
Διαδικασίες σκέψης

Η μαθηματική δραστηριότητα περιλαμβάνει:

- **Επινόηση** ιδεατών αντικειμένων και ιδεών
 - **Κατανόηση** μαθηματικών εννοιών και ιδεών
 - **Ανακάλυψη** ιδιοτήτων (και σχέσεων) των μαθηματικών αντικειμένων και εννοιών
 - **Ανάπτυξη** τρόπων συλλογισμού και επιχειρηματολογίας αποδεκτών στα μαθηματικά
- ...και δεν εξαντλείται σε αυτά

Αναλύοντας...

- ...τη μαθηματική δραστηριότητα και τα προϊόντα της (:το σώμα της μαθηματικής γνώσης), μπορούν να εντοπιστούν κάποιες διαδικασίες, οι οποίες είναι βασικά συστατικά της στοιχεία
 - Αφαίρεση
 - Γενίκευση
 - Ομαδοποίηση
 - Ταξινόμηση
 - Συλλογισμός και εξαγωγή συμπερασμάτων
 - **Επίλυση προβλήματος**
-

Επίλυση προβλήματος

Τι είναι πρόβλημα;

- Μια κατάσταση η οποία απαιτεί μια απόφαση ή απάντηση από τον επίδοξο λύτη, ο οποίος **ΕΚ ΤΩΝ ΠΡΟΤΕΡΩΝ**
 - δε γνωρίζει ποια είναι
 - ή αν υπάρχει ή πόσες υπάρχουν
 - δε γνωρίζει ούτε και πώς ακριβώς θα φτάσει σε αυτή.
 - Το αν μια κατάσταση είναι **πρόβλημα** εξαρτάται από το πρόσωπο που την αντιμετωπίζει
-

«Προβλήματα» και μικρά παιδιά

- Η επίλυση προβλημάτων είναι ένα κεντρικό κομμάτι της ζωής όλων μας – και των μικρών παιδιών
 - Πώς θα βρω το παιχνίδι που έχω χάσει;
 - Πώς γίνεται οι άνθρωποι να ζουν πάνω στο κάτω μέρος της (στρογγυλής) γης χωρίς να πέφτουν;
 - Ποιο ποτήρι με συμφέρει να διαλέξω για να πιω περισσότερο χυμό;
 - Πώς να αρχίσω το πάζλ μου;
 - Πώς θα φτάσω το γλυκό πάνω στο ντουλάπι; Πώς θα το φάω χωρίς να με καταλάβει η μαμά;
 - Πώς θα μοιραστούμε δίκαια ένα γλυκό με τον αδερφό μου;
- Κατά την επίλυση προβλημάτων επιστρατεύονται γνωστικές διαδικασίες (αντίληψη, μνήμη, συλλογισμός), γνώσεις, επικοινωνία, στρατηγικές, εργαλεία, άλλοι άνθρωποι.

Μια επιστημολογική άποψη ...

- ...για τα Μαθηματικά και τη μαθηματική γνώση είναι ότι αναπτύσσονται γύρω από **προβλήματα**
 - πρακτικά ή θεωρητικά
- Αυτή η άποψη είναι ευρέως αποδεκτή στη Διδακτική των Μαθηματικών
 - Και η επίλυση προβλήματος αξιοποιείται διδακτικά ως πεδίο **ενεργοποίησης** και **εφαρμογής** μαθηματικής γνώσης, αλλά και ως πεδίο **ανάπτυξης** νέων μαθηματικών εργαλείων και εννοιών

Προβλήματα

- Κάνε τη ζυγαριά να ισορροπήσει
- Βρες ένα αντικείμενο που είναι τόσο ψηλό, όσο (μια ράβδος)
- Βρες τα περισσότερα/λιγότερα
- Μοίρασε μια σακούλα καραμέλες δίκαια
- Μοίρασε ένα κομμάτι πλαστελίνη δίκαια
- Βρες ένα τρόπο να τακτοποιήσεις τα κουτιά για να πιάνουν το λιγότερο χώρο

Προβλήματα

- Κάνε τη ζυγαριά να ισορροπήσει
- Βρες ένα αντικείμενο που είναι τόσο ψηλό, όσο (μια ράβδος)
- Βρες τα περισσότερα/λιγότερα
- Μοίρασε μια σακούλα καραμέλες δίκαια
- Μοίρασε ένα κομμάτι πλαστελίνη δίκαια
- Βρες ένα τρόπο να τακτοποιήσεις τα κουτιά για να πιάνουν το λιγότερο χώρο

Πρόβλημα

- Θα οργανώσουμε μια μικρή γιορτή στην τάξη. Θα αποφασίσουμε όλοι μαζί για τη γιορτή μας.
-

Πρόβλημα

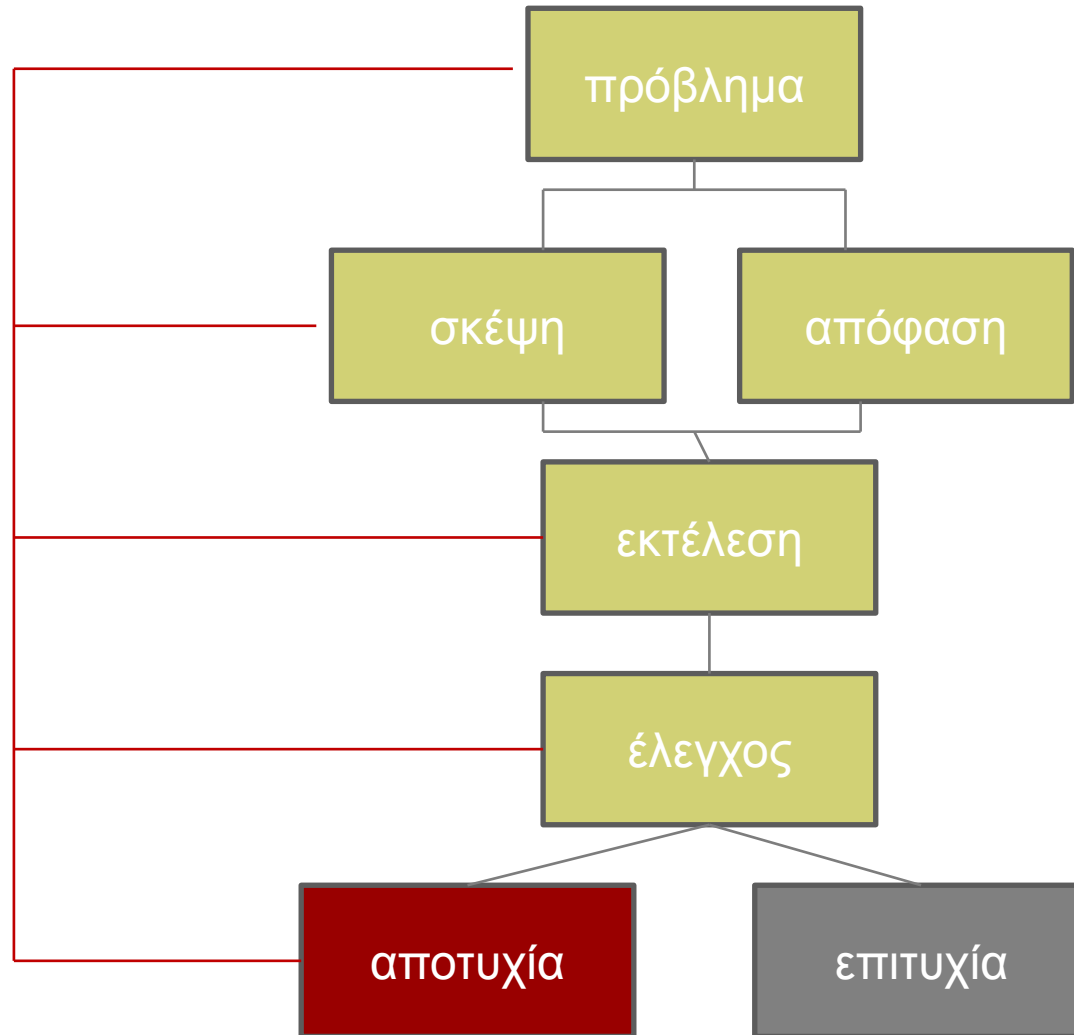
Η νηπιαγωγός παρουσιάζει στρόγγυλες τούρτες από χαρτόνι. Ζητάει από τα παιδιά να χωριστούν ελεύθερα σε ομάδες και η κάθε ομάδα να διαλέξει μία τούρτα. Τα παιδιά χωρίστηκαν σε δύο ομάδες, αγόρια και κορίτσια. Η νηπιαγωγός ζητάει από την κάθε ομάδα να σκεφτεί και να μοιράσει την τούρτα σε ίσα κομμάτια.

Διαδικασία επίλυσης προβλήματος

Η (κλασική) άποψη του Polya

- Τέσσερις φάσεις:
 - Πρέπει να κατανοήσουμε το πρόβλημα
 - Πρέπει να βρούμε τη σχέση ανάμεσα στα δεδομένα και το ζητούμενο και να βρούμε ένα σχέδιο
 - Εκτελούμε το σχέδιο
 - Εξετάζουμε τη λύση που βρήκαμε.
- Φαίνεται γραμμική διαδικασία, αλλά δεν είναι!

Μια λιγότερο γραμμική παρουσίαση.



Κατανόηση προβλήματος

- Ποια είναι η κατάσταση που αντιμετωπίζω; Ποιο ακριβώς είναι το ερώτημα/ερωτήματα που πρέπει να απαντήσω; Τι πληροφορίες έχω; Ποιες από αυτές είναι χρήσιμες και ποιες όχι;

-

Κατανόηση προβλήματος: Ποιο είναι το ερώτημα; Πώς το κατανοούν τα παιδιά;

- Νηπ.: Λοιπόν, θα ήθελα να ακούσω πώς σκέφτεστε να μοιράσετε την τούρτα σε ίσα κομμάτια.
 - Ντίνος: Είμαστε 4 και θα κόψουμε 4 κομμάτια.
 - Αλέξ: Και θα πάρουμε από ένα.
-

Αναζήτηση σχέσεων και σχεδιασμός

- Η αναζήτηση σχέσεων και κανονικοτήτων είναι από τα πιο απαιτητικά στάδια
 - Και συνδέεται με τα μαθηματικά εργαλεία που θα επιλέξω/αναπτύξω
- Σχεδιασμός
 - Πώς θα ξεκινήσω; Πού θέλω να φτάσω; Υπάρχουν ενδιάμεσα ερωτήματα που θα έπρεπε να απαντήσω; Υπάρχει καλύτερος τρόπος να προχωρήσω, από αυτόν που μου ήρθε πρώτος στο κεφάλι; Αν υποθέσουμε ότι

Ανοίγει παρένθεση

**Αναζήτηση και αναπαράσταση
σχέσεων**

Προβλήματα πρόσθεσης και αφαιρέσης

- Ο Γιάννης έχει 5 βόλους. Η Μαρία του έδωσε άλλους 3. Πόσους βόλους έχει ο Γιάννης;
- Ο Γιάννης έχει 5 βόλους. Η Μαρία έχει 3 βόλους περισσότερους από το Γιάννη. Πόσους βόλους έχει η Μαρία;
- Τι ομοιότητες και τι διαφορές έχουν αυτά τα δύο προβλήματα;

Προβλήματα πρόσθεσης και αφαιρέσης

- Ο Γιάννης έχει 5 βόλους. Η Μαρία έχει 3 βόλους περισσότερους από το Γιάννη. Πόσους βόλους έχει η Μαρία;
- Ο Γιάννης έχει 5 βόλους. Έχει 3 βόλους περισσότερους από τη Μαρία. Πόσους βόλους έχει η Μαρία;
- Τι ομοιότητες και τι διαφορές έχουν αυτά τα δύο προβλήματα;

Γιατί κάποια προβλήματα π.χ.
πρόσθεσης είναι πιο δύσκολα από
άλλα;

- Μια θεμελιώδης διαφορά αφορά στην **αναπαράσταση** του προβλήματος από το λύτη
 - Τα προβλήματα **σύγκρισης** παρουσιάζουν δυσκολίες γιατί απαιτούν την αναπαράσταση μιας **σχέσης**
-

Αναπαράσταση σχέσεων

- Στο νοσοκομείο υπάρχουν 3 νοσηλευτές (N) για κάθε 10 ασθενείς (A). Γράψτε τη σχέση που συνδέει τα N, A.
- Πόσο εύκολο σας φαίνεται;
- Ποιο πιστεύετε ότι ήταν το τυπικό λάθος που έκανε μια μεγάλη μερίδα εγγράμματων ενηλίκων (φοιτητές σε γνωστό αμερικανικό πανεπιστήμιο) ;

Κλείνει η παρένθεση

**Αναζήτηση και αναπαράσταση
σχέσεων**

Σχεδιασμός;

- Νηπ.: Λουπόν, πώς σκέφτεστε να την κόψετε για να πάρετε όλοι από ένα ίσο κομμάτι;
- Αντώνης: Με μαχαίρι.
- Κων/νος: Με ψαλίδι, γιατί είναι ψεύτικη. (Παίρνει ένα ψαλίδι).
- Νηπ.: Πριν την κόψετε θα ήθελα να ακούσω με ποιον τρόπο σκέφτεστε να κόψετε τα ίσα κομμάτια. Να ακούσουμε και τα κορίτσια τι λένε.
(Ο Ντίνος παίρνει το ψαλίδι και κόβει μία γωνία - σχήμα 1).
- Νηπ.: Ντίνο, δεν μας είπες τη σκέψη σου.
- Αλέξ: Όχι έτσι (αρπάζει το ψαλίδι).
- Νηπ.: Πώς λες, Αλέξανδρε, να κόψουμε τα ίσα κομμάτια;
- Αλέξ: Προς τα μέσα.
- Νηπ: Δηλαδή;

Εκτέλεση του σχεδίου

- Εφαρμόζω κάποιες διαδικασίες
 - Ελέγχω την εφαρμογή τους
-

Εκτέλεση

(Ο Ντίνος παίρνει το ψαλίδι και κόβει μία γωνία - σχήμα 1).

- Νηπ.: Ντίνο, δεν μας είπες τη σκέψη σου.
- Αλέξ: Όχι έτσι (αρπάζει το ψαλίδι).
- Νηπ.: Πώς λες, Αλέξανδρε, να κόψουμε τα ίσα κομμάτια;
- Αλέξ: Προς τα μέσα.
- Νηπ: Δηλαδή;
- Αλέξ: Θα σου δείξω.
- Νηπ.: Οι υπόλοιποι συμφωνούν να μας δείξει ο Αλέξανδρος;
- Ντίνος: Εγώ δεν έκοψα καλά, να κόψει ο Αλέξανδρος.

(Ο Αλέξανδρος κόβει ακανόνιστα 4 τριγωνικά κομμάτια- σχήμα 1)

Η λύση



Έλεγχος της λύσης

- Είναι λογική;
 - Είναι μοναδική;
 - Υπάρχει καλύτερη;
 -
 - Γιατί πιστεύω ότι είναι σωστή;
-

Έλεγχος

- Νηπ: Κόπηκε η τούρτα σε ίσα κομμάτια;
- Ντίνος: Περίσσεψε, γιατί είμαστε λίγοι.
- Αλέξ: Έπρεπε να κόψω μεγαλύτερα.
- Νηπ: Είναι τα κομμάτια ίσα μεταξύ τους;

(Τα συγκρίνουν με το μάτι και ο Ντίνος παίρνει το κομμάτι του Αλέξανδρου και, βάζοντας το ένα πάνω στο άλλο, διαπιστώνει ότι το κομμάτι του είναι πιο μικρό και θυμώνει)

- Ντίνος: Θα πάρω το μεγάλο (εννοεί την τούρτα που περίσσεψε).
- Οι υπόλοιποι δεν συμφωνούν.
- Νηπ: Κόπηκε η τούρτα σε ίσα κομμάτια;
- Κων/νος: Εγώ έχω μικρότερο από τον Αντώνη που είναι προνήπιο (το διαπιστώνει βάζοντας το ένα πάνω στο άλλο).

Σκεφτείτε

- Σε ποιες φάσεις δεν επενδύεται (αρχικά) χρόνος από τα παιδιά;
 - Κατανόηση του ερωτήματος
 - Σχεδιασμός
- Ποιος προκαλεί το έλεγχο;
- Οι **έμπειροι λύτες**
 - δαπανούν περισσότερο χρόνο ακριβώς στις φάσεις που «προσπερνούν» οι άπειροι λύτες
 - παρακολουθούν συνειδητά όλη τη διαδικασία επίλυσης

Το πρόβλημα της τούρτας

2^η Συνεδρία

- Νηπ.: Για να ακούσω, βρήκατε κανέναν άλλον τρόπο να την κόψουμε σε ίσα κομμάτια;
- Αλεξ.: Κυρία, θα κόψουμε δύο-δύο.
- Νηπ.: Δηλαδή, πώς;
- Αλεξ.: Θα κόψω και θα το βάλω από πάνω (κάνει κινήσεις με τα χέρια).
- Νηπ.: Και μετά;
- Αλεξ.: Θα κοπεί ίδιο (κομμάτι ίσο).
- Ντίνος: Μπράβο Αλέξανδρε, το βρήκες;
- Νηπ.: Οι άλλοι συμφωνούν;

Τα αγόρια ναι, τα κορίτσια δεν έχουν γνώμη. Ο Αλέξανδρος κόβει ένα τριγωνικό κομμάτι, το βάζει πάνω στην τούρτα και προσπαθεί να κόψει ένα δεύτερο κομμάτι. Το κομμάτι γλιστράει, ψαλιδίζεται, αλλά επιμένει και κόβει μ' αυτόν τον τρόπο συνολικά τέσσερα κομμάτια. Με αγωνία τα ταυτίζουν και διαπιστώνουν ότι αν ο Αλέξανδρος έκοβε προσεκτικά και δεν γλιστρούσε το χαρτόνι, τα κομμάτια θα ήταν ίσα (σχήμα 3).

Η λύση



- Νηπ.: Το κομμάτι της τούρτας που περίσσεψε είναι ίσο με το δικό σας;
- Αντώνης: Να το φας εσύ, που είσαι μεγάλη (δηλαδή το κομμάτι είναι μεγάλο).
- Κων/νος: Ο Αλέξανδρος έπρεπε να κόψει μεγαλύτερα κομμάτια (για να μην περισσέψει).

Σκεφτείτε

- Πώς έχουν κατανοήσει τώρα το ερώτημα τα παιδιά;
 - Ποια φάση που δεν υπήρχε πριν εμφανίζεται τώρα;
 - Ποιος προκαλεί τον έλεγχο;
-

Κατανόηση του ερωτήματος

- Ποια προβλήματα προσπαθούν να επιλύσουν τα παιδιά;
 - Να πάρουν από ένα κομμάτι
 - Να πάρουν ίσα κομμάτια
 - Να μην περισσέψει τίποτα
 - Να απαλλαγούν από το πρόβλημα
 - Να μοιραστεί η τούρτα σε ίσα κομμάτια
-

Σχεδιασμός

- Νηπ.: Για να ακούσω, βρήκατε κανέναν άλλον τρόπο να την κόψουμε σε ίσα κομμάτια;
 - Αλεξ.: Κυρία, θα κόψουμε δύο-δύο.
 - Νηπ.: Δηλαδή, πώς;
 - Αλεξ.: Θα κόψω και θα το βάλω από πάνω (κάνει κινήσεις με τα χέρια).
 - Νηπ.: Και μετά;
 - Αλεξ.: Θα κοπεί ίδιο (κομμάτι ίσο).
 - Ντίνος: Μπράβο Αλέξανδρε, το βρήκες;
 - Νηπ.: Οι άλλοι συμφωνούν;
-

Και μια πολύ σημαντική συνιστώσα:

- Πολλά (και στην εποχή μας, όλο και περισσότερα) προβλήματα ΔΕ λύνονται ατομικά
-

Καταστάσεις επίλυσης προβλήματος

δράσης

Πειραματισμός
με τα δεδομένα

Ανάλυση
δεδομένων

Λήψη
αποφάσεων

Εφαρμογή
διαδικασίας

επικοινωνίας

Έκφραση

Αναπαράσταση
σε κοινό κώδικα

Ανταλλαγή
πληροφοριών

Διατύπωση
συμπερασμάτων

ελέγχου

Επιβεβαίωση

Αιτιολόγηση

Δικαιολόγηση

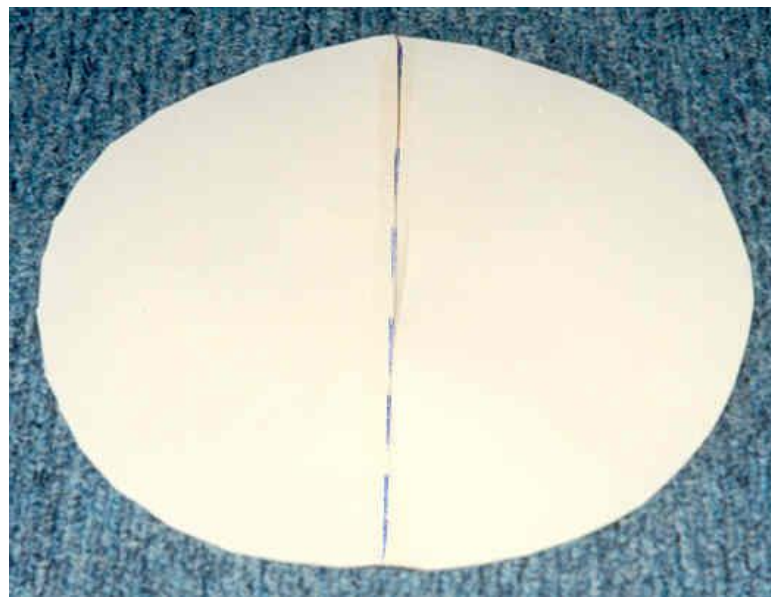
*των αποφάσεων
και της δράσης*

- Ντίνος: Η κ. Εύη και η Βάσω θα φάνε πολύ τούρτα γιατί είναι δύο.
- Εύη: Τι να κάνουμε! Είμαστε μόνο δύο, αλλά η Βάσω δεν μου λέει πώς να κόψουμε τα ίσα κομμάτια. Μήπως κανείς από σας μπορεί να μας βοηθήσει;
- Δήμητρα: Είσαστε δύο και θα πάρετε από μισή τούρτα. Έτσι μας μοιράζει η μαμά τη σοκολάτα άμα είναι μεγάλη.
- Νηπ.: Με ποιον τη μοιράζεσαι Δήμητρα;
- Δήμητρα: Με τον αδελφό μου.
- Βίκυ: Είναι εύκολο, θα την κόψετε στη μέση.
- Εύη: Δείξε μας, σε παρακαλώ, Βίκυ.

Η Βίκυ παίρνει το ψαλίδι και ετοιμάζεται να κόψει βρίσκοντας τη μέση με το μάτι.

- Ντίνος: Δεν είναι εκεί η μέση.
- Εύη: Δείξε μας Ντίνο. Πώς θα βρούμε τη μέση της τούρτας;
- Ντίνος: Θα την διπλώσω, όπως κόβει η μαμά τα χαρτιά για να ζωγραφίσω.

Ο Ντίνος διπλώνει στη μέση και κόβει (σχήμα 6).



- Νηπ.: Είναι ίσα τα κομμάτια;

Ο Ντίνος τα βάζει το ένα πάνω στο άλλο, τα ταυτίζει και όλοι διαπιστώνουν ότι τα δύο κομμάτια είναι ίσα.

- Αλέξ.: Και δεν περίσσεψε καθόλου!
-

Μετά την επίλυση του προβλήματος: Προεικτάσεις

- Υπάρχουν άλλες λύσεις (ή άλλοι τρόποι επίλυσης) του προβλήματος;
 - Μπορεί η ιδέα / τα εργαλεία που οδήγησαν στην επίλυση του προβλήματος να εφαρμοστούν και σε άλλα προβλήματα;
 - Γενίκευση
-

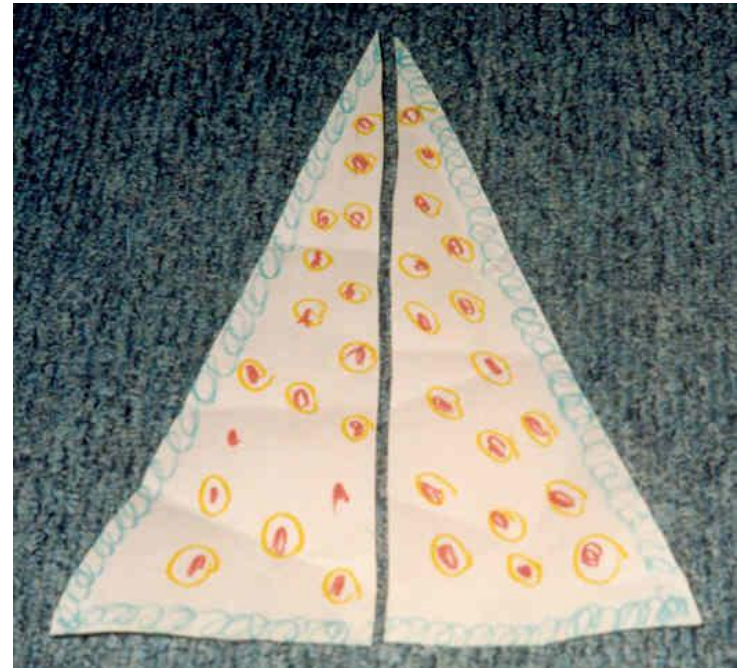
Γενίκευση & πολλαπλές λύσεις



- Ντίνος: Εμείς κόψαμε τρίγωνα και τα κορίτσια τετράγωνα
- Φανή: Είδες Ντίνο που γίνεται;
- Νηπ.: Και τα αγόρια με τον τρόπο τους έκοψαν την τούρτα σε ίσα κομμάτια και τα κορίτσια με τον δικό τους τρόπο.
- Αλέξανδρος: Βρήκαμε δύο τρόπους!

Περιορισμοί στη γενίκευση

- Αλέξανδρος: Είναι τρίγωνη, αλλά πιο μυτερή από τις άλλες
- Ντίνος: δεν είναι ίδια τρίγωνη με τις άλλες, γι' αυτό δεν διπλώνεται
- Κων/νος: Δώσε μας να δούμε
- Φανή: Είναι πολύ μυτερή δεν βλέπεις;
- Νηπ.: Δηλαδή, τούτο το τρίγωνο δεν χωρίζεται σε πολλά ίσα κομμάτια
- Αλέξανδρος: Δεν είδες κυρία, μόνο σε δύο



Στρατηγικές επίλυσης προβλήματος

- Δοκιμή και λάθος
- Αναπαράσταση του προβλήματος
 - Ζωγραφιά, μοντέλο, δραματοποίηση,...
- Οργάνωση δεδομένων
 - Λίστες, πίνακες, διαγράμματα
- Αναζήτηση μιας κανονικότητας
- Επίλυση μια πιο απλής περίπτωσης
- Συστηματική διερεύνηση περιπτώσεων



Η Δανάη έχει τη γιορτή της και έχει καλέσει 3 φίλους της για φαγητό. Μαζί με τη μητέρα της, στρώνουν το τραπέζι, στο οποίο θα κάτσουν όλα μαζί τα παιδιά. Για κάθε παιδί, βάζουν 1 πιάτο, ένα μαχαίρι, ένα πηρούνι, μια χαρτοπετσέτα και 2 ποτήρια, ένα για το νερό και ένα για το αναψυκτικό. Για κάθε 2 παιδιά, βάζουν ένα πιάτο με σαλάτα. Πόσα αντικείμενα υπάρχουν πάνω στο τραπέζι;

- Πώς μπορεί να δουλευτεί μια προσβάσιμη σε μικρά παιδιά μορφή του προβλήματος;



Συνιστώσες της επιτυχημένης επίλυσης προβλήματος

