ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ
Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών
ΜΑΡΙΑ ΚΑΛΔΡΥΜΙΔΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2009 - 10

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα ζητήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι πολλά και πολύπλοκα:

- Πώς να διδάξουμε Μαθηματικά;
- Πώς μαθαίνουν τα παιδιά Μαθηματικά;
- Σε τι χρησιμεύουν τα Μαθηματικά;
- Ποια Μαθηματικά πρέπει να διδάξουμε;
- Πρέπει να διδάξουμε Μαθηματικά;
- Μπορούμε να διδάξουμε Μαθηματικά;
- Τι συμβαίνει μέσα στην τάξη των Μαθηματικών;
- Πώς γίνεται η διαπραγμάτευση των θεμάτων διδασκαλίας;
- Ποιες είναι οι ιδιαιτερότητες της διδασκαλίας των Μαθηματικών;
- Ποια είναι τα φαινόμενα που παρατηρούνται κατά τη διάρκεια διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών;
- Ποια είναι η σημασία του λάθους στα Μαθηματικά και πώς το διαχειριζόμαστε μέσα στην τάξη;

αποτελούν μερικά μόνο από τα ερωτήματα που απασχολούν όσους εμπλέκονται στη μαθηματική εκπαίδευση και μερικά μόνο από τα ζητήματα που διαπραγματεύεται η **Διδακτική των Μαθηματικών**.

Η θεώρηση των ζητημάτων που σχετίζονται με τη μαθηματική εκπαίδευση, η στάση των εμπλεκομένων στη μαθηματική εκπαίδευση και ο τρόπος προσέγγισης, δηλαδή ο τρόπος μελέτης και ανάλυσης αυτών των ζητημάτων εξαρτάται κατ' αρχήν από τις αντιλήψεις που έχουμε για τα ίδια τα Μαθηματικά. Με άλλα λόγια, για να απαντήσουμε στις παραπάνω ερωτήσεις πρέπει πρώτα να απαντήσουμε στη θεμελιώδη ερώτηση:

- Τι είναι τα Μαθηματικά;

Αν π.χ. θεωρήσουμε τα Μαθηματικά ως ένα οργανωμένο σύνολο συμβόλων και διαδικασιών (τεχνικών και μεθόδων) υπολογισμού, τότε η διδασκαλία των Μαθηματικών θα επικεντρωθεί στις υπολογιστικές τεχνικές και την ανάπτυξη των ικανοτήτων υπολογισμού, καθώς και στην απομνημόνευση κανόνων και αποτελεσμάτων. Η δε επιτυχής διδασκαλία θα κρίνεται με βάση την απόδοση και επίδοση των μαθητών σε αντίστοιχα έργα υπολογισμού.

Αν όμως θεωρήσουμε τα Μαθηματικά ως ένα σύστημα εννοιών, σχέσεων και δομών, ως μία επιστήμη που αναπτύσσει τη θεωρία της με στόχο τη δημιουργία μοντέλων που επιτρέπουν την επεξεργασία και την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου, τότε η διδασκαλία των Μαθηματικών θα επικεντρωθεί στην ανάπτυξη και το νόημα εννοιών, τις σχέσεις μεταξύ εννοιών και διαδικασιών καθώς και τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων εννοιών. Σε μια τέτοια προοπτική το να ξέρει π.χ. ο μαθητής ότι 2+3=5 δεν είναι αρκετό. Επιθυμητό στόχο αποτελεί να ξέρει ότι και 3+2=5, ότι 5=4+1=1+4=5+0, τι σημαίνει προσθέτω καθώς και πότε πρέπει να προσθέσω σ' ένα πρόβλημα, με άλλα λόγια ποια προβλήματα μπορούν να επιλυθούν με πρόσθεση.

Έτσι για να προσεγγίσουμε τα ζητήματα της διδασκαλίας των Μαθηματικών, σε οποιαδήποτε βαθμίδα της εκπαίδευσης, απαραίτητο είναι να αποσαφηνίσουμε τι θεωρούμε ότι είναι **τα Μαθηματικά και η Μαθηματική γνώση**. Το θέμα αυτό θα προσεγγίσουμε στο πρώτο κεφάλαιο. Η διαπραγμάτευσή του θα γίνει σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες, διαδικασίες και εργαλεία των Μαθηματικών που εμπλέκονται στο πρόγραμμα του Νηπιαγωγείου.

Τα ζητήματα όμως που αφορούν τη μαθηματική εκπαίδευση και ειδικότερα τις διαδικασίες διδασκαλίας/μάθησης είναι πολύ πολύπλοκα. Σ' αυτές τις διδακασίες εμπλέκονται πέρα από τα Μαθηματικά, ο δάσκαλος, οι μαθητές, τα προγράμματα και οι γενικότεροι θεσμοί της εκπαίδευσης, οι σχέσεις μεταξύ τους και οι σχέσεις αυτών με τα Μαθηματικά και τη μαθηματική γνώση. Ακόμη και στην περίπτωση που η απόκτηση της γνώσης θεωρείται ως απλή μεταφορά από τη διδασκαλία στη μάθηση, οι απώλειες στη μεταφορά των πληροφοριών και οι διαφοροποιήσεις των μηνυμάτων προειδοποιούν για την πολυπλοκότητα των δεσμών μεταξύ διδασκαλίας και μάθησης. Η κατάσταση γίνεται πιο σύνθετη όταν θεωρήσουμε ότι η γνώση που αποκτά (κατασκευάζει) ο μαθητής είναι αποτέλεσμα της επεξεργασίας από τον ίδιο των πραγμάτων που γίνονται ή αυτών που δεν γίνονται μέσα στην τάξη, αλλά και των αντιλήψεων που κατασκευάζει και εκτός τάξης, μέσα στο πολιτισμικό και κοινωνικό περιβάλλον όπου ζει και αναπτύσσεται.

Ως παραδείγματα αυτής της θεώρησης, θεώρησης που είναι αποδεκτή από το σύνολο της κοινότητας των ανθρώπων που ασχολούνται με τη Διδακτική των Μαθηματικών, μπορούμε να δούμε τη δημιουργία στερεοτύπων (στερεότυπο του ορθογωνίου τριγώνου), τις αντιλήψεις για διάφορες έννοιες που διαφοροποιούνται από το μαθηματικό ορισμό τους (τετράγωνο/ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο), τη μοναδικότητα λύσης που "πρέπει" να έχει ένα πρόβλημα των Μαθηματικών (πρόβλημα του καπετάνιου, πρόβλημα του αριθμού από τριανταφυλλιές), την αναγωγή της μεθόδου των τριών σε κατ' εξοχήν μέθοδο επίλυσης προβλημάτων (πρόβλημα των ξυλοκόπων), τις λανθασμένες και αυθαίρετες γενικεύσεις ως αποτέλεσμα της ερμηνείας της συνεπαγωγής ως ισοδυναμίας.

Οι μελέτες των δύο τελευταίων δεκαετιών έδειξαν ότι οι διαδικασίες διδασκαλίας/μάθησης των Μαθηματικών είναι αυτοοργανωμένες διαδικασίες, που λαμβάνουν χώρα σύμφωνα με ανεξάρτητα πρότυπα και μηχανισμούς. Νεότερες δε αναλύσεις έδειξαν ότι σ' αυτές τις διαδικασίες εμπλέκονται αλληλεπιδράσεις μεταξύ **κοινωνικών, ψυχολογικών, επικοινωνιακών και μαθηματικο-επιστημολογικών παραγόντων**.

Η Διδακτική των Μαθηματικών, λοιπόν, δεν ασχολείται μόνο με τον εντοπισμό δυσκολιών και τους τρόπους αντιμετώπισής τους μέσα από την πρόκριση "καλού" περιεχομένου και "καλών" τρόπων διδασκαλίας, αλλά ασχολείται με **τη μελέτη και ανάλυση των διαδικασιών και αλληλεπιδράσεων που λαμβάνουν χώρα κατά τις διαδικασίες διδασκαλίας/μάθησης.** Με άλλα λόγια προσπαθεί να γνωρίσει και να κατανοήσει τις **ιδιαίτερες** συνθήκες διδασκαλίας των Μαθηματικών και να διαπραγματευτεί ένα θεωρητικό πλαίσιο επιστημονικής μελέτης των φαινομένων της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Οι βασικές έννοιες-εργαλεία με τα οποία η Διδακτική των Μαθηματικών διαπραγματεύεται τα ζητήματα και φαινόμενα της μαθηματικής εκπαίδευσης αποτελούν το περιεχόμενο του τρίτου κεφαλαίου των σημειώσεων αυτών.

Στα πλαίσια μιας τέτοιας θεώρησης η Διδακτική των Μαθηματικών συνδέεται και με άλλους επιστημονικούς κλάδους όπως η **Ψυχολογία**, η **Παιδαγωγική**, η **Ιστορία**, η **Γλωσσολογία**, η **Κοινωνιολογία** από τους οποίους όχι μόνο "δανείζεται" μεθόδους έρευνας, αλλά και αντλεί υποθέσεις και συμπεράσματα τα οποία ενσωματώνει στις δικές της εικασίες και υποθέσεις. Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζονται οι κυριότερες ψυχολογικές και παιδαγωγικές θεωρήσεις που αφορούν τη μάθηση και την κατανόηση με έμφαση στην πρώτη σχολική ηλικία (μέχρι 7 ετών).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

1. Η ΦΥΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Οι αντιλήψεις για τη φύση και το ρόλο των Μαθηματικών έχουν μεγάλη επίδραση στην ανάπτυξη και επεξεργασία των αναλυτικών προγραμμάτων για τα Μαθηματικά, στη διδασκαλία και την έρευνα. Η κατανόηση αυτών των αντιλήψεων είναι απαραίτητη στην επεξεργασία προγραμμάτων για τα σχολικά Μαθηματικά, στην προετοιμασία των μελλοντικών εκπαιδευτικών, στην αντιμετώπιση της διδακτικής πράξης καθώς και στη μελέτη των φαινομένων που σχετίζονται με τη διδασκαλία των Μαθηματικών αλλά και τη μαθηματική εκπαίδευση γενικότερα.

Ικανός αριθμός ερευνών, που έγιναν την τελευταία δεκαετία, κατέδειξαν την επίδραση που ασκούν οι διαφορετικές αντιλήψεις που έχουν τόσο οι δάσκαλοι και οι καθηγητές, όσο και οι μαθηματικοί για τα Μαθηματικά στη διδασκαλία και την ανάπτυξη των ίδιων των Μαθηματικών. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια σύντομη επισκόπηση των αντιλήψεων για τα Μαθηματικά και την τρέχουσα και την εν δυνάμει επήρεια αυτών στη μαθηματική εκπαίδευση.

1.1 Πρώτες θεωρήσεις για τη φύση και τη δομή των Μαθηματικών

Οι πρώτες συζητήσεις γύρω από τη φύση των Μαθηματικών ανάγονται στον 4ον π.Χ. αιώνα. Ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης είναι οι δύο πρώτοι φιλόσοφοι που αναπτύσσουν θεωρίες για τη φύση και τη δομή της μαθηματικής επιστήμης.

τιμές. Έτσι π.χ. το Πυθαγόρειο θεώρημα διατυπώνεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη ως εξής: "Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο που κατασκευάζεται πάνω στην υποτείνουσα είναι ίσο σε εμβαδόν με το άθροισμα των τετραγώνων που κατασκευάζονται πάνω στις άλλες πλευρές του τριγώνου".

1.1.2 Ο Αριστοτέλης και η θεωρία για τις έννοιες και τις αποφάνσεις

Ο Αριστοτέλης θεωρεί ότι τα Μαθηματικά αποτελούν ένα από τα τρία είδη της γνώσης: η φυσική, η μαθηματική και η θεολογική γνώση αποτελούν τα τρία γένη της γνώσης - (επισημαίνουμε εδώ τα τρία αντίστοιχα είδη γνώσης της πιαζετιανής θεωρίας: τη φυσική, τη λογικομαθηματική και την κοινωνική γνώση). Σε αντίθεση με τον Πλάτωνα, ο Αριστοτέλης θεωρεί ότι η γνώση προέρχεται από την εξωτερική πραγματικότητα και εμπειρία μέσα από διαδικασίες πειραματισμών, παρατήρησης και αφαίρεσης. Έτσι για τον Αριστοτέλη τα Μαθηματικά αντικείμενα (έννοιες-ιδέες) δεν έχουν δικιά τους υπόσταση, αλλά κατασκευάζονται μέσω εξειδανικεύσεων των αποτελεσμάτων της εμπειρίας με τα υλικά αντικείμενα.

Πιο συγκεκριμένα, ο Αριστοτέλης προσπάθησε να κατανοήσει τις μαθηματικές σχέσεις μέσα από την ***ομαδοποίηση*** και την ***ταξινόμηση*** των εμπειρικών δεδομένων προερχόμενων από πειράματα και παρατηρήσεις και στη συνέχεια να εξηγήσει τις έμφυτες σχέσεις αυτών των δεδομένων με τη δημιουργία ενός ***παραγωγικού συστήματος***. Σ' αυτό το πλαίσιο η συμβολή του Αριστοτέλη αφορά κυρίως τη θεωρία που ανέπτυξε για τις **έννοιες** (ορισμοί) και τις **αποφάνσεις** (αξιώματα, θεωρήματα, αποδείξεις).

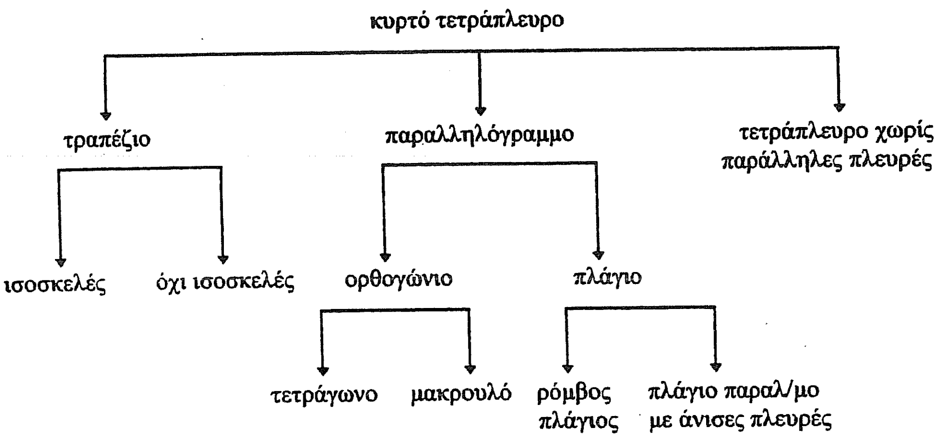
Σύμφωνα λοιπόν με τον Αριστοτέλη, κάθε παραγωγική επιστήμη ξεκινά με κάποιες **θεμελιώδεις έννοιες**, όπως π.χ. το σημείο και η ευθεία για τη Γεωμετρία, οι οποίες δεν ορίζονται αλλά των οποίων το **νόημα** πρέπει να αποσαφηνίζεται και η **ύπαρξή** τους να βεβαιώνεται. Επίσης κάθε παραγωγική επιστήμη στηρίζεται σε δύο είδη **αποφάνσεων** των οποίων η αλήθεια γίνεται δεκτή χωρίς απόδειξη. Αυτές είναι:

α) **οι κοινές έννοιες** (**αξιώματα**), οι οποίες είναι γενικές αλήθειες που υπάρχουν σε κάθε επιστήμη, π.χ. η πρόταση "αν από ίσα αφαιρέσουμε ίσα τότε τα υπόλοιπα είναι ίσα".

β) **οι ειδικές έννοιες** (**αιτήματα**), οι οποίες είναι αλήθειες που ανήκουν στη βάση κάθε ειδικής επιστήμης, αφορούν δηλαδή τις θεμελιώδεις έννοιες. Είναι δε οι ειδικές έννοιες δύο ειδών, αποφάνσεις που δίνουν το νόημα των θεμελιωδών εννοιών και αυτές που βεβαιώνουν την ύπαρξη των θεμελιωδών εννοιών. Έτσι, π.χ. οι προτάσεις "η ευθεία γραμμή δεν έχει πλάτος και ορίζεται από δύο σημεία της" και "υπάρχουν ευθείες γραμμές" είναι οι ειδικές έννοιες που αφορούν τη θεμελιώδη έννοια "ευθεία".

Κάθε **άλλη έννοια** πρέπει να ορίζεται μέσα από ιδιαίτερες ιδιότητες, που αποτελούν την **ειδοποιό διαφορά**, από έννοιες ήδη γνωστές, που αποτελούν το **προσεχές γένος** της έννοιας. Κάθε άλλη **απόφανση** πρέπει να αποδεικνύεται με **συμπερασματική** διαδικασία από κοινές και ειδικές έννοιες και άλλες αποφάνσεις που έχουν ήδη αποδειχθεί.

Στο διάγραμμα που ακολουθεί υπάρχει μία κατάταξη των κυρτών τετραπλεύρων, η οποία διασαφηνίζει τη διαδικασία ορισμού των εννοιών.



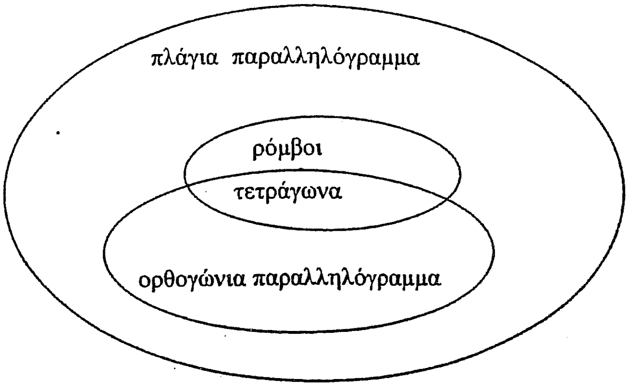
Σ' αυτήν την κατάταξη ικανοποιούνται οι δύο συνθήκες που έθεσε ο Αριστοτέλης, δηλαδή οι υποβαθμίδες κάθε προσεχούς γένους (θεωρούμενες ως κλάσεις) δεν έχουν κοινά στοιχεία και κάθε στοιχείο προσεχούς γένους (όταν το θεωρήσουμε ως κλάση) ανήκει σε κάποια υποβαθμίδα. Έτσι, το τετράγωνο ορίζεται ως ορθογώνιο με ίσες πλευρές (ειδοποιός διαφορά) και ως ρόμβος θεωρείται μόνον ο πλάγιος, γιατί αλλιώς θα υπήρχαν κοινά στοιχεία στους ρόμβους και τα ορθογώνια.

Η συμβολή του Αριστοτέλη στην αξιωματική θεμελίωση και τον ορισμό εννοιών είναι τεράστια και μέχρι σήμερα. Ωστόσο υπάρχουν κάποιες διαφορές.

1. Σήμερα δεχόμαστε ότι κάθε παραγωγική επιστήμη ξεκινά από έννοιες που θεωρούνται ***μη οριζόμενες*** και από κάποιες **μη αποδείξιμες προτάσεις** που αναφέρονται σ' αυτές, αποδίδοντας ***κάποιες ιδιότητες και όχι το νόημα των όρων***. Αυτό που εξασφαλίζει, στη σύγχρονη φορμαλιστική θεώρηση, την εγκυρότητα ενός συστήματος είναι η δομή των αποφάνσεων και όχι το νόημα των εννοιών που υπεισέρχονται, π.χ. ο συλλογισμός του τύπου "όλα τα Α είναι Β, όλα τα Β είναι Γ, τότε όλα τα Α είναι Γ" είναι έγκυρος ανεξάρτητα από το νόημα των Α, Β, Γ, ενώ η εγκυρότητα ενός συλλογισμού του τύπου "όλα τα Α είναι Γ, όλα τα Β είναι Γ, τότε μερικά Α είναι Β" εξαρτάται από το νόημα των Α, Β, Γ.

2. Η δεύτερη βασική διαφορά αφορά τους περιορισμούς που έθεσε ο Αριστοτέλης στην ταξινόμηση των εννοιών. Σήμερα δεν θεωρούμε απαραίτητο οι υποβαθμίδες που δημιουργούνται να είναι ξένες μεταξύ τους, να μην έχουν δηλαδή κανένα κοινό στοιχείο και να καλύπτουν όλα τα στοιχεία της προηγούμενης έννοιας. Έτσι στη σύγχρονη ταξινόμηση των κυρτών τετραπλεύρων τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα θεωρούνται ως υποσύνολο των πλαγίων παραλληλογράμμων, τα οποία με τη σειρά τους θεωρούνται ως ειδική περίπτωση των τραπεζίων. Δεν χρειάζεται, λοιπόν, να διαμερίσουμε το σύνολο των παραλληλογράμμων σε ορθογώνια και πλάγια, αλλά από την κλάση των πλάγιων παραλληλογράμμων διακρίνουμε ένα ειδικό υποσύνολο που αποτελείται από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Τα δε τετράγωνα θεωρούνται και ως ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ως ρόμβοι, και δεν χρειάζεται να οριστούν ως ξέχωρη έννοια τα "μακρουλά".

Το παρακάτω σχήμα αποδίδει τις σχέσεις μεταξύ των πλάγιων παραλληλογράμμων στη σύγχρονη Γεωμετρία.



1.2. Θεωρήσεις μέχρι τις αρχές του 20ου αιώνα

Οι θεμελιώδεις διαφορές μεταξύ Πλάτωνα και Αριστοτέλη επηρέασαν τις φιλοσοφικές θεωρήσεις των μαθηματικών για τα Μαθηματικά (αλλά και τις άλλες επιστήμες) για πολλούς αιώνες. Η διαμάχη μεταξύ ***ορθολογιστών*** και ***εμπειριστών*** επηρέασε όλους τους κλάδους των επιστημών μέχρι τα μέσα του 19ου αιώνα. Η αποδοχή των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών και η απόδειξη της συνέπειας αυτών των Γεωμετριών απελευθέρωσε τα Μαθηματικά από τον περιορισμό της αναζήτησης ενός μόνον συστήματος αξιωμάτων που θα αποτελεί το μοναδικό μοντέλο για τον εξωτερικό κόσμο. Ταυτόχρονα προκάλεσε τη μεταφορά των Θεμελίων των Μαθηματικών, δηλαδή των αρχικών εννοιών και προτάσεων στις οποίες στηρίζονται οι ορισμοί και οι προτάσεις των Μαθηματικών θεωριών, από τους αριθμούς και τις βασικές γεωμετρικές έννοιες στα ***σύνολα*** και τη ***συνολοθεωρία*** .

Η ελευθερία και η ευφορία που επικράτησε στο χώρο των μαθηματικών ως συνέπεια της θεώρησης του ότι ήταν πλέον αποδεκτή η κατασκευή δομών που δεν θα στηρίζονταν στην εξωτερική πραγματικότητα δεν κράτησε πολύ. Η εμφάνιση παράδοξων (όπως π.χ. το σύνολο όλων των συνόλων) στα θεμέλια των Μαθηματικών, τη συνολοθεωρία, έθεσε σε αμφισβήτηση τη νεοαποκτειθείσα ελευθερία και βεβαιότητα και οδήγησε τους μαθηματικούς στην αναζήτηση τρόπων και θεωρήσεων που θα τους επέτρεπαν να διαπραγματευτούν τα νέα προβλήματα και να απελευθερώσουν τις μαθηματικές θεωρίες από τις αντιφάσεις και τα παράδοξα. Έτσι δημιουργήθηκαν τρεις σχολές στο χώρο των Μαθηματικών και των μαθηματικών.

- **η Σχολή του Λογικισμού** (Θετικισμού), με κυριότερους εκπροσώπους τους Frege, Whitehead και Russel, που έθεσε ως στόχο να δείξει ότι τα Μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν ως υποσύνολο της λογικής. Συνέπεια αυτής της θεώρησης είναι ότι οι μαθηματικές προτάσεις μπορούν να εκφρασθούν ως γενικές προτάσεις, η αλήθεια των οποίων μπορεί να ελεγχθεί με βάση τη μορφή τους παρά με βάση την ερμηνεία τους σ' ένα ειδικό πλαίσιο αναφοράς. Αυτή η προσέγγιση βασίστηκε στην αποδοχή των Μαθηματικών ως υπαρχόντων εξωτερικά και θεωρείται μετεξέλιξη της πλατωνικής σχολής (J. Dossey, 1992).

- **η Διαισθητική Σχολή** (Κονστρουκτιβισμός), με ιδρυτή τον Brouwer, που αποδεχόνταν μόνο τα Μαθηματικά που μπορούσαν να αναπτυχθούν από τους φυσικούς αριθμούς μέσω νοητικών δραστηριοτήτων και κατασκευαστικών αποδείξεων. Έτσι, αποδείξεις που στηρίζονται στην αρχή του αποκλειομένου τρίτου, (π.χ. αποδείξεις με εις άτοπον απαγωγή, που στηρίζονται στο ότι μία πρόταση ή θα είναι αληθής η ίδια ή θα είναι αληθής η άρνησή της), δεν ήταν αποδεκτές για τους οπαδούς αυτής της σχολής.

- **ο Φορμαλισμός**, με ιδρυτή τον Hilbert, ο οποίος έβλεπε τα Μαθηματικά ως προερχόμενα από διαίσθηση βασιζόμενη σε αντικείμενα τα οποία μπορούσαν να θεωρηθούν ότι έχουν τουλάχιστον συγκεκριμένες αναπαραστάσεις στο μυαλό. Ο Φορμαλισμός προσπάθησε να χαρακτηρίσει τις μαθηματικές ιδέες με όρους τυπικών αξιωματικών συστημάτων. Η απόδειξη που έγινε από τον Godel, το 1931, του ότι είναι αδύνατο να αποδείξουμε τη συνέπεια ενός αξιωματικού συστήματος βασιζόμενοι μόνο στη λογική και τη θεωρία αριθμών, σταμάτησε την προσπάθεια αξιωματικοποίησης όλων των Μαθηματικών. Παρόλα αυτά όμως ο Φορμαλισμός παρέμεινε ως η Σχολή με τη μεγαλύτερη επίδραση στην ανάπτυξη των Μαθηματικών και με μεγάλη επίδραση στη μαθηματική εκπαίδευση, όπου με την εισαγωγή των λεγόμενων "νέων Μαθηματικών" εισέβαλε ακόμη και στα νηπιαγωγεία.

Οι τρεις κύριες Σχολές που ιδρύθηκαν στις αρχές του 20ου αιώνα έδωσαν νέα ώθηση στη συζήτηση για τη φύση των Μαθηματικών, δεν κατάφεραν όμως να αναπτύξουν μία ευρέως αποδεκτή θεωρία για τη φύση των Μαθηματικών. Το κοινό στοιχείο που χαρακτηρίζει και τις τρεις είναι ότι βλέπουν το περιεχόμενο των Μαθηματικών ως προϊόν, το οποίο είτε προϋπάρχει, είτε είναι αποτέλεσμα της εμπειρίας. Έτσι, οι Πλατωνικές και Αριστοτελικές ιδέες βρίσκονται ξανά μέσα σ' αυτές τις θεωρίες.

1.3. Σύγχρονες Απόψεις: ο I. Lakatos και η Φιλοσοφία της Αμφισβήτησης.

Οι προσπάθειες για θεμελίωση, δηλαδή οι προσπάθειες να εδραιωθεί αυτό που δεν αμφισβητείται στα Μαθηματικά δέσποσε στις θεωρήσεις που σύντομα έχουμε αναφέρει στην προηγούμενη παράγραφο. Μια ριζοσπαστική εναλλακτική λύση δόθηκε από τον **I. Lakatos** (1976, 1978), ο οποίος αναλύει επιστημολογικά τα μη τυπικά Μαθηματικά, δηλαδή τα Μαθηματικά που βρίσκονται στη διαδικασία της ανάπτυξης και της ανακάλυψης, όπως τα Μαθηματικά που γνωρίζουν οι μαθηματικοί αλλά και οι μαθητές.

Το έργο του Lakatos στηρίχθηκε στις ιδέες του Popper και του Polya. Η κεντρική ιδέα του Popper είναι ότι οι επιστημονικές θεωρίες δεν προκύπτουν επαγωγικά από τα γεγονότα, αλλά ότι επιστημονική είναι η θεωρία που μπορεί ***να εξεταστεί*** και ***να διακινδυνεύσει να ανατραπεί***. Μία θεωρία που επιβιώνει από τέτοιες δοκιμασίες μπορεί να ενισχυθεί και να γίνει αποδεκτή, αλλά δεν μπορεί να αποδειχθεί.

Ο Lakatos ισχυρίζεται ότι τα μη τυπικά Μαθηματικά είναι επιστήμη σύμφωνα με την έννοια του Popper, που αναπτύσσεται με μια διαδικασία διαδοχικών κριτικών και βελτιώσεων καθώς και με την προώθηση νέων ανταγωνιστικών θεωριών.

Η θεώρηση αυτή του Lakatos είναι πολύ σημαντική γιατί μεταφέρει το ενδιαφέρον από τα "τελειωμένα" Μαθηματικά στα Μαθηματικά που "γίνονται", στη "μαθηματική εμπειρία", στη δημιουργία της μαθηματικής γνώσης. Οι απόψεις του επηρέασαν πολύ τους μαθηματικούς με ευαισθησία και ενδιαφέρον για τη μαθηματική εκπαίδευση.

2. ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Η έλλειψη κοινής θεώρησης για τη φύση και την εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών και την επιστήμη των Μαθηματικών έχει σημαντικές επιπτώσεις όχι μόνο στα Μαθηματικά, αλλά και στη μαθηματική εκπαίδευση. Ο Hersh (1986) και ο Tymoczko (1986) επηρεασμένοι από τις ιδέες του Lakatos, ερεύνησαν τον τρόπο που δουλεύουν οι μαθηματικοί και τις θεωρήσεις που έχουν για τα Μαθηματικά. Ο βασικός τους προβληματισμός ήταν ο εξής: αν οι μαθηματικοί δεν ασπάζονται τον φορμαλισμό όταν δουλεύουν, όταν αναπτύσσουν μαθηματική δραστηριότητα, γιατί θα πρέπει η φορμαλιστική παρουσίαση να επικρατεί στα σχολικά Μαθηματικά; Το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν είναι ότι οι μαθηματικοί όταν καλούνται να διατυπώσουν τις απόψεις τους για τα Μαθηματικά εμφανίζονται ως φορμαλιστές διατυπώνοντας την άποψη ότι τα Μαθηματικά είναι ένα παιχνίδι συμβόλων. Η σχέση όμως που αναπτύσσουν με τις μαθηματικές έννοιες είναι μάλλον πλατωνική. Ακόμη ο μαθηματικός την ώρα που "κάνει" Μαθηματικά σπάνια ενδιαφέρεται να επικυρώνει κάθε βήμα του με αποδεκτά τυπικά επιχειρήματα, αλλά κυρίως εξερευνά έννοιες και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις. Αυτή η τάση επικεντρώνει το ενδιαφέρον στην κατανόηση ως άξονα που καθοδηγεί τον μαθηματικό. Τα Μαθηματικά πρέπει να γίνουν αποδεκτά ως ανθρώπινη δραστηριότητα η οποία δεν καθορίζεται αποκλειστικά από καμμία από τις Σχολές σκέψης (λογικισμός, κονστρουκτιβισμός ή φορμαλισμός). Μία τέτοια προσέγγιση μπορεί να δώσει την παρακάτω απάντηση στο ερώτημα τι είναι τα Μαθηματικά:

"Τα μαθηματικά διαπραγματεύονται ιδέες.... Ποιες είναι οι κύριες ιδιότητες της μαθηματικής δραστηριότητας ή της μαθηματικής γνώσης, όπως ξέρουμε από την καθημερινή εμπειρία;

1. Τα μαθηματικά αντικείμενα εφευρίσκονται ή δημιουργούνται από τους ανθρώπους.

2. Δημιουργούνται όχι αυθαίρετα, αλλά προέρχονται από τη δραστηριότητα με ήδη γνωστά μαθηματικά αντικείμενα καθώς και από τις ανάγκες της επιστήμης και της καθημερινής ζωής.

3. Από τη στιγμή που δημιουργούνται, τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν ιδιότητες που είναι ήδη προκαθορισμένες και τις οποίες ίσως δύσκολα θα ανακαλύψουμε, αλλά τις οποίες διαθέτουν ανεξάρτητα από τη γνώση μας γι' αυτά." (R. Hersh, 1986, σελ. 22).

Η αποδοχή της θεώρησης των Μαθηματικών ως ανθρώπινης δραστηριότητας έχει σημαντικές επιπτώσεις και στην προσέγγιση και δόμηση της μαθηματικής εκπαίδευσης. Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο θα παραθέσουμε ένα απόσπασμα από τον επίλογο των P. Davis & R. Hersh στο βιβλίο τους *Η Μαθηματική Εμπειρία* (σελ. 386, της ελληνικής έκδοσης):

«Τα μαθηματικά δεν είναι η μελέτη μιας ιδεατής, προϋπάρχουσας άχρονης πραγματικότητας. Ούτε μοιάζει με μια παρτίδα σκάκι με προκατασκευασμένα σύμβολα και τύπους. Είναι μάλλον ένα τμήμα των ανθρώπινων μελετών που μπορεί να επιτύχει μια επιστημονικοφανή συναίνεση, ικανή να εδραιώσει ***αναπαραγώγιμα*** *αποτελέσματα. Η ύπαρξη του θέματος που καλείται μαθηματικά είναι ένα γεγονός, δεν είναι ερώτημα. Αυτό το γεγονός δε σημαίνει τίποτα περισσότερο ή λιγότερο από την ύπαρξη κάποιων τρόπων συλλογισμού και επιχειρηματολογίας σχετικά με ιδέες που είναι ακαταμάχητες και αποφασιστικές, «αδιαφιλονίκητες από τη στιγμή που θα κατανοηθούν».*

Τα μαθηματικά έχουν ένα θέμα, και οι προτάσεις τους έχουν νόημα. Το νόημα όμως πρέπει να βρεθεί στην κοινή κατανόηση των ανθρώπινων υπάρξεων, όχι σε μια εξωτερική μη ανθρώπινη πραγματικότητα. Από αυτήν την άποψη, τα μαθηματικά είναι παρόμοια με μια ιδεολογία, μια θρησκεία ή μια μορφή τέχνης. Ασχολούνται με τις ανθρώπινες έννοιες και είναι κατανοητά μόνο μέσα στο γενικό πλαίσιο της κουλτούρας. Με άλλα λόγια, τα μαθηματικά είναι μια ανθρωπιστική σπουδή, μία από τις ανθρωπιστικές σπουδές.

Το ειδικό χαρακτηριστικό των μαθηματικών που τα διακρίνει από τις άλλες ανθρωπιστικές σπουδές, είναι η επιστημονικοφανής τους ποιότητα. Τα συμπεράσματά τους είναι ακαταμάχητα όπως τα συμπεράσματα της φυσικής επιστήμης. Δεν είναι απλά απόρροιες γνώμης ούτε υπόκεινται σε μόνιμη διαφωνία όπως οι ιδέες της λογοτεχνικής κριτικής.

Ως μαθηματικοί, ξέρουμε ότι επινοούμε ιδεατά αντικείμενα και μετά προσπαθούμε να ανακαλύψουμε τα γεγονότα σχετικά με αυτά. Κάθε φιλοσοφία που δεν μπορεί να διευθετήσει αυτή τη γνώση είναι πολύ μικρή. Δε χρειάζεται να καταφεύγουμε στο φορμαλισμό όταν μας επιτίθενται οι φιλόσοφοι. Ούτε χρειάζεται να παραδεχόμαστε ότι η πίστη μας στην αντικειμενικότητα της μαθηματικής αλήθειας είναι πλατωνική με την έννοια ότι απαιτεί μια ιδεατή πραγματικότητα ξέχωρη από την ανθρώπινη σκέψη. Το έργο του Lakatos και του Popper δείχνουν ότι η σύγχρονη φιλοσοφία είναι ικανή να αποδεχθεί την αλήθεια της μαθηματικής εμπειρίας. Αυτό σημαίνει αποδοχή της νομιμότητας των μαθηματικών όπως είναι: με την πιθανότητα να σφάλλουν, με την πιθανότητα να διορθώνονται, και γεμάτα νόημα.»

3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΣΚΕΨΗΣ

Συνοψίζοντας τα κύρια σημεία της θεώρησης των Μαθηματικών ως ανθρώπινης δραστηριότητας βλέπουμε ότι η μαθηματική δραστηριότητα περιλαμβάνει:

- επινόηση ιδεατών αντικειμένων και εννοιών
- κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και ιδεών
- ανακάλυψη των ιδιοτήτων των μαθηματικών αντικειμένων και εννοιών
- ανάπτυξη τρόπων συλλογισμού και επιχειρηματολογίας αποδεκτών στα Μαθηματικά

Η ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης σ' ένα τέτοιο πλαίσιο προϋποθέτει και στηρίζεται στην παράλληλη ανάπτυξη κάποιων διαδικασιών σκέψης, όπως η αφαιρετική διαδικασία, η διαδικασία γενίκευσης, οι διαδικασίες ομαδοποίησης και ταξινόμησης, οι διαδικασίες συλλογισμού και εξαγωγής συμπερασμάτων, η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Αυτές τις διαδικασίες θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

3.1 ΑΦΑΙΡΕΣΗ

'Οπως αναφέρουν και οι P. Davis & R. Hersh "είναι γνωστό ότι τα Μαθηματικά άρχισαν όταν η αντίληψη για τα τρία μήλα απελευθερώθηκε από τα τρία μήλα και έγινε ο αριθμός τρία" (P. Davis & R. Hersh, 1980, *Η Μαθηματική Εμπειρία*, σελ. 136). Αυτό είναι ένα παράδειγμα αφαίρεσης, διαδικασίας απαραίτητης για τη δημιουργία των μαθηματικών εννοιών.

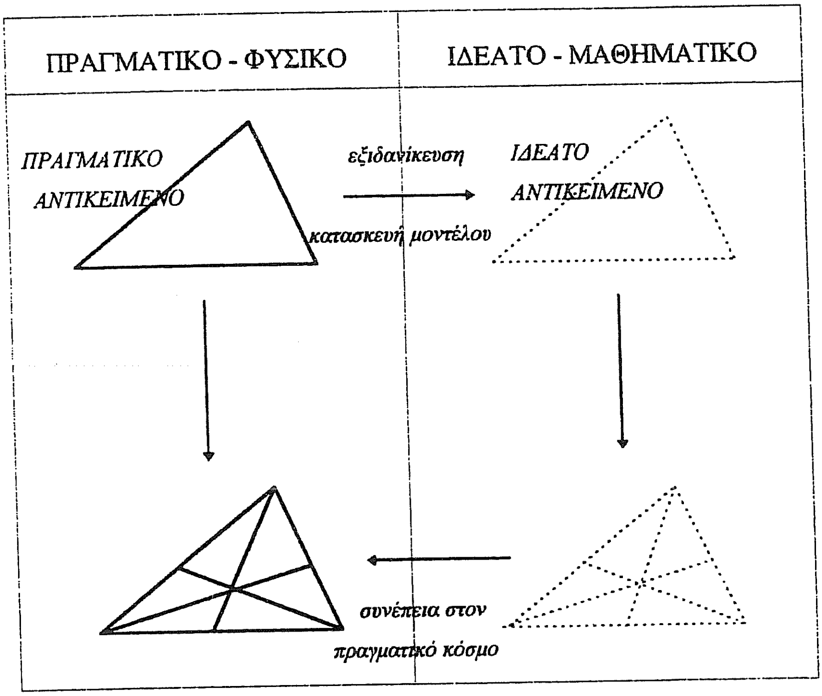
Μπορούμε να διακρίνουμε δύο είδη αφαιρετικής διαδικασίας στα Μαθηματικά, πολύ σημαντικά για τη δημιουργία των πρώτων μαθηματικών εννοιών: την αφαίρεση με απόσπαση (αποκοπή) και την αφαίρεση με εξιδανίκευση.

Αφαίρεση με απόσπαση (αποκοπή)

Πρόκειται για εκείνη τη διαδικασία όπου από τα πράγματα κρατάμε κάποιο(α) μόνο χαρακτηριστικά για τη δημιουργία της μαθηματικής έννοιας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα έννοιας που δημιουργείται αρχικά με τέτοια αφαίρεση είναι η έννοια του φυσικού αριθμού. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η έννοια του πληθικού αριθμού τρία δημιουργείται όταν από τις διάφορες συλλογές που αποτελούνται από τρία πράγματα κρατάμε (αποσπάμε) μόνο την πληθική ιδιότητα της ποσότητάς τους και δε λαμβάνουμε υπόψιν τις υπόλοιπες ιδιότητες των συγκεκριμένων πραγμάτων που αποτελούν αυτές τις συλλογές.

<u>Αφαίρεση με εξιδανίκευση</u>

Όταν σχεδιάζουμε μία ευθεία γραμμή στο χαρτί με το μολύβι, αυτή είναι μία υλική αναπαράσταση της ευθείας. Η υλική αναπαράσταση, που μπορεί επίσης να είναι ένα τεντωμένο νήμα, το ίχνος που δημιουργείται όταν διπλώνουμε ένα χαρτί ή ακόμη η γραμμή που δημιουργείται εκεί που ένας τοίχος ενώνεται με το πάτωμα, έχει πάντα κάποιο πάχος, κάποιες παραμορφώσεις.



σχήμα κατασκευής μαθηματικού μοντέλου με εξειδανίκευση

Το ιδεατό μαθηματικό αντικείμενο, η ευθεία γραμμή, -δηλαδή "εκείνη που απέχει το ίδιο από όλα τα σημεία της" (Ευκλείδης) ή ακόμη εκείνη "η καμπύλη που κάθε τμήμα της είναι η μικρότερη απόσταση ανάμεσα στα δύο σημεία που ορίζουν τα άκρα αυτού του τμήματος"- δημιουργήθηκε από αυτές τις υλικές αναπαραστάσεις μέσα από διαδικασίες τελειοποίησης, εξιδανίκευσης των ιδιοτήτων των υλικών αναπαραστάσεων.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα βασικών μαθηματικών εννοιών που δημιουργούνται αρχικά με εξιδανίκευση αποτελούν όλες οι γεωμετρικές έννοιες, όπως το σημείο, η γραμμή, το επίπεδο, τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα ή ακόμη και τα γεωμετρικά σώματα. Ο Αριστοτέλης, στο έργο του *Μετά τα Φυσικά*, περιέγραψε αυτή τη διαδικασία λέγοντας ότι ο μαθηματικός απομακρύνει οτιδήποτε αισθητό και αφήνει μόνο την ποσότητα και τη συνέχεια του χώρου. Η δημιουργία των σύγχρονων μαθηματικών μοντέλων είναι παραλλαγή αυτής της αριστοτελικής θεώρησης.

3.2 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

Η διαδικασία γενίκευσης μπορούμε να πούμε ότι είναι συμπληρωματική της αφαιρετικής διαδικασίας στη δημιουργία των μαθηματικών εννοιών. Με τον όρο γενίκευση εννοούμε τη διαδικασία εκείνη με την οποία εξάγουμε συμπεράσματα από τις συγκεκριμένες ή επαναλαμβανόμενες καταστάσεις.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα γενίκευσης.

Παράδειγμα 1

Κατάσταση 1: Το 10 διαιρείται με το 2.

Κατάσταση 2: Το 20 διαιρείται με το 2.

Γενίκευση 1: Κάθε αριθμός που τελειώνει σε 0 διαιρείται με το 2.

Γενίκευση 2: Κάθε φυσικός αριθμός που τελειώνει σε 0 διαιρείται με το 2.

Γενίκευση 3: Κάθε ακέραιος αριθμός που τελειώνει σε 0 διαιρείται με το 2.

Γενίκευση 4: Κάθε ακέραιος αριθμός που τελειώνει σε 0, 2, 4, 6, 8 διαιρείται με το 2.

Παράδειγμα 2

Κατάσταση: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$.

Γενίκευση: Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνΑ$.

Παράδειγμα 3

Κατάσταση 1: Αν έχουμε πέντε μαρκαδόρους και ξεχωρίσουμε τους τρεις, τότε αυτοί είναι λιγότεροι από τους αρχικούς μαρκαδόρους.

Γενίκευση 1: Όταν έχουμε δύο σύνολα Α και Β, όπου το Β είναι γνήσιο υποσύνολο του Α, τότε το Α έχει περισσότερα στοιχεία από το Β.

Κατάσταση 2: Αν πάρουμε ως Α το σύνολο των φυσικών αριθμών και ως Β το σύνολο των άρτιων αριθμών, τότε υπάρχει μία 1 προς 1 αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων ($n \to 2n$), άρα τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Γενίκευση 2: Η πρόταση της γενίκευσης 1 ισχύει μόνο στην περίπτωση που τα σύνολα Α και Β έχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Γενίκευση 3: Ένα σύνολο Α έχει άπειρο πλήθος στοιχείων όταν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο αυτού που να έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το Α.

Παράδειγμα 4

Γενίκευση διαδικασίας: Για να προσθέσουμε δεκαδικούς αριθμούς τους γράφουμε τον έναν κάτω από τον άλλο με τέτοιο τρόπο ώστε το δεκαδικό μέρος του ενός να βρίσκεται ακριβώς κάτω από το δεκαδικό μέρος των άλλων (οι υποδιαστολές να βρίσκονται στην ίδια ευθεία, η μία κάτω από την άλλη). Τότε προσθέτουμε όπως στους ακέραιους αριθμούς.

Εξετάζοντας τα παραπάνω παραδείγματα διαπιστώνουμε ότι μια γενίκευση αφορά την επέκταση του συνόλου (πεδίου) αλήθειας της πρότασης, μπορεί όμως να απαιτεί τροποποίηση της πρότασης για να γίνει δυνατή αυτή η επέκταση. Με άλλα λόγια υπάρχουν περιπτώσεις όπου μπορούμε να μεταφέρουμε αυτούσια τα δεδομένα μιας πρότασης, υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου τα δεδομένα πρέπει να τροποποιηθούν για να ισχύει η πρόταση. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, η επέκταση του πεδίου αλήθειας μιας πρότασης χωρίς την κατάλληλη τροποποίηση των δεδομένων αυτής, οδηγεί σε λανθασμένες παραδοχές. Συχνά πολλά από τα λάθη των μαθητών (παιδιών) οφείλονται σε τέτοιου είδους γενικεύσεις και μεταφορές. Πρέπει να επισημάνουμε εδώ ότι η τάση για γενίκευση είναι μια αυθόρμητη διαδικασία που χαρακτηρίζει τον τρόπο σκέψης των ανθρώπων. Ο άνθρωπος (και ακόμη περισσότερο τα παιδιά) έχει την τάση να γενικεύει αυθόρμητα τις επαναλαμβανόμενες εμπειρίες του, πολλές φορές χωρίς λογικό έλεγχο, επεκτείνοντας μάλιστα το πλαίσιο αναφοράς αυτών των εμπειριών. Έτσι π.χ. πολύ συχνά βλέπουμε τους μαθητές να θεωρούν ότι η ισότητα $α^2 = β^2+γ^2$ ισχύει σε οποιοδήποτε τρίγωνο, ή να μεταφέρουν τον αλγόριθμο πρόσθεσης ακεραίων αριθμών στους κλασματικούς αριθμούς, ή ακόμη να αναγάγουν τη μοναδικότητα λύσης των προβλημάτων, που συνήθως καλούνται να επιλύσουν στα πλαίσια των σχολικών Μαθηματικών, σε χαρακτηριστικό οποιουδήποτε μαθηματικού προβλήματος, αλλά και σε χαρακτηριστικό των ίδιων των Μαθηματικών. Τα μικρά παιδιά θεωρούν π.χ. ότι τρίγωνα είναι μόνο τα ισόπλευρα τρίγωνα, μια που σχεδόν όλες οι αναπαραστάσεις τριγώνων με τις οποίες έρχονται σε επαφή στο νηπιαγωγείο και στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού είναι αναπαραστάσεις ισόπλευρου τριγώνου.

3.3 ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ - ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ

Οι διαδικασίες ομαδοποίησης και ταξινόμησης συμπληρώνουν τις διαδικασίες αφαίρεσης και γενίκευσης. Αν θεωρήσουμε το παράδειγμα δημιουργίας του πληθικού αριθμού τρία, που δόθηκε παραπάνω, βλέπουμε ότι προϋποθέτει την ομαδοποίηση των διάφορων συλλογών που αποτελούνται από τρία πράγματα. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η δημιουργία και κατανόηση οποιασδήποτε έννοιας προϋποθέτει ότι κάποιοι τουλάχιστον αντιπρόσωποι αυτής της έννοιας έχουν **ομαδοποιηθεί** από το παιδί (ή και τον ενήλικα). Δηλαδή το παιδί (ή και ο ενήλικας) έχει αναγνωρίσει ότι κάποια αντικείμενα ή φαινόμενα ή γεγονότα ή πρόσωπα μοιάζουν (έχουν κοινά χαρακτηριστικά) μεταξύ τους.

Η **ταξινόμηση** είναι η διαδικασία με την οποία:

- μία ομάδα από αντικείμενα (ή φαινόμενα ή γεγονότα ή πρόσωπα) διαμερίζεται σε επιμέρους, πιο ειδικές ομάδες. Π.χ. τα λουλούδια μπορούν να διαμερισθούν σε ομάδες από τριαντάφυλλα, γαρύφαλλα, τουλίπες κλπ.

- διάφορες συλλογές μπορούν να αποτελέσουν μια γενικότερη ομάδα. Π.χ. οι ομάδες από τρίγωνα, τετράγωνα, κύκλους μπορούν να ανήκουν σε μια γενικότερη ομάδα, την ομάδα των γεωμετρικών σχημάτων.

Η διαδικασία ταξινόμησης απαιτεί μια σχέση ισοδυναμίας με την οποία τα επιμέρους αντικείμενα κατατάσσονται στις ομάδες διαμερισμού. (Βλ. την παράγραφο για τον Αριστοτέλη).

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι μαθηματικές έννοιες κατασκευάζονται και ορίζονται μέσα από διαδικασίες ομαδοποίησης και ταξινόμησης αντικειμένων ή φαινομένων ή γεγονότων ή προσώπων (Βλ. την παράγραφο 1.1.2). Ωστόσο μια τέτοια προσσέγγιση των μαθηματικών εννοιών στην πρώτη σχολική ηλικία (νηπιαγωγείο και πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου) συναντά δυσκολίες. Αυτές οφείλονται στην τάση των παιδιών να ομαδοποιούν με βάση περιστασιακά και λειτουργικά χαρακτηριστικά και όχι με βάση κατηγορικά (δηλ. εννοιολογικά) χαρακτηριστικά. Π.χ. ζητάμε από τα παιδιά να χωρίσουν σε ομάδες ίδιων αντικειμένων μια συλλογή που αποτελείται από ένα πιάτο, ένα ποτήρι, ένα φλυτζάνι, ένα μπουκάλι γάλα, μια φέτα ψωμί και ένα πακέτο βούτυρο. Μια κατηγορική ομαδοποίηση έχει ως απάντηση τη δημιουργία δύο ομάδων, όπου η μία αποτελείται από τα σκεύη της συλλογής και η άλλη από τα τρόφιμα της συλλογής. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις τα παιδιά φτιάχνουν μια ομάδα που αποτελείται από όλα τα τρόφιμα μαζί με το φλυτζάνι και το πιάτο, λέγοντας ότι αυτά αποτελούν τα στοιχεία του πρωινού τους.

Η συμπεριφορά αυτή των παιδιών - σημειώνουμε εδώ ότι αντίστοιχη συμπεριφορά παρατηρήθηκε σε πρωτόγονους λαούς και σε κάποιες αποκλεισμένες ομάδες πληθυσμού των ανεπτυγμένων χωρών - ερμηνεύτηκε από διάφορους ψυχολόγους (J. Piaget, L. Levy-Bruhl) ως απόδειξη της διαφορετικής λογικής των παιδιών. Χαρακτηρίζονται λοιπόν τα παιδιά ως “προλογικά”.

Αποτελέσματα όμως άλλων ερευνών έδειξαν ότι τα παιδιά μπορούν σε ορισμένες περιπτώσεις, όταν συντρέχει λόγος, όπως π.χ. η αναγκαιότητα τακτοποίησης αντικειμένων, να ομαδοποιούν με κατηγορικά κριτήρια. Έτσι, η συμπεριφορά αυτή