

**Κυκλική κίνηση.** Θεωρούμε ότι σωματίο κινείται επάνω σε κύκλο ακτίνας  $r$  και έχει σταθερή ταχύτητα  $v$  (ομαλή κυκλική κίνηση). Ξέρουμε ότι το διάνυσμα της ταχύτητας είναι εφαπτόμενο στην τροχιά του σωματίου (φτιάξτε σχήμα). Άρα το διάνυσμα της ταχύτητας είναι εφαπτόμενο στον κύκλο. Αυτό σημαίνει ότι είναι κάθετο σε κάθε ακτίνα  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . Για τα σημεία του κύκλου έχουμε

$$(1) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

όπου  $\theta$  η γωνία της ακτίνας  $\vec{r}$  με τον οριζόντιο άξονα. Όστε

$$(2) \quad \vec{r} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}.$$

Η ταχύτητα είναι εφαπτομενική στην τροχιά και άρα κάθετη στην ακτίνα  $\vec{r}$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο  $\vec{r}$  είναι

$$(3) \quad \hat{e}_\phi := -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j},$$

αφού  $\hat{e}_\phi \cdot \vec{r} = 0$ . Άρα

$$(4) \quad \vec{v} = v \hat{e}_\phi = (-v \sin \theta) \vec{i} + (v \cos \theta) \vec{j}.$$

Στις παραπάνω εννοείται ότι  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$  με

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = v_x = -v \sin \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v_y = v \cos \theta.$$

Η ταχύτητα γράφεται

$$(6) \quad \vec{v} = \left(-\frac{vy}{r}\right) \vec{i} + \left(\frac{vx}{r}\right) \vec{j}$$

και μπορούμε τώρα να βρούμε την επιτάχυνση από την παράγωγο

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r} \frac{dy}{dt}\right) \vec{i} + \left(\frac{v}{r} \frac{dx}{dt}\right) \vec{j} \\ &= \left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta\right) \vec{i} + \left(-\frac{v^2}{r} \sin \theta\right) \vec{j} \\ &= -\frac{v^2}{r^2} (r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}) \\ &= -\frac{v^2}{r^2} (x \vec{i} + y \vec{j}).\end{aligned}$$

Γράφουμε το τελικό αποτέλεσμα ως

$$(7) \quad \vec{a} = -\frac{v^2}{r^2} \vec{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{e}_r, \quad \hat{e}_r := \frac{\vec{r}}{r}.$$

Άρα η επιτάχυνση έχει τη διεύθυνση της ακτίνας, αλλά αντίθετη φορά. Αυτή η επιτάχυνση υπάρχει βέβαια για κάθε ομαλή κυκλική κίνηση και λέγεται *κεντρομόλος επιτάχυνση*.

Μπορούμε να γενικεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα για την περίπτωση που η ταχύτητα  $v$  δεν είναι σταθερή. Η επιτάχυνση προκύπτει ως

$$\begin{aligned}(8) \quad \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[ \left(-\frac{v}{r} \frac{dy}{dt}\right) \vec{i} + \left(\frac{v}{r} \frac{dx}{dt}\right) \vec{j} \right] + \frac{dv}{dt} \hat{e}_\phi \\ &= -\frac{v^2}{r} \hat{e}_r + \frac{dv}{dt} \hat{e}_\phi.\end{aligned}$$

Όστε η επιτάχυνση έχει γραφεί ως άθροισμα δύο συνιστωσών: η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι  $a_t = dv/dt$  και η ακτινική (κεντρομόλος) είναι  $a_r = -v^2/r$ .