των τιμών πραγματοποιήθηκε ως προς τη μέγιστη τιμή του J_z για $\Delta q = 4$.

2.3.1 Ηλεκτρικό πεδίο (E_r)

Στο ηλεκτρικό πεδίο συνεισφέρουν οι όροι της βαθμίδας πίεσης, $\vec{\nabla} P_i$, της τοροειδούς συνιστώσας της ταχύτητας, v_{iz} και της πολοειδούς συνιστώσας της, $v_{i\theta}$, που αντιστοιχούν στον πρώτο, δεύτερο και τρίτο όρο της (2.18). Κάθε ένας από αυτούς τους όρους έχει συνεισφορά ίδιας τάξης μεγέθους στη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5. Αυτό το αποτέλεσμα έχει βρεθεί και πειραματικά στην αναφορά [30], ενώ παρόμοιο θεωρητικό αποτέλεσμα βρέθηκε με διαφορετικό τρόπο στην [52] (σχήμα 4 σ′ αυτή). Όπως είναι εμφανές από την (2.18) το E_r εξαρτάται γραμμικά από τις v_{iz} και $v_{i\theta}$ με τη συνολική συνεισφορά της ροής ωστόσο, να εξαρτάται από το σχετικό πρόσημο των v_{iz}, $v_{i\theta}$ και B_z. Το σχήμα ενός τυπικού profile του E_r εμφανίζει ένα ακρότατο στην περιοχή που βρίσκεται το q_{min}, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.5.

Η αύξηση της $|s|$ μέσω της αύξησης του Δq προκαλεί αύξηση και στο ακρότατο του $|E_r|$ (σχ. 2.6). Ανάλογα με τη διεύθυνση της ταχύτητας της ροής (τοροειδής ή πολοειδής) και το σχήμα του profile της, μεταβολή του Δq από 4 σε 14 αυξάνει τις τιμές του μεγίστου του $|E_r|$ από 5.6% για αμιγώς πολοειδή

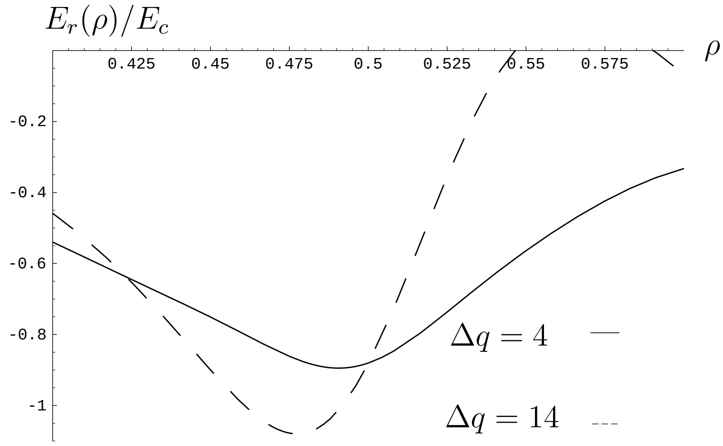


Σχήμα 2.5: Profile των όρων ∇P_i, v_{iz} και $v_{i\theta}$ του ηλεκτρικού πεδίου, από τα οποία φαίνεται ότι και οι τρείς συνεισφορές είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Όλα τα profile είναι κανονικοποιημένα ως προς το ακρότατο του όρου της βαθμίδας πίεσης.

ροή εως 48% για αμιγώς κορυφοειδή τοροειδή ροή. Υπενθυμίζεται εδώ ότι η εξάρτηση του ηλεκτρικού πεδίου από την s προέρχεται από τους όρους ∇P_i και v_{iz}. Η μετατόπιση του σημείου του q_{min} (κρατώντας σταθερά τα Δq και q_{min}) προς την επιφάνεια του πλάσματος αυξάνει το μέγιστο της απόλυτης τιμής του ηλεκτρικού πεδίου όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7. Ποσοτικά μετατόπιση του r_{min} από το 0.5 στο 0.6 οδηγεί σε αύξηση του μεγίστου του E_r από 36% εως 70%. Επιπλέον η θέση του μεγίστου (το οποίο βρίσκεται στην περιοχή του r_{min}) μετατοπίζεται και αυτό προς τα έξω. Κρατώντας το Δq σταθερό και αυξάνοντας τη τιμή του q_{min} μειώνεται η τιμή του μεγίστου του $|E_r|$ (σχ. 2.8). Ποσοτικά για αύξηση του q_{min} από 2 σε 3 με $\Delta q = 4$ και $r_{min} = 0.5$ η μείωση είναι στο εύρος 12%-40%, πάντα σε συνάρτηση με τη διεύθυνση της ροής και το σχήμα του profile των συνιστωσών της. Περαιτέρω, η αύξηση της διάτμησης της ροής (μέσω της μείωσης του h από 0.1 σε 0.001) αφήνει το ακρότατο του E_r πρακτικά ανεπηρέαστο στις περισσότερες περιπτώσεις που εξετάστηκαν.

2.3.2 Διάτμηση του ηλεκτρικού πεδίου (E_r')

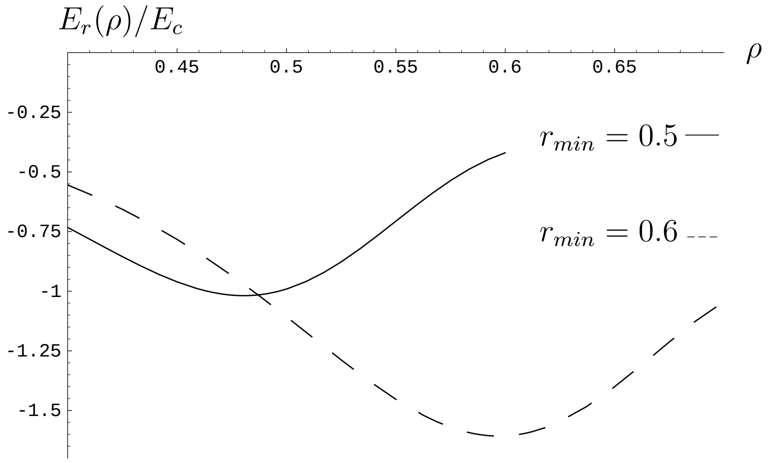
Τα βασικά χαρακτηριστικά της διάτμησης του ηλεκτρικού πεδίου είναι η συνεισφορά ίδιας τάξης μεγέθους από τους τρεις όρους (∇P_i, v_{iz} και $v_{i\theta}$) όπως και



Σχήμα 2.6: Αύξηση της κανονικοποιημένης τιμής του ακρότατου του ηλεκτρικού πεδίου λόγω της αύξησης του Δq για $q_{min} = 4$, $r_{min} = 0.5$, Gaussian σχήμα του profile της v_{iz} και $v_{i\theta} = 0$.

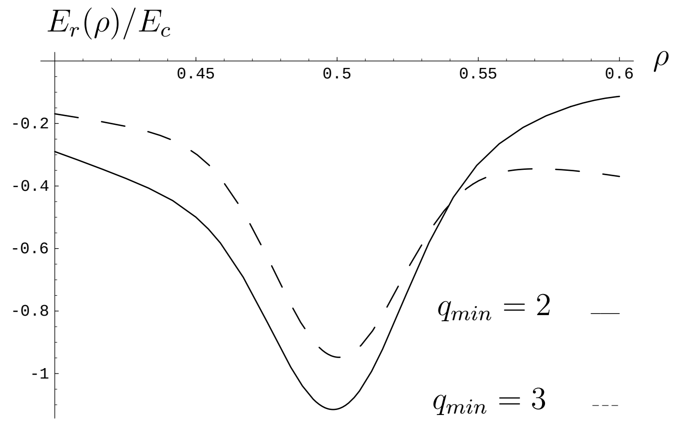
στην περίπτωση του ηλεκτρικού πεδίου (σχ. 2.9) καθώς και η ύπαρξη δύο ακροτάτων εκατέρωθεν του σημείου r_{min} αντίθετου πρόσημου (σχ. 2.10). Αύξηση της $|s|$ οδηγεί σε αύξηση των δύο μεγίστων της E_r' στην πλειονότητα των περιπτώσεων διευθυνσης και σχήματος profile των ταχυτήτων της ροής που εξετάστηκαν με την αύξηση στην περιοχή που $s > 0$ να είναι μεγαλύτερη απ΄ αυτή στην περιοχή $s < 0$ (σχ. 2.10). Για ορισμένους συνδυασμούς των συνιστωσών της ταχύτητας, όμως το ένα ακρότατο αυξάνεται, ενώ το άλλο μειώνεται. Μια τέτοια περίπτωση με τοροειδή κορυφοειδή συνιστώσα και πολοειδή συνιστώσα φαίνεται στο σχήμα 2.11.

Όσον αφορά την εξάρτηση της τιμής του ακρότατου της διάτμησης του ηλεκτρικού πεδίου από τη θέση του q_{min} προέκυψε ότι καθώς το r_{min} παίρνει μεγαλύτερες τιμές, το ίδιο συμβαίνει και με τη τιμή του ακρότατου, ενώ και η θέση του τελευταίου μετατοπίζεται προς τα έξω (σχ. 2.12). Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση τοροειδούς συνιστώσας με Gaussian profile και μη μηδενικής πολοειδούς συνιστώσας της ταχύτητας της ροής. Ποσοτικά, η αύξηση της τιμής του ακρότατου κυμαίνεται μεταξύ 8% και 42% και εξαρτάται από τη διεύθυνση της ροής καθώς και από το σχήμα των profile των συνιστωσών της ταχύτητας της. Η αύξηση του q_{min} οδηγεί σε μείωση του ακροτάτου του E_r' στην περιοχή $s > 0$ σε όλες τις περιπτώσεις ροής που εξετάστηκαν, ενώ στην περιοχή $s < 0$ αυτό συμβαίνει όταν $v_{i\theta} = 0$ (σχ. 2.13). Αυξάνοντας τη διάτμηση της ταχύ-

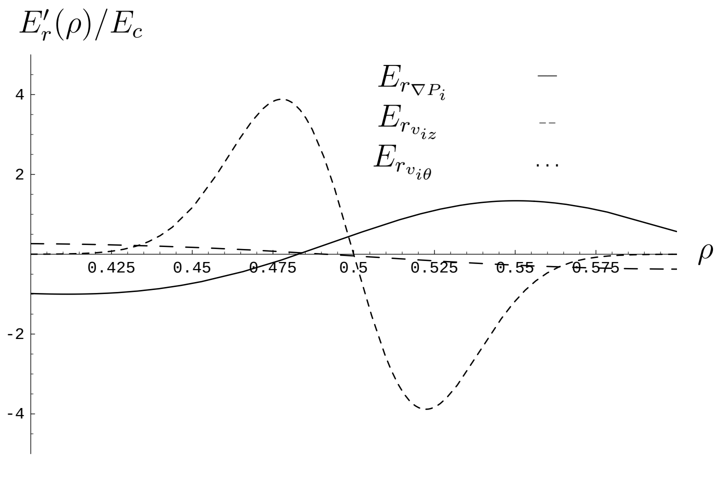


Σχήμα 2.7: Η παρατηρούμενη αύξηση της απόλυτης τιμής του ακρότατου του ηλεκτρικού πεδίου, όταν αυξάνεται η τιμή του r_{min} που αντιστοιχεί στη θέση του ελαχίστου του παράγοντα ασφάλειας. Επιπλέον η θέση του ακροτάτου μετατοπίζεται προς τα έξω. Για το σχήμα χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες τιμές των παραμέτρων: $q_{min} = 2$, $\Delta q = 4$, ενώ η ροή είναι αμιγώς τοροειδής κορυφοειδούς σχήματος. Τα profile είναι κανονικοποιημένα ως προς το ακρότατο της περίπτωσης $r_{min} = 0.5$.

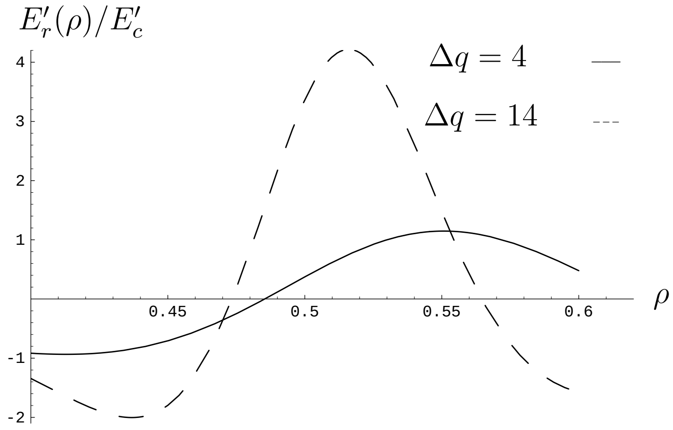
τητας της ροής τα μέγιστα της $|E_r'|$ αυξάνουν επίσης σε όλες τις περιπτώσεις ροής που εξετάστηκαν (σχ. 2.14). Για αμιγώς είτε τοροειδή ή πολοειδή ροή με profile ταχύτητας Gaussian σχήματος, αύξηση της απόλυτης τιμής του μεγίστου της ταχύτητας κατά έναν παράγοντα αυξάνει τα μέγιστα της $|E_r'|$ κατά τον ίδιο παράγοντα. Περαιτέρω, για αμιγώς τοροειδή ή αμιγώς πολοειδή ροή η αντιστροφή της διεύθυνσης της ροής προκαλεί αλλαγή στα πρόσημα των ακροτάτων της E_r'. Επιπλέον αυτή η αντιστροφή οδηγεί σε $i)$ αύξηση και των δύο τοπικών μεγίστων της $|E_r'|$ για Gaussian σχήματος v_{iz}, $ii)$ αύξηση του μεγίστου στην περιοχή όπου $s > 0$ και μείωση στην περιοχή $s < 0$ για κορυφοειδή τοροειδή ταχύτητα της ροής και $iii)$ μείωση και των δύο μεγίστων για αμιγώς πολοειδή ροή. Ας σημειωθεί ότι για αμιγώς τοροειδή ροή με profile ταχύτητας Gaussian σχήματος η αύξηση του μεγίστου της $|E_r'|$ στην περιοχή $s > 0$, λόγω της αντιστροφής της ροής, είναι μεγαλύτερη απ΄ ότι στην $s < 0$.



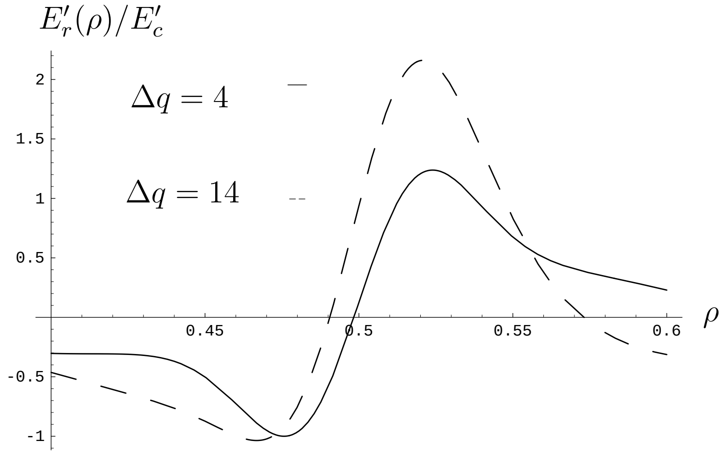
Σχήμα 2.8: Σε αυτό το σχήμα φαίνεται η παρατηρούμενη μείωση του μεγίστου του profile του κανονικοποιημένου $|E_r|$ όταν το q_{min} αυξάνει, για $\Delta q = 4$, $r_{min} = 0.5$, κορυφοειδή v_{iz} και Gaussian σχήματος εντοπισμένο profile για τη $v_{i\theta}$ ($h = 0.001$).



Σχήμα 2.9: Profile των συνεισφορών των όρων ∇P_i, v_{iz} και $v_{i\theta}$ στη διάτμηση του ηλεκτρικού πεδίου, E_r', από τα οποία φαίνεται ότι οι τρείς συνεισφορές είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Το profile της v_{iz} είναι κορυφοειδές, ενώ όλα τους είναι κανονικοποιημένα ώς προς το ακρότατο του όρου ∇P_i στην περιοχή όπου $s < 0$.



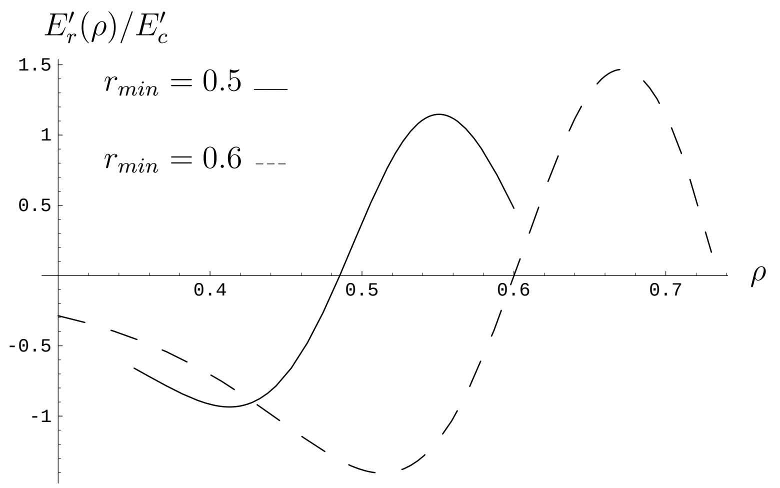
Σχήμα 2.10: Αύξηση των κανονικοποιημένων μεγίστων του profile του $|E'_r|$ λόγω της αυξησης της μαγνητικής διάτμησης. Τα σχήματα αντιστοιχούν σε κορυφοειδή v_{iz} και $v_{i\theta} = 0$.



Σχήμα 2.11: Αύξηση του ακρότατου της E'_r στην περιοχή $s > 0$ λόγω της αύξησης του Δq. Τα profile λήφθηκαν για κορυφοειδή v_{iz} και $v_{i\theta} \neq 0$ και είναι κανονικοποιημένα ως προς το ακρότατο στην περιοχή $s < 0$ για $\Delta q = 4$.

2.3.3 Διάτμηση της ταχύτητας $\vec{E} \times \vec{B}$ ($\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$)

Το profile της διάτμησης της ταχύτητας $\vec{E}\times\vec{B}$ (Εξ. (2.1)) εμφανίζει δύο τοπικά μέγιστα, το ένα στην περιοχή $s < 0$ και το άλλο στην περιοχή $s > 0$ (σχ. 2.15).



Σχήμα 2.12: Αύξηση των ακροτάτων του $|E'_r|$ καθώς το r_{min} παίρνει μεγαλύτερες τιμές για $q_{min} = 2$, $\Delta q = 4$, και για αμιγώς τοροειδή ροή με profile ταχύτητας κορυφοειδούς σχήματος. Επιπλέον φαίνεται η μετατόπιση των ακροτάτων προς τα έξω. Τα profile είναι κανονικοποιημένα ως προς το ακρότατο της E'_r για $r_{min} = 0.5$.

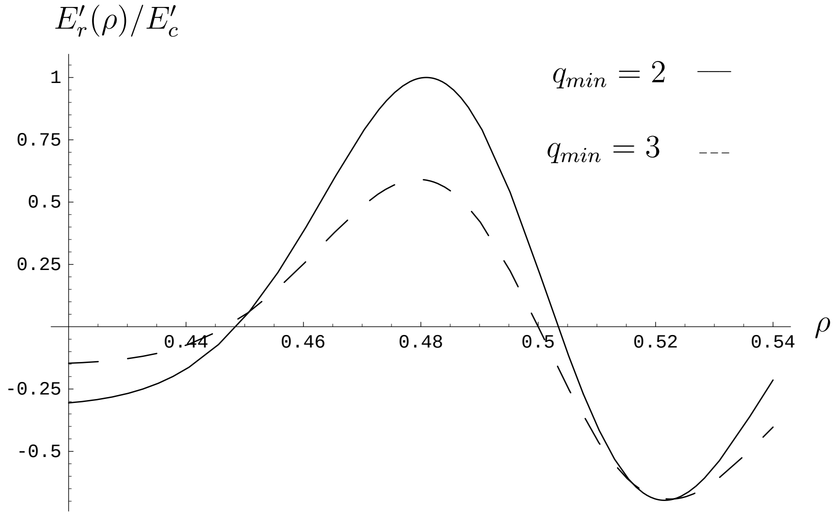
Μεγαλύτερο από τα δύο είναι αυτό που βρίσκεται στην περιοχή που η κλίση της πίεσης είναι μεγαλύτερη. Η επίδραση της μαγνητικής διάτμησης στην $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ είναι ισχυρότερη απ' ότι στην αντίστοιχη MHD περίπτωση και αυτό λόγω του όρου ∇P_i του ηλεκτρικού πεδίου (Εξ. (2.18)). Συγκεκριμένα για σταθερό B_z, τυχαία q, v_{iz} και $v_{i\theta}$, η εξίσωση (2.1) στο σημείο $E'_r = 0$ δίνει:

$$\omega_{\vec{E}\times\vec{B}} = \left|\omega_{\vec{E}\times\vec{B}-MHD} - \lambda\frac{(1-s)(2-s)B_z\rho\epsilon}{Z_i enqr_0^2\left(\rho^2 + \frac{q^2}{\epsilon^2}\right)}\right|, \tag{2.20}$$

όπου

$$\omega_{\vec{E}\times\vec{B}-MHD} = \frac{(1-s)\left(\frac{\epsilon\rho v_{iz}}{q} - v_{i\theta}\right)}{r_0^2 q\left(1 + \left(\frac{\epsilon\rho}{q}\right)^2\right)}. \tag{2.21}$$

Ο πρώτος όρος της (2.20) προέρχεται από τους όρους v_{iz} και $v_{i\theta}$ του E_r, ενώ ο δεύτερος από τον όρο της βαθμίδας πίεσης του ηλεκτρικού πεδίου στην (2.18) που συνδέεται με την (2.11). Ο δείκτης MHD χρησιμοποιείται για να δηλώσει την ομοιότητα της (2.21) με την αντίστοιχη MHD εξίσωση (18) που εξήχθη

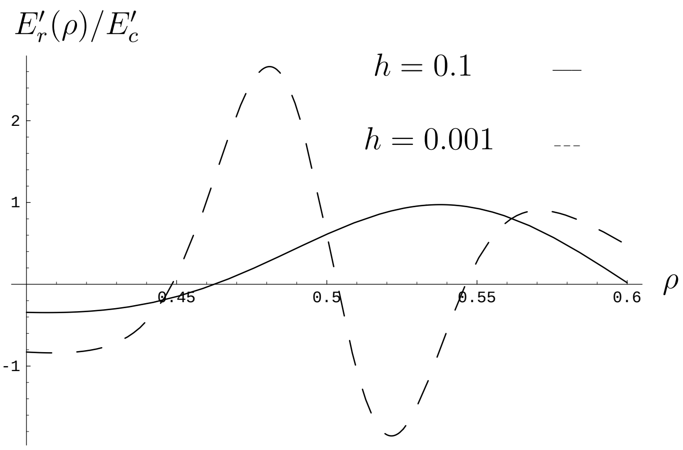


Σχήμα 2.13: Μείωση του ακρότατου της $|E'_r|$ στην περιοχή $s < 0$ για αμιγώς τοροειδή ροή με Gaussian profile της ταχύτητας λόγω της αύξησης του q_{min}. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση ροής η μεταβολή του άλλου ακροτάτου στην περιοχή $s > 0$ είναι αμελητέα.

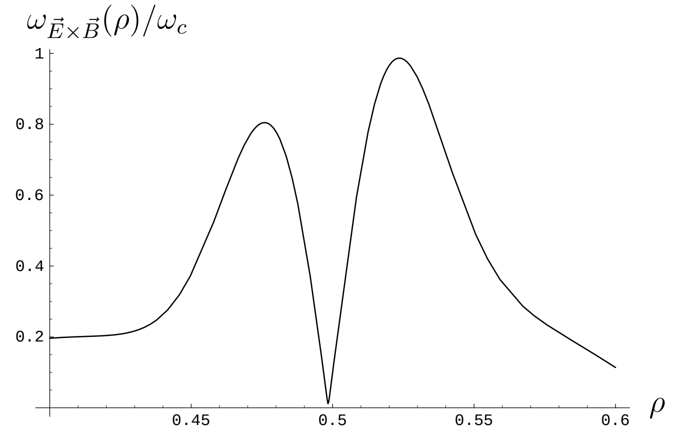
στην αναφορά [47]. Είναι εμφανές ότι στην (2.20) η εξάρτηση του $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ από την s λόγω του όρου ∇P_i είναι ανάλογη του $(1-s)(2-s)$, ενώ λόγω των όρων της ροής ανάλογη του $(1-s)$. Κατά συνέπεια, η εξάρτηση από την s είναι ισχυρότερη απ' ότι στην MHD περίπτωση, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η συνεισφορά του εκάστοτε όρου είναι της ίδιας τάξης μεγέθους (κάτι που ισχύει για όλο το profile όπως φαίνεται στο σχήμα 2.16). Επιπλέον, η συνεισφορά του εκάστοτε όρου σε απόλυτη τιμή είναι μεγαλύτερη για $s < 0$ απ' ότι για $s > 0$. Εδώ ας σημειωθεί ότι, αν και για tokamak ισχύει η σχέση κλίμακας, $v_{iz} \approx 10 v_{i\theta}$, οι συνεισφορές των όρων ταχύτητας, είναι της ίδιας τάξης μεγέθους λόγω της ύπαρξης του παράγοντα $\epsilon\rho/q$ στην (2.21). Επίσης, αύξηση της ταχύτητας της ροής, μέσω της αύξησης των $|v_{iz}|$ ή $|v_{i\theta}|$, κατά ένα παράγοντα, διατηρώντας τη σχέση κλίμακας, οδηγεί σε αύξηση των μεγίστων τιμών της $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ κατά τον ίδιο παράγοντα.

Η επίδραση της μαγνητικής διάτμησης, μέσω του Δq, και της ροής στη $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ είναι παρόμοια με την αντίστοιχη επίδραση στην E'_r. Συγκεκριμένα:

1. Αύξηση της $|s|$ οδηγεί σε αύξηση των μεγίστων της $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ στην πλειο-

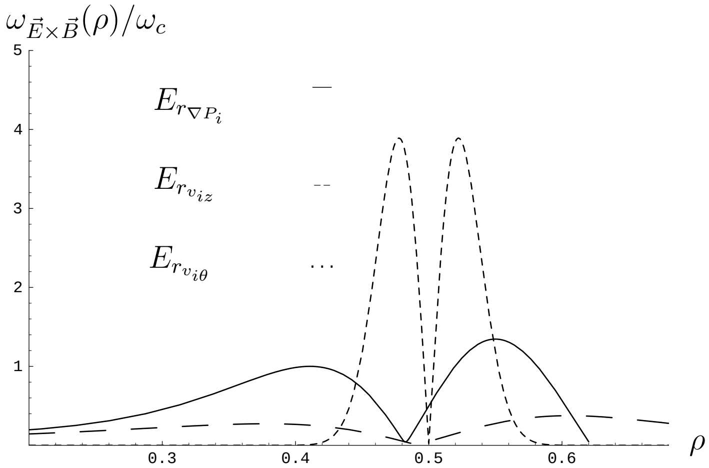


Σχήμα 2.14: Η αύξηση των μεγίστων της $|E'_r|$ οφειλόμενη στην αύξηση της διάτμησης της ταχύτητας της ροής στην περίπτωση που η τοροειδής συνιστώσα της ταχύτητας έχει Gaussian σχήμα, ενώ η πολοειδής συνιστώσα είναι μηδενική. Τα profile είναι κανονικοποιημένα ως προς το ακρότατο στην περιοχή όπου $s > 0$ για $h = 0.001$.

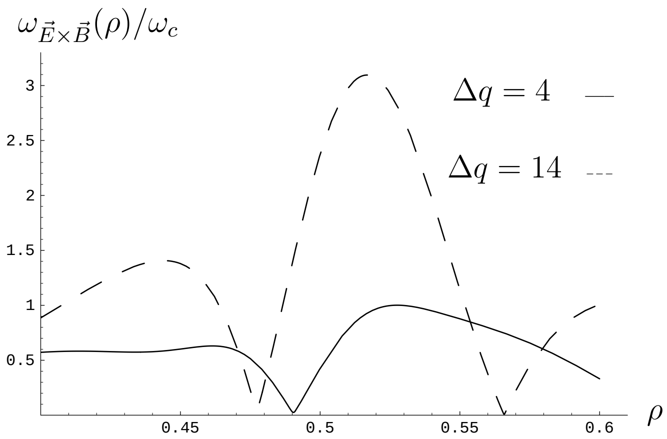


Σχήμα 2.15: Σε αυτό το σχήμα φαίνεται ένα τυπικό profile της διάτμησης της ταχύτητας $\vec{E} \times \vec{B}$, $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$, για αμιγώς πολοειδή ροή, κανονικοποιημένο ώς προς το μέγιστο στην περιοχή $s > 0$.

νότητα των περιπτώσεων που εξετάστηκαν (σχ. 2.17). Στις υπόλοιπες το ένα μέγιστο αυξάνεται, ενώ το άλλο μειώνεται (σχ. 2.18). Σε ποια

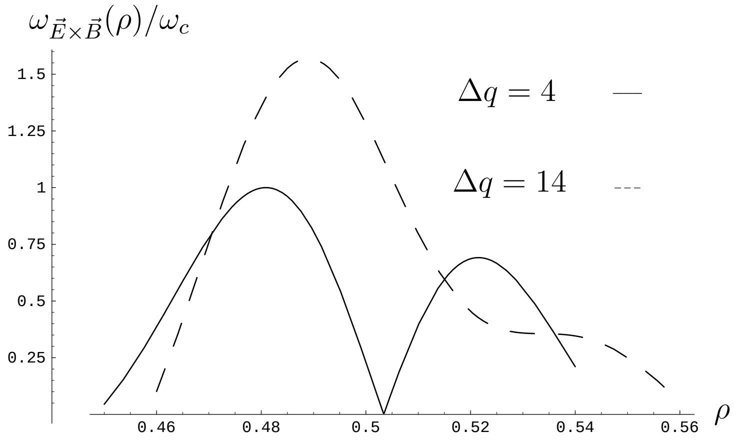


Σχήμα 2.16: Profile των όρων ∇P_i, v_{iz} και $v_{i\theta}$ που συνεισφέρουν στη $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ και επιδεικνύουν το γεγονός ότι οι τρείς συνεισφορές είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Η τοροειδής ταχύτητα της ροής έχει κορυφοειδές σχήμα. Η κανονικοποίηση πραγματοποιήθηκε ως προς το μέγιστο του όρου ∇P_i στην περιοχή $s < 0$.



Σχήμα 2.17: Αύξηση των μεγίστων της $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ λόγω της αύξησης της μαγνητικής διάτμησης. Και οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας της ροής έχουν profile Gaussian σχήματος.

περιοχή ($s < 0$ ή $s > 0$) αυτό συμβαίνει εξαρτάται από τη κατεύθυνση της ροής και το σχήμα του profile της ταχύτητας της.



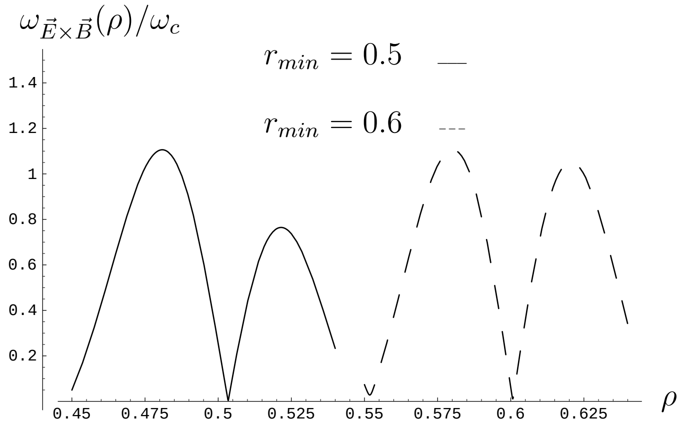
Σχήμα 2.18: Αυξηση του μεγίστου του $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ στην περιοχή $s < 0$ και μείωση στην $s > 0$ λόγω της αύξησης του Δq. Τα profile λήφθηκαν για Gaussian v_{iz} και $v_{i\theta} = 0$ και είναι κανονικοποιημένα ως προς το μέγιστο στην περιοχή $s < 0$ για $\Delta q = 4$.

2. Η μετατόπιση του r_{min} προς την επιφάνεια του πλάσματος οδηγεί σε αυξηση της τιμής των μεγίστων της $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ στις ίδιες περιπτώσεις με τη E_r', ενώ συνοδεύεται και από μετατόπιση προς την ίδια κατεύθυνση του profile, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.19.

3. Αύξηση του q_{min} προκαλεί $i)$ μείωση του μεγίστου στην περιοχή $s > 0$ σε όλες τις περιπτώσεις ροής και $ii)$ αύξηση του μεγίστου στην περιοχή $s < 0$ για $v_{i\theta} \neq 0$ (σχ. 2.20).

4. Όσο αυξάνεται η διάτμηση της ταχύτητας της ροής τόσο αυξάνονται και οι τιμές των μεγίστων της $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.21.

5. Τελευταία, οι τιμές της $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ εξαρτώνται από το σχετικό προσανατολισμό των v_{iz}, $v_{i\theta}$ και B_z, όπως προκύπτει από τις εξισώσεις (2.20) και (2.21). Συγκεκριμένα $i)$ αντιστροφή της Gaussian σχήματος τοροειδούς

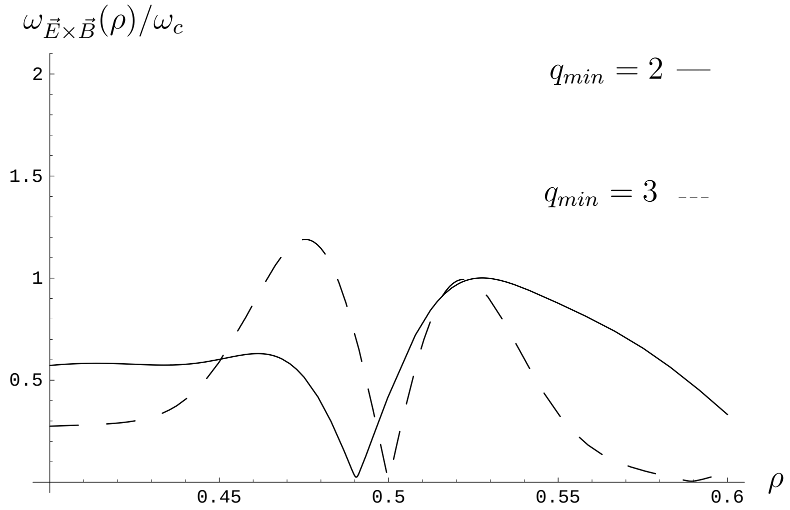


Σχήμα 2.19: Αύξηση των μεγίστων της $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ λόγω της μετατόπισης προς τα έξω της θέσης του q_{min} για αμιγώς τοροειδή ροή με ταχύτητα Gaussian σχήματος.

συνιστώσας της ταχύτητας της ροής οδηγεί σε αύξηση των μεγίστων της $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ (σχ. 2.22) *ii*) το μέγιστο στην περιοχή $s > 0$ αυξάνεται, ενώ αυτό στην περιοχή $s < 0$ μειώνεται για κορυφοειδή τοροειδή ταχύτητα ροής και *iii*) μειώνονται και τα δύο μέγιστα για αμιγώς πολοειδή ροή.

2.4 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήθηκε η ισορροπία tokamak με αρνητική μαγνητική διάτμηση και διατμημένη ταχύτητα ροής στο όριο απείρου λόγου όψης στα πλαίσια του μοντέλου των δύο ρευστών. Η μελέτη βασίστηκε σε ένα ελαφρώς απλοποιημένο σύστημα εξισώσεων στο οποίο η εξίσωση ορμής του ηλεκτρονικού ρευστού αντικαταστάθηκε από την αντίστοιχη του MHD μοντέλου. Αγνοώντας τον όρο ροής σε αυτή την εξίσωση (διότι σε κυλινδρική γεωμετρία είναι πολύ μικρός για tokamak) και περιγράφοντας τα profile έξι ελευθέρων ποσοτήτων με βάση πειραματικά αποτελέσματα, του τοροειδούς μαγνητικού πεδίου, B_z, του παράγοντα ασφάλειας, q, της τοροειδούς και πολοειδούς συνιστώσας της ταχύτητας του ιοντικού ρευστού, v_{iz} και $v_{i\theta}$, της πυκνότητας, n, και της πίεσης των ιόντων ως μέρος της ολικής πίεσης, $P_i = \lambda P$, κατασκευάσαμε αναλυτικές λύσεις. Με χρήση των λύσεων αυτών υπολογίστηκαν με αυτοσυνεπή τρόπο οι ακόλουθες ποσότητες ισορροπίας: P (και κατ' επέκταση η P_i και η πίεση του

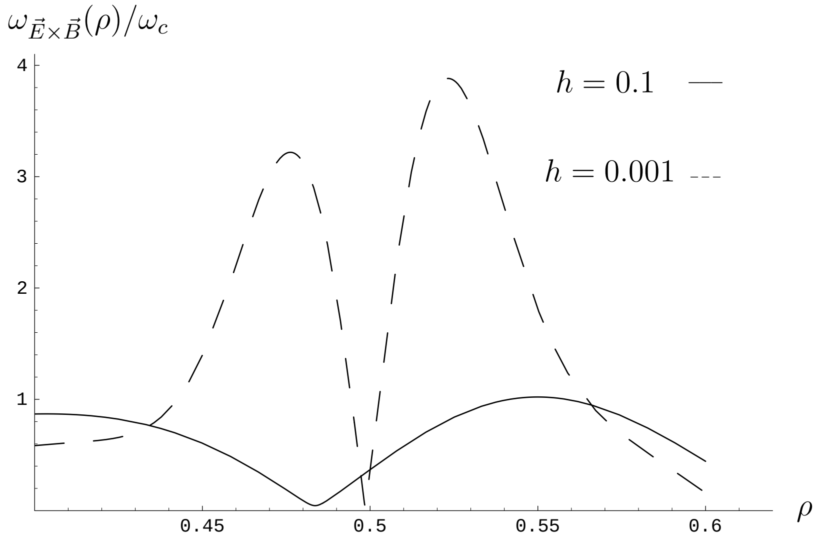


Σχήμα 2.20: Αύξηση του μεγίστου της $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ στην περιοχή $s < 0$ καθώς το q_{min} αυξάνεται, στην περίπτωση που και οι δυο συνιστώσες της ταχύτητας της ροής έχουν profile Gaussian σχήματος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η μεταβολή του μεγίστου στην περιοχή $s > 0$ είναι πολύ μικρή. Τα profile είναι κανονικοποιημένα ως πρός το μέγιστο της $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ στην περιοχή $s > 0$ για $q_{min} = 3$.

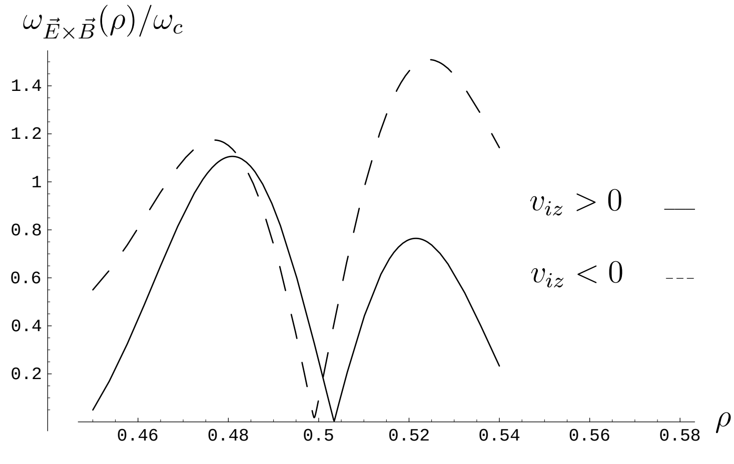
ηλεκτρονικού ρευστού $P_e = (1-\lambda)P$), η πυκνότητα τοροειδούς ρεύματος, το ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο, E_r, η διάτμηση του, E_r' και η διάτμηση της ταχύτητας $\vec{E}\times\vec{B}$, $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$. Θεωρήθηκε Gaussian σχήματος profile για την πολοειδή συνιστώσα της ταχύτητας ροής, $v_{i\theta}$, και είτε Gaussian είτε κορυφοειδούς σχήματος για τη τοροειδή συνιστώσα, v_{iz}. Για την περίπτωση αρνητικής μαγνητικής διάτμησης εξετάστηκε η επίδραση της μαγνητικής διάτμησης, s, και της ροής στα χαρακτηριστικά της ισορροπίας μεταβάλλοντας τις ακόλουθες παραμέτρους: το Δq ως προς την οποία είναι ανάλογη η s, το q_{min} (ελάχιστο του profile του q), η θέση του r_{min}, τα ακρότατα των συνιστωσών της ταχύτητας, v_{iz0} και $v_{i\theta 0}$ και τη παράμετρο h η οποία όταν μειώνεται αυξάνεται η διάτμηση της ταχύτητας της ροής. Τα συμπεράσματα συνοψίζονται ως εξής:

1. Αυξάνεται η κλίση του profile της πίεσης στην περιοχή $s < 0$.

2. Το profile της τοροειδούς πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος, J_z, είναι κοίλο και εμφανίζει αντιστροφή στην εξωτερική πλευρά όπου $s > 2$ και



Σχήμα 2.21: Η παρατηρούμενη αύξηση στα μέγιστα της $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ λόγω της αύξησης της διάτμησης της ταχύτητας της ροής στην περίπτωση κορυφοειδούς σχήματος v_{iz} και $v_{i\theta} \neq 0$. Η κανονικοποίηση πραγματοποιήθηκε ως προς το μέγιστο της $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ στην περιοχή $s > 0$ για $h = 0.1$.



Σχήμα 2.22: Αύξηση των μεγίστων της $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ λόγω της αντιστροφής της τοροειδούς συνιστώσας της ροής Gaussian σχήματος.

για κατάλληλες τιμές της παραμέτρου Δq.

3. Το profile του $|E_r|$ έχει ένα μέγιστο στην περιοχή που βρίσκεται το q_{min}, ενώ τα profile των $|E'_r|$ και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ έχουν δύο μέγιστα, το ένα στην περιοχή $s < 0$ και το άλλο στην περιοχή $s > 0$.

4. Η συνεισφορά των όρων ∇P_i, v_{iz} και $v_{i\theta}$ στα E_r, E'_r και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ (με τη συνεισφορά λόγω ∇P_i να λείπει στην περίπτωση του MHD μοντέλου) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους.

5. Η μαγνητική διάτμηση επηρεάζει τα E_r και E'_r τόσο ρητά μέσω του όρου ∇P_i, όσο και έμμεσα μέσω του αντίστοιχου v_{iz}, ενώ όσον αφορά την $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ η εξάρτηση επεκτείνεται και λόγω του όρου $v_{i\theta}$. Η ρητή εξάρτηση από την s είναι ισχυρότερη απ' ότι η έμμεση. Συγκεκριμένα, για B_z =σταθερό η συνεισφορά του όρου ∇P_i στην $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ στο σημείο που $E'_r = 0$ είναι ανάλογη του $(1-s)(2-s)$ (Εξ. (2.20)), ενώ η συνεισφορά λόγω των όρων ροής είναι ανάλογη του $(1-s)$ (Εξ. (2.21)).

6. Αύξηση της s έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση του μεγίστου του $|E_r|$ σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν. Επίσης τα μέγιστα των $|E'_r|$ και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ αυξήθηκαν στην πλειονότητα των περιπτώσεων που εξετάστηκαν. Όταν είτε η τοροειδής συνιστώσα και η πολοειδής αναιρούν η μία την επίδραση της άλλης είτε όταν η ταχύτητα ροής είναι αμιγώς τοροειδής και κορυφοειδούς σχήματος, η αύξηση είναι μεγαλύτερη στην περιοχή $s > 0$. Επίσης σε συνάρτηση με την διευθυνση και το σχήμα του profile της ταχύτητας ροής η αύξηση κυμαίνεται μεταξύ 56.4% και 323%.

7. Όσο πιο μεγάλη τιμή παίρνει το r_{min} τόσο μεγαλύτερα τα μέγιστα των $|E_r|$, $|E'_r|$ και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$.

8. Όσο μεγαλύτερο το q_{min} (με σταθερό Δq) τόσο μικρότερο το μέγιστο του $|E_r|$, αλλά τόσο μεγαλύτερα τα μέγιστα των $|E'_r|$ και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ στην περιοχή $s > 0$.

9. Μεγαλύτερη ταχύτητα ροής, λόγω μεγαλύτερων τιμών των $|v_{iz0}|$ και $|v_{i\theta 0}|$, οδηγεί σε ανάλογη αύξηση των ακροτάτων των E_r, E'_r και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$.

10. Όσο μεγαλώνει η διάτμηση της ταχύτητας ροής τόσο μειώνεται ασθενώς το ακρότατο του E_r, αλλά τόσο αυξάνονται τα μέγιστα των $|E'_r|$ και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$.

11. Τα E_r, E_r' και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ εξαρτώνται από το σχετικό προσανατολισμό των v_{iz}, $v_{i\theta}$ και B_z.

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο πρέπει να αναφέρουμε ως γενικό συμπέρασμα πως, όπως και στην περίπτωση του MHD μοντέλου, στο πλαίσιο του μοντέλου των δύο ρευστών η μαγνητική διάτμηση και η διατμημένη ταχύτητα ροής (τοροειδής και πολοειδής) δρουν συνεργατικά στα E_r, E_r' και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ τα οποία φαίνεται ότι παίζουν ρόλο στο σχηματισμό ITB. Όμως η επίδραση της μαγνητικής διάτμησης σε αυτές τις ποσότητες είναι ισχυρότερη απ' ότι στην περίπτωση του MHD μοντέλου λόγω του όρου ∇P_i που υπάρχει σε αυτές.

Κεφάλαιο 3

Επίδραση της ροής στη μαγνητική τοπολογία αξονικά συμμετρικών καταστάσεων ισορροπίας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξεταστεί η επίδραση της ροής στη τοπολογία του μαγνητικού πεδίου. Συγκεκριμένα, θα μελετηθεί η προκαλούμενη από τη τοροειδή ροή αλλαγή στη τοπολογία των μαγνητικών επιφανειών, αξονικά συμμετρικού σχηματισμού για τετραγωνική πολοειδή διατομή στα πλαίσια του μοντέλου της ιδανικής μαγνητοϋδροδυναμικής. Περαιτέρω θα εξεταστεί και ο ρόλος του λόγου όψης σε αυτή την αλλαγή.

3.1 Ροή και μαγνητικές επιφάνειες

Όπως αναφέρθηκε ήδη, σχεδόν όλα τα σενάρια για την βελτιωμένη λειτουργία του tokamak περιλαμβάνουν ροή. Επιπλέον, μία πιθανή μαγνητική τοπολογία στατικής ισορροπίας με ανεστραμμένη πυκνότητα ρεύματος στον πυρήνα του πλάσματος έχει ήδη μελετηθεί στις αναφορές [53, 54]. Αυτή περιλαμβάνει πολυτοροειδείς σχηματισμούς μη ένθετων μαγνητικών επιφανειών. Επίσης, αξονικά συμμετρικές ισορροπίες με ροή στα πλαίσια της MHD έχουν μελετηθεί κατά κόρον τα τελευταία χρόνια. Συγκεκριμένα, καταστάσεις ισορροπίας με ισόθερμες μαγνητικές επιφάνειες και τοροειδή ροή καθώς και ασυμπίεστη ροή τυχαίας διεύθυνσης έχουν μελετηθεί στις εργασίες [55] και [45] αντίστοιχα. Εδώ να σημειωθεί ότι η τοροειδής ροή, αν και λόγω συμμετρίας είναι εγγενώς ασυμπίεστη, για την ισορροπία με ισόθερμες μαγνητικές επιφάνειες μπορεί να θεωρηθεί συμπιεστή υπό την έννοια ότι η πυκνότητα μάζας δεν παραμένει σταθερή πάνω στις επιφάνειες αυτές. Αντίστοιχες ακριβείς λύσεις των εξισώσεων ισορροπίας κατασκευάστηκαν στις αναφορές [55, 56, 57] και [45]-[58] ενώ εξετάστηκε και η επίδραση της ροής σε διάφορα χαρακτηριστικά της ισορροπίας. Επιπλέον στην αναφορά [59] έχει γίνει επέκταση της λύσης Solovév [60, 61] σε μή περιορισμένο ασυμπίεστο πλάσμα και βρέθηκε ότι η ροή και η διάτμηση της μπορούν να αλλάξουν την μαγνητική τοπολογία. Συγκεκριμένα, πέραν του μαγνητικού άξονα του σχηματισμού Solovév εμφανίζεται και ένα σημείο X (δες σχήμα 11 της Αναφ. [59]).

3.2 Εξισώσεις ισορροπίας και λύσεις

Όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο το σύστημα των εξισώσεων (1.23)-(1.29) περιγράφει ισορροπία πλάσματος στα πλαίσια του μαγνητοϋδροδυναμικού μοντέλου.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπαραχθούν οι εξισώσεις ισορροπίας αξονικά συμμετρικού ιδανικού πλάσματος με αμιγώς τοροειδή ροή. Ας δούμε ξεχωριστά τί σημαίνει ο κάθε όρος της παραπάνω πρότασης. Η αξονική συμμετρία (Σχ. 1.2), δηλαδή η μη εξάρτηση από τη γωνία ϕ σε κυλινδρικές συντεταγμένες, έχει εφαρμογή στις πειραματικές διατάξεις tokamak καθώς και σε παραλλαγές αυτών όπως ο σχηματισμός αντιστροφής πεδίου (reversed field configuration) και τα spheromak. Η εκμετάλλευση της συμμετρίας οδηγεί στην υιοθέτηση κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων (R, ϕ, z), με τον άξονα z να αντιστοιχεί στον άξονα συμμετρίας. Το πλάσμα αναφέρθηκε ώς ιδανικό, πράγμα που σημαίνει ότι αφενός η χρονική κλίμακα στην οποία εξετάζεται η ισορροπία είναι μικρότερη από την Ωμική (resistive) και αφετέρου η θερμοκρασία του είναι πολύ υψηλή ($kT_e = 10KeV$), οπότε βάσει του νόμου του Spitzer (εξ. (1.30)) η ειδική αντίσταση μπορεί να θεωρηθεί μηδενική. Όσον αφορά τη τοροειδή ροή, αυτή περιλαμβάνεται σε όλα τα σενάρια επίτευξης βελτιωμένου τρόπου περιορισμού και συγκεκριμένα φέρεται να συνδέεται τόσο με τη μετάβαση από χαμηλό σε υψηλό τρόπο περιορισμού όσο και με το σχηματισμό εσωτερικών φραγμάτων μεταφοράς.

Ξαναγράφουμε εδώ τις εξισώσεις ισορροπίας του ιδανικού MHD για λόγους πληρότητας και ευκολίας του αναγνώστη:

$$\vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{v}) = 0, \tag{3.1}$$
$$-\vec{\nabla} P + \vec{J} \times \vec{B} = \varrho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}, \tag{3.2}$$
$$\text{Μια εξίσωση ενέργειας ή καταστατική εξίσωση,} \tag{3.3}$$
$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0, \tag{3.4}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \tag{3.5}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{3.6}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J}, \tag{3.7}$$

ενώ ισχύει και η παρακάτω που εκφράζει την αξονική συμμετρία

$$\frac{\partial A}{\partial \phi} = 0, \tag{3.8}$$

όπου A είναι οποιαδήποτε βαθμωτή ποσότητα.

Η εξίσωση ενέργειας ή η καταστατική εξίσωση που είναι απαραίτητη ώστε το σύστημα να κλείσει (Εξ. (3.3)) παραμένει απροσδιόριστη. Αυτό γίνεται για να παρουσιαστεί η ανάλυση κατά έναν ενοποιημένο τρόπο. Ο προσδιορισμός της θα γίνει όταν θα είναι απαραίτητος για την περαιτέρω πρόοδο της ανάλυσης, οπότε ανάλογα με την επιλογή θα διαφοροποιηθούν και οι εξισώσεις.

Για τη συγκεκριμένη συμμετρία το μαγνητικό πεδίο μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια δύο βαθμωτών συναρτήσεων $\psi(R, z)$ και $I(R, z)$ στη μορφή:

$$\vec{B} = I\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi, \tag{3.9}$$

όπου η συνάρτηση I συνδέεται με το πολοειδές ηλεκτρικό ρεύμα, ενώ η ψ είναι η πολοειδής συνάρτηση μαγνητικής ροής. Η τελευταία είναι ιδιαίτερα σημαντική μιας και η τιμή της καθορίζει τις μαγνητικές επιφάνειες. Η εξίσωση (3.9) εξασφαλίζει ότι η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου είναι μηδέν όπως απαιτεί η εξίσωση (3.6). Αντίστοιχα η τοροειδής ταχύτητα ροής μπορεί να γραφεί μέσω μιας συνάρτησης $K(R, z)$ ως:

$$\varrho \vec{v} = K\vec{\nabla}\phi. \tag{3.10}$$

Με βάση την εξίσωση (3.9) το ηλεκτρικό ρεύμα μέσω του νόμου του Ampére, (3.7), γράφεται:

$$\vec{J} = \Delta^* \psi \vec{\nabla}\phi - \vec{\nabla}\phi \times \vec{\nabla} I, \tag{3.11}$$

όπου Δ^* είναι ο ελλειπτικός τελεστής ο οποίος ορίζεται ως $R^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}/R^2)$.

Στη συγκεκριμένη γεωμετρία τρεις μεταξύ τους ανεξάρτητες διευθύνσεις μπορούν να επιλεγούν ως ακολούθως: κατά μήκος της τοροειδούς διεύθυνσης, κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου και κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες. Η προβολή της εξίσωσης διατήρησης της ορμής (3.2) και του νόμου του Ohm (3.4) στις παραπάνω διευθύνσεις, οδηγεί στην αναγνώριση ορισμένων ποσοτήτων οι οποίες παραμένουν σταθερές πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες ενώ και το σύστημα μετατρέπεται σε ένα απλούστερο. Συγκεκριμένα, η προβολή της εξίσωσης ορμής κατά μήκος της τοροειδούς διεύθυνσης $(\cdot\vec{\nabla}\phi)$ δίνει

$$\vec{\nabla}\phi\cdot(\vec{\nabla}\psi\times\vec{\nabla}I)=0, \tag{3.12}$$

από την οποία προκύπτει ότι συνάρτηση I είναι ποσότητα επιφανείας, δηλαδή $I=I(\psi)$. Επίσης, εκφράζοντας το ηλεκτρικό πεδίο μέσω του ηλεκτροστατικού δυναμικού, $\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi$, η συνιστώσα του νόμου του Ohm κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ οδηγεί στην εξίσωση

$$\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\Phi=0. \tag{3.13}$$

Από την εξίσωση (3.13) συνεπάγεται ότι το ηλεκτροστατικό δυναμικό είναι ποσότητα επιφανείας $\Phi=\Phi(\psi)$ καθώς επίσης ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στις μαγνητικές επιφάνειες. Προβάλλοντας την εξίσωση (3.4) κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες $(\cdot\vec{\nabla}\psi)$ προκύπτει ότι

$$\Big(\frac{d\Phi}{d\psi}-\frac{K}{\varrho R^2}\Big)|\vec{\nabla}\psi|^2=0. \tag{3.14}$$

Για να ισχύει η εξίσωση (3.14) θα πρέπει:

$$\frac{d\Phi}{d\psi}=\frac{K}{\varrho R^2}, \tag{3.15}$$

όμως, όπως είδαμε από την εξίσωση (3.13), το ηλεκτροστατικό δυναμικό είναι ποσότητα επιφάνειας, κατ΄ επέκταση και η παράγωγος του ως προς ψ, οπότε το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για την ποσότητα στο δεξί μέλος της (3.15). Έτσι η ποσότητα

$$\frac{K}{\varrho R^2}\equiv\omega=\frac{d\Phi}{d\psi}, \tag{3.16}$$

η οποία είναι η κυκλική συχνότητα της ροής μάζας του πλάσματος είναι ποσότητα επιφανείας $\omega=\omega(\psi)$.

Με τη βοήθεια των εξισώσεων (3.12)-(3.16) η προβολή της εξίσωσης ορμής κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου και κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες παράγει αντίστοιχα:

$$\left[\frac{\vec{\nabla}P}{\varrho} - \vec{\nabla}\Big(\frac{\omega^2 R^2}{2}\Big)\right] \cdot \vec{B} = 0, \tag{3.17}$$

$$[\Delta^*\psi + II']|\vec{\nabla}\psi|^2 + R^2\left[\vec{\nabla}P - \varrho\omega^2\vec{\nabla}\Big(\frac{R^2}{2}\Big)\right] \cdot \vec{\nabla}\psi = 0, \tag{3.18}$$

όπου ο τόνος δηλώνει παραγώγιση ως προς ψ.

Το παραπάνω σύστημα των πεπλεγμένων εξισώσεων (3.17)-(3.18) καθορίζει πλήρως την ισορροπία. Η πρώτη εξίσωση είναι τύπου Bernoulli που συναντάται στην υδροδυναμική, ενώ η δεύτερη αντιστοιχεί στην εξίσωση Grad-Shlüter-Shafranov της στατικής περίπτωσης (δες για παράδειγμα [2]). Για να απλοποιηθεί το παραπάνω σύστημα είναι πλέον απαραίτητη η υιοθέτηση μιας συγκεκριμένης εξίσωσης ενέργειας ή καταστατικής εξίσωσης. Αυτή η επιλογή θα βασιστεί σε φυσικά επιχειρήματα:

Λόγω της μη άσκησης δύναμης στα σωματίδια κατά μήκος των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου η θερμική αγωγιμότητα παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο είναι πάρα πολύ μεγάλη. Κατά συνέπεια οι μαγνητικές επιφάνειες μπορούν να θεωρηθούν ισόθερμες, δηλαδή $T = T(\psi)$. Χρησιμοποιώντας το νόμο των ιδανικών αερίων $P = \lambda\varrho T$ και αναγνωρίζοντας ότι η ποσότητα μέσα στις αγκύλες στην εξίσωση (3.17) είναι μια ποσότητα επιφάνειας μπορεί αυτή να ολοκληρωθεί και να δώσει

$$P = P_s(\psi)\Big(\frac{\omega^2 R^2}{2\lambda T}\Big), \tag{3.19}$$

όπου, όπως φαίνεται, η ποσότητα $P_s(\psi)$ είναι η πίεση απουσία ροής ($\omega = 0$) η οποία είναι ποσότητα επιφανείας. Αυτό είναι συνεπές με το γεγονός ότι στη στατική ισορροπία οι ισοβαρικές επιφάνειες ταυτίζονται με τις αντίστοιχες μαγνητικές. Παρουσία ροής, η πίεση όπως και η πυκνότητα μάζας, λόγω του νόμου των ιδανικών αερίων, δεν είναι σταθερές πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες, όταν οι τελευταίες είναι ισόθερμες. Η μη σταθερότητα της πυκνότητας πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες υπονοείται από τον όρο «συμπιεστότητα». Αν και η πυκνότητα, εκτός από τη θερμοκρασία παραμένει σταθερή πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες τότε αναγκαστικά αυτές είναι και ισοβαρικές. Σε αυτή την περίπτωση η ισορροπία έχει χαρακτηριστικά παρόμοια με αυτά της στατικής ισοδυναμικής [62]. Η τελευταία ικανοποιεί τη συνθήκη $B = B(\psi)$, όπου B το μέτρο του μαγνητικού πεδίου και δεν αντιστοιχεί σε tokamak μιας και το τοροειδές μαγνητικό πεδίο, B_ϕ, μηδενίζεται πάνω στο μαγνητικό άξονα. Από τα παραπάνω προκύπτει λοιπόν ότι έστω και μια μικρή μεταβολή της πυκνότητας μάζας πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες είναι απαραίτητη για την ύπαρξη ισορροπιών tokamak με ισόθερμες μαγνητικές επιφάνειες και ροή.

Αντικαθιστώντας την πίεση στην εξίσωση (3.18) με την έκφραση της (3.19) η πρώτη γίνεται

$$\Delta^*\psi + II' + R^2\left[P_s' + P_s\frac{R^2}{2}\left(\frac{\omega^2}{\lambda T}\right)'\right]\exp\left(\frac{\omega^2 R^2}{2\lambda T}\right) = 0. \tag{3.20}$$

Αυτή είχε παραχθεί αρχικά στην αναφορά [55].

Εναλλακτικά, κανείς θα μπορούσε να θεωρήσει ασυμπίεστη ροή,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0. \tag{3.21}$$

Σ' αυτή την περίπτωση μέσω της εξίσωσης (3.1) προκύπτει ότι η πυκνότητα μάζας είναι ποσότητα επιφάνειας, $\varrho = \varrho(\psi)$. Χρησιμοποιώντας αυτό το χαρακτηριστικό, το νόμο των ιδανικών αερίων και το γεγονός ότι η ποσότητα μέσα στις αγκύλες της εξίσωσης (3.17) είναι ποσότητα επιφάνειας, όπως ακριβώς και στην περίπτωση ισόθερμων μαγνητικών επιφανειών και ολοκληρώνοντας αυτή την εξίσωση προκύπτει

$$P = P_s(\psi) + \frac{R^2\varrho\omega^2}{2}, \tag{3.22}$$

όπου και εδώ η ποσότητα $P_s(\psi)$ αντιστοιχεί στην πίεση απουσία ροής. Αντικαθιστώντας την πίεση από την εξίσωση (3.22) στην (3.18) προκύπτει

$$\Delta^*\psi + II' + R^2P_s' + \frac{R^4}{2}(\varrho\omega^2)' = 0. \tag{3.23}$$

Αυτή αποτελεί ειδική περίπτωση της εξίσωσης για αξονικά συμμετρική ισορροπία με ασυμπίεστη ροή τυχαίας διεύθυνσης που εξήχθη αρχικά στην αναφορά [45]. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι κατ' αντιστοιχία με την «συμπιεστή» περίπτωση είναι απαραίτητο η θερμοκρασία πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες ενός tokamak να μην είναι σταθερή όπως εξηγήθηκε πιο πάνω.

Οι εξισώσεις (3.20) και (3.23) περιέχουν τέσσερεις ποσότητες επιφάνειας από τις οποίες οι τρεις είναι κοινές. Συγκεκριμένα οι P_s, I και ω είναι κοινές, ενώ η τέταρτη ποσότητα είναι η T και η ϱ για τη «συμπιεστή» και την ασυμπίεστη περίπτωση αντίστοιχα. Συγκρίνοντας τις δύο εξισώσεις φαίνεται ότι ο όρος ροής στην (3.20) εξαρτάται ρητά από το ω και την T μέσω του όρου $\omega^2/\lambda T$ και της παραγώγου αυτού ως προς ψ (δηλαδή τη διάτμηση του), ενώ μόνο η διάτμηση του όρου ροής $\varrho\omega^2$ εμφανίζεται στην εξίσωση (3.23). Περαιτέρω, αν και η συναρτησιακή εξάρτηση από τους όρους ροής είναι διαφορετική, οι εξισώσεις (3.20) και (3.23) γίνονται παρόμοιες στο όριο $\omega^2/\lambda T \ll 1$. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό αναπτύσσοντας το εκθετικό στην (3.20),

$$\exp\left(\frac{\omega^2 R^2}{2\lambda T}\right) = 1 + \frac{\omega^2 R^2}{2\lambda T} + \cdots ,$$

και κρατώντας στην ανάπτυξη μόνο τον πρώτο όρο, δηλαδή τη μονάδα. Για όρο ροής χωρίς διάτμηση, $(\omega^2/\lambda T)' = 0$, απαιτείται και ο πρώτης τάξης όρος ώστε να διατηρηθεί η ομοιότητα. Τα παραπάνω σημαίνουν ότι για αρκούντως χαμηλές συχνότητες περιστροφής του πλάσματος ή/και πολύ υψηλές θερμοκρασίες το πλάσμα τείνει να συμπεριφέρεται ως ασυμπίεστο.

Για να επιλυθούν αναλυτικά οι εξισώσεις θα πρέπει να γραμμικοποιηθούν με κατάλληλη επιλογή των ελευθέρων ποσοτήτων επιφανείας. Εδώ θα χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθες επιλογές:

1. «Συμπιεστή» ροή

   Οι παρακάτω επιλογές έγιναν για να γραμμικοποιηθεί η (3.20) [56, 57]:

$$\begin{aligned} I^2 &= I_0^2 + I_1^2\psi^2, \\ P_s &= 2P_0\psi^2, \\ \frac{\omega^2}{\lambda T} &= \frac{\gamma M_0^2}{R_0^2} = \text{σταθ.} \end{aligned} \tag{3.24}$$

   Εδώ I_0/R είναι το τοροειδές μαγνητικό πεδίο κενού (απουσία πλάσματος), η παράμετρος I_1 προσδιορίζει τις μαγνητικές ιδιότητες του πλάσματος, ενώ P_0, γ και M_0 είναι μια παράμετρος πίεσης, ο λόγος των ειδικών θερμοτήτων και ο αριθμός Mach ως προς τη ταχύτητα του ήχου σε κάποιο σημείο αναφοράς ($z = 0$, $R = R_0$) αντίστοιχα. Το σημείο R_0 θα προσδιοριστεί αργότερα.

   Εισάγοντας τις παραπάνω επιλογές στην εξίσωση (3.20) αυτή γραμμικοποιείται και επιδέχεται αναλυτική λύση της μορφής $\mathcal{R}(R)\mathcal{Z}(z)$ με βάση τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Επιλέγοντας περαιτέρω τη σταθερά διαχωρισμού να είναι ίση με $I_1 R_0$ η λύση γράφεται στη μορφή:

$$\psi(x,y) = C_1\left[J_0\left(\frac{2\tau\sqrt{e^{\gamma M_0^2 x^2/2}}}{\gamma M_0^2}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{2\tau\sqrt{e^{\gamma M_0^2 x^2/2}}}{\gamma M_0^2}\right)\right]\cos(R_0 I_1 y), \tag{3.25}$$

όπου $x = R/R_0$ και $y = z/R_0$, ενώ J_0 και Y_0 είναι οι συναρτήσεις Bessel μηδενικής τάξης πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα και $\tau^2 \equiv 4P_0R_0^4$. Το μέρος της λύσης στη z διεύθυνση, που αποτελείται στη γενική περίπτωση από γραμμικό συνδυασμό ημιτόνου και συνημιτόνου, επιλέχθηκε έτσι ώστε η λύση να είναι συμμετρική ως προς το μεσοεπίπεδο $z = 0$. Οι δύο σταθερές C_1 και C_2 προκύπτουν από την ολοκλήρωση του ακτινικού μέρους της (3.20).

2. Ασυμπίεστη ροή
   Σε αυτή την περίπτωση πραγματοποιήθηκαν οι παρακάτω επιλογές για τη γραμμικοποίηση της (3.23):

$$\begin{aligned} I^2 &= I_0^2 + I_1^2\psi^2, \\ P_s &= 2P_0\psi^2, \\ (\varrho\omega^2)' &= \left[\frac{K^2}{\varrho R^4}\right]' = 2A\psi. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Η τρίτη των εξισώσεων (3.26) μαζί με την (3.15) συνδέουν την παράμετρο A με τα profile της πυκνότητας μάζας και του ηλεκτρικού πεδίου κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες, συγκεκριμένα, με τις τιμές αυτών και τη διάτμηση τους. Η πολικότητα του ηλεκτρικού πεδίου, $\vec{E}$, καθώς και η παραπάνω διάτμηση επιτρέπουν στην παράμετρο A, σε αντιδιαστολή με την M_0 της οποίας η διάτμηση είναι μηδέν, να παίρνει είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές. Επίσης η παράμετρος A έχει διαστάσεις, ενώ ο αριθμός Mach είναι αδιάστατος.

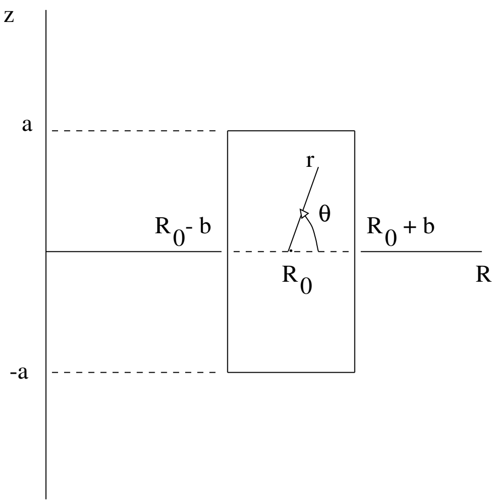
Η λύση που προκύπτει με χωρισμό μεταβλητών από την γραμμικοποιημένη (3.23) μέσω των επιλογών (3.26) εκφράζεται μέσω των συναρτήσεων Airy πρώτου και δευτέρου είδους, Ai και Bi, αντίστοιχα ως [58]:

$$\begin{aligned} \psi(x,y) = C_1\Bigg\{ Ai\left[\left(\frac{AR_0}{4}\right)^{-2/3}\left(\frac{AR_0^6}{4}x^2 - P_0R_0^4\right)\right] \\ + C_2 Bi\left[\left(\frac{AR_0}{4}\right)^{-2/3}\left(\frac{AR_0^6}{4}x^2 - P_0R_0^4\right)\right]\Bigg\}\cos(R_0I_1y), \end{aligned} \tag{3.27}$$

όπου και εδώ η λύση είναι συμμετρική ώς προς το μεσοεπίπεδο $z = 0$.

3.3 Πολυτοροειδείς σχηματισμοί και ροή

Σε αυτό το εδάφιο με βάση τις λύσεις (3.25) και (3.27) θα εξεταστεί η μαγνητική τοπολογία στάσιμων καταστάσεων tokamak στο οποίο το πλάσμα περιβάλλεται από αγώγιμα τοιχώματα ορθογώνιας διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Σε αυτό το σχήμα φαίνεται η πολοειδής διατομή του συνόρου του πλάσματος. Ο λόγος όψης ορίζεται ως R_0/b. Οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό μεταβολών πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι πιο ρεαλιστικά σύνορα, όπως κυκλικά ή σχήματος D, απαιτούν λύσεις εκφρασμένες σε μορφή σειράς με κατάλληλη επιλογή των συντελεστών, ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες. Σε αυτή την περίπτωση, όμως, ίσως δε θα ήταν δυνατό να αναγνωριστούν κάποια χαρακτηριστικά της ισορροπίας, καθώς και η ακριβής μελέτη της επίδρασης της ροής σε αυτή εξαιτίας του πεπερασμένου αριθμού όρων της σειράς που θα χρησιμοποιούνταν, ενώ και τα αριθμητικά σφάλματα που υπεισέρχονται θα έκαναν ακόμη πιο δύσκολο αυτό το έργο. Μια λύση στα παραπάνω προβλήματα αποτελεί η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων, στην παρούσα εργασία όμως, επιδιώχθηκε η εύρεση αναλυτικών και ακριβών λύσεων.

Για να εφαρμοστούν οι συνοριακές συνθήκες θεωρείται ότι η εξώτατη κλειστή μαγνητική επιφάνεια συμπίπτει με τα τοιχώματα ορθογώνιας διατομής οπότε οι λύσεις θα πρέπει να ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις στις δύο ανεξάρτητες διευθύνσεις x και y

$$\psi(y_{\pm}) = 0 \tag{3.28}$$

και

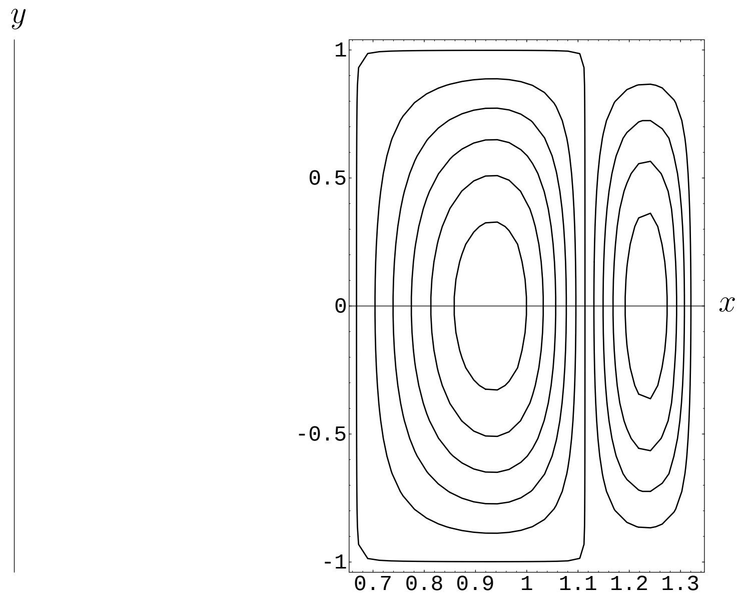
$$\psi(x_{\pm}) = 0, \tag{3.29}$$

όπου $y_{\pm} = \pm\alpha/R_0$ και $x_{\pm} = 1 \pm b/R_0$. Έτσι, το πρόβλημα της ισορροπίας γίνεται, από μαθηματική άποψη, ένα πρόβλημα συνοριακών συνθηκών οι ιδιοκαταστάσεις του οποίου καθορίζονται από την απαίτηση για ικανοποίηση των (3.28) και (3.29) από τις (3.25) και (3.27). Επιβάλλοντας την συνθήκη (3.28) στο μέρος των λύσεων που εξαρτάται από τη z συνιστώσα, το οποίο είναι κοινό για συμπιεστή και ασυμπίεστη ροή, προκύπτει για τις ιδιοτιμές η σχέση:

$$I_1^{\ell} = \frac{1}{a}\Big(\ell\pi - \frac{\pi}{2}\Big), \quad \ell = 1, 2, \dots \tag{3.30}$$

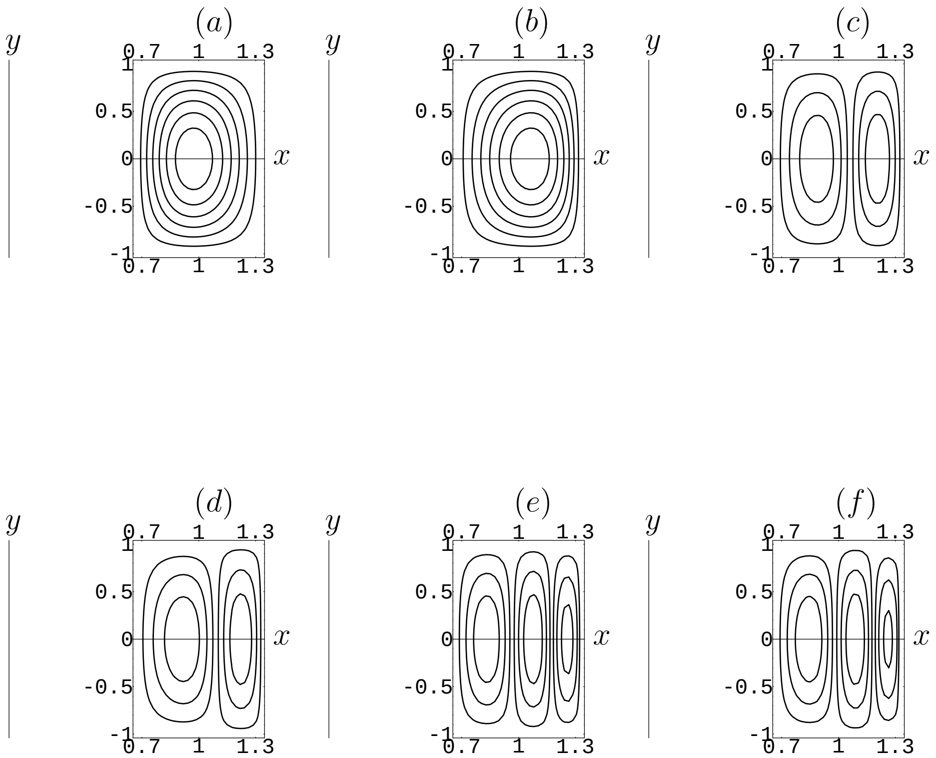
για την ποσότητα I_1 η οποία συνδέεται με τη συνάρτηση του πολοειδούς ρεύματος $I(\psi)$. Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις αντιστοιχούν σε σχηματισμούς με ℓ μαγνητικούς άξονες παράλληλα στον άξονα συμμετρίας του tokamak (z διεύθυνση). Αντίστοιχα, η συνθήκη (3.29) εφαρμόζεται στο μέρος των λύσεων που εξαρτάται από τη συνιστώσα R. Σε αυτό το μέρος περιέχεται ο παράγοντας ροής, δηλαδή είτε ο αριθμός Mach, M_0, είτε η παράμετρος A για τη συμπιεστή και ασυμπίεστη περίπτωση αντίστοιχα. Επομένως, η επίδραση της ροής στην ισορροπία μέσω των λύσεων (3.25) και (3.27) θα εμπεριέχεται στο μέρος τους που αφορά τη διεύθυνση R. Επιπλέον των παραμέτρων ροής περιέχεται και η παράμετρος πίεσης P_0. Για να διευκολυνθεί η περαιτέρω συζήτηση εισάγεται το σύμβολο F που αντιπροσωπεύει είτε το M_0 είτε το A. Αυτός ο συμβολισμός είναι εξαιρετικά χρήσιμος για την παρουσίαση αποτελεσμάτων τα οποία είναι ανεξάρτητα της συμπιεστότητας. Εφόσον υπάρχουν δύο ελεύθερες παράμετροι, F και P_0, υπάρχουν εναλλακτικές δυνατότητες για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών μέσω της (3.29). Έτσι, είναι δυνατό να καθοριστούν ιδιοτιμές ροής οι οποίες είναι συναρτήσεις της P_0, που παραμένει ελεύθερη, $F^n(P_0)$ $(n = 1, 2, \dots)$, ή αντίστροφα ιδιοτιμές πίεσης $P_0^n(F)$ με την F ελεύθερη. Αυτή η παραμετρική εξάρτηση αυξάνει τις δυνατότητες των ιδιοτιμών σε σχέση με τη στατική περίπτωση και κάνει το φάσμα αυτών ευρύτερο. Επίσης, οι ιδιοτιμές εξαρτώνται από τις γεωμετρικές διαστάσεις R_0 και b, αλλά όχι από το a (όπως τα μήκη αυτά επιδεικνύονται στο σχήμα 3.1), οπότε τα αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα από το λόγο επιμήκυνσης a/b. Οι σταθερές ολοκλήρωσης C_1 και C_2 των εξισώσεων (3.25) και (3.27) χρησιμοποιούνται για την κανονικοποίηση της ψ ως προς το μαγνητικό άξονα και για την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης (3.29) αντίστοιχα. Όπως προκύπτει από τους ορισμούς (3.24) και (3.26) η παράμετρος A έχει διαστάσεις σε αντιδιαστολή με τον αριθμό Mach, M_0, ο οποίος είναι αδιάστατο μέγεθος. Για να γίνει η παράμετρος A αδιάστατη ποσότητα την κανονικοποιήσαμε ως προς τη μονάδα $1kg/(m^7T^2s^2)$. Με βάση τα παραπάνω υπολογίζονται αριθμητικά οι ιδιοτιμές $F^n(P_0)$ και $P_0^n(F)$. Για δεδομένη τιμή του P_0 οι F^n ικανοποιούν για κάθε n την ακόλουθη σχέση διάταξης $F^{n+1} > F^n$. Αντίστοιχα μια παρόμοια σχέση ικανοποιείται από τις P_0^n για δεδομένη τιμή της F. Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις αντιπροσωπεύουν σχηματισμούς με n μαγνητικούς άξονες κατά μήκος της διεύθυνσης R. Με βάση τα παραπάνω η ολική λύση $\psi_{\ell n} = \mathcal{Z}_\ell(z)\mathcal{R}_n(R)$ αντιστοιχεί σε πολυτοροειδείς σχηματισμούς με $\ell \times n$ μαγνητικούς άξονες.

Ένας στατικός σχηματισμός με δύο άξονες παράλληλα στη διεύθυνση z μελετήθηκε στην [63]. Υπενθυμίζεται ότι παράλληλα στον άξονα συμμετρίας οι λύσεις που παρουσιάζονται δεν έχουν εξάρτηση από τη ροή, οπότε η δυνατότητα πολυτοροειδών σχηματισμών κατά μήκος αυτού του άξονα είναι ανεξάρτητη της ύπαρξης ροής. Έτσι, το ενδιαφέρον θα εστιαστεί στο μέρος της λύσης κάθετα στον άξονα συμμετρίας. Για λόγους απλοποίησης και χωρίς να χάνεται η γενικότητα, η μελέτη θα περιοριστεί στην ιδιοσυνάρτηση ψ_{1n} η οποία περιγράφει πολυτοροειδείς σχηματισμούς με n μαγνητικούς άξονες κατά μήκος του επιπέδου $z = 0$. Σαν παράδειγμα σχηματισμού με δύο μαγνητικούς άξονες που αντιπροσωπεύει η ψ_{12} φαίνεται στο σχήμα 3.2 στην περίπτωση συμπιεστής ροής. Πολυτοροειδείς σχηματισμοί, στη στατική περίπτωση ανάλογοι με του σχήματος 3.2 μελετήθηκαν στις αναφορές [53] και [54] σε συνδυασμό με κοίλα profile πυκνότητας ρεύματος τα οποία μπορούν να γίνουν αρνητικά στον πυρήνα του πλάσματος και κατ΄ επέκταση να αντιστραφεί η φορά του ρεύματος. Σε αυτή την περίπτωση η αντιστροφή είναι δυνατή λόγω του ότι οι μαγνητικές επιφάνειες δεν είναι ένθετες. Προφανώς στη στατική περίπτωση είναι δυνατό να έχουμε μόνο ιδιοτιμές της πίεσης. Παρουσία ροής εξετάστηκαν ιδιοκαταστάσεις της βασικής ιδιοτιμής της πίεσης $P_0^n(F)$ μεταβάλλοντας συνεχώς την παράμετρο ροής F με σημείο εκκίνησης τη τιμή της στατικής περίπτωσης $P_0^1(F \approx 0)$. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι για ασυμπίεστη ροή $A = 0$ δε σημαίνει απαραίτητα πως αντιστοιχεί στη στατική περίπτωση λόγω της τρίτης εξίσωσης της επιλογής (3.26) η οποία περιλαμβάνει και τη διάτμηση της ροής. Μεταβάλλοντας συνεχώς την παράμετρο ροής παρατηρήθηκαν σημεία μετάβασης F_m $(m = 1, 2, \ldots)$ στα οποία αλλάζει η μαγνητική τοπολογία μέσω του σχηματισμού ενός επιπλέον μαγνητικού άξονα (ο δείκτης m εδώ υποδηλώνει σημείο μετάβασης και δεν πρέπει να συγχέεται με τον εκθέτη n που αντιστοιχεί στην τάξη της ιδιοτιμής).



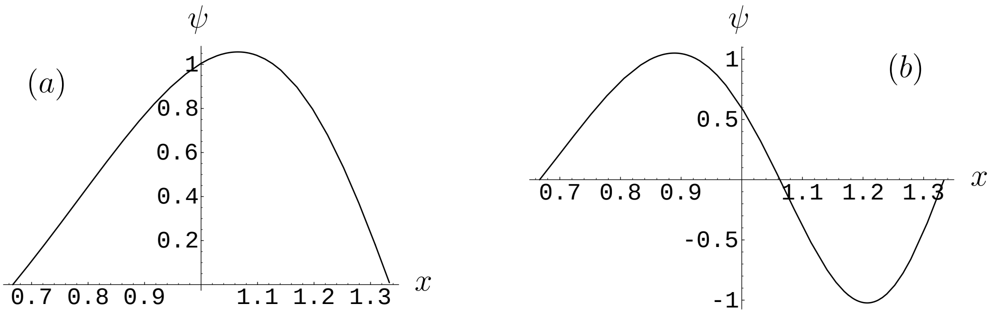
Σχήμα 3.2: Ο σχηματισμός διπλού μαγνητικού άξονα της ιδιοσυνάρτησης ψ_{1n} με ιδιοτιμή $M_0^2 = 1.692$ για λόγο όψης $\alpha = 3$.

Στο σχήμα 3.3 δείχνεται μια ακολουθία γραφημάτων που αντιστοιχεί σε σχηματισμούς που πάρθηκαν μεταβάλλοντας την παράμετρο A. Συγκεκριμένα, εκκινώντας, όπως αναφέρθηκε από μια τιμή κοντά στη στατική ένας απλά τοροειδής σχηματισμός προκύπτει με ιδιοτιμή $P_0^1(A = 0.009)$ με ιδιοσυνάρτηση ψ_{11} (Σχ. 3.3(a)). Μεταβάλλοντας την παράμετρο ροής οι ιδιοτιμές της πίεσης μειώνονται και ο σχηματισμός ως σύνολο μετατοπίζεται προς τα έξω και συμπιέζεται στην εξωτερική του πλευρά (Σχ. 3.3(b)). Έπειτα καθώς η παράμετρος ροής φτάνει στο πρώτο σημείο μετάβασης $A_1 = -0.01$, με αντίστοιχη ιδιοτιμή της πίεσης $P_0^2(A = A_1)$, ένας δεύτερος μαγνητικός άξονας σχηματίζεται στην εξωτερική πλευρά του ήδη υπάρχοντος προκαλώντας τη μετατόπιση του τελευταίου προς το εσωτερικό (Σχ. 3.3(c)). Το γεγονός του σχηματισμού του νέου μαγνητικού άξονα στην εξωτερική πλευρά του υπάρχοντος σχηματισμού φαίνεται από την φορά του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου, όπως αυτή προκύπτει από το πρόσημο της ψ μόλις πριν και αμέσως μετά το σχηματισμό του νέου μαγνητικού άξονα. Αφού πριν αυτό το σχηματισμό η ψ δεν είναι μηδέν, ο νέος μαγνητικός άξονας



Σχήμα 3.3: Σε αυτό το σχήμα φαίνεται μια ακολουθία γραφημάτων η οποία δείχνει την ημιστατική εξέλιξη του σχηματισμού των μαγνητικών επιφανειών καθώς μειώνεται η παράμετρος A στην ασυμπίεστη περίπτωση και για λόγο όψης $\alpha = 3$. Οι τιμές της A για κάθε γράφημα είναι (a) $A = 0.09$, (b) $A = -0.01$, (c) $A = -0.02$, (d) $A = -0.1$, (e) $A = -0.122$, (f) $A = -0.2$.

αντιστοιχεί στο μαγνητικό νησί όπου η ψ έχει αντίθετο πρόσημο και το οποίο με τη σειρά του αντιστοιχεί σε περιοχή όπου η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος αντιστρέφεται (Σχ. 3.4). Σε διαφορετική περίπτωση θα προέκυπτε ασυνέχεια στην πολοειδή ροή κατά τη διάρκεια της μετάβασης μιας και μόλις πριν τη μετάβαση θα ήταν θετική και διάφορη του μηδενός, ενώ αμέσως μετά αρνητική και διάφορη του μηδενός, επίσης. Συνεχίζοντας περαιτέρω την αύξηση της ροής (μείωση της παραμέτρου A) το εξώτερο μαγνητικό νησί μεγαλώνει σε έκταση και ο σχηματισμός στο σύνολο του μετατοπίζεται προς τα έξω ως το επόμενο σημείο μετάβασης $A_2 = -0.1$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή $P_0^3(A = A_2)$ (Σχ. 3.3(d)) στο οποίο, όπως και πριν, δημιουργείται ένας επιπλέον μαγνητικός άξονας στην



Σχήμα 3.4: Τα πρόσημα της συνάρτησης πολοειδούς μαγνητικής ροής ψ στο επίπεδο $y = 0$ μόλις πριν και αμέσως μετά την πρώτη μετάβαση φαίνονται στα γραφήματα (a) και (b) αντίστοιχα. Οι αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου ροής A είναι -0.01 και -0.02, ενώ ο λόγος όψης είναι 3.

εξωτερική πλευρά του υπάρχοντος σχηματισμού. Έτσι τώρα υπάρχουν τρία μαγνητικά νησιά (Σχ. 3.3 (e)) τα οποία και πάλι μετατοπίζονται προς τα έξω καθώς η ροή αυξάνεται(Σχ. 3.3(f)). Το τρίτο μαγνητικό νησί σχηματίζεται στην εξωτερική πλευρά του υπάρχοντος σχηματισμού για τους προαναφαιρόμενους λόγους που αυτό συμβαίνει και κατά το σχηματισμό του δεύτερου. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι τη δημιουργία πολυτοροειδούς σχηματισμού με n μαγνητικούς άξονες. Ανάλογα, πολυτοροειδείς σχηματισμοί είναι δυνατό να προκύψουν και για συμπιεστή ροή. Αυτή η διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ως μια ημιστατική «εξέλιξη» των ιδιοκαταστάσεων πίεσης της ισορροπίας του πλάσματος καθώς αυξάνεται η ροή (μια οπτική προσέγγιση της «εξέλιξης» αυτής μπορεί να βρεθεί στην ιστοσελίδα [64]). Το παραπάνω μπορεί να διευκρινιστεί περαιτέρω θεωρώντας ότι κάθε μεταβολή της ροής είναι τόσο μικρή ώστε να μη διαταραχθεί σε μεγάλο βαθμό το πλάσμα, ενώ και ο χρόνος μεταξύ κάθε τέτοιας μικρής μεταβολής της ροής είναι αρκετά μεγάλος ώστε το πλάσμα να βρίσκεται και πάλι σε κατάσταση ισορροπίας. Βέβαια αυτή η «εξέλιξη» δεν είναι δυνατή για στατικές ισορροπίες, αν και εκεί μπορούμε να έχουμε πολυτοροειδείς σχηματισμούς, μιας και δεν υπάρχει κάποια φυσική παράμετρος της οποίας η συνεχής μεταβολή να προκαλεί αλλαγές στη μαγνητική τοπολογία, όπως είναι η ροή στο υπό μελέτη σύστημα. Εναλλακτικά στην παραπάνω μεθοδολογία είναι δυνατό, μεταβάλλοντας την παράμετρο πίεσης P_0, να προκύψουν σημεία μετάβασης $(P_0)_m$ τα οποία να αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές ροής. Αν και η δεύτερη αυτή εναλλακτική προσέγγιση πολυτοροειδών σχηματισμών είναι αποδεκτή από θεωρητική σκοπιά, από άποψη πειραματικού ενδιαφέροντος η πρώτη προσέγγιση είναι περισσότερο επιθυμητή λόγω της δυνατότητας άμεσου ελέγχου της ροής.

Ποσοτικά, για λόγο όψης $\alpha = 3$ και συμπιεστή ροή η ταχύτητα που αντιστοιχεί στην πρώτη μετάβαση από απλά σε διπλά τοροειδή σχηματισμό είναι της τάξης των 10^5 m/s. Ταχύτητες αυτής της τάξης μεγέθους έχουν παρατηρηθεί σε tokamaks, οπότε είναι δυνατή η πειραματική παρατήρηση της αλλαγής στη μαγνητική τοπολογία.

Όπως έχει αναφερθεί η ροή φαίνεται να συνδέεται με το σχηματισμό φραγμάτων μεταφοράς τα οποία είναι συνδεδεμένα και με το profile του παράγοντα ασφάλειας και κατ΄ επέκταση με το αντίστοιχο του ηλεκτρικού ρεύματος. Περαιτέρω, το αρνητικό πρόσημο της συνάρτησης πολοειδούς μαγνητικής ροής ψ στο διπλά τοροειδή σχηματισμό (δες σχ. 3.4) υποδηλώνει ότι το ρεύμα αντιστρέφει φορά. Λόγω των παραπάνω είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί το profile του παράγοντα ασφάλειας για απλά και διπλά τοροειδείς σχηματισμούς. Η σχέση που χρησιμοποιήθηκε για αυτό τον υπολογισμό είναι η ακόλουθη [4]:

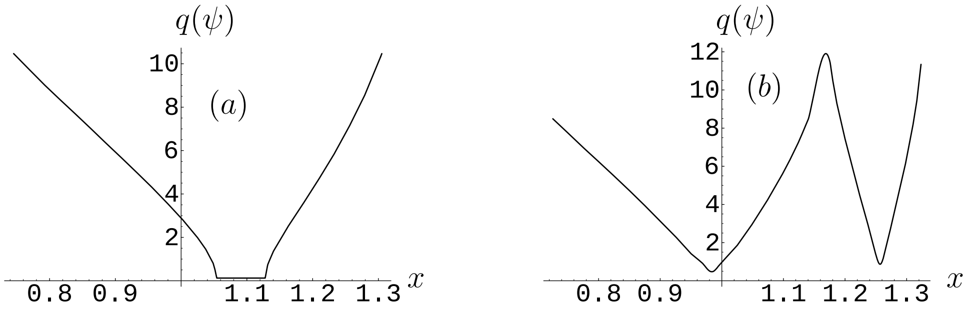
$$q(\psi) = \frac{I(\psi)}{2\pi} \oint_c \frac{1}{R^2} \frac{d\ell}{|B_{pol}|}, \tag{3.31}$$

όπου η ολοκλήρωση πραγματοποιείται κατά μήκος της καμπύλης c η οποία είναι η τομή μιας μαγνητικής επιφάνειας με την πολοειδή διατομή. Ο υπολογισμός πραγματοποιήθηκε αριθμητικά με την ανάπτυξη κατάλληλης ρουτίνας στο πακέτο Mathematica 5.0. Για απλά τοροειδή σχηματισμό το q αυξάνεται μονοτονικά από το μαγνητικό άξονα προς την επιφάνεια του πλάσματος (Σχ. 3.5 (a)). Επίσης, η τιμή πάνω στο μαγνητικό άξονα μπορεί να υπολογιστεί από την αναλυτική σχέση [4]:

$$q_{ma} = \frac{I(\psi)}{R}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]^{-1/2}\Bigg|_{z=0,R=R_{ma}}, \tag{3.32}$$

που για το profile του σχήματος 3.5(a) ($\alpha = 3$, $P_0 = 12kPa$ και $M_0 = 1.234$) δίνει $q_{ma} = 1.29$.

Πραγματοποιώντας τον υπολογισμό του παράγοντα ασφάλειας για διπλά τοροειδή σχηματισμό (Σχ. 3.5(b)) παρατηρείται ότι διατηρεί τα χαρακτηριστικά για απλά τοροειδή, δηλαδή εμφανίζει ελάχιστο στους μαγνητικούς άξονες και αυξάνεται καθώς κανείς απομακρύνεται από αυτούς. Η ύπαρξη δύο μαγνητικών αξόνων όμως, οδηγεί στην εμφάνιση ενός μεγίστου εντος του όγκου του πλάσματος στο σημείο όπου τα δύο μαγνητικά νησιά συνδέονται. Αυτό το σχήμα



Σχήμα 3.5: Profile του παράγοντα ασφάλειας στο μεσοεπίπεδο $y = 0$ για (a) απλά και (b) διπλά τοροειδή σχηματισμό. Τα σχήματα αντιστοιχούν σε $\alpha = 3$, $P_0 = 12kPa$, και αριθμούς Mach (a) $M_0 = 1.234$ και (b) $M_0 = 1.692$. Η μέγιστη τιμή στο γράφημα (b) αντιστοιχεί στο σημείο όπου τα δύο μαγνητικά νησιά συναντώνται. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η ευθεία γραμμή στο γράφημα (a) αντιπροσωπεύει ένα τμήμα που λόγω αριθμητικών δυσκολιών δεν έγινε δυνατό να υπολογιστεί. Παρόλα αυτά η τιμή του q στο μαγνητικό άξονα μπορεί να υπολογιστεί από την αναλυτική σχέση (3.32) η οποία για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων δίνει $q_{ma} = 1.29$.

του profile οδηγεί στην εμφάνιση δύο περιοχών αρνητικής μαγνητικής διάτμησης εκατέρωθεν του μεγίστου και έως τους μαγνητικούς άξονες. Με βάση τα παραπάνω, οι διπλά τοροειδείς σχηματισμοί, που στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουν ως γενεσιουργό αίτιο τη ροή, συνδέονται με διαμορφώσεις αρνητικής μαγνητικής διάτμησης. Δηλαδή, η ροή φαίνεται να μπορεί να αλλάξει την μαγνητική τοπολογία σχηματισμών ώστε αυτοί να εμφανίζουν περιοχές με αρνητική μαγνητική διάτμηση.

Εξετάζοντας την επίδραση του λόγου όψης, που όπως ειπώθηκε εμφανίζεται στην R συνιστώσα των λύσεων, παρατηρείται ότι στο όριο πολύ μεγάλου λόγου όψης η ροή δεν μπορεί να επιφέρει αλλαγή στη μαγνητική τοπολογία κι αυτό διότι σε αυτό το όριο η τοροειδής συνιστώσα της ροής δεν εμφανίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας ανεξάρτητα της συμπιεστότητας. Συγκεκριμένα, για κυλινδρικά συμμετρικό πλάσμα με τυχαία πολοειδή διατομή οι αντίστοιχες των (3.17) και (3.18) εξισώσεις παίρνουν την μορφή:

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} P = 0 \tag{3.33}$$

$$\nabla^2 \psi + \left(P + \frac{B_z^2}{2} \right)' = 0. \tag{3.34}$$

Αυτές προκύπτουν από τις (16) και (17) της αναφοράς [44] στην περίπτωση που η πολοειδής ροή μηδενίζεται ($F' = 0$). Προφανώς σε αυτή την περίπτωση όπως προκύπτει από την εξίσωση (3.33) η πίεση γίνεται ποσότητα επιφανείας.

Εφόσον στην ακραία περίπτωση που ο λόγος όψης τείνει στο άπειρο η ροή δεν επηρεάζει την ισορροπία, ενώ υπάρχει εξάρτηση όταν είναι πεπερασμένος, είναι αναμενόμενο η μεταβολή του να επηρεάζει τις ιδιοτιμές καθώς και τα σημεία μετάβασης. Εξετάστηκε λοιπόν ποσοτικά, η εξάρτηση των ιδιοτιμών και των σημείων μετάβασης από το λόγο όψης, α, μεταβάλλοντας τη τιμή του. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στα εξής:

1. Οι ιδιοτιμές P_0^n και F^n παίρνουν μικρότερες τιμές όσο ο λόγος όψης ελαττώνεται. Για παράδειγμα, για $\alpha = 3$ και $\alpha = 2$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές πρώτης τάξης είναι $M_0^2 = 2.8$ και $M_0^2 = 2.3$ αντίστοιχα.

2. Όσο μικρότερο το α τόσο μικρότερα τα σημεία μετάβασης $(M_0)_m$ και A_m (για κάθε m). Για παράδειγμα για $\alpha = 3$ και $\alpha = 2$ οι αντίστοιχες τιμές του αριθμού Mach της πρώτης μετάβασης είναι $(M_0)_1 = 1.692$ και $(M_0)_1 = 1.338$, ενώ για την περίπτωση ασυμπίεστης ροής τα αντίστοιχα σημεία της πρώτης μετάβασης είναι $A_1 = -0.083$ και $A_1 = -0.448$.

Όπως έχει γίνει εμφανές από τα παραπάνω αποτελέσματα οι ταχύτητες των σημείων μετάβασης εμπίπτουν, εν γένει, στην υπερηχητική περιοχή. Πειραματικά, ταχύτητες σε αυτή την περιοχή έχουν μετρηθεί στις αναφορές [65] και [66]. Λόγω όμως, της παραπάνω εξάρτησης των σημείων μετάβασης από το λόγο όψης, είναι δυνατό τα σημεία μετάβασης να βρεθούν στην υποηχητική περιοχή για κατάλληλα μικρές τιμές του α. Έτσι, σε αυτή την περίπτωση (συμπιεστής ροής) οι μεταβάσεις μπορούν να παρατηρηθούν ευκολότερα σε σφαιρικά tokamak καθώς η ελάχιστη τιμή του πρώτου σημείου μετάβασης του αριθμού Mach $(M_0)_1$ είναι 0.62 και αντιστοιχεί σε συμπαγές τοροειδές ($\alpha = 1$).

3.4 Μετατόπιση Shafranov και μεταβολές πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες

Σε αυτό το εδάφιο εξετάζεται η επίδραση της ροής και του λόγου όψης στη μετατόπιση Shafranov ιδιοκαταστάσεων με ένα μαγνητικό άξονα. Επίσης εξετάζεται και η επίδραση των παραπάνω στα profile και στις διακυμάνσεις πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες της πυκνότητας και της θερμοκρασίας για συμπιεστή και ασυμπίεστη ροή αντίστοιχα.

3.4.1 Μετατόπιση Shafranov

Η μετατόπιση Shafranov μετρά την απόσταση του μαγνητικού άξονα από το γεωμετρικό κέντρο της πολοειδούς διατομής. Δηλαδή, αν R_0 είναι η θέση του γεωμετρικού κέντρου (δες σχ. 3.1) και $R_{m.a.}$ η θέση του μαγνητικού άξονα, τότε η μετατόπιση Shafranov ορίζεται ώς $\Delta R = R_{m.a.} - R_0$ ή, εκφρασμένη μέσω των κανονικοποιημένων μεταβλητών, ώς $\Delta\xi \equiv x_{m.a.} - 1$. Τα αποτελέσματα μπορούν να συνοψιστούν ώς εξής:

1. Καθώς ο αριθμός Mach, M_0, αυξάνεται ή η παράμετρος A μειώνεται, η μετατόπιση Shafranov αυξάνεται. Αυτό το αποτέλεσμα περιγράφηκε ποιοτικά στο εδάφιο 3.3 όπου αναφέρθηκε η μετατόπιση του σχηματισμού προς το εξωτερικό καθώς η ροή αυξάνει. Η αύξηση στην μετατόπιση Shafranov δίνεται ποσοτικά στους πίνακες 3.1 και 3.2.

M_0	Μετατόπιση Shafranov
0.1	0.054
0.4	0.058
0.6	0.063

Πίνακας 3.1: Η μετατόπιση Shafranov, $\Delta\xi \equiv x_{m.a.} - 1$, για διάφορες τιμές του αριθμού Mach και λόγο όψης $\alpha = 3$.

A	Μετατόπιση Shafranov
0.010	0.045
0.006	0.049
-0.001	0.055

Πίνακας 3.2: Η μετατόπιση Shafranov, $\Delta\xi \equiv x_{m.a.} - 1$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου ροής A και λόγο όψης $\alpha = 3$.

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής, για μεγάλες θετικές τιμές της παραμέτρου A, η μετατόπιση Shafranov μπορεί να γίνει αρνητική. Σαν παράδειγμα αναφέρεται ότι για $\alpha = 3$ και $A = 0.09$ η μετατόπιση είναι -0.0274. Αυτό σημαίνει ότι οι μαγνητικές επιφάνειες σε αυτή την περίπτωση είναι μετατοπισμένες προς το εσωτερικό του τόρου. Τέτοια αρνητική μετατόπιση υπολογίστηκε στην αναφορά [67] για πολοειδή ροή. Επίσης, μείωση της μετατόπισης Shafranov από κατάλληλο profile τοροειδούς ροής παρατηρήθηκε στην αναφορά [68] στην οποία μελετήθηκαν ισορροπίες στο όριο μεγάλου λόγου όψης. Σύμφωνα με την παρούσα εργασία, πιθανό ρόλο στην μετατόπιση Shafranov φαίνεται να παίζουν η θερμοκρασία και η πυκνότητα για συμπιεστή και ασυμπίεστη ροή αντίστοιχα.

2. Όσο μικρότερος ο λόγος όψης τόσο μεγαλύτερη η μετατόπιση Shafranov. Αυτό δείχνεται στους πίνακες 3.3 και 3.4 για δυο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου P_0.

Λόγος όψης	Μετατόπιση Shafranov
3	0.092
2	0.150
1.5	0.209

Πίνακας 3.3: Η μετατόπιση Shafranov, $\Delta\xi \equiv x_{m.a.} - 1$, για $P_0 = 12$ kPa και διάφορες τιμές του λόγου όψης στην περίπτωση συμπιεστής ροής.

Λόγος όψης	Μετατόπιση Shafranov
3	0.053
2	0.140
1	0.500

Πίνακας 3.4: Η μετατόπιση Shafranov, $\Delta\xi \equiv x_{m.a.} - 1$, για $P_0 = 110$ kPa και διάφορες τιμές του λόγου όψης στην περίπτωση ασυμπιεστής ροής.

Όπως προαναφέρθηκε, μελετήθηκαν επίσης οι μεταβολές της πυκνότητας και της θερμοκρασίας κατά μήκος των μαγνητικών επιφανειών για συμπιεστή και ασυμπίεστη ροή αντίστοιχα. Οι μεταβολές εξετάστηκαν στην περίπτωση ιδιοκαταστάσεων με ένα μαγνητικό άξονα. Για τον υπολογισμό χρησιμοποιήθηκαν πολικές συντεταγμένες (r, θ) (σχ. 3.1). Οι κανονικοποιημένες συντεταγμένες (x, y) συναρτήσει των (r, θ) εκφράζονται μέσω των σχέσεων:

$$x = 1 + \frac{r}{R_0}\cos\theta, \qquad y = \frac{r}{R_0}\sin\theta.$$

Πάνω σε μια μαγνητική επιφάνεια, $\psi(r,\theta)$ =σταθ. μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά μέσω της ιδιοσυνάρτησης $\psi_{\ell n}$ η εξάρτηση της r από τη γωνία θ, δηλαδή η $r = r(\theta)$. Με βάση αυτή τη σχέση, υπολογίζονται η πυκνότητα και η θερμοκρασία σαν συνάρτηση της γωνίας θ. Τα αποτελέσματα αυτών των υπολογισμών παρουσιάζονται παρακάτω.

3.4.2 Μεταβολή της πυκνότητας για συμπιεστή ροή

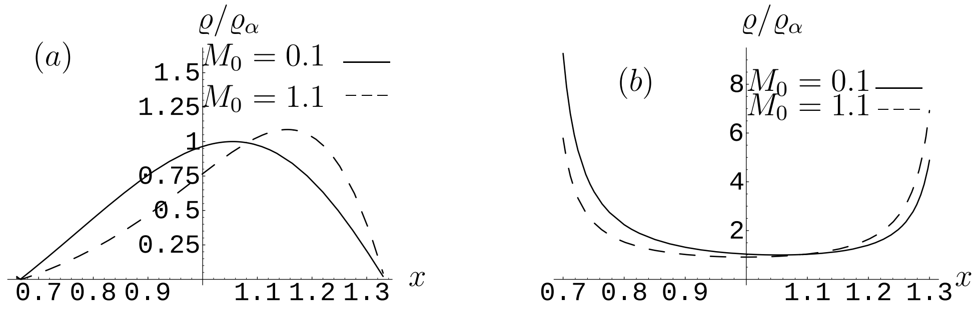
Είδαμε ότι αν η θερμοκρασία είναι ποσότητα επιφάνειας, τότε η πυκνότητα δεν είναι. Η εξάρτηση της θερμοκρασίας από τη συνάρτηση ψ επιλέχθηκε έτσι ώστε αφενός να συμφωνεί με πειραματικά αποτελέσματα και αφετέρου να υπάρχει ελευθερία στον καθορισμό ορισμένων χαρακτηριστικών του profile της:

$$T(\psi) = T_0 \psi^{\kappa}, \tag{3.35}$$

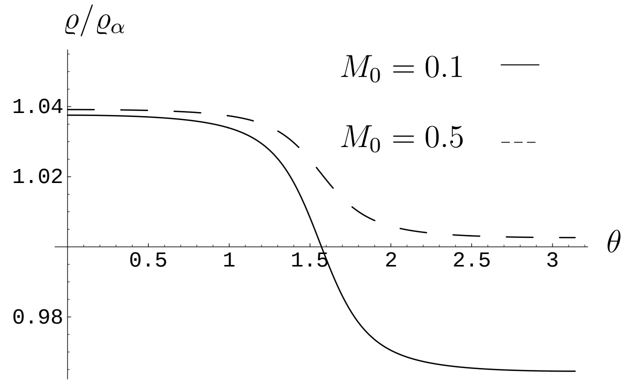
όπου η παράμετρος κ καθορίζει το σχήμα του profile και η σταθερά T_0 σχετίζεται με τη θερμοκρασία πάνω στο μαγνητικό άξονα. Έτσι, με τη βοήθεια της (3.19) προκύπτει ότι η πυκνότητα δίνεται από τη σχέση:

$$\varrho = \frac{2P_0}{T_0} \exp\Big(\frac{\gamma M_0^2 x^2}{2}\Big)\psi^{2-\kappa}. \tag{3.36}$$

Εξετάζοντας την επίδραση της παραμέτρου κ παρατηρείται ότι για $\kappa < 2$ το profile της πυκνότητας έχει κορυφοειδή μορφή, το οποίο καθώς αυξάνεται ο αριθμός Mach μετατοπίζεται προς την εξωτερική πλευρά του σχηματισμού (Σχ. 3.6(a)). Για $\kappa > 2$, το profile γίνεται κοίλο του οποίου το ελάχιστο μετατοπίζεται προς το εσωτερικό καθώς ο αριθμός Mach παίρνει μεγαλύτερες τιμές (Σχ. 3.6(b)). Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.36) για τον υπολογισμό της πυκνότητας πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες προκύπτει ότι αυτή εμφανίζει ένα μέγιστο στην περιοχή όπου οι επιφάνειες είναι συμπιεσμένες (μικρότερες τιμές της γωνίας θ) και μειώνεται καθώς οι μαγνητικές επιφάνειες γίνονται λιγότερο συμπιεσμένες (μεγαλύτερες τιμές της γωνίας θ) (Σχ. 3.7). Επιπλέον στο σχήμα 3.7 φαίνεται ότι η διακύμανση μειώνεται καθώς αυξάνεται η ροή. Για $M_0 = 1$, μία τιμή σχετική με πειράματα σε μηχανές σύντηξης, η διακύμανση είναι 4%. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η μεταβολή του κ δεν επιφέρει καμία μεταβολή στη διακύμανση παρά μόνο μια μετατόπιση του σχήματος παράλληλα στον άξονα ϱ.



Σχήμα 3.6: Profile της πυκνότητας κανονικοποιημένης ως προς το μαγνητικό άξονα στο μεσοεπίπεδο $z = 0$ για $\kappa = 1$ και $\kappa = 3$ και σε κάθε περίπτωση για δύο διαφορετικές τιμές του αριθμού Mach οι οποίες δίνονται στα σχήματα. Ο σχηματισμός είναι απλά τοροειδής με λόγο όψης $\alpha = 3$.



Σχήμα 3.7: Η πυκνότητα κατά μήκος μιας μαγνητικής επιφάνειας κανονικοποιημένη ως προς το μαγνητικό άξονα σαν συνάρτηση της γωνίας θ για δύο τιμές του αριθμού Mach φαίνεται σ' αυτό το σχήμα. Ο λόγος όψης είναι $\alpha = 3$ και το profile της πυκνότητας στο μεσοεπίπεδο $z = 0$ είναι κοίλο ($\kappa = 3$).

3.4.3 Μεταβολή της θερμοκρασίας για ασυμπίεστη ροή

Κατ' αντιστοιχία με την περίπτωση συμπιεστής ροής η συνάρτηση πυκνότητας για ασυμπίεστη ροή βασίστηκε σε πειραματικά αποτελέσματα αλλά και στη δυνατότητα ελέγχου, μέσω παραμέτρου, του σχήματος του profile της:

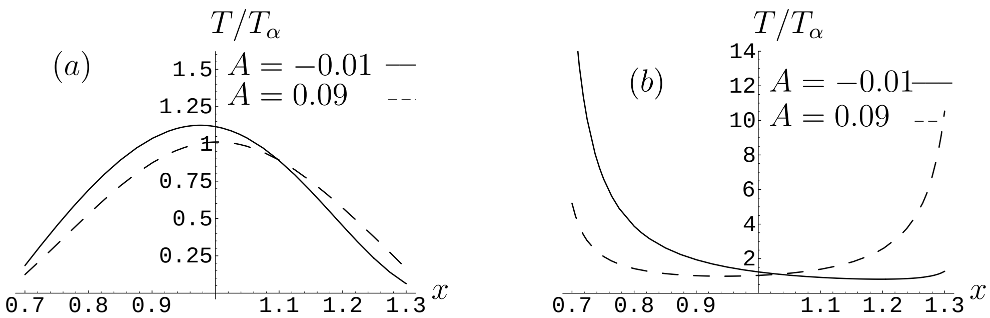
$$\varrho(\psi) = \varrho_0 \psi^{\kappa}, \tag{3.37}$$

όπου, όπως και για τη θερμοκρασία στη περίπτωση συμπιεστής ροής, η παράμετρος κ ελέγχει το σχήμα του profile και η σταθερά ϱ_0 δίνει τη τιμή της πυκνότητας πάνω στο μαγνητικό άξονα.

Με τη βοήθεια της (3.22) προκύπτει για τη θερμοκρασία:

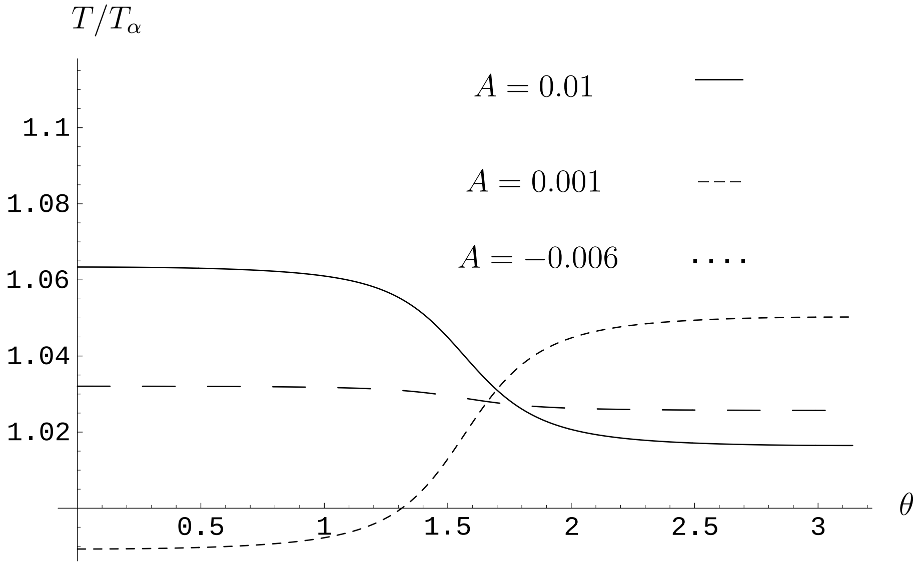
$$T = \frac{2P_0}{\varrho_0}\Big(2P_0 + \frac{AR_0^2}{2}x^2\Big)\psi^{2-\kappa}. \tag{3.38}$$

Η εξάρτηση του σχήματος του profile της θερμοκρασίας από την παράμετρο κ είναι όμοια με αυτή της πυκνότητας για συμπιεστή ροή. Δηλαδή, για $\kappa < 2$ το profile έχει κορυφοειδή μορφή, ενώ για $\kappa > 2$ κοίλη. Η αύξηση της ροής (μείωση της παραμέτρου A) οδηγεί σε μία μετατόπιση του profile κατά μήκος του άξονα x προς την εξωτερική πλευρά του σχηματισμού, όπως και για την πυκνότητα για συμπιεστή ροή. Τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα 3.8. Κατά



Σχήμα 3.8: Profile της θερμοκρασίας, κανονικοποιημένη ως προς το μαγνητικό άξονα, στο μεσοεπίπεδο $z = 0$ για $\kappa = 1$ και $\kappa = 3$ και σε κάθε περίπτωση για δύο τιμές της παραμέτρου A, οι οποίες φαίνονται στα γραφήματα. Ο σχηματισμός είναι απλά τοροειδής με λόγο όψης $\alpha = 3$.

μήκος μιας μαγνητικής επιφάνειας η θερμοκρασία εμφανίζει ένα μέγιστο του οποίου η θέση εξαρτάται από το πρόσημο της παραμέτρου ροής A. Συγκεκριμένα, για $A > 0$ το μέγιστο βρίσκεται στη θέση όπου οι μαγνητικές επιφάνειες είναι περισσότερο συμπιεσμένες, ενώ για $A < 0$ το μέγιστο είναι στην αντίθετη πλευρά όπου οι μαγνητικές επιφάνειες είναι λιγότερο συμπιεσμένες. Αυτή η συμπεριφορά είναι διαφορετική από την περίπτωση της συμπιεστής ροής, όπου η διακύμανση της πυκνότητας εμφανίζει το μέγιστο στην πλευρά που οι μαγνητικές επιφάνειες είναι περισσότερο συμπιεσμένες. Αυτή η διαφοροποίηση αποτελεί ένδειξη ότι η διάτμηση της ροής παίζει ρόλο. Για τη, σχετική με πειραματικά δεδομένα, τιμή $A = 0.01$ η διακύμανση της θερμοκρασίας είναι 4%. Επίσης, αυτή η διακύμανση πάντα αυξάνει όταν η απόλυτη τιμή της παραμέτρου A μεγαλώνει (Σχ. 3.9). Η επίδραση της παραμέτρου κ στη διακύμανση της θερμοκρασίας είναι όμοια με αυτή στη διακύμανση της πυκνότητας.



Σχήμα 3.9: Η θερμοκρασία κατά μήκος μιας μαγνητικής επιφάνειας κανονικοποιημένη ως προς το μαγνητικό άξονα σαν συνάρτηση της γωνίας θ για τρείς τιμές της παραμέτρου A φαίνεται σ' αυτό το σχήμα. Ο λόγος όψης είναι $\alpha = 3$ και το profile της πυκνότητας στο μεσοεπίπεδο $z = 0$ είναι κοίλο ($\kappa = 3$).

3.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο ιδιοκαταστάσεις ισορροπίας ενός μαγνητικά περιορισμένου πλάσματος με τοροειδή ροή, του οποίου η πολοειδής διατομή περιβάλλεται από τοιχώματα ορθογώνιου σχήματος, εξετάστηκαν στα πλαίσια του ιδανικού

MHD μοντέλου. Τόσο συμπιεστή ροή, που συνδέεται με σταθερή θερμοκρασία αλλά μεταβαλλόμενη πυκνότητα πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες, όσο και ασυμπίεστη ροή με σταθερή πυκνότητα, αλλά μεταβαλλόμενη θερμοκρασία πάνω σ' αυτές εξετάστηκαν στη βάση των αντίστοιχων ανηγμένων εξισώσεων ισορροπίας [(3.20) και (3.23)] και ακριβών λύσεων τους [(3.25) και (3.27)]. Η επίδραση της ροής στη μαγνητική τοπολογία των ιδιοσυναρτήσεων εξετάστηκε μέσω των παραμέτρων M_0 και A, οι οποίες συνδέονται με τις ποσότητες ω^2/T για συμπιεστή και $\varrho\omega^2$ για ασυμπίεστη ροή αντίστοιχα. Οι ακριβείς λύσεις στη συμπιεστή περίπτωση δεν περιέχουν τη διάτμηση της ροής $[(\omega^2/T)' = 0]$, ενώ οι αντίστοιχες στην ασυμπίεστη την περιέχουν $[(\varrho\omega^2)' \neq 0]$. Επιπλέον, όταν $\omega^2/T \ll 1$ η συμπιεστή εξίσωση παίρνει παρόμοια μορφή με την ασυμπίεστη, δηλαδή το πλάσμα συμπεριφέρεται ως ασυμπίεστο.

Λόγω της ροής, κανείς μπορεί να θεωρήσει είτε ιδιοτιμές πίεσης, $(P_0)^n$ $n = 1, 2, \ldots$ με την παράμετρο ροής F να παραμένει ελεύθερη (F αντιστοιχεί στο M_0 ή στην A), είτε εναλλακτικά ιδιοτιμές ροής F^n με ελεύθερη P_0. Για δεδομένη F στην πρώτη περίπτωση και δεδομένη P_0 στη δεύτερη, οι ιδιοτιμές ικανοποιούν τις ανισότητες $P_0^{n+1} > P_0^n$ και $F^{n+1} > F^n$. Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις για την πολοειδή μαγνητική ροή ψ μπορούν να περιγράψουν πολυτοροειδείς σχηματισμούς με n μαγνητικούς άξονες κατά μήκος του μεσοεπιπέδου $z = 0$. Όταν ο M_0 αυξάνεται ή η A μειώνεται κατά συνεχή τρόπο, υπάρχουν σημεία μετάβασης F_m ($m = 1, 2, \ldots$) στα οποία σχηματίζεται ένας επιπλέον μαγνητικός άξονας. Εναλλακτικά, το ίδιο μπορεί να συμβεί με συνεχή μεταβολή της παραμέτρου πίεσης P_0, οπότε υπάρχουν σημεία μετάβασης $(P_0)_m$ που συνδέονται με ιδιοτιμές της ροής. Αυτή η αλλαγή στη μαγνητική τοπολογία, δυνατή μόνο παρουσία ροής, συνδέεται άμεσα με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σχηματισμού και ιδιαίτερα με το λόγο όψης. Συγκεκριμένα, στο όριο πολύ μεγάλου λόγου όψης οι άνηγμένες εξισώσεις ισορροπίας είναι ανεξάρτητες της ροής. Η παραπάνω διαδικασία μεταβάσεων μπορεί να θεωρηθεί ώς μια ημιστατική εξέλιξη του πλάσματος, λόγω συνεχούς αλλαγής της ροής διαμέσω ιδιοκαταστάσεων πίεσης, ή εναλλακτικά λόγω συνεχούς μεταβολής της πίεσης διαμέσω ιδιοκαταστάσεων ροής. Ο λόγος όψης, α, που συνδέεται με τη τοροειδή γεωμετρία εφόσον επηρεάζει και, κατά κάποιο τρόπο, ενεργοποιεί την επίδραση της ροής στην ισορροπία, επιδρά και στα σημεία μετάβασης. Συγκεκριμένα, όσο μικρότερος ο α τόσο μικρότερη η τιμή του $(M_0)_m$ στη συμπιεστή περίπτωση και A_m στην ασυμπίεστη. Επιπλέον, το profile του παράγοντα ασφάλειας, στην περίπτωση διπλά τοροειδών σχηματισμών, έχει περιοχές όπου η κλίση του είναι αρνητική και κατ' επέκταση η μαγνητική διάτμηση σε αυτές είναι αρνητική. Το παραπάνω σε αντιδιαστολή με την περίπτωση απλά τοροειδών σχηματισμών όπου το profile του παράγοντα ασφάλειας είναι μονοτονικό.

Επιλέον, εξετάστηκε η επίδραση της ροής και του λόγου όψης, α, στη μετατόπιση Shafranov και υπολογίστηκε η διακύμανση της πυκνότητας και της θερμοκρασίας πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες για συμπιεστή και ασυμπίεστη ροή αντίστοιχα, στην περίπτωση απλά τοροειδών σχηματισμών. Αυτές οι διακυμάνσεις είναι απαραίτητες για την ύπαρξη στάσιμων ισορροπιών tokamak. Τα συμπεράσματα που προέκυψαν συνοψίζονται παρακάτω:

1. Η μετατόπιση Shafranov (*a*) αυξάνεται καθώς ο M_0 παίρνει μεγαλύτερες και η A μικρότερες τιμές και (*b*) αυξάνεται καθώς ο α παίρνει μικρότερες τιμές. Επιπλέον για θετικές αρκούντως μεγάλες τιμές της A η μετατόπιση μπορεί να γίνει αρνητική.

2. Για ροές παρατηρούμενες ή εφικτές στα πειράματα σύντηξης η διακύμανση της πυκνότητας για συμπιεστή ροή και της θερμοκρασίας για ασυμπίεστη ροή πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες είναι περίπου 4%.

3. Η διακύμανση της πυκνότητας μειώνεται καθώς ο M_0 παίρνει μεγαλύτερες τιμές, ενώ η διακύμανση της θερμοκρασίας αυξάνεται καθώς η $|A|$ παίρνει μεγαλύτερες τιμές.

4. Οι τιμές της πυκνότητας και της θερμοκρασίας για $A > 0$ είναι μεγαλύτερες στην περιοχή όπου οι μαγνητικές επιφάνειες είναι περισσότερο συμπιεσμένες. Για $A < 0$ όμως, οι τιμές της θερμοκρασίας είναι μεγαλύτερες στην περιοχή όπου οι μαγνητικές επιφάνειες είναι λιγότερο συμπιεσμένες. Αυτή η διαφορά είναι πιθανό να οφείλεται στη μη μηδενική διάτμηση της ασυμπίεστης ροής που εξετάσαμε.

5. Οι διακυμάνσεις της πυκνότητας και της θερμοκρασίας είναι ανεξάρτητες του profile αυτών. Δηλαδή, παραμένουν σχεδόν ίδιες είτε το profile είναι κορυφοειδές είτε κοίλο.

Κεφάλαιο 4

Αξονικά συμμετρική ισορροπία με ανισοτροπική αγωγιμότητα και τοροειδή ροή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετηθούν καταστάσεις ισορροπίας αξονικά συμμετρικού, μαγνητικά περιορισμένου πλάσματος, με ανισοτροπική αγωγιμότητα και τοροειδή ροή. Συγκεκριμένα, θα παραχθούν ανηγμένες εξισώσεις ισορροπίας για το εν λόγω σύστημα και αντίστοιχες ακριβείς λύσεις. Έπειτα, θα μελετηθεί η επίδραση της ροής και του λόγου όψης σε ποσότητες της ισορροπίας, όπως οι συνιστώσες της ειδικής αντίστασης, παράλληλα και κάθετα στο μαγνητικό πεδίο, το ηλεκτρικό πεδίο και η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος.

4.1 Αγωγιμότητα και ισορροπία

Η πλειοψηφία των μελετών ισορροπίας, μέχρι πρόσφατα, αφορούσαν πλάσματα με μηδενική ηλεκτρική ειδική αντίσταση και μηδενική μακροσκοπική ροή του πλάσματος οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση Grad-Schlüter-Shafranov. Διαπιστώθηκε όμως, πως η πεπερασμένη αγωγιμότητα και η ροή είναι σημαντικές (κεφ. 1). Πέρα από τον προφανή της ρόλο στην Ωμική θέρμανση του πλάσματος, η πεπερασμένη αγωγιμότητα συνδέεται με τη σταθερή λειτουργία των αντιδραστήρων σύντηξης, μιας και σ΄ αυτούς η κλίμακα χρόνου είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της MHD με πολύ μεγάλη αγωγιμότητα. Επιπλέον, ο ελάχιστος δυνατός αριθμός πηγών μάζας και ορμής είναι άλλη μια παράμετρος που πρέπει να ληφθεί υπόψη στη μελέτη ισορροπιών.

Έχει αποδειχθεί πρίν αρκετό καιρό θεωρητικά [9] ότι αξονικά συμμετρική MHD ισορροπία με βαθμωτή ειδική αντίσταση, ομοιόμορφη στις μαγνητικές επιφάνειες, δεν είναι συμβατή με την εξίσωση Grad-Schlüter-Shafranov και επιπλέον η πολοειδής πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος πρέπει να μηδενίζεται. Η μη ύπαρξη αξονικά συμμετρικής ισορροπίας με σταθερή ειδική αντίσταση σχολιάζεται επείσης στις αναφορές [10, 11]. Το να εξεταστεί το κατά πόσο είναι δυνατή η ύπαρξη ισορροπιών, προσθέτοντας στο νόμο του Ohm όρους ροής και ιξώδους, είναι πολύ δύσκολο ζήτημα, γι΄ αυτό πρέπει να πραγματοποιηθεί σε βήματα μέσω ειδικών περιπτώσεων, περιλαμβάνοντας κάθε φορά όρους που συνδέονται με τη φυσική. Σε αυτή την προσπάθεια έχουν γίνει μελέτες αξονικά συμμετρικής ισορροπίας, με βαθμωτή ειδική αντίσταση και ροή αμιγώς πολοειδή [12] ή παράλληλη στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ [13] οι οποίες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι δεν είναι δυνατό να αρθούν οι ασυμβατότητες (μη ικανοποιηση της εξίσωσης Grad-Schlüter-Shafranov και του μηδενισμού της πολοειδούς πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος). Μη μηδενικό πολοειδές ηλεκτρικό ρεύμα είναι δυνατό στην περίπτωση στάσιμης ισορροπίας με ανισοτροπική ειδική αντίσταση. Σε αυτή την περίπτωση οι συνιστώσες $\eta_{\parallel}$ και $\eta_{\perp}$ της ειδικής αντίστασης, παραλληλα και κάθετα στο μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα, είναι διαφορετικές [8]. Όμως και σε αυτή την περίπτωση καμία από τις δύο συνιστώσες δε μπορεί να είναι σταθερή πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες. Στις παραπάνω εργασίες [12]-[13] η μόνη εξωτερική πηγή είναι το τοροειδές, σταθερό εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Επιπλέον, οι συγκεριμένες διευθύνσεις ροής δεν είναι ασύμβατες με τη διάχυση Pfirsch-Schlüter, υπό την έννοια ότι οι συγκεκριμένες λύσεις ισορροπίας που κατασκευάστηκαν στις αναφορές [12], [13] ούτε αποκλείονται ούτε περιλαμβάνονται σε πιθανές λύσεις με διάχυση Pfirsch-Schlüter (δηλαδή σε λύσεις που έχουν ταχύτητα κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες).

4.2 Αξονικά συμμετρική ισορροπία με ανισοτροπική αγωγιμότητα και τοροειδή ροή

Σε αυτό το εδάφιο θα εξαχθούν ανηγμένες εξισώσεις ισορροπίας για ένα αξονικά συμμετρικό, μαγνητικά περιορισμένο πλάσμα, με ανισοτροπική ειδική αντίσταση και τοροειδή μακροσκοπική ροή. Η διαδικασία θα παρουσιαστεί κατά έναν ενιαίο τρόπο, υπό την έννοια ότι κάποια συγκεκριμένη εξίσωση διατήρησης της ενέργειας ή καταστατική εξίσωση δεν υιοθετείται από την αρχή, αυτό θα γίνει όταν θα είναι αναγκαίο.

Οι αρχικές MHD εξισώσεις ισορροπίας είναι οι ακόλουθες:

$$\vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{v}) = 0, \tag{4.1}$$

$$-\vec{\nabla} P + \vec{J} \times \vec{B} = \varrho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}, \tag{4.2}$$

$$\text{Μια εξίσωση ενέργειας ή καταστατική εξίσωση,} \tag{4.3}$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \overleftrightarrow{\eta} \cdot \vec{J} = \eta_{\|} \vec{J} \parallel + \eta_{\perp} \vec{J}_{\perp}, \tag{4.4}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \tag{4.5}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{4.6}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J}, \tag{4.7}$$

όπου

$$\overleftrightarrow{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_{\|} & 0 \\ 0 & \eta_{\perp} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

είναι ο τανυστής της ειδικής αντίστασης. Οι δείκτες $\|$ και $\perp$ δηλώνουν διεύθυνση παράλληλα και κάθετα στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Με βάση τον παραπάνω συμβολισμό η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος γράφεται ανάλογα:

$$\vec{J}_{\|} = (\vec{J} \cdot \hat{b}) \hat{b}$$

και

$$\vec{J}_{\perp} = \hat{b} \times (\vec{J} \times \hat{b}) = \vec{J} - \vec{J}_{\|},$$

όπου $\hat{b} = \vec{B}/B$. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η αναγνώριση κάποιων ποσοτήτων επιφανείας (δηλαδή ποσοτήτων που παραμένουν σταθερές πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες) και η παραγωγή ενός ανηγμένου συστήματος εξισώσεων ισορροπίας μέσω της προβολής της εξίσωσης διατήρησης της ορμής (4.2) και του νόμου του Ohm (4.4) στην τοροειδή, την πολοειδή διεύθυνση (ή ισοδύναμα παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο) και κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες. Αν και η διαδικασία είναι κατ' αρχήν όμοια με την αντίστοιχη του κεφαλαίου 3, παρουσιάζει αξιόλογες διαφορές λόγω μη μηδενικής ηλεκτρικής αντίστασης. Για παράδειγμα σημαντική πληροφορία προκύπτει από μια ολοκληρωτική μορφή της (4.4). Για το λόγο αυτό η διαδικασία παραγωγής των ανηγμένων εξισώσεων ισορροπίας θα εκτεθεί με κάποια λεπτομέρεια τονίζοντας τις διαφορές.

Το σύστημα υπό μελέτη είναι αξονικά συμμετρικό και σε κυλινδρικές συντεταγμένες (R, ϕ, z) ο άξονας z αντιπροσωπεύει τον άξονα συμμετρίας. Λόγω συμμετρίας όλες οι ποσότητες δεν εξαρτώνται από τη τοροειδή γωνία ϕ, ενώ η τοροειδής ταχύτητα της ροής μάζας, το μαγνητικό πεδίο (το οποίο πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση (4.6)) και η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος μέσω του νόμου του Ampére (4.7) εκφράζονται με τη βοήθεια των ελεύθερων συναρτήσεων $K(R,z)$, $\psi(R,z)$ και $I(R,z)$ ως:

$$\varrho\vec{v} = K\vec{\nabla}\phi, \tag{4.9}$$

$$\vec{B} = I\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\phi \times \vec{\nabla}\psi, \tag{4.10}$$

$$\vec{J} = \Delta^*\psi\vec{\nabla}\phi - \vec{\nabla}\phi \times \vec{\nabla}I. \tag{4.11}$$

Η συνάρτηση ψ καθορίζει τις μαγνητικές επιφάνειες ($\psi =$σταθ.) και ο ελλειπτικός τελεστής Δ^* ορίζεται ως $\Delta^* \equiv R^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}/R^2)$.

Από την προβολή της εξίσωσης ορμής (4.2) στη τοροειδή διεύθυνση προκύπτει η σχέση:

$$\vec{\nabla}\phi \cdot (\vec{\nabla}\psi \times \vec{\nabla}I) = 0, \tag{4.12}$$

που συνεπάγεται ότι η συνάρτηση I είναι σταθερή πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες και κατ΄ επέκταση είναι συνάρτηση μόνο της ψ, δηλαδή είναι ποσότητα επιφανείας $I = I(\psi)$. Σε αντιδιαστολή λοιπόν με την περίπτωση ροής παράλληλης στο μαγνητικό πεδίο [8], οι επιφάνειες ρεύματος στην περίπτωση τοροειδούς ροής συμπίπτουν με τις μαγνητικές επιφάνειες, ανεξάρτητα από την καταστατική εξίσωση.

Ολοκληρώνοντας το νόμο του Ohm (Εξ. 4.4) κατά μήκος μιας καμπύλης c, η οποία ορίζεται ως η τομή μιάς τυχαίας επιφάνειας ρεύματος με το πολοειδές επίπεδο, προκύπτει η εξίσωση:

$$\int_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \int_c (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell} = \int_c (\overleftrightarrow{\eta}\cdot\vec{J})\cdot d\vec{\ell}, \tag{4.13}$$

όπου $d\vec{\ell} = \vec{\nabla}\phi \times \vec{\nabla}\psi/|\vec{\nabla}\phi \times \vec{\nabla}\psi|$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της καμπύλης c. Αφού στην ισορροπία ισχύει ότι $\partial\vec{B}/\partial t = 0$, το πρώτο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (4.13) με τη βοήθεια της (4.5) μηδενίζεται λόγω του θεωρήματος του Stokes. Επιπλέον, το δεύτερο ολοκλήρωμα στο πρώτο μέλος μηδενίζεται λόγω της τοροειδούς διεύθυνσης της ροής. Οπότε για να ικανοποιείται η εξίσωση (4.13) θα πρέπει και το ολοκλήρωμα στο δεξιό της μέλος να μηδενίζεται. Για να ισχύει όμως αυτό και αφού η c είναι τυχαία, οι γραμμές ρεύματος της $\vec{J}_{pol}$ είναι κλειστές, ένθετες (υπενθυμίζεται ότι οι επιφάνειες ρεύματος συμπίπτουν με τις μαγνητικές επιφάνειες) και επιπλέον ισχύει $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ (δηλαδή δεν υπάρχουν πηγές ρεύματος κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες), θα πρέπει η ολοκληρωτέα ποσότητα να μηδενίζεται. Άρα θα πρέπει να ισχύει τοπικά:

$$(\overleftrightarrow{\eta}\cdot\vec{J})\cdot d\vec{\ell} = (\overleftrightarrow{\eta}\cdot\vec{J})_{pol} = 0. \tag{4.14}$$

Για ισοτροπική ειδική αντίσταση, $\eta_{\|} = \eta_{\perp}$, η εξίσωση (4.14) συνεπάγεται ότι η πολοειδής πυκνότητα ρεύματος πρέπει να μηδενίζεται. Παρουσία ανισοτροπίας όμως, μη μηδενική πολοειδή πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος είναι δυνατή, λόγω του ότι το τοροειδές ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να δημιουργήσει ρεύμα στην πολοειδή διεύθυνση. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα θεωρηθεί ότι στην ισορροπία το πολοειδές ηλεκτρικό ρεύμα είναι μη μηδενικό.

Εκφράζοντας το ηλεκτρικό πεδίο στην πολοειδή διατομή μέσω του ηλεκτροστατικού δυναμικού, $\vec{E}_{pol} = -\vec{\nabla}\Phi$, η συνιστώσα του νόμου του Ohm (4.4) στην πολοειδή διεύθυνση, λαμβάνοντας υπόψη και την (4.14) γράφεται:

$$\vec{\nabla}\phi \cdot (\vec{\nabla}\Phi \times \vec{\nabla}\psi) = 0. \tag{4.15}$$

Η σχέση αυτή συνεπάγεται ότι το ηλεκτροστατικό δυναμικό είναι ποσότητα επιφανείας, $\Phi = \Phi(\psi)$ άρα το $\vec{E}_{pol}$ είναι κάθετο στις μαγνητικές επιφάνειες. Το ολικό ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να εκφραστεί, κατ΄ αναλογία με τις υπόλοιπες ποσότητες, μέσω μιας συνιστώσας στη τοροειδή διεύθυνση και μιας άλλης στην πολοειδή ως:

$$\vec{E} = V_c\vec{\nabla}\phi + \vec{E}_{pol} = V_c\vec{\nabla}\phi - \Phi'\vec{\nabla}\psi,$$

όπου $2\pi V_c$ είναι το σταθερό τοροειδές εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, ενώ ο τόνος δηλώνει διαφόριση ως προς τη συνάρτηση ψ. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, η συνιστώσα της (4.4) κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες (δηλαδή παράλληλα στη διεύθυνση $\vec{\nabla}\psi$) δίνει:

$$(\Phi' - \frac{K}{\varrho R^2})|\vec{\nabla}\psi|^2 = 0, \tag{4.16}$$

οπότε η ποσότητα

$$\frac{K}{\varrho R^2} \equiv \omega = \Phi', \tag{4.17}$$

η οποία αναγνωρίζεται ως η κυκλική συχνότητα, είναι ποσότητα επιφανείας $\omega = \omega(\psi)$. Από την εξίσωση (4.14) και τη συνιστώσα του νόμου του Ohm στη τοροειδή διεύθυνση προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις:

$$-\frac{\Delta\eta}{(BR)^2}(I\Delta^*\psi - I'|\vec{\nabla}\psi|^2) - \eta_{\perp}I' = 0, \tag{4.18}$$

$$V_c = \Delta\eta\frac{I}{(BR)^2}(I'|\vec{\nabla}\psi|^2 - I\Delta^*\psi) + \eta_{\perp}\Delta^*\psi, \tag{4.19}$$

όπου $\Delta\eta = \eta_\perp - \eta_\parallel$. Οι οποιεσδήποτε λύσεις ισορροπίας θα πρέπει να είναι συμβατές με τις εξισώσεις (4.18) και (4.19), οι οποίες μπορούν να λυθούν ως προς $\eta_\perp$ και $\eta_\parallel$ και να δώσουν:

$$\eta_\perp = \frac{V_c}{\Delta^*\psi + II'}, \tag{4.20}$$

$$\eta_\parallel = \eta_\perp\Big(1 + \frac{I'(BR)^2}{I\Delta^*\psi - I'|\vec{\nabla}\psi|^2}\Big). \tag{4.21}$$

Με τη βοήθεια των ποσοτήτων επιφανείας $I(\psi)$, $\Phi(\psi)$ και $\omega(\psi)$ οι συνιστώσες της εξίσωσης ορμής παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο και κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες παίρνουν τη μορφή:

$$\left[\frac{\vec{\nabla}P}{\varrho} - \vec{\nabla}\left(\frac{\omega^2R^2}{2}\right)\right]\cdot\vec{B} = 0, \tag{4.22}$$

$$\big[\Delta^*\psi + II'\big]|\vec{\nabla}\psi|^2 + R^2\left[\vec{\nabla}P - \varrho\omega^2\vec{\nabla}\left(\frac{R^2}{2}\right)\right]\cdot\vec{\nabla}\psi = 0, \tag{4.23}$$

αντίστοιχα. Λόγω της αξονικής συμμετρίας και της τοροειδούς διεύθυνσης της ροής, οι παραπάνω εξισώσεις δεν περιέχουν την ειδική αντίσταση και είναι όμοιες σε μορφή με τις αντίστοιχες της περίπτωσης με μηδενική ειδική αντίσταση που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3 (Εξ. 3.17 και 3.18), οπότε και τα περαιτέρω βήματα εως την απόκτηση ακριβών λύσεων είναι όμοια. Θα παρουσιαστούν ωστόσο και εδώ συνοπτικά για λόγους πληρότητας και ευκολίας του αναγνώστη. Για την περαιτέρω συνέχιση της ανάλυσης είναι απαραίτητη η υιοθέτηση μιας εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας ή καταστατική εξίσωση. Λόγω της μεγάλης θερμικής αγωγιμότητας κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου, ισόθερμες μαγνητικές επιφάνειες, $T = T(\psi)$, είναι μια δυνατή επιλογή για πλάσμα με εφαρμογή στην ελεγχόμενη σύντηξη. Σε αυτή την περίπτωση και θεωρώντας το νόμο των ιδανικών αερίων, $P = \lambda\varrho T$, από την ολοκλήρωση της (4.22) προκύπτει:

$$P = P_s(\psi)\exp\left(\frac{\omega^2R^2}{2\lambda T}\right), \tag{4.24}$$

όπου $P_s(\psi)$ είναι η πίεση απουσία ροής. Με τη βοήθεια της (4.24) η εξίσωση (4.23) οδηγεί στην τελική «συμπιεστή» εξίσωση

$$\Delta^*\psi + II' + R^2\left[P_s' + P_s\frac{R^2}{2}\left(\frac{\omega^2}{\lambda T}\right)'\right]\exp\left(\frac{\omega^2R^2}{2\lambda T}\right) = 0. \tag{4.25}$$

Εναλλακτικά μπορεί να υιοθετηθεί ως καταστατική εξίσωση η συνθήκη ασυμπιεστότητας:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \tag{4.26}$$

Συνεπώς, από την εξ. (4.1) συνεπάγεται ότι η πυκνότητα είναι ποσότητα επιφανείας, $\varrho = \varrho(\psi)$, και μπορεί να εξαχθούν οι αντίστοιχες εξισώσεις για την P και την ψ με τρόπο ανάλογο της περίπτωσης «συμπιεστής» ροής:

$$P = P_s(\psi) + \frac{R^2\omega^2}{2} \tag{4.27}$$

$$\Delta^*\psi + II' + R^2 P_s' + \frac{R^4}{2}(\varrho\omega^2)' = 0. \tag{4.28}$$

Η εξίσωση (4.28) είναι όμοια με μια ειδική περίπτωση της εξίσωσης αξονικά συμμετρικής ισορροπίας για ασυμπίεστη ροή τυχαίας διεύθυνσης που εξήχθη στην αναφορά [45] για ιδανικό πλάσμα.

Αφού οι εξισώσεις (4.25) και (4.28) λυθούν ως προς ψ, οι συνιστώσες της ειδικής αντίστασης υπολογίζονται από τις (4.20) και (4.21). Μια εξέταση των εξισώσεων (4.20) και (4.21) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, όπως και στην περίπτωση ροής παράλληλης στο μαγνητικό πεδίο [8], οι συνιστώσες της ειδικής αντίστασης, $\eta_\parallel$ και $\eta_\perp$, δεν μπορούν να είναι σταθερές πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες. Συγκεκριμένα, λύνοντας τις (4.25) και (4.28) ως προς $\Delta^*\psi$ και αντικαθιστώντας στις (4.20) και (4.21) προκύπτει ότι οι συνιστώσες $\eta_\parallel$ και $\eta_\perp$ εξαρτώνται ρητά και από το R (και το $|\vec{\nabla}\psi|$ όσον αφορά το $\eta_\parallel$) επιπρόσθετα της ψ. Παρόλ' αυτά, όπως θα δούμε στο εδάφιο 4.4, τα profile των συνιστωσών της ειδικής αντίστασης έχουν σχήμα παρόμοιο με την περίπτωση που η ειδική αντίσταση οφείλεται στις κρούσεις μεταξύ των σωματιδίων (collisional-like), δηλαδή παρουσιάζουν ένα ελάχιστο στην περιοχή του μαγνητικού άξονα, παίρνουν πολύ μεγάλες τιμές στην επιφάνεια του πλάσματος και ισχύει ότι $\eta_\perp > \eta_\parallel$.

Συνοψίζοντας αυτό το εδάφιο, η MHD ισορροπία αξονικά συμμετρικού πλάσματος με ανισοτροπική ειδική αντίσταση και τοροειδή ροή εκφράζεται μέσω μιας ελλειπτικής διαφορικής εξίσωσης για τη συνάρτηση πολοειδούς μαγνητικής ροής (Εξ. (4.25) για «συμπιεστή» ροή και Εξ. (4.28) για ασυμπίεστη), μια εξίσωση τύπου Bernoulli για την πίεση και αυτοσυνεπείς εκφράσεις για τις συνιστώσες της ειδικής αντίστασης $\eta_\perp$ και $\eta_\parallel$. Οι εξισώσεις (4.25) και (4.28) περιέχουν τέσσερεις ποσότητες επιφανείας τρείς από τις οποίες, δηλαδη οι P_s, I και ω, είναι κοινές. Η τέταρτη είναι η θερμοκρασία, T, για την περίπτωση «συμπιεστής» ροής και η πυκνότητα, ϱ, για την περίπτωση ασυμπίεστης. Επιπλέον, ας σημειωθεί ότι για μηδενική ροή οι εξισώσεις (4.25) και (4.28) ανάγονται στην εξίσωση Grad-Schlüter-Shafranov.

4.3 Ακριβείς λύσεις

Γραμμικοποιημένες μορφές των (4.25) και (4.28), σε συνδυασμό με κατάλληλη επιλογή των ελεύθερων ποσοτήτων επιφανείας που περιέχονται σ' αυτές, μπορούν να λυθούν αναλυτικά. Στα επόμενα δύο υποεδάφια θα εξεταστούν οι δύο επιλογές καταστατικής εξίσωσης που προαναφέρθηκαν (ισόθερμες μαγνητικές επιφάνειες και ασυμπίεστη ροή).

4.3.1 «Συμπιεστή» ροή

Οι ελεύθερες ποσότητες επιφανείας επιλέχθηκαν, κατ' αναλογία με τις άντίστοιχες της περίπτωσης ιδανικού πλάσματος του κεφαλαίου 3, ως εξής:

$$\begin{aligned} I^2 &= I_0^2 + I_1^2\psi^2, \\ P_s &= 2P_0\psi^2, \\ \frac{\omega^2}{\lambda T} &= \frac{\gamma M_0^2}{R_0^2} = \text{σταθερό}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Η φυσική σημασία της κάθε παραμέτρου είναι όμοια με αυτή που έχει η κάθε μια στο κεφάλαιο 3, δηλαδη I_0/R είναι το τοροειδές μαγνητικό πεδίο κενού, η παράμετρος I_1 καθορίζει τις μαγνητικές ιδιότητες του πλάσματος, P_0, γ και M_0 είναι μια παράμετρος πίεσης που καθορίζει την πίεση στο μαγνητικό άξονα, ο λόγος των ειδικών θερμοτήτων και ο αριθμός Mach ως προς τη ταχύτητα του ήχου σε συγκεκριμένο σημείο ($z = 0$, $R = R_0$), με το R_0 να ορίζεται αργότερα, αντίστοιχα.

Με χρήση των παραπάνω επιλογών των ελευθέρων ποσοτήτων επιφανείας, η εξίσωση (4.25) επιδέχεται αναλυτική λύση με βάση τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών της μορφής $\mathcal{R}(R)\mathcal{Z}(z)$, όταν η σταθερά διαχωρισμού επιλεγεί ίση με $R_0 I_1$. Η συμμετρική ως προς το μεσοεπίπεδο $z = 0$ λύση παίρνει τη μορφή:

$$\psi(x,y) = C_1\left[J_0\left(\frac{2\tau\sqrt{e^{\frac{\gamma M_0^2 x^2}{2}}}}{\gamma M_0^2}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{2\tau\sqrt{e^{\frac{\gamma M_0^2 x^2}{2}}}}{\gamma M_0^2}\right)\right]\cos(R_0 I_1 y), \tag{4.30}$$

όπου $x = R/R_0$ και $y = z/R_0$, J_0 και Y_0 είναι οι μηδενικής τάξης πρώτου και δευτέρου είδους συναρτήσεις Bessel αντίστοιχα και $\tau \equiv 4P_0R_0^4$.

4.3.2 Ασυμπίεστη ροή

Σε αυτή την περίπτωση η επιλογή των ποσοτήτων επιφανείας έγινε ως εξής:

$$
\begin{aligned}
I^2 &= I_0^2 + I_1^2\psi^2, \\
P_s &= 2P_0\psi^2, \\
\left(\varrho\omega^2\right)' &= \left[\frac{K^2}{\varrho R^4}\right]' = 2A\psi.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

Από τη τρίτη των εξισώσεων (4.31) και σε συνδυασμό με την (4.17) προκύπτει ότι η παράμετρος A συνδέεται με την πυκνότητα, το ηλεκτρικό πεδίο και τη μεταβολή στα profile τους (διάτμηση) κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες $[(\varrho\omega^2)' \neq 0]$. Λαμβάνοντας υπόψη την πολικότητα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}_{pol}$ και την διάτμηση του, από τις οποίες εξαρτάται η παράμετρος ροής, συμπεραίνουμε ότι η A μπορεί να πάρει είτε θετικές τιμές είτε αρνητικές. Αυτή η δυνατότητα είναι σημαντική διαφορά σε σχέση με την περίπτωση «συμπιεστής» ροής στην οποία ο όρος ροής (4.29) δεν εξαρτάται από τη διάτμηση $\left[(\omega^2/\lambda T)' = 0\right]$. Επίσης, ας σημειωθεί ότι αντίθετα με το M_0, η A είναι διαστατική ποσότητα.

Μια αναλυτική λύση μέσω της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών εκφράζεται μέσω των συναρτήσεων Airy πρώτου και δευτέρου είδους Ai και Bi ως:

$$
\begin{aligned}
\psi(x,y) = C_1\Bigg[&Ai\Bigg(\Big(\frac{AR_0}{4}\Big)^{-2/3}\Big(\frac{AR_0^6}{4}x^2 - P_1R_0^4\Big)\Bigg) \\
&+C_2Bi\Bigg(\Big(\frac{AR_0}{4}\Big)^{-2/3}\Big(\frac{AR_0^6}{4}x^2 - P_1R_0^4\Big)\Bigg)\Bigg]\cos\left(R_0I_1y\right).
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

Με βάση τις λύσεις (4.30) και (4.32) ενδιαφερόμαστε για στάσιμες καταστάσεις tokamak στο οποίο το πλάσμα περιορίζεται από αγώγιμα τοιχώματα τετραγωνικής διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το τοίχωμα συμπίπτει με την εξώτατη μαγνητική επιφάνεια. Άρα, το μαγνητικό πεδίο είναι εφαπτομενικό στο τοίχωμα και η πίεση πρέπει να μηδενίζεται σε αυτό. Συνεπώς, η ψ θα πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$\psi(y_\pm) = 0 \tag{4.33}$$

και

$$\psi(x_\pm) = 0, \tag{4.34}$$

όπου $y_\pm = \pm a/R_0$ και $x_\pm = 1 \pm b/R_0$. Έτσι η ισορροπία γίνεται πρόβλημα συνοριακών συνθηκών. Οι ιδιοκαταστάσεις προσδιορίζονται από την εφαρμογή των (4.33) και (4.34) στις (4.30) και (4.32). Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας την (4.33) στο μέρος των λύσεων που εξαρτάται από τη z συντεταγμένη, το οποίο είναι κοινό για «συμπιεστή» και ασυμπίεστη ροή, προκύπτουν οι ιδιοτιμές:

$$I_1^\ell = \frac{1}{a}\left(\ell\pi - \frac{\pi}{2}\right), \quad \ell = 1, 2, \ldots \tag{4.35}$$

για την παράμετρο I_1 η οποία, όπως είδαμε, σχετίζεται με τη συνάρτηση πολοειδούς πυκνότητας ρεύματος $I(\psi)$. Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις συνδέονται με σχηματισμούς που έχουν ℓ μαγνητικούς άξονες παράλληλα στον άξονα συμμετρίας. Αντίστοιχα, η συνθήκη (4.34) εφαρμόζεται στο μέρος των λύσεων στην R διεύθυνση. Λόγω της ροής αυτό το κομμάτι περιέχει τις παραμέτρους M_0 για «συμπιεστή» ροή και A για ασυμπίεστη, πλέον της παραμέτρου πίεσης P_0. Έτσι λοιπόν, μέσω της συνθήκης (4.34) είναι δυνατό να προσδιοριστούν είτε ιδιοτιμές ροής ως συνάρτηση της παραμέτρου πίεσης P_0, $F^n(P_0)$ με $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ και F να αντιστοιχεί είτε στο M_0 είτε στην A, ή εναλλακτικά ιδιοτιμές πίεσης ως συνάρτηση της αντίστοιχης παραμέτρου ροής, $P_0^n(F)$. Οι παράμετροι C_1 και C_2 χρησιμοποιούνται για την κανονικοποίηση της ψ ως προς το μαγνητικό άξονα και την ικανοποίηση της συνθήκης (4.34) αντίστοιχα. Οι ιδιοσυναρτήσεις σε συνάρτηση με τις $F^n(P_0)$ (ή $P_0^n(F)$) αντιστοιχούν σε σχηματισμούς με n μαγνητικούς άξονες κάθετα στον άξονα συμμετρίας. Συνεπώς, οι συνολικές ιδιοσυναρτήσεις $\psi_{\ell n} = \mathcal{Z}_\ell(z)\mathcal{R}_n(R)$ περιγράφουν πολυτοροειδείς σχηματισμούς με $\ell \times n$ μαγνητικούς άξονες.

Με βάση τις παραπάνω λύσεις, μπορεί να εξεταστεί η επίδραση της ροής στις συνιστώσες της ειδικής αντίστασης $\eta_\perp$ [Εξ. (4.20)] και $\eta_\parallel$ [Εξ. (4.21)] στο ηλεκτρικό πεδίο κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες [$\vec{E}_{pol} = -\vec{\nabla}\Phi = -\Phi'\vec{\nabla}\psi$] και στην πυκνότητα του τοροειδούς ρεύματος J_ϕ [Εξ. (4.11)] για «συμπιεστή» και ασυμπίεστη ροή. Πρέπει να τονιστεί εδώ ότι η επίδραση της ροής συνδέεται άμεσα με το τοροειδές σχήμα και αυτό διότι στο όριο πολύ μεγάλου λόγου όψης, οι εξισώσεις ισορροπίας δε περιέχουν την αξονική συνιστώσα της ροής ανεξάρτητα της «συμπιεστότητας». Όντως, για κυλινδρικό πλάσμα τυχαίας διατομής οι εξισώσεις αντίστοιχες των (4.22) και (4.23) γράφονται:

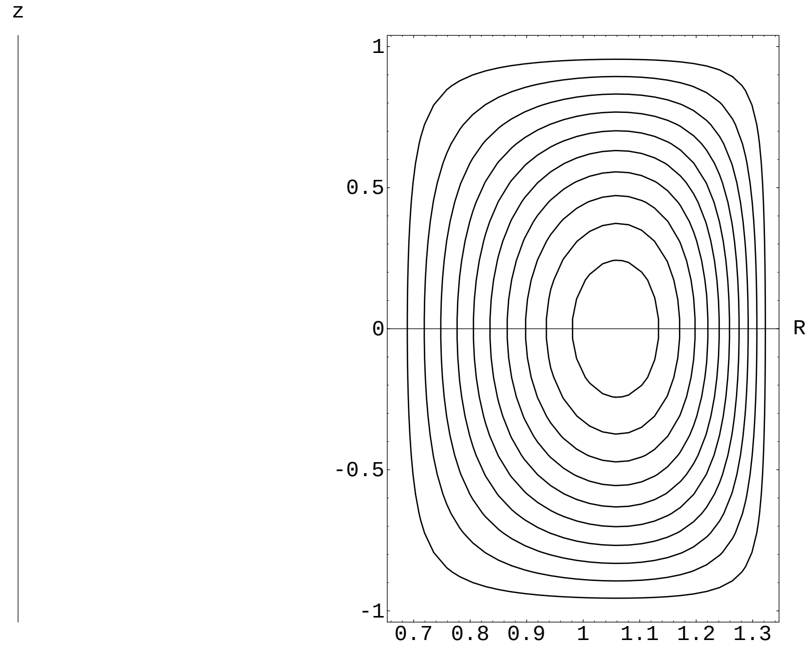
$$\vec{B}\cdot\vec{\nabla}P = 0 \tag{4.36}$$

$$\nabla^2\psi + \left(P + \frac{B_z^2}{2}\right)' = 0. \tag{4.37}$$

Για ιδανικό πλάσμα, οι εξισώσεις (4.36) και (4.37) προκύπτουν από τις (16) και (17) της αναφοράς [44] στην περίπτωση μηδενικής πολοειδούς συνιστώσας της ροής (περίπτωση $F' = 0$ στην [44]). Επομένως η ροή επιδρά στην ισορροπία μόνο παρουσία τοροειδούς σχηματισμού. Επίσης, να σημειωθεί ότι στην κυλινδρική συμμετρία η πίεση γίνεται ποσότητα επιφανείας. Λόγω λοιπόν, της σημασίας του τοροειδούς σχήματος, η επίδραση του λόγου όψης μαζί με την επίδραση της ροής στην ισορροπία θα εξεταστούν στο επόμενο εδάφιο.

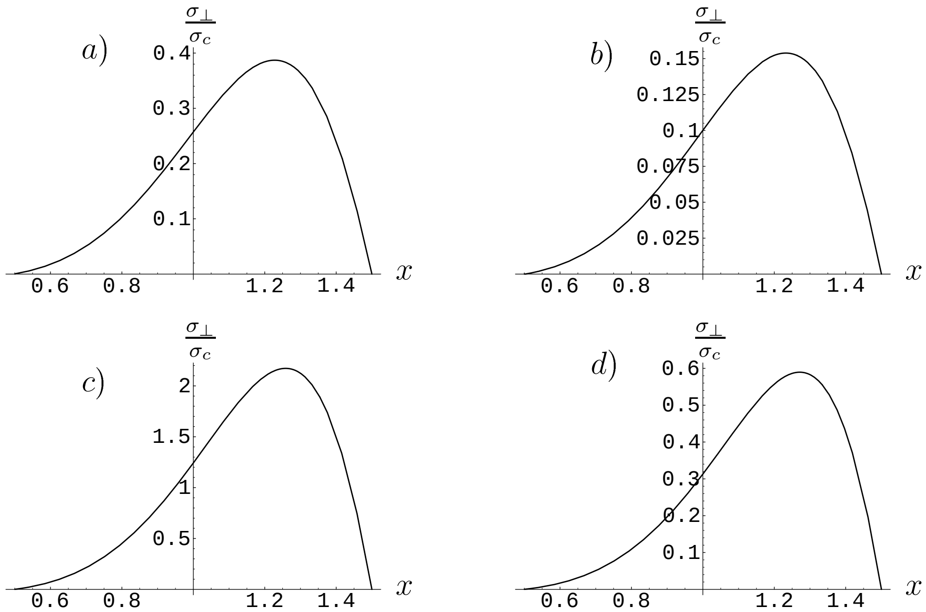
4.4 Επίδραση της ροής και του λόγου όψης στην ισορροπία

Οι ποσότητες μέσω των οποίων θα εξεταστεί η επίδραση της ροής και του λόγου όψης στην ισορροπία είναι οι συνιστώσες της αγωγιμότητας, $\sigma_\perp \equiv 1/\eta_\perp$ και $\sigma_\parallel \equiv 1/\eta_\parallel$, το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_{pol}$ και η τοροειδής πυκνότητα ρεύματος J_ϕ. Η μελέτη θα πραγματοποιηθεί για απλά τοροειδείς σχηματισμούς τόσο για «συμπιεστή» όσο και για ασυμπίεστη ροή. Δηλαδή, με βάση την ιδιοσυνάρτηση ψ_{11}, η οποία για «συμπιεστή» ροή φαίνεται στο σχήμα 4.1, θα εξεταστεί η επίδραση της ροής μέσω της μεταβολής των παραμέτρων ροής M_0 και A για τις περιπτώσεις «συμπιεστής» και ασυμπίεστης ροής αντίστοιχα. Για κάθε τιμή του αριθμού Mach, M_0, ή της παραμέτρου A, υπολογίζεται αριθμητικά η χαμηλότερη ιδιοτιμή της πίεσης P_0. Η μεταβολή του M_0 και της A αντιστοιχούν στο ίδιο εύρος των ιδιοτιμών της P_0. Συγκεκριμένα, για λόγο όψης $\alpha = 3$ οι παράμετροι ροής θα κυμανθούν στα διαστήματα [0.1, 0.7] και [-0.001, -0.01] για το M_0 και την A αντίστοιχα. Για $\alpha = 2$ τα αντίστοιχα διαστήματα είναι [0.1, 1] και [-0.001, -0.08]. Όλα τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν αντιστοιχούν στα παραπάνω διαστήματα διακυμάνσεων, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά στο κείμενο. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε η συνθήκη κλίμακας για tokamak $B_{pol} \approx 0.1 B_{tor}$. Η επιλογή των συγκεκριμένων τιμών των παραμέτρων, σχετικών με πειραματικά αποτελέσματα, εξασφαλίζει πως και οι τιμές των υπολογιζόμενων ποσοτήτων θα είναι ίδιας τάξης μεγέθους με τις αντίστοιχες πειραματικές. Εδώ πρέπει να γίνει η ακόλουθη διευκρίνιση: συμβαίνει οι τιμές των λύσεων (4.30) και (4.32) να εκτελούν ταλάντωση καθώς οι τιμές των παραμέτρων ροής μεταβάλλονται, δηλαδή για δοσμένο σημείο (R, z) αυτές οι λύσεις αν θεωρηθούν συναρτήσεις των παραμέτρων ροής $\psi(M_0)$ και $\psi(A)$ παίρνουν διαδοχικά μεγαλύτερες και μικρότερες τιμές καθώς οι M_0 και A μεταβάλλονται μονοτονικά. Αυτό το χαρακτηριστικό έχει σαν αποτέλεσμα μια ταλαντωτική συμπεριφορά σε όλες



Σχήμα 4.1: Η ιδιοσυνάρτηση ψ_{11} για λόγο όψης $\alpha = 3$ και για «συμπιεστή» ροή μέσω της οποίας εξετάζεται η επίδραση της ροής στην ισορροπία.

τις φυσικές ποσότητες, το οποίο δεν μπορεί να δικαιολογηθεί με βάση φυσικά επιχειρήματα και εκτός αυτού δεν έχει παρατηρηθεί πειραματικά. Στο σχήμα 4.2 φαίνεται αυτή η ταλάντωση για τη συνιστώσα $\sigma_\perp$ της αγωγιμότητας. Για να αποφευχθεί αυτή η συμπεριφορά, οι λύσεις θα κανονικοποιούνται με τέτοιο τρόπο ώστε η πολοειδής μαγνητική ροή στο μαγνητικό άξονα να είναι μονάδα, ανεξάρτητα από τη ροή. Αυτή η κανονικοποίηση πραγματοποιείται μέσω της παραμέτρου C_1 για κάθε τιμή των παραμέτρων M_0 ή A. Δηλαδή, η παράμετρος αυτή είναι συνάρτηση των παραμέτρων ροής [$C_1(M_0)$ για «συμπιεστή» και $C_1(A)$ για ασυμπίεστη ροή]. Επίσης, οι λύσεις (4.30) και (4.32) έχουν ισχυρή εξάρτηση από τις παραμέτρους ροής (παρατηρείστε την εκθετική εξάρτηση της (4.30) από το M_0^2). Συμπερασματικά, αυτή η ισχυρή εξάρτηση οδηγεί σε μεγά-



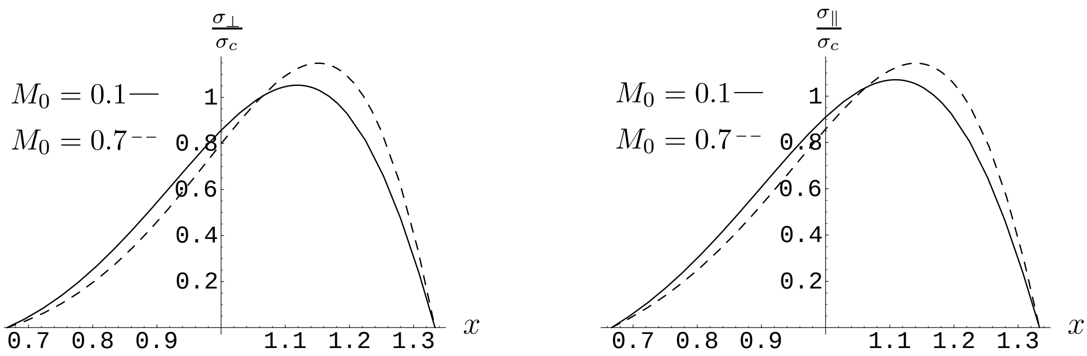
Σχήμα 4.2: Ένα σύνολο γραφημάτων που δείχνει την ταλάντωση των profile της $\sigma_\perp$ στο μεσοεπίπεδο $z = 0$, κανονικοποιημένα ως προς μια σταθερή τιμη σ_c, για «συμπιεστή» ροή όταν η τιμή της συνάρτησης ψ στο μαγνητικό άξονα εξαρτάται από τη ροή και ο αριθμός Mach αυξάνεται: $a)$ $M_0 = 0.1$, $b)$ $M_0 = 0.2$, $c)$ $M_0 = 0.5$ και $d)$ $M_0 = 0.6$. Ο λόγος όψης είναι $\alpha = 2$.

λες ποσοτικές αλλαγές στις περισσότερες φυσικές ποσότητες για μεγάλες τιμές του M_0 ($M_0 \approx 1$) ή μικρές τιμές της παραμέτρου A ($A \approx -0.01$) και έτσι πιθανότατα υπερεκτιμάται η επίδραση της ροής. Επιπλέον ας σημειωθεί ότι, εκτός από την αγωγιμότητα, η αύξηση του M_0 έχει ποιοτικά το ίδιο αποτέλεσμα στην ισορροπία και στις άλλες φυσικές ποσότητες που εξετάστηκαν με την μείωση της παραμέτρου A.

Τα αποτελέσματα που αφορούν τα χαρακτηριστικά των ποσοτήτων $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$, $\vec{E}_{pol}$ και J_ϕ καθώς και η επίδραση της ροής και του λόγου όψης σ′ αυτές παρουσιάζονται στα επόμενα υποεδάφια

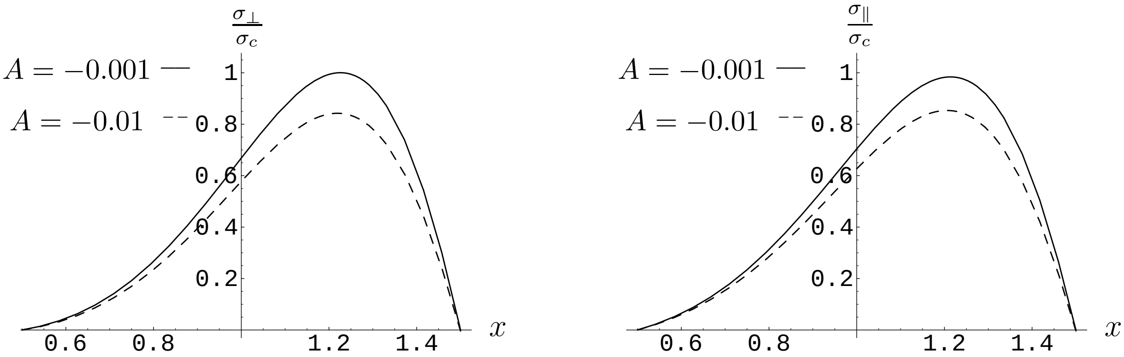
4.4.1 Συνιστώσες της αγωγιμότητας

Τα profile των συνιστωσών της αγωγιμότητας $\sigma_\perp$ και $\sigma_\parallel$, στην πολοειδή διατομή, έχουν σχήμα παρόμοιο με αυτό που θα είχαν αν οφείλονταν στις κρούσεις μεταξύ των σωματιδίων, δηλαδή έχουν μέγιστο στην περιοχή που βρίσκεται ο μαγνητικός άξονας, μηδενίζονται στο σύνορο και στις περισσότερες περιπτώσεις ισχύει ότι $\sigma_\parallel > \sigma_\perp$ [69]. Profile των συνιστωσών της αγωγιμότητας στο μεσοεπίπεδο $z = 0$ φαίνονται στο σχήμα 4.3 για «συμπιεστή» ροή και στο σχήμα 4.4 για ασυμπίεστη. Στην στατική περίπτωση και για λόγο όψης $\alpha = 3$ προκύπτει $\Delta\sigma/\sigma_\parallel \equiv (\sigma_\parallel - \sigma_\perp)/\sigma_\parallel = 0.2122$, ενώ για τη συνθήκη κλίμακας στην περίπτωση σφιγκτήρα αντιστροφής πεδίου (reversed field pinch), $B_\phi \approx B_p$ η τιμή αυτή διπλασιάζεται. Επίσης, για $\alpha = 3$, αύξηση του αριθμού Mach από 0.1 σε 0.7 έχει σαν αποτέλεσμα μια ποσοστιαία μείωση του $\Delta\sigma$ κατά 4%, ενώ μείωση της A από -0.001 σε -0.01 επιφέρει αύξηση στο $\Delta\sigma$ κατά 3.4%



Σχήμα 4.3: Σε αυτό το γράφημα φαίνεται το σχήμα του profile των συνιστωσών $\sigma_\perp$ και $\sigma_\parallel$. Επίσης, φαίνεται και η αύξηση της τιμής των μεγίστων των συνιστωσών $\sigma_\perp$ και $\sigma_\parallel$ καθώς και η μετατόπιση τους προς τα έξω για «συμπιεστή» λόγω της αύξησης του αριθμού Mach M_0.

Περαιτέρω, η αύξηση του αριθμού Mach ή της παραμέτρου A συνεπάγεται αύξηση στις τιμές του μέγιστου των συνιστωσών της αγωγιμότητας. Συγκεκριμένα, για $\alpha = 3$, αύξηση του M_0 (από 0.1 σε 0.7) οδηγεί σε ποσοστιαία αύξηση τα μέγιστα των $\sigma_\perp$ και $\sigma_\parallel$ κατά 9% και 7% αντίστοιχα. Για ασυμπίεστη ροή οι αντίστοιχες μειώσεις, λόγω της αναφερόμενης μεταβολής του A (από



Σχήμα 4.4: Σε αυτό το γράφημα φαίνεται το σχήμα του profile καθώς και η μείωση της τιμής των μεγίστων των συνιστωσών $\sigma_\perp$ και $\sigma_\parallel$ λόγω της μείωσης των τιμών του A για ασυμπίεστη ροή. Επίσης είναι εμφανές ότι το σημείο του μεγίστου μένει ανεπηρέαστο από την παράμετρο ροής A.

-0.001 σε -0.01) και για $\alpha = 3$ είναι 27% και 33%. Εξετάζοντας την επίδραση της ροής στο σημείο του μεγίστου, παρατηρούμε ότι καθώς ο αριθμός Mach, M_0, αυξάνεται, η θέση του μεγίστου μετατοπίζεται προς τα έξω σε σχέση με τον άξονα συμμετρίας. Αντίθετα, κατά τη μεταβολή του A η θέση του μεγίστου παραμένει σχεδόν ανεπηρέαστη [70] (δες σχ. 4.3 και 4.4). Για παράδειγμα, στην περίπτωση που ο λόγος όψης είναι 3 η θέση του μεγίστου της συνιστώσας $\sigma_\perp$ μετατοπίζεται από το σημείο 1.119 στο 1.151 (για μεταβολή του M_0 από το 0.1 στο 0.7 όπως πάντα).

Το επόμενο βήμα ήταν η μελέτη της επίδρασης του λόγου όψης στις συνιστώσες της αγωγιμότητας. Τα παρακάτω αποτελέσματα αφορούν την επίδραση που έχει η μείωση του λόγου όψης. Συγκεκριμένα, η μείωση του $\Delta\sigma$ γίνεται μεγαλύτερη όσο το M_0 αυξάνεται. Αντίθετα, τόσο μικρότερη γίνεται η αύξηση του $\Delta\sigma$ όσο το A μειώνεται. Περαιτέρω, η αύξηση των τιμών των μεγίστων των συνιστωσών $\sigma_\perp$ και $\sigma_\parallel$ που αντιστοιχεί στην αύξηση είτε του M_0 είτε της A γίνεται μεγαλύτερη. Επίσης, η μετατόπιση των θέσεων των μεγίστων αυξάνει για την αντίστοιχη αύξηση του M_0. Τα παραπάνω γίνονται πιο ξεκάθαρα εάν τα παρακάτω αποτελέσματα για $\alpha = 2$ συγκριθούν με αυτά που παρουσιάστηκαν πιο πάνω για $\alpha = 3$

- Η μείωση του $\Delta\sigma$ για «συμπιεστή» ροή είναι 13%.

- Η αύξηση του $\Delta\sigma$ για ασυμπίεστη ροή είναι 1%. Σε αυτή την περίπτωση το εύρος της μεταβολής της A είναι [-0.001, -0.01] (δες Ανάφ. [69]).
- Η αύξηση στη τιμή των μεγίστων των συνιστωσών της αγωγιμότητας για «συμπιεστή» ροή είναι 44% ($\sigma_\perp$) και 27% ($\sigma_\parallel$).
- Η μείωση στη τιμή των μεγίστων των συνιστωσών της αγωγιμότητας για ασυμπίεστη ροή είναι 43.7% ($\sigma_\perp$) και 63% ($\sigma_\parallel$).
- Η θέση του μεγίστου της συνιστώσας $\sigma_\perp$ για «συμπιεστή» ροή μετατοπίζεται από το 1.228 στο 1.33.

Η διαφοροποίηση κάποιων αποτελεσμάτων που αφορούν τα $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$, $\Delta\sigma$ σε σχέση με την «συμπιεστότητα» πιθανόν να οφείλεται στο ότι η ροή, στην περίπτωση που είναι ασυμπίεστη, έχει μη μηδενική διάτμηση.

4.4.2 Ηλεκτρικό πεδίο

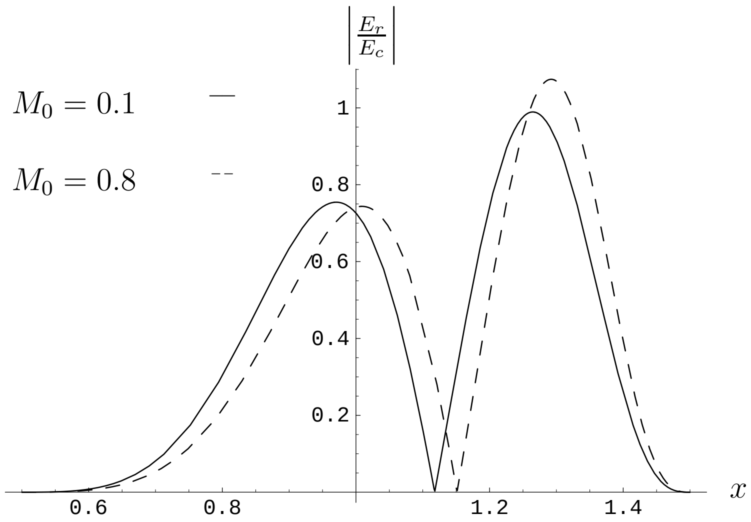
Η κυκλική συχνότητα, η οποία όπως είδαμε είναι ποσότητα επιφανείας, μπορεί να επιλεγεί ώς:

$$\omega = \omega_0 \psi^n, \tag{4.38}$$

όπου η παράμετρος n χρησιμοποιείται για τον έλεγχο του σχήματος του profile. Το ηλεκτρικό πεδίο στην πολοειδή διατομή δίνεται από τη σχέση $\vec{E}_{pol} = -\Phi'\vec{\nabla}\psi$, η οποία με τη βοήθεια της (4.17) γίνεται:

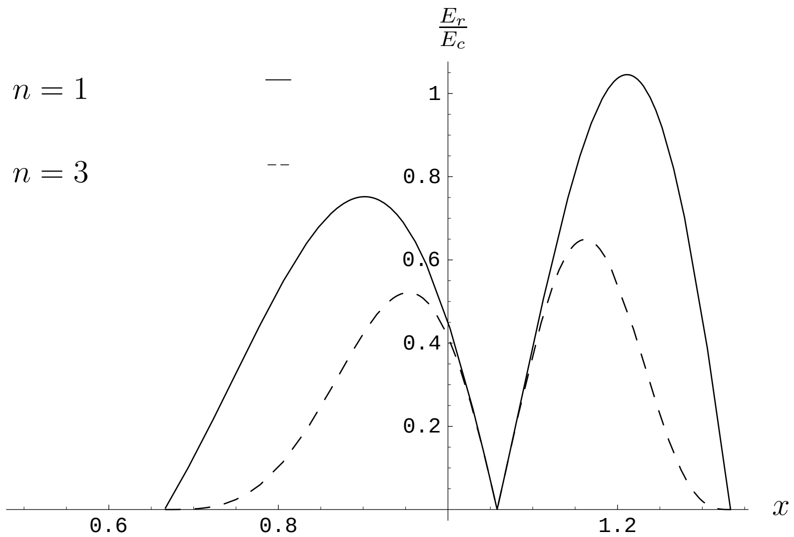
$$\vec{E}_{pol} = -\omega_0 \psi^n \vec{\nabla}\psi. \tag{4.39}$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει ότι το profile του E_{pol} στην πολοειδή διατομή εμφανίζει δύο τοπικά ακρότατα, εντός του όγκου του πλάσματος, εκατέρωθεν του μαγνητικού άξονα με αντίθετο πρόσημο. Το τελευταίο χαρακτηριστικό μπορεί να αναγνωριστεί και από έναν απλό έλεγχο της (4.39), μιας και στη μια πλευρά του σχηματισμού η παράγωγος της ψ είναι θετική, ενώ στην άλλη αρνητική. Αυτό το σχήμα του profile έχει παρατηρηθεί σε πειράματα με εσωτερικά φράγματα μεταφοράς. Profile του $|\vec{E}_{pol}|$ στο μεσοεπίπεδο $y = 0$ φαίνεται στο σχήμα 4.5. Η αύξηση του M_0 ή η μείωση της A, οδηγεί σε αύξηση των τιμών των δύο τοπικών ακροτάτων με αυτό που βρίσκεται εξωτερικά του μαγνητικού άξονα να αυξάνεται περισσότερο, σε σχέση με αυτό που βρίσκεται μεταξύ άξονα συμμετρίας και μαγνητικού άξονα. Περαιτέρω, οι θέσεις των μεγίστων μετατοπίζονται προς τα έξω. Για «συμπιεστή» ροή τα αποτελέσματα



Σχήμα 4.5: Profile της απόλυτης τιμής του ηλεκτρικού πεδίου στο μεσοεπίπεδο $z = 0$ για «συμπιεστή» ροή. Στο γράφημα φαίνεται η αύξηση των τοπικών μεγίστων του $\vec{E}_{pol}$. Ειδικότερα για το μέγιστο στην εσωτερική πλευρά η αύξηση είναι μικρότερη απ' ότι γι' αυτό στην εξωτερική πλευρά του σχηματισμού. Επίσης, είναι εμφανής η μετατόπιση της θέσης των μεγίστων προς τα έξω σε σχέση με τον άξονα συμμετρίας καθώς ο αριθμός Mach αυξάνει από 0.1 σε 0.8. Το σημείο μεταξύ των δύο ακροτάτων όπου $\vec{E}_{pol} = 0$ αντιστοιχεί στη θέση του μαγνητικού άξονα. Στα σχήματα χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες τιμές των παραμέτρων: $\alpha = 2$ και $n = 3$.

αυτά επιδεικνύονται στο σχήμα 4.5. Ποσοτικά, για $\alpha = 3$ οι μέγιστες τιμές του profile του $|\vec{E}_{pol}|$ αυξάνονται κατά 4% για «συμπιεστή» ροή (αύξηση του M_0 από 0.1 σε 0.7) και κατά 5.6% για ασυμπίεστη (μείωση της A από -0.001 σε -0.01). Όσο μειώνεται ο λόγος όψης τόσο μεγαλώνει η αύξηση των μεγίστων και η μετατόπιση της θέσης τους. Σαν παράδειγμα ας αναφερθεί ότι για $\alpha = 2$ η αύξηση του μεγίστου του $|\vec{E}_{pol}|$ γίνεται 15% στη «συμπιεστή» περίπτωση, με τη μεγαλύτερη αύξηση να παρατηρείται για τιμές του M_0 μεγαλύτερες από 0.8. Αντίστοιχα, το ποσοστό της αύξησης στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής ανέρχεται σε 9%. Η παράμετρος n, που σχετίζεται με το profile της κυκλικής συχνότητας, ω, επιδρά στις τιμές των ακροτάτων καθώς και στο σχήμα του profile του πολοειδούς ηλεκτρικού πεδίου. Συγκεκριμένα, καθώς οι τιμές της n αυξάνονται τα μέγιστα του $|\vec{E}_{pol}|$ παίρνουν μικρότερες τιμές, ενώ το σχήμα του profile γίνεται περισσότερο εντοπισμένο και εμφανίζει μεγαλύτερη κλίση (Σχ. 4.6), πράγμα που σημαίνει ότι η διάτμηση του ηλεκτρικού πεδίου, που ορίζεται ως $S_{E_r} = \partial E_r/\partial x$, αυξάνεται.



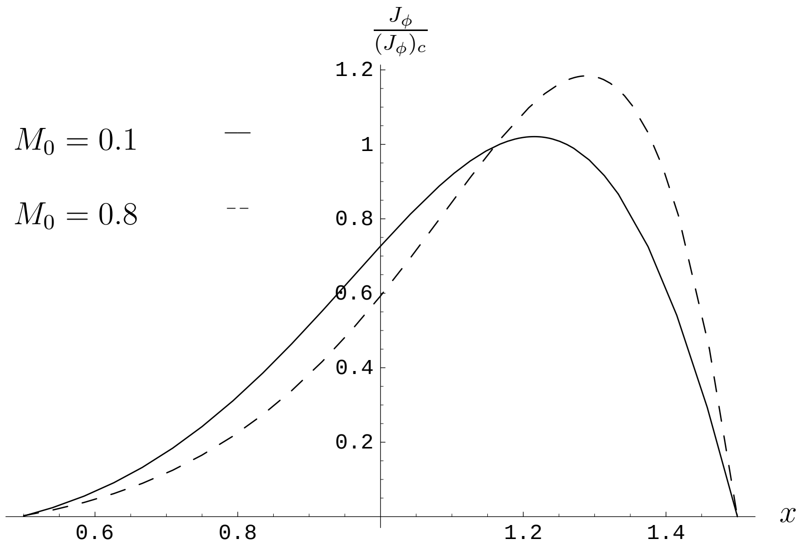
Σχήμα 4.6: Profile του ηλεκτρικού πεδίου στο μεσοεπίπεδο $z = 0$ για $\alpha = 3$, $M_0 = 0.4$ και δυο τιμές της παραμέτρου n: $n = 1$ και $n = 3$.

4.4.3 Τοροειδής πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος

Η τοροειδής συνιστώσα της πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος, όπως συνεπάγεται από την εξίσωση (4.11), δίνεται από τη σχέση:

$$J_\phi = \frac{1}{R}\Delta^*\psi. \qquad (4.40)$$

Με βάση την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι το profile του J_ϕ είναι κορυφοειδούς μορφής, με το μέγιστο του στην περιοχή του μαγνητικού άξονα, ενώ μηδενίζεται στην επιφάνεια του πλάσματος (Σχ. 4.7). Η επίδραση της ροής στο J_ϕ είναι παρόμοια με την επίδραση που η πρώτη έχει στο $\vec{E}_{pol}$, δηλαδή καθώς το M_0 αυξάνεται ή η A μειώνεται, το μέγιστο του profile του J_ϕ αυξάνεται και η θέση του μετατοπίζεται προς το εξωτερικό του σχηματισμού. Επίσης, η μείωση του λόγου όψης ενισχύει και σ' αυτή την περίπτωση την επίδραση που



Σχήμα 4.7: Profile της τοροειδούς πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος στο μεσοεπίπεδο $z = 0$ στην περίπτωση «συμπιεστής» ροής. Συγκρίνοντας τις δύο καμπύλες φαίνεται η αύξηση του μεγίστου του και η μετατόπιση προς τα έξω της θέσης του με την αύξηση του αριθμού Mach, M_0, από το 0.1 στο 0.8. Ο λόγος όψης επιλέχθηκε $\alpha = 2$.

έχει η ροή. Συγκεκριμένα, για $\alpha = 3$ και $\alpha = 2$ η μέγιστη τιμή της πυκνότητας ρεύματος αυξάνεται κατά 8% και 35.5% αντίστοιχα, για «συμπιεστή» ροή. Οι αντίστοιχες τιμές στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής είναι 5.6% και 18%.

4.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήσαμε την MHD ισορροπία ενός αξονικά συμμετρικού, μαγνητικά περιορισμένου πλάσματος με ανισοτροπική ειδική αντίσταση και τοροειδή ροή. Η μοναδική εξωτερική πηγή ενέργειας ήταν η σταθερή τοροειδής εξωτερική τάση. Η ισορροπία χαρακτηρίζεται στάσιμη λόγω του ότι ο όρος ροής στην εξίσωση ορμής δε θεωρείται αμελητέος. Επιπλέον, στην ισορροπία δεν υπάρχει διάχυση Pfisch-Schlüter εκ κατασκευής (δεν υπάρχει συνιστώσα της ροής κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες). Το ηλεκτρικό πεδίο, σε αντιδιαστολή με την περίπτωση ροής παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο, εμφανίζει και μια μη μηδενική συνιστώσα, $\vec{E}_{pol}$, κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες. Η μελέτη περιλάμβανε «συμπιεστή» ροή με μεταβλητή πυκνότητα, αλλά σταθερή θερμοκρασία πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες και ασυμπίεστη ροή με σταθερή πυκνότητα, αλλά μεταβλητή θερμοκρασία πάνω σ΄ αυτές. Προέκυψε ότι οι καταστάσεις ισορροπίας καθορίζονται από μια εξίσωση Bernoulli για την πίεση (Εξ. (4.24) και (4.27)), μια ελλειπτική διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση πολοειδούς μαγνητικής ροής (Εξ. (4.25) και (4.28)) καθως και δύο σχέσεις για τις συνιστώσες της ειδικής αντίστασης κάθετα και παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο, $\eta_\perp$ (Εξ. (4.20)) και $\eta_\parallel$ (Εξ. (4.21)) αντίστοιχα. Λόγω της αξονικής συμμετρίας και της διεύθυνσης της ροής, οι εξισώσεις ισορροπίας είναι όμοιες με τις αντίστοιχες της ιδανικής MHD του κεφαλαίου 3 (Εξ. (3.17) και (3.18)). Επίσης, προέκυψε ότι η επίδραση της ροής ενεργοποιείται μόνο όταν ο σχηματισμός είναι τοροειδής κι αυτό διότι οι ανηγμένες εξισώσεις ισορροπίας στην περίπτωση κυλινδρικής συμμετρίας δεν περιέχουν τον όρο ροής.

Η ισορροπία tokamak πλάσματος, το οποίο είναι περιορισμένο στην πολοειδή διατομή από αγώγιμα τοιχώματα ορθογώνιου σχήματος, μελετήθηκε μέσω ιδιοσυναρτήσεων ισορροπίας που προέκυψαν ως ακριβείς λύσεις στην περίπτωση «συμπιεστής» και ασυμπίεστης ροής. Αυτές οι ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να περιγράψουν είτε απλά είτε πολλαπλά τοροειδείς σχηματισμούς. Για απλά τοροειδείς σχηματισμούς εξετάστηκαν τα χαρακτηριστικά των συνιστωσών της αγωγιμότητας, $\sigma_\perp$ και $\sigma_\parallel$, το ηλεκτρικό πεδίο στην πολοειδή διεύθυνση, $\vec{E}_{pol}$, καθώς και η τοροειδής πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος και μελετήθηκε η επίδραση της ροής και του λόγου όψης σε αυτές. Η επίδραση της ροής μελετήθηκε μέσω της μεταβολής των παραμέτρων ροής, δηλ. του αριθμού Mach ως προς τη ταχύτητα του ήχου για «συμπιεστή» ροή και της παραμέτρου A, που σχετίζεται με την πυκνότητα μάζας, το ηλεκτροστατικό δυναμικό και το profile τους κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες για ασυμπίεστη. Πέρα από το γεγονός ότι η μελέτη πραγματοποιήθηκε για απλά τοροειδείς σχηματισμούς, οι ιδιοσυναρτήσεις ήταν κανονικοποιημένες έτσι ώστε η τιμή τους πάνω στο μαγνητικό άξονα να είναι σταθερή και ίση με μονάδα, ανεξάρτητα της ροής. Αυτό έγινε για να αποφευχθεί η μη δικαιολογήσιμη, από φυσική σκοπιά, ταλάντωση των ποσοτήτων υπό μελέτη λόγω της αντίστοιχης ταλάντωσης των λύσεων. Επιπλέον, για να υπάρχει κοινή βάση σύγκρισης των αποτελεσμάτων για συμπιεστή και ασυμπίεστη ροή, λήφθηκε μέριμνα ώστε η μεταβολή των παραμέτρων ροής να αντιστοιχεί στην ίδια μεταβολή των πρώτης τάξης ιδιοτιμών της πίεσης.

Παρόλο που οι συνιστώσες της αγωγιμότητας δεν μπορούν να είναι σταθερές πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες (αυτό προκύπτει από μια γενική εξέταση των εξισώσεων ισορροπίας) τα profile έχουν σε γενικές γραμμές σχήμα όμοιο με της περίπτωσης που αυτές οφείλονται στις κρούσεις μεταξύ των σωματιδίων (collisional-like), δηλαδή παρουσιάζουν μέγιστο στην περιοχή του μαγνητικού άξονα, μηδενίζονται στην επιφάνεια του πλάσματος και στις περισσότερες περιπτώσεις ισχύει ότι $\sigma_{\parallel} > \sigma_{\perp}$. Η επίδραση της ροής στις συνιστώσες της αγωγιμότητας εξαρτάται από την «συμπιεστότητα». Συγκεκριμένα, η τιμή του μεγίστου των profile των συνιστωσών $\sigma_{\perp}$ και $\sigma_{\parallel}$ αυξάνει, καθώς ο αριθμός Mach αυξάνει και η θέση των μεγίστων μετατοπίζεται προς το εξωτερικό του σχηματισμού, ενώ καθώς η παράμετρος A μειώνεται, οι τιμές των μεγίστων μειώνονται επίσης και η θέση τους παραμένει πρακτικά ανεπηρέαστη. Επίσης, όσο μεγαλύτερος ο M_0 τόσο μικρότερη η διαφορά $\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}$, ενώ όσο μικρότερη η A τόσο μεγαλύτερη αυτή η διαφορά. Για δεδομένη τιμή της παραμέτρου ροής, όσο μικρότερος ο λόγος όψης τόσο μικρότερη η τιμή του μεγίστου των profile των $\sigma_{\parallel}$ και $\sigma_{\perp}$ στην περίπτωση «συμπιεστής» ροής, ενώ για ασυμπίεστη ροή οι τιμές των μεγίστων γίνονται μεγαλύτερες. Για δεδομένη αύξηση του M_0 (μείωση της A), η οποία όπως είδαμε αντιστοιχεί στην ίδια μεταβολή της τιμής των πρώτης τάξης ιδιοτιμών της πίεσης P_0, όσο μειώνεται ο λόγος α τόσο αυξάνεται (μειώνεται) η μεταβολή των $\sigma_{\parallel}$, $\sigma_{\perp}$ και της διαφοράς $\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}$.

Το profile του $|\vec{E}_{pol}|$, στην περίπτωση που η κυκλική συχνότητα ροής, ω, έχει profile κορυφοειδούς μορφής με μέγιστο στον μαγνητικό άξονα και μηδενίζεται στην επιφάνεια του πλάσματος, στην πολοειδή διατομή εμφανίζει δύο μέγιστα εκατέρωθεν του μαγνητικού άξονα αντίθετου προσήμου και μηδενίζεται στο σύνορο. Επιπλέον, όταν το μέγιστο της ω γίνεται μεγαλύτερο και το σχήμα του profile πιο εντοπισμένο, το profile του $|\vec{E}_{pol}|$ γίνεται επίσης περισσότερο εντοπισμένο, ενώ αντίθετα η τιμή των μεγίστων μειώνεται. Το profile της τοροειδούς πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος, J_{ϕ}, έχει κορυφοειδή μορφή με το μέγιστο στην περιοχή του μαγνητικού άξονα και μηδενίζεται στο σύνορο. Καθώς ο M_0 αυξάνεται ή η A μειώνεται, τα τοπικά μέγιστα των profile των $|\vec{E}_{pol}|$ και J_{ϕ} παίρνουν μεγαλύτερες τιμές, ενώ οι θέσεις τους μετατοπίζονται προς το εξωτερικό του σχηματισμού. Για δεδομένη τιμή του M_0 καθώς ο α μειώνεται τόσο αυξάνεται η τιμή του μεγίστου του $|\vec{E}_{pol}|$, ενώ μειώνεται η αντίστοιχη του J_{ϕ}. Αντίθετα, για δεδομένη τιμή της A όσο μικρότερος ο α τόσο μεγαλύτερη η τιμή του μεγίστου του $|\vec{E}_{pol}|$ και μικρότερη η του J_{ϕ}. Τελικά, για αύξηση του M_0 ή μείωση της A, όσο μικρότερος ο λόγος όψης τόσο μεγαλύτερη η μεταβολή του μεγίστου του $|\vec{E}_{pol}|$ και του J_{ϕ} καθώς επίσης και της θέσης τους.

Ποιοτικά, εκτός από τις συνιστώσες της αγωγιμότητας, η επίδραση της ροής στο $\vec{E}_{pol}$ και στο J_{ϕ} είναι ανεξάρτητη από την «συμπιεστότητα». Η εξάρτηση των αποτελεσμάτων για τις $\sigma_{\perp}$ και $\sigma_{\parallel}$ από τη «συμπιεστότητα» πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι η ασυμπίεστη λύση (4.32) έχει όρο ροής με μη μηδενική διάτμηση, σε αντίθεση με τη λύση (4.30) για «συμπιεστή» ροή. Ποσοτικά για $\alpha = 2$ η αυξηση του M_0 από 0.1 σε 0.5, ή η μείωση της A από -0.001 σε -0.006 έχει σαν αποτέλεσμα μια μεταβολή σε όλες τις ποσότητες ($\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$, $\vec{E}_{pol}$ και J_ϕ) μικρότερη από 10%.

Κεφάλαιο 5

Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα-Προοπτικές

Σε αυτό το κεφάλαιο θα πραγματοποιηθεί μια ανακεφαλαίωση της εργασίας και θα παρουσιαστούν συνοπτικά τα κυριότερα αποτελέσματά της. Επίσης, θα προταθούν επεκτάσεις που θα μπορούσαν να οδηγήσουν στην καλύτερη κατανόηση της ισορροπίας μαγνητικά περιορισμένου πλάσματος, με εφαρμογή στις διατάξεις σύντηξης, που αποτέλεσε αντικείμενο της παρούσας διατριβής και ειδικότερα στην επίδραση που έχει η μακροσκοπική ροή μάζας και η απόσβεση λόγω ηλεκτρικής αντίστασης στην ισορροπία.

5.1 Ανακεφαλαίωση

Το πρώτο κύριο μέρος της εργασίας αφορά τη μελέτη στάσιμης ισορροπίας tokamak στο όριο απείρου λόγου όψης (κυλινδρικού πλάσματος). Σε αυτή την προσέγγιση αγνοούνται αφενός η επίδραση του τοροειδούς σχήματος καθώς και της επιμήκυνσης (επιλέχθηκε κυκλική πολοειδής διατομή). Τα κύρια χαρακτηριστικά της ισορροπίας είναι η αρνητική μαγνητική διάτμηση και η διατμημένη ταχύτητα ροής, που συνδέονται με το σχηματισμό εσωτερικών φραγμάτων μεταφοράς. Η μελέτη πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του μοντέλου των δύο ρευστών. Για τη μελέτη χρησιμοποιήθηκε ένα ελαφρώς απλούστερο σύστημα εξισώσεων για τα δύο ρευστά, στο οποίο η εξίσωση ορμής για το ηλεκτρονικό ρευστό αντικαταστάθηκε από την αντίστοιχη του MHD μοντέλου. Ο όρος ροής στη συγκεκριμένη εξίσωση αγνοήθηκε, μιας και σε κυλινδρική γεωμετρία για tokamak είναι πολύ μικρός. Έπειτα, περιγράφησαν έξι ελεύθερες ποσότητες, μετά από επισταμένη μελέτη πειραματικών αποτελεσμάτων με εσωτερικά φράγματα μεταφοράς και έγινε δυνατός ο υπολογισμός, με αυτοσυνεπή τρόπο, ορισμένων ποσοτήτων ισορροπίας που θεωρούνται σημαντικές για το σχηματισμό του φράγματος. Οι ποσότητες των οποίων τα profile περιγράφησαν είναι: το τοροειδές μαγνητικό πεδίο, ο παράγοντας ασφάλειας, που αντιστοιχεί σε διαμόρφωση αρνητικής μαγνητικής διάτμησης και η αριθμητική πυκνότητα. Όσον αφορά τα profile των συνιστωσών της ταχύτητας ροής του ιοντικού ρευστού στη τοροειδή και πολοειδή διεύθυνση και αυτά επιλέχθησαν έτσι ώστε να υπάρχει συμφωνία με αντίστοιχα πειραματικά. Ειδικότερα για τη τοροειδή συνιστώσα χρησιμοποιήθηκαν δύο profile, ένα Gaussian σχήματος και ένα κορυφοειδούς (με το μέγιστο στον άξονα συμμετρίας). Αντίστοιχα, για την πολοειδή συνιστώσα επιλέχθηκε Gaussian profile. Στην περίπτωση που το profile είναι Gaussian το μέγιστο του συμπίπτει με το ελάχιστο του παράγοντα ασφάλειας. Επιπλέον, η παραμετρική εξάρτηση του Gaussian profile επιτρέπει τον έλεγχο της έκτασης, στην πολοειδή διατομή, που καταλαμβάνει η ροή. Έτσι αυτή μπορεί να είναι είτε εκτεταμένη σε σχεδόν όλη τη διατομή είτε εντοπισμένη σε ένα πολύ μικρό μέρος αυτής. Με βάση τις περιγραφές των παραπάνω ποσοτήτων βρέθηκαν αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων ισορροπίας και υπολογίστηκαν η ολική πίεση του πλάσματος καθώς και οι μερικές πιέσεις των δύο ρευστών, μέσω των σχέσεων $P_i = \lambda P$ και $P_e = (1-\lambda)P$ όπου P η ολική πίεση, η τοροειδής πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος, το ηλεκτρικό πεδίο, η διάτμηση του και η διάτμηση της ταχύτητας $\vec{E} \times \vec{B}$. Έπειτα και ειδικότερα για τις τρεις τελευταίες ποσότητες, που φέρονται να συνδέονται με το σχηματισμό φραγμάτων μεταφοράς, εξετάστηκε η επίδραση που έχει σε αυτές η μαγνητική διάτμηση, s, για σχηματισμούς με μη μονοτονικό profile του παράγοντα ασφάλειας (αρνητικής μαγνητικής διάτμησης) καθώς και η διατμημένη ταχύτητα ροής. Όσον αφορά τη μελέτη της επίδρασης της διάτμησης αυτή πραγματοποιήθηκε με μεταβολή της παραμέτρου $\Delta q = q_c - q_{min}$, όπου q_c και q_{min} οι τιμές του παράγοντα ασφάλειας στον άξονα και στο ελάχιστο του profile, ως προς την οποία η διάτμηση είναι ανάλογη, με μεταβολή του q_{min} καθώς και της θέσης αυτού. Αντίστοιχα οι παράμετροι που μεταβλήθηκαν κατά τη μελέτη της επίδρασης της ροής είναι τα ακρότατα των profile και η παράμετρος που ελέγχει την έκταση της στην πολοειδή διατομή. Συγκεκριμένα, αλλάζοντας αυτή την παράμετρο και κάνοντας τη ταχύτητα ροής από εκτεταμένη σε εντοπισμένη αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της διάτμησης της.

Στο δεύτερο κύριο μέρος μελετήθηκε η ισορροπία ενός αξονικά συμμετρικού, μαγνητικά περιορισμένου πλάσματος, με τοροειδή ροή, περίκλειστο από αγώγιμα τοιχώματα ορθογώνιου σχήματος στην πολοειδή διατομή, στα πλαίσια του ιδανικού MHD μοντέλου. Χρησιμοποιώντας την αξονική συμμετρία του συστήματος, τη συγκεκριμένη διεύθυνση της ροής, το γεγονός ότι η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου πρέπει να είναι μηδέν και προβάλλοντας την εξίσωση ορμής και το γενικευμένο νόμο του Ohm σε τρεις ανεξάρτητες διευθύνσεις κάποια πρώτα ολοκληρώματα αναγνωρίζονται ως ποσότητες επιφανείας και προκύπτουν κάποιες απλούστερες εξισώσεις. Στις εξισώσεις του μοντέλου πρέπει να περιλαμβάνεται και μια καταστατική εξίσωση ώστε το σύστημα να είναι κλειστό. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν δύο επιλογές: η πρώτη είναι οι μαγνητικές επιφάνειες να είναι ισόθερμες, που έχει σαν συνέπεια η πυκνότητα μάζας να μην είναι σταθερή πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες και η δεύτερη επιλογή είναι να θεωρηθεί ασυμπίεστη ροή, οπότε η πυκνότητα προκύπτει σταθερή πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες, αλλά η θερμοκρασία μεταβάλλεται. Στην πρώτη περίπτωση, η ροή θεωρείται συμπιεστή υπό την έννοια ότι η πυκνότητα δεν είναι σταθερή πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες. Με τη βοήθεια των επιλογών αυτών και των πρώτων ολοκληρωμάτων έγινε αναγωγή των αρχικών εξισώσεων ισορροπίας σε απλούστερες. Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στην πολοειδή διατομή το πρόβλημα, από μαθηματικής απόψεως, γίνεται πρόβλημα ιδιοτιμών και με βάση αναλυτικές και ακριβείς λύσεις[1] εξετάστηκε η επίδραση της ροής, «συμπιεστής» και ασυμπίεστης, καθώς και του λόγου όψης, ως μέτρο εκτίμησης του τοροειδούς σχήματος, στη μαγνητική τοπολογία της ισορροπίας. Πέραν αυτής μελετήθηκε η επίδραση που έχει η ροή και ο λόγος όψης στη μετατόπιση Shafranov, που μετρά την απόσταση του μαγνητικού άξονα από το γεωμετρικό κέντρο, καθώς και στα profile της πυκνότητας για «συμπιεστή» και της θερμοκρασίας για ασυμπίεστη ροή. Σε όλες τις περιπτώσεις η μελέτη της επίδρασης της ροής πραγματοποιήθηκε με τη μεταβολή του αριθμού Mach, M_0, ως προς τη ταχύτητα του ήχου για «συμπιεστή» ροή και μιας παραμέτρου, A, που σχετίζεται με την πυκνότητα, την κυκλική συχνότητα περιστροφής του πλάσματος και τις διατμήσεις τους για ασυμπίεστη και την εύρεση της αντίστοιχης ιδιοτιμής της πίεσης μηδενικής τάξης. Επίσης, υπολογίστηκε και το profile του παράγοντα ασφάλειας και βρέθηκε ένας συσχετισμός μεταξύ αρνητικής μαγνητικής διάτμησης και μαγνητικής τοπολογίας και κατ΄ επέκταση ροής.

[1] Οι λύσεις είναι ακριβείς και αναλυτικές εξ΄ αιτίας της συγκεκριμένης επιλογής του ορθογωνίου σχήματος των αγώγιμων τοιχωμάτων. Η επιλογή περισσότερο ρεαλιστικού σχήματος (για παράδειγμα ελλειπτικού) θα είχε ως αποτέλεσμα οι αναλυτικές λύσεις να μην είναι ακριβείς, αφού η απαίτηση για ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών θα απαιτούσε την έκφραση αυτών σε μορφή σειράς.

Στο τρίτο κύριο μέρος εξετάστηκε η MHD ισορροπία αξονικά συμμετρικού πλάσματος, με ανισοτροπική ειδική αντίσταση και αμιγώς τοροειδή ροή. Η ισορροπία, ακριβώς λόγω της συγκεκριμένης διεύθυνσης της ροής, είναι εγγενώς απαλλαγμένη από διάχυση Pfirsch- Schlüter. Ως μοναδική εξωτερική πηγή ενέργειας θεωρήθηκε η σταθερή εξωτερική ηλεκτρική τάση στη τοροειδή διεύθυνση. Όπως και στο δεύτερο μέρος, το πλάσμα θεωρήθηκε περίκλειστο από αγώγιμα τοιχώματα ορθογώνιου σχήματος στην πολοειδή διατομή. Με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας, γενικά εξετάστηκε η δυνατότητα ύπαρξης καταστάσεων με ομογενείς, σε σχέση με τη τιμή τους πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες, συνιστώσες της ειδικής αντίστασης, παράλληλα και κάθετα στις μαγνητικές επιφάνειες. Ειδικότερα, κατασκευάστηκαν ιδιοκαταστάσεις ισορροπίας tokamak μέσω ακριβών αναλυτικών λύσεων[2], οι οποίες περιγράφουν είτε απλά είτε πολλαπλά τοροειδείς σχηματισμούς, για δύο περιπτώσεις καταστατικής εξίσωσης, ίδιες με τις αντίστοιχες του δεύτερου μέρους της κύριας εργασίας. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε ώστε να επιτευχθεί ο παραπάνω σκοπός, καίτοι βασίζεται σε παρόμοια βήματα με αυτή του δεύτερου μέρους, παρουσιάζει πρόσθετες δυσκολίες λόγω της μη μηδενικής ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης. Λόγω της συμμετρίας και της διεύθυνσης της ροής, που είναι αμιγώς τοροειδής, οι ανηγμένες εξισώσεις ισορροπίας είναι όμοιες με τις αντίστοιχες της περίπτωσης του ιδανικού MHD μοντέλου που παρουσιάστηκαν στο δεύτερο κύριο μέρος της εργασίας. Με βάση, λοιπόν, τις αναλυτικές και ακριβείς λύσεις και για απλά τοροειδείς σχηματισμούς μελετήθηκαν τα χαρακτηριστικά των συνιστωσών της αγωγιμότητας, του ηλεκτρικού πεδίου και της τοροειδούς πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος. Επίσης, εξετάστηκε η επίδραση που έχει η ροή, η φύση αυτής, «συμπιεστή» ή ασυμπίεστη, καθώς και η επίδραση του λόγου όψης στα profile των παραπάνω ποσοτήτων. Η επίδραση της ροής μελετήθηκε μέσω της μεταβολής του αριθμού Mach ως προς την ταχύτητα του ήχου, για «συμπιεστή» ροή και μιας παραμέτρου που σχετίζεται με την πυκνότητα, την κυκλική συχνότητα και τις διατμήσεις τους για ασυμπίεστη και εύρεση της αντίστοιχης ιδιοτιμής της πίεσης μηδενικής τάξης όπως και στην περίπτωση του δευτέρου μέρους.

[2] Οι λύσεις είναι ακριβείς και αναλυτικές εξ' αιτίας της συγκεκριμένης επιλογής του ορθογωνίου σχήματος των αγώγιμων τοιχωμάτων.

5.2 Συμπεράσματα

Ανάλογα με το προηγούμενο εδάφιο και στο παρόν θα παρουσιαστούν συνοπτικά τα κυριότερα συμπεράσματα της εργασίας, αντίστοιχα με τα τρία κεφάλαια του κύριου μέρους.

Όσον αφορά την κυλινδρική ισορροπία του πρώτου κεφαλαίου του κύριου μέρους της εργασίας (κεφ. 2) τα συμπεράσματα συνοψίζονται ως εξής:

1. Το profile της πίεσης των δύο ρευστών είναι κορυφοειδούς σχήματος και η αύξηση της απόλυτης τιμής της μαγνητικής διάτμησης αυξάνει, κατ' απόλυτη τιμή, την κλίση του.

2. Το profile της τοροειδούς πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος είναι κοίλο με το μέγιστο στην περιοχή του q_{min} και για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων του q μπορεί να γίνει αρνητικό στην περιοχή εξωτερικά του q_{min} πράγμα που σημαίνει ότι το ρεύμα αντιστρέφεται.

3. Το ηλεκτρικό πεδίο εμφανίζει ένα ακρότατο στην περιοχή του q_{min}. Η έκφραση του E_r αποτελείται από τρεις συνεισφορές, η πρώτη οφείλεται στη βαθμίδα πίεσης, ενώ οι άλλες δύο στις συνιστώσες της ταχύτητας ροής πολοειδούς, $v_{i\theta}$, και τοροειδούς, v_{iz}. Η συνεισφορά καθενός από τους τρείς όρους είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Η εξάρτηση από τη μαγνητική διάτμηση του ηλεκτρικού πεδίου είναι ισχυρότερη λόγω του όρου της βαθμίδας πίεσης απ' ότι λόγω των όρων ροής. Η αύξηση της μαγνητικής διάτμησης έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση του ακρότατου σε όλες τις περιπτώσεις ταχύτητας ροής που εξετάστηκαν. Όσο η θέση του ελαχίστου του παράγοντα ασφάλειας μετατοπίζεται προς τα έξω, τόσο αυξάνεται η τιμή του μεγίστου, ενώ το αντίθετο συμβαίνει στην περιοχή $s > 0$ όσο αυξάνει η τιμή του q_{min}. Όσο αυξάνεται η ταχύτητα ροής τόσο αυξάνεται το ακρότατο του ηλεκτρικού πεδίου, ενώ όσο αυξάνεται η διάτμηση της το ακρότατο μειώνεται ελαφρώς. Επίσης οι τιμές του πεδίου εξαρτώνται από το σχετικό προσανατολισμό των v_{iz}, $v_{i\theta}$ και B_z.

4. Η διάτμηση του ηλεκτρικού πεδίου, E_r', και η διάτμηση της ταχύτητας $\vec{E} \times \vec{B}$, $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$, έχουν όμοια χαρακτηριστικά και θα παρουσιαστούν με ενιαίο τρόπο. Συγκεκριμένα, τα profile των $|E_r'|$ και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ εμφανίζουν δύο μέγιστα εκατέρωθεν του q_{min}. Όπως και στο E_r, περιέχουν τη συνεισφορά τριών όρων, ένα λόγω της βαθμίδας πίεσης και άλλους δύο λόγω των συνιστωσών της ταχύτητας ροής. Η συνεισφορά και των τριών είναι

της ίδιας τάξης μεγέθους. Η αύξηση της απόλυτης τιμής της μαγνητικής διάτμησης έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση των μεγίστων της $|E_r'|$ και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$, στην πλειονότητα των περιπτώσεων που εξετάστηκαν. Όσο η θέση του q_{min} μετατοπίζεται προς τα έξω τόσο αυξάνονται τα μέγιστα της διάτμησης του ηλεκτρικού πεδίου και της διάτμησης της ταχύτητας $\vec{E}\times\vec{B}$. Όταν αυξάνεται η τιμή του q_{min}, διατηρώντας τα Δq και r_{min} σταθερά, τόσο αυξάνονται οι τιμές των μεγίστων των $|E_r'|$ και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ στην περιοχή $s>0$. Αύξηση του μέτρου της ταχύτητας ροής, ή της διάτμησης της έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση των μεγίστων των δύο διατμήσεων υπό συζήτηση, ενώ και αυτές εξαρτώνται από το σχετικό προσανατολισμό των v_{iz}, $v_{i\theta}$ και B_z. Ειδικότερα, για τη διάτμηση της ταχύτητας $\vec{E}\times\vec{B}$, πρέπει να τονιστεί ότι η επίδραση της μαγνητικής διάτμησης είναι ισχυρότερη σε αυτή την περίπτωση, απ΄ ότι στην περίπτωση του MHD μοντέλου, όπως προκύπτει και από την αναλυτική σχέση (2.20). Αυτό οφείλεται στον όρο της βαθμίδας πίεσης ο οποίος λείπει στην περίπτωση του MHD μοντέλου.

Συνοψίζοντας θα λέγαμε πως η μαγνητική διάτμηση και η διατμημένη ταχύτητα ροής (τοροειδής και πολοειδής) δρουν συνεργατικά στα E_r, E_r' και $\omega_{\vec{E}\times\vec{B}}$ τα οποία φαίνεται ότι παίζουν ρόλο στο σχηματισμό εσωτερικών φραγμάτων μεταφοράς.

Περνώντας στο δεύτερο κεφάλαιο του κυρίου μέρους (κεφ. 3) της εργασίας που αφορά αξονικά συμμετρική ισορροπία με τοροειδή ροή στα πλαίσια του ιδανικού MHD μοντέλου, τα κύρια συμπεράσματα μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

1. Η ισορροπία περιγράφεται πλήρως από μια εξίσωση Bernoulli και μια ελλειπτική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους για τη συνάρτηση πολοειδούς μαγνητικής ροής, που περιέχει επίσης και την παράμετρο της πίεσης. Στο όριο που ο λόγος της κυκλικής συχνότητας προς τη θερμοκρασία γίνεται πολύ μικρός, η ελλειπτική διαφορική εξίσωση για «συμπιεστή» ροή παίρνει παρόμοια μορφή με αυτή για ασυμπίεστη.

2. Έγινε παραγωγή ακριβών λύσεων, οι οποίες για «συμπιεστή» ροή έχουν μηδενική διάτμηση της ροής, ενώ για ασυμπίεστη μη μηδενική.

3. Μεταβάλλοντας τις παραμέτρους ροής, αριθμό Mach, M_0, και A για τη «συμπιεστή» και ασυμπίεστη περίπτωση αντίστοιχα και υπολογίζοντας την ιδιοτιμή πρώτης τάξης της πίεσης βρέθηκαν σημεία μετάβασης, στα

οποία σχηματίζεται ένας επιπλέον μαγνητικός άξονας στο εξωτερικό μέρος του ήδη υπάρχοντος σχηματισμού.

4. Αυτή η αλλαγή στην μαγνητική τοπολογία είναι δυνατή μόνο για τοροειδείς σχηματισμούς και αυτό διότι στο όριο απείρου λόγου όψης, οπότε η γεωμετρία γίνεται κυλινδρικά συμμετρική, η ροή δεν εμφανίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας.

5. Αύξηση του M_0 ή μείωση της A αυξάνει την μετατόπιση Shafranov.

6. Για σταθερή τιμή της παραμέτρου ροής, όσο μεγαλύτερος ο λόγος όψης τόσο μικρότερη η μετατόπιση Shafranov.

7. Οι διακυμάνσεις της πυκνότητας και της θερμοκρασίας πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες αυξάνουν, καθώς τα M_0 και $|A|$ παίρνουν μεγαλύτερες τιμές.

8. Η πυκνότητα και η θερμοκρασία για $A > 0$ είναι μεγαλύτερες στην περιοχή όπου οι μαγνητικές επιφάνειες είναι περισσότερο συμπιεσμένες, ενώ για $A < 0$ συμβαίνει το αντίθετο, δηλαδή η θερμοκρασία είναι μικρότερη εκεί που οι μαγνητικές επιφάνειες είναι συμπιεσμένες.

9. Το profile του παράγοντα ασφάλειας για απλά τοροειδείς σχηματισμούς είναι μονοτονικό, ενώ για διπλά τοροειδείς σχηματισμούς έχει το σχήμα που έχει παρατηρηθεί σε πειράματα με αρνητική μαγνητική διάτμηση και εσωτερικά φράγματα μεταφοράς.

Τελικά, όσον αφορά το τρίτο κεφάλαιο του κύριου μέρους της εργασίας (κεφ. 4) τα συμπεράσματα συνοψίζονται ως εξής:

- Η ισορροπία περιγράφεται πλήρως από μια εξίσωση Bernoulli και μια ελλειπτική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους για τη πολοειδή συνάρτηση μαγνητικής ροής, που περιέχει επίσης και την παράμετρο πίεσης και δύο αυτοσυνεπείς σχέσεις για τις συνιστώσες της ειδικής αντίστασης. Οι δύο πρώτες εξισώσεις, λόγω της αξονικής συμμετρίας και της τοροειδούς διεύθυνσης της ροής, είναι όμοιες με τις αντίστοιχες της ιδανικής MHD του κεφαλαίου 3 και ισχύουν τα συμπεράσματα που αναφέρθηκαν εκεί.

- Οι συνιστώσες της ειδικής αντίστασης, παράλληλα και κάθετα στο μαγνητικό πεδίο, δεν μπορεί να είναι σταθερές πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες. Παρά το γεγονός αυτό, το σχήμα του profile τους είναι όμοιο με αυτό ειδικής αντίστασης οφειλόμενης σε κρούσεις (ειδική αντίσταση Spitzer), δηλαδή εμφανίζουν ελάχιστο στην περιοχή του μαγνητικού άξονα και παίρνουν πολύ μεγάλες τιμές στην επιφάνεια του πλάσματος, για απλά τοροειδείς σχηματισμούς.

- Η ροή έχει επίδραση στην ισορροπία μόνο όταν το σχήμα είναι τοροειδές και αυτό διότι στο όριο πολύ μεγάλου λόγου όψης η ροή δεν εμφανίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας.

Τα παρακάτω συμπεράσματα για το ηλεκτρικό πεδίο, τη τοροειδή πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος και τις συνιστώσες της αγωγιμότητας ($\sigma = 1/\eta$) αφορούν απλά τοροειδείς σχηματισμούς, κανονικοποιημένη συνάρτηση πολοειδούς μαγνητικής ροής (μια κανονικοποίηση που έγινε ώστε να αποφευχθεί μια μη δικαιολογήσιμη, από φυσική άποψη, ταλάντωση των τιμών της με τη μεταβολή των παραμέτρων ροής), για το ίδιο εύρος των ιδιοτιμών της πίεσης για «συμπιεστή» και ασυμπίεστη ροή και για profile της κυκλικής συχνότητας κορυφοειδές με το μέγιστο στο μαγνητικό άξονα και μηδενικό στην επιφάνεια.

1. Το profile του ηλεκτρικού πεδίου $|\vec{E}_{pol}|$ στην πολοειδή διατομή έχει δύο μέγιστα εκατέρωθεν του μαγνητικού άξονα και μηδενίζεται στην επιφάνεια. Όταν το μέγιστο της κυκλικής συχνότητας μεγαλώνει και το profile της γίνεται πιο εντοπισμένο, το profile του $|\vec{E}_{pol}|$ γίνεται πιο εντοπισμένο επίσης, ενώ οι τιμές των μεγίστων μικραίνουν.

2. Το profile του J_ϕ είναι κορυφοειδές με το μέγιστο στο μαγνητικό άξονα και μηδενίζεται στην επιφάνεια.

3. Καθώς ο M_0 αυξάνει ή η A μικραίνει, τα τοπικά μέγιστα των $\vec{E}_{pol}$ και J_ϕ αυξάνουν επίσης και τα profile τους μετατοπίζονται προς τα έξω σε σχέση με τον άξονα συμμετρίας.

4. Τα μέγιστα των $\sigma_\parallel$ και $\sigma_\perp$ αυξάνουν και η θέση τους μετατοπίζεται προς τα έξω καθώς ο M_0 αυξάνεται, αλλά μειώνονται και η θέση τους παραμένει πρακτικά ανεπηρέαστη καθώς η A μειώνεται. Επίσης, όσο μεγαλύτερος ο M_0 τόσο μικρότερη η διαφορά $\sigma_\parallel - \sigma_\perp$, αλλά όσο μικρότερη η A τόσο μεγαλύτερη αυτή η διαφορά.

5. Για δεδομένη τιμή του M_0, όσο μικρότερος ο λόγος όψης τόσο μικρότερα τα μέγιστα των $\sigma_\parallel$, $\sigma_\perp$ και J_ϕ αλλά τόσο μεγαλύτερα τα μέγιστα του $|\vec{E}_{pol}|$.

6. Για δεδομένη τιμή της A, όσο μικρότερος ο λόγος όψης τόσο μεγαλύτερα τα μέγιστα των $\sigma_\parallel$, $\sigma_\perp$ και $|\vec{E}_{pol}|$, αλλά τόσο μικρότερο το μέγιστο του J_ϕ.

7. Για αύξηση του M_0, ή ισοδύναμα μείωση της A, όσο μικρότερος ο λόγος όψης τόσο μεγαλύτερη η μεταβολή των μεγίστων του $|\vec{E}_{pol}|$ και J_ϕ καθώς και η μετατόπιση της θέσης τους. Όσον αφορά τη συμπεριφορά των συνιστωσών της αγωγιμότητας αυτή εξαρτάται από τη «συμπιεστότητα»: όσο μικρότερος ο λόγος όψης *i*) τόσο μεγαλύτερη η μεταβολή των μεγίστων των $\sigma_\parallel$, $\sigma_\perp$ και $\sigma_\parallel - \sigma_\perp$ όταν ο M_0 αυξάνει αλλά *ii*) τόσο μικρότερη η μεταβολή των μεγίστων των τριών παραπάνω ποσοτήτων όταν η A μειώνεται.

Συνοψίζοντας, τα κύρια σημεία της εργασίας είναι τα ακόλουθα:

1. Συνεργατικότητα διατμημένης ροής και αρνητικής μαγνητικής διάτμησης στο σχηματισμό εσωτερικών φραγμάτων μεταφοράς.

2. Εύρεση αναλυτικών και ακριβών λύσεων των εξισώσεων ισορροπίας της MHD για ασυμπίεστη ροή.

3. Προκαλούμενη από τη ροή αλλαγή στη μαγνητική τοπολογία τοροειδούς σχηματισμού.

4. Παραγωγή ανηγμένων εξισώσεων και αναλυτικών λύσεων MHD ισορροπίας με πεπερασμένη ειδική αντίσταση και ροή.

5.3 Προοπτικές

Είναι ενδιαφέρον να γίνουν στο μέλλον οι ακόλουθες επεκτάσεις της παρούσας εργασίας:

1. Να επεκταθεί η μελέτη αλλαγής της μαγνητικής τοπολογίας και σε άλλου τύπου ισορροπίες όπως αυτή με ασυμπίεστη ροή και σταθερή πίεση πάνω στις μαγνητικές επιφάνειες, ή με ασυμπίεστη ροή τυχαίας διεύθυνσης.

Μια προκαταρκτική εξέταση του προβλήματος αυτού έγινε στην αναφορά [71].

2. Να περιληφθεί στη μελέτη του τέταρτου κεφαλαίου και άλλος όρος απόσβεσης, πέραν της ηλεκτρικής αγωγιμότητας, όπως το ιξώδες στην εξίσωση ορμής. Επίσης, η μελέτη να πραγματοποιηθεί στα πλαίσια του πιο θεμελιώδους μοντέλου της ιδανικής MHD συμπεριλαμβάνοντας τον όρο Hall στο νόμο του Ohm. Πιθανότερα θα είναι πιο εύκολο να μελετηθεί η επίδραση κάθε όρου ξεχωριστά στην ισορροπία, πρίν επιχειρηθεί να συμπεριληφθούν όλοι οι όροι.

3. Να επεκταθεί η μελέτη του τρίτου κεφαλαίου σε διπλά τοροειδείς σχηματισμούς, με τους μαγνητικούς άξονες παράλληλα ή κάθετα στον άξονα συμμετρίας.

4. Να βρεθούν μη γραμμικές, αναλυτικές και ακριβείς λύσεις των εξισώσεων ισορροπίας του ιδανικού MHD μοντέλου αρχικά για απλές γεωμετρίες, για παράδειγμα στο όριο πολύ μεγάλου λόγου όψης. Αυτό διότι κατ΄ αρχήν, για αξονικά συμμετρικό σύστημα το πρόβλημα είναι εξαιρετικά δύσκολο.

5. Να μελετηθούν οι καταστάσεις ισορροπίας του τρίτου και τέταρτου κεφαλαίου ως προς τη σταθερότητα τους. Αυτό είναι εφικτό να γίνει σε λίγες περιπτώσεις μιας και δεν υπάρχει καθιερωμένη θεωρία σταθερότητας με ροή.

Βιβλιογραφία

[1] F.F. Chen, Introduction to Plasma Physics, Plenum Press, New York, 1977.

[2] J.P. Freideberg, Ideal Magnetohydrodynamics, Plenum Publishing Corporation, New York.

[3] J. Wesson, Tokamaks, Oxford Science Publications, Clarendon Press, 2nd Edition 1997.

[4] G. Bateman, MHD Instabilities, The MIT Press 2nd Edition, 1980.

[5] R.C. Wolf *et al*, Phys. Plasmas **7** (2000), 1839.

[6] W. Kerner and H. Tasso, Plasma Physics **24** (1982), 97.

[7] Γ. Πουλιπούλης, Ισορροπία TOKAMAK μεγάλου λόγου όψης με αρνητική μαγνητική διάτμηση και διατμημένη ροή, Εργασία Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδικευσης, Ιωάννινα 2002.

[8] G.N. Throumoulopoulos and H. Tasso, Phys. Plasmas **10** (2003), 2382.

[9] H. Tasso, *Lectures on Plasma Physics*, Report IFUSP/P-181, LFP-8, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo (1979), p. 27. See EPAPS Document No. E-PHPAEN-10-027306 for *Lectures on Plasma Physics*. A direct link to this document may be found in the online article's HTML reference section. The document may also be reached via the EPAPS homepage (http://www.aip.org/pubservs/epaps.html) or from ftp.aip.org in the directory /epaps/. See the EPAPS homepage for more information.

[10] D. Montgomery, and X. Shan, Comments Plasma Phys. Controlled Fusion **15** (1994), 315.

[11] D. Montgomery, J.W. Bates, and H.R. Lewis, Phys. Plasmas **4** (1997), 1080.

[12] G.N. Throumoulopoulos, J. Plasma Physics **59** (1998), 303.

[13] G.N. Throumoulopoulos and H. Tasso, J. Plasma Physics **64** (2000), 601.

[14] F. Wagner and ASDEX Team, Phys. Rev. Lett **49** (1982), 1959.

[15] B.B. Kadomtsev, Tokamak Plasma: A Complex Physical System, Institute of Physics Publishing Ltd 1992.

[16] J.W. Hughes *et al*, Phys. Plasmas **9** (2002), 3019.

[17] J.A. Snipes *et al*, Phys. Plasmas **3** (1996), 1992.

[18] K.H. Burrell, Plasma Phys. Control. Fusion **36** (1994), A291.

[19] K.H. Burrell *et al*, Phys. Fluids B **2** (1990), 1405.

[20] E. Holzhauer *et al*, Plasma Phys. Control. Fusion **36** (1994), A3.

[21] K.H. Burrell *et al*, Plasma Phys. Control. Fusion **34** (1992), 1859.

[22] R.J. Groebner *et al*, Phys. Fluids B **5** (1993) 2343.

[23] R.D. Hazeltine and S.C. Prager, Physics Today **55** (2002), 30.

[24] Y. Sakamoto *et al*, Nucl. Fusion **41** (2001), 865.

[25] F.M. Levinton *et al*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 4417.

[26] T.J.J. Tala *et al*, Plasma Phys. Control. Fusion **43** (2001), 507.

[27] R. Candy and R.E. Waltz, Phys. Rev. Lett. **91** (2003), 045001.

[28] E.J. Strait *et al*, Phys. Rev Lett. **75** (1995), 4421.

[29] G.D. Conway *et al*, Plasma Phys. Control. Fusion **43** (2001), 1239.

[30] J.W. Connor *et al*, Nucl. Fusion **44** (2004), R1.

[31] K.H. Burrell *et al*, Plasma Phys. Control. Fusion **40** (1998), 1585.

[32] P.W. Terry, Rev. Mod. Phys. **72** (2002), 109.

[33] S. Ide *et al*, Plasma Phys. Control. Fusion **38** (1996), 1645.

[34] X. Litaudon *et al*, Plasma Phys. Control. Fusion **38** (1996), 1603.

[35] X. Litaudon *et al*, Nucl. Fusion **43** (2003), 565.

[36] G. Poulipoulis, G.N. Throumoulopoulos and H. Tasso "Two-fluid plasma equilibria with reversed magnetic shear and flow" 2$^{\text{ο}}$ Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Βόλος 22-27 Μαΐου 2003, Σημειώσεις από τις διαλέξεις του 2$^{\text{ου}}$ Σχολείου Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης.

[37] G. Poulipoulis, G.N. Throumoulopoulos and H. Tasso "Two-fluid Tokamak equilibria with reversed magnetic shear and sheared flow" 10$^{\text{th}}$ European Fusion Theory Conference, Helsinki Finland 8-10 Σεπτεμβρίου 2003, Book of Abstracts P1-09.

[38] G. Poulipoulis, G.N. Throumoulopoulos and H. Tasso "Multitoroidal configurations as equilibrium flow eigenstates" 12$^{\text{th}}$ International Congress on Plasma Physics, Nice France 25-29 Οκτωβρίου 2004, Book of Abstracts σελ. 35.

[39] G. Poulipoulis, G.N. Throumoulopoulos and H. Tasso "Axisymmetric equilibria with anisotropic resistivity and toroidal flow" 47$^{\text{th}}$ Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics, Denver Colorado, USA 24-28 Οκτωβρίου 2005, Bull. Am. Phys. Soc. **50**, 8 σελ. 350.

[40] G. Poulipoulis, G.N. Throumoulopoulos and H. Tasso, Phys. Plasmas **12** (2005), 042112.

[41] G. Poulipoulis, G.N. Throumoulopoulos and H. Tasso, έχει γίνει δεκτό για δημοσίευση στο Journal of Plasma Physics.

[42] R.C. Wolf, Plasma Phys. Control. Fusion **45** (2003), R1.

[43] Y. Koide and the JT-60U Team, Phys. Plasmas **4** (1997), 1623.

[44] G.N. Throumoulopoulos and H. Tasso, Phys. Plasmas **4** (1997), 1492.

[45] H. Tasso and G.N. Throumoulopoulos, Phys. Plasmas **5** (1998), 2378.

[46] Wolfram Research, Mathematica, version 4.1; S. Wolfram, *The Mathematica book, 4^{th} ed.*, (Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999).

[47] G. Poulipoulis, G.N. Throumoulopoulos, H. Tasso, Plasma Phys. Control. Fusion **46** (2004), 639.

[48] E. Joffrin *et al*, Plasma Phys. Control. Fusion **44** (2002), 1739.

[49] H. Meister *et al*, Nuclear Fusion **41** (2001), 1633.

[50] R.E. Bell *et al*, Phys. Rev. Lett. **7** (1998), 1429.

[51] D. Lortz and A. Zeiler, Phys. Plasmas **1** (1994), 670.

[52] P. Zhu, W. Horton and H. Sugama, Phys. Plasmas **6** (1999), 2503.

[53] A.A. Martynov, S.Yu. Medvedev and L. Villard, Phys. Rev. Lett. **91** (2003), 085004.

[54] S. Wang, Phy. Rev. Lett **93** (2004), 155007.

[55] E.K. Maschke and H. Perrin, Plasma Phys. **22** (1980), 579.

[56] R.A. Clemente and R. Farengo, Phys. Fluids **27** (1984), 776.

[57] G.N. Throumoulopoulos and G. Pantis, Phys. Fluids B **1** (1989), 1827.

[58] G.N. Throumoulopoulos, G. Poulipoulis, G. Pantis and H. Tasso, Phys. Lett. A **317** (2003), 463.

[59] Ch. Simintzis, G.N. Throumoulopoulos and H. Tasso, Phys. Plasmas **8** (2001), 2641.

[60] V.D. Shafranov, Rev. Plasma Phys. **2** (1966), 103.

[61] L.S. Solovév, Rev. Plasma Phys. **6** (1976), 239.

[62] D. Palumbo, Nuovo Cimento B **53** (1968), 507.

[63] E.K. Maschke, Plamsa Phys. **15** (1973), 535.

[64] http://users.uoi.gr/me00584/plasma.htm

[65] L.R. Baylor *et al*, Phys. Plasmas **11** (2004), 3100.

[66] L. Guazzotto, R. Betti, J. Manickam and S. Kaye, Phys. Plasmas **11** (2004), 604.

[67] B. Hu, L. Guazzotto and R. Betti, *Quasi-omnigenous tokamak equilibria with fast poloidal flow*, 2004 International Sherwood Fusion Theory Conference, April 26-28, Missoula, Montana, USA; Abstract 1E48.

[68] V.I. Il'gisonis and Yu. I. Pozdnyakov, JETP Lett. **71** (2000), 314.

[69] Για $\alpha = 2$ και πολύ μικρές αλγεβρικά τιμές της A (π.χ. $A \leq -0.08$) ισχύει ότι $\sigma_{\parallel} < \sigma_{\perp}$.

[70] Για να είμαστε τελείως ακριβείς καθώς η A μειώνεται η θέση του μεγίστου πρώτα μετατοπίζεται προς τα έξω και έπειτα προς τα μέσα, όταν η A παίρνει αρκετά μικρές αλγεβρικά τιμές.

[71] H. Tasso and G.N. Throumoulopoulos, Il Nuovo Cimento **119** (2004), 959.