των παιδιών, όπως και αυτή των πρωτόγονων λαών ή των αποκλεισμένων ομάδων των ανεπτυγμένων κοινωνιών δεν ερμηνεύεται ως λογική ανωριμότητα. Θεωρείται ότι η λογική ικανότητα είναι ίδια και ότι αυτό που διαφοροποιεί τη συμπεριφορά είναι τα κριτήρια ομαδοποίησης. Το κατηγορικό κριτήριο θεωρείται ως πολιτισμικό χαρακτηριστικό, αποτέλεσμα της κοινωνικής και ιστορικής εξέλιξης (L. Vygotsky, 1962, W. Labov, 1978, A. Luria, 1992), η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με τη γλωσσική εξέλιξη. Η δε μη χρησιμοποίησή του θεωρείται ως αποτέλεσμα της μη αναγκαιότητας λειτουργίας του ατόμου με τέτοια κριτήρια.

3.4 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΕΞΑΓΩΓΗΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ

Υπάρχουν δύο είδη διαδικασιών εξαγωγής συμπερασμάτων: ο **επαγωγικός** και ο **παραγωγικός** τρόπος.

Επαγωγικός τρόπος εξαγωγής συμπερασμάτων (ή **επαγωγή**) είναι η διαδικασία με την οποία γενικεύουμε στηριζόμενοι σε πεπερασμένο αριθμό περιπτώσεων. Κάτι συμβαίνει μία, δύο, τρεις, τέσσερεις, ...,κ φορές, άρα θα συμβαίνει πάντα. Η διάψευση της γενίκευσης θα συμβεί όταν ανακαλύψουμε μία περίπτωση που δε θα συμφωνεί με το συμπέρασμα.

Παραγωγικός τρόπος εξαγωγής συμπερασμάτων (ή **παραγωγή**, ή **απαγωγή**) είναι η διαδικασία με την οποία εξάγουμε συμπεράσματα από ήδη γνωστές ή αποδεδειγμένες προτάσεις, από το γενικό στο μερικό και τη χρήση λογικών διαδικασιών όπως η συνεπαγωγή ($A \Rightarrow B$) και η ισοδυναμία ($A \Leftrightarrow B$), οι οποίες μπορούν να ελεγχθούν ανεξάρτητα από το περιεχόμενο των προτάσεων. Π.χ. η συμπερασματική διαδικασία "αν $A \Rightarrow B$ και $B \Rightarrow \Gamma$, τότε $A \Rightarrow \Gamma$" ισχύει ανεξάρτητα από το ειδικό περιεχόμενο των A, B και Γ.

Οι διαδικασίες συλλογισμού και εξαγωγής συμπερασμάτων που είναι αποδεκτές στα Μαθηματικά στηρίζονται σε τέσσερεις στοιχειώδεις λογικές σχέσεις μεταξύ προτάσεων.

Πρόταση θεωρείται μία έκφραση για την οποία μπορούμε να αποφανθούμε πότε είναι αληθής και πότε είναι ψευδής σε σχέση με ένα σύνολο αναφοράς. Το υποσύνολο του συνόλου αναφοράς όπου η πρόταση είναι αληθής λέγεται σύνολο αλήθειας. Π.χ. η πρόταση "ο αριθμός είναι άρτιος", με πεδίο αναφοράς το σύνολο των φυσικών αριθμών, είναι αληθής στο σύνολο των άρτιων αριθμών και ψευδής στο σύνολο των περιττών αριθμών. Η ίδια πρόταση με πεδίο αναφοράς τους άρτιους αριθμούς είναι παντού αληθής, ενώ με πεδίο αναφοράς τους περιττούς αριθμούς είναι παντού ψευδής.

Οι τέσσερεις στοιχειώδεις λογικές πράξεις (σχέσεις) μεταξύ δύο προτάσεων είναι: η **ισοδυναμία**, η **άρνηση**, η **σύζευξη** και η **διάζευξη**.

Ισοδυναμία μεταξύ δύο προτάσεων p και q: Δύο προτάσεις p και q λέγονται ισοδύναμες όταν έχουν το ίδιο σύνολο αλήθειας, είναι δηλαδή αληθείς ταυτόχρονα και ψευδείς ταυτόχρονα. Π.χ. Οι προτάσεις "Ο αριθμός είναι άρτιος" και "Ο αριθμός λήγει σε 0, 2, 4, 6, 8" είναι ισοδύναμες με πεδίο αναφοράς τους φυσικούς αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα που χρησιμοποιούμε.

Η σχέση αυτή περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας αλήθειας της p⇔q

	p	όχι p
q	Α	Ψ
όχι q	Ψ	Α

Άρνηση: Μια πρόταση q λέγεται άρνηση της πρότασης p, όταν είναι αληθής εκεί που η p είναι ψευδής και ψευδής εκεί που η p είναι αληθής. Π.χ. η πρόταση "ο αριθμός είναι άρτιος" είναι η άρνηση της πρότασης "ο αριθμός είναι περιττός" με πεδίο αναφοράς τους φυσικούς αριθμούς, ενώ δεν είναι η άρνησή της με πεδίο αναφοράς τους πραγματικούς αριθμούς. Σ' αυτήν την περίπτωση η άρνηση της πρότασης "ο αριθμός είναι άρτιος" είναι η πρόταση "ο αριθμός δεν είναι άρτιος".

Η σχέση αυτή περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας αλήθειας της άρνησης

p	q=όχι p
Α	Ψ
Ψ	Α

<u>Διάζευξη δύο προτάσεων</u> : Η διάζευξη δύο προτάσεων p και q είναι μία πρόταση που συμβολίζεται pVq (p ή q), η οποία είναι αληθής εκεί που είναι αληθής μία τουλάχιστον από τις δύο προτάσεις και ψευδής εκεί που είναι ψευδείς και οι δύο προτάσεις. Π.χ. Η πρόταση "ο αριθμός είναι άρτιος ή περιττός" είναι η διάζευξη των προτάσεων "ο αριθμός είναι άρτιος" και "ο αριθμός είναι περιττός". Με σύνολο αναφοράς τους φυσικούς αριθμούς είναι παντού αληθής, ενώ με σύνολο αναφοράς τους πραγματικούς αριθμούς είναι αληθής στο σύνολο των ακεραίων αριθμών και ψευδής στους υπόλοιπους αριθμούς.

Η σχέση αυτή περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας αλήθειας της pVq

	p	όχι p
q	Α	Α
όχι q	Α	Ψ

<u>Σύζευξη δύο προτάσεων</u>: Η σύζευξη δύο προτάσεων p και q είναι μία πρόταση που συμβολίζεται pΛq (p και q), η οποία είναι αληθής εκεί που είναι αληθείς και οι δύο προτάσεις και ψευδής εκεί που είναι ψευδής μία τουλάχιστον από τις δύο προτάσεις. Έτσι, π.χ. Η πρόταση "ο αριθμός είναι άρτιος και περιττός" είναι η σύζευξη των προτάσεων "ο αριθμός είναι άρτιος" και "ο αριθμός είναι περιττός". Με σύνολο αναφοράς τους φυσικούς αριθμούς είναι παντού ψευδής και το ίδιο συμβαίνει με σύνολο αναφοράς τους πραγματικούς αριθμούς. Ενώ η πρόταση "ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 2 και πολλαπλάσιο του 3" είναι η σύξευξη των προτάσεων "ο

αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 2" και "ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 3". Είναι δε αληθής στο σύνολο των πολλαπλασίων του 6 και ψευδής στους υπόλοιπους φυσικούς ή πραγματικούς αριθμούς.

Η σχέση αυτή περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας αλήθειας της p∧q

	p	όχι p
q	Α	Ψ
όχι q	Ψ	Ψ

Μία άλλη λογική πράξη μεταξύ προτάσεων είναι η **συνεπαγωγή** (p⇒q) μεταξύ δύο προτάσεων. Η συνήθης διατύπωση είναι "όταν (συμβαίνει η) p, τότε (συμβαίνει η) q". Η συνεπαγωγή αν και μοιάζει πολύ στη διατύπωση με την ισοδυναμία, είναι διαφορετική πράξη. Η ομοιότητα όμως αυτή είναι πηγή πολλών λαθών και λανθασμένων γενικεύσεων στα Μαθηματικά, δεδομένου ότι πολλές φορές η συνεπαγωγή ερμηνεύεται ως ισοδυναμία των δύο προτάσεων.

Ο πίνακας αλήθειας της συνεπαγωγής είναι ο παρακάτω:

Πίνακας αλήθειας της p⇒q

	p	όχι p
q	Α	Α
όχι q	Ψ	Α

Ο παραπάνω πίνακας αλήθειας δηλώνει ότι **η συνεπαγωγή είναι αληθής** όταν είναι αληθής η q (δηλαδή το συμπέρασμα) ή όταν είναι ψευδής η p (δηλαδή η υπόθεση). Έτσι π.χ. η συνεπαγωγή "όταν ο αριθμός 3 είναι άρτιος, τότε βρέχει" είναι αληθής πρόταση, άσχετα με την αλήθεια των επιμέρους προτάσεων ή τη "λογικότητα" της πρότασης. Με άλλα λόγια όταν ισχύει μία συνεπαγωγή δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπέρασμα για την ισχύ των επιμέρους προτάσεων παρά μόνο όταν ξέρουμε ότι ισχύει η υπόθεση. Ενώ όταν γνωρίζουμε ότι ισχύει το συμπέρασμα δεν μπορούμε να βεβαιώσουμε ή να απορρίψουμε την ισχύ της υπόθεσης.

Μία από τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές σχετικά με τα Μαθηματικά έγκειται στο ότι κατά τη διαπραγμάτευση των Μαθηματικών πρέπει να εγκαταλείψουν τον επαγωγικό τρόπο σκέψης, τον οποίο συνήθως χρησιμοποιούμε στην καθημερινή ζωή και να υιοθετήσουν τον παραγωγικό τρόπο σκέψης. Το γεγονός αυτό αποτελεί σημείο σύγκρουσης στη μαθηματική εκπαίδευση, κυρίως γιατί στις μικρές ηλικίες ο τρόπος παρουσίασης των Μαθηματικών στο σχολείο είναι επαγωγικός. Δεν υπάρχουν αποδείξεις και η παρουσίαση των ιδιοτήτων και των προτάσεων στηρίζεται στην παρουσίαση κάποιων (1, 2, το πολύ 3 παραδειγμάτων). Η επαγωγική παρουσίαση οφείλεται στο γεγονός ότι τα παιδιά δεν μπορούν να χειρισθούν ικανοποιητικά τις λογικές πράξεις που απαιτούνται για την παραγωγική διαδικασία.

Ένα από τα ζητήματα που απασχολούν τη Διδακτική των Μαθηματικών αφορά στο είδος του διδακτικού περιβάλλοντος που πρέπει να δημιουργήσουμε στην τάξη, έτσι ώστε να αντιμετωπίσουμε τη σύγκρουση μεταξύ των δύο τρόπων σκέψης. Ναι μεν να μη χρησιμοποιούμε τον παραγωγικό τρόπο εξαγωγής συμπερασμάτων, αλλά ταυτόχρονα να εισάγουμε τα παιδιά στην αναγκαιότητα αυτού. Η αιτιολόγηση των απαντήσεων (η ερώτηση "γιατί;") αποτελεί τον πυρήνα της παραγωγικής σκέψης. Η ανάπτυξη λοιπόν επιχειρηματολογίας, άσχετα με τη φύση των κριτηρίων που χρησιμοποιούν τα παιδιά, αποτελεί ένα σημαντικό παράγοντα ανάπτυξης της σκέψης και καθορίζει τη στάση που διαμορφώνουν τα παιδιά απέναντι στα Μαθηματικά και τη μαθηματική γνώση. Ταυτόχρονα δίνει τη δυνατότητα στα παιδιά να εκφράσουν την πραγματική γνώση τους και στο διδάσκοντα να αντιληφθεί τι πραγματικά ξέρουν τα παιδιά. Προσφέρει επίσης την ευκαιρία δημιουργίας καταστάσεων κοινωνικο-γνωστικής σύγκρουσης και κοινωνικής αλληλεπίδρασης, οι οποίες θεωρούνται απαραίτητες για την οικοδόμηση της γνώσης.

3.5 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Η επιστημολογική προσέγγιση των Μαθηματικών που υιοθετεί η Διδακτική των Μαθηματικών είναι ότι τα Μαθηματικά και η μαθηματική γνώση αναπτύσσονται γύρω από **προβλήματα**, πρακτικά ή θεωρητικά. Έτσι **η διαδικασία επίλυσης**

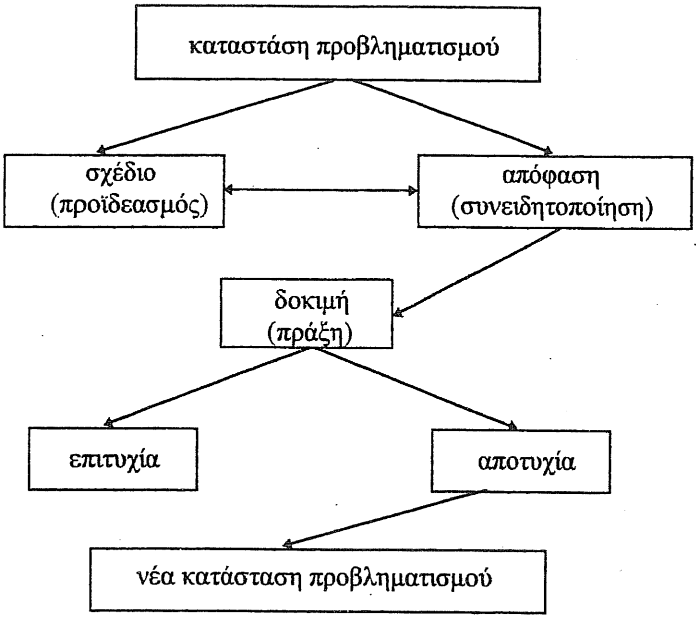
προβλημάτων αποτελεί ένα από τα κεντρικά θέματα της μαθηματικής δραστηριότητας.

Όσο εύκολο είναι να περιγράψει κανείς γενικά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος, τόσο δύσκολο είναι "να διδάξει" τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων: κάθε πρόβλημα εμπλέκει διαφορετικές μαθηματικές έννοιες, διαφορετικές σχέσεις μεταξύ των επιμέρους στοιχείων, διαφορετικές μαθηματικές διαδικασίες, διαφορετικές στρατηγικές… Έτσι η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων συνδέεται στη διεθνή βιβλιογραφία με την **ευρετική** και εξετάζεται μαζί με την **ανακάλυψη** και την **επινόηση**.

Ο G. Polya, θεωρώντας ότι υπάρχει μια τέχνη της ανακάλυψης και πιστεύοντας ότι η ικανότητα επίλυσης μπορεί να ενισχυθεί με την επιδέξια διδασκαλία, εξερευνά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων στα Μαθηματικά στο βιβλίο του "*Πώς να το λύσω;*" (*How to solve it?*, 1957). Εκεί παρουσιάζει ένα σφαιρικό σχέδιο για τη διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, το οποίο περιλαμβάνει τέσσερεις φάσεις:

Πρώτον: Πρέπει να κατανοήσουμε το πρόβλημα.
Δεύτερον: Πρέπει να βρούμε τη σχέση ανάμεσα στα δεδομένα και στο άγνωστο. Ίσως να είμαστε υποχρεωμένος να εξετάσουμε βοηθητικά προβλήματα, αν δεν μπορεί να βρεθεί μια άμεση σχέση. Τελικά θα πρέπει να βρούμε ένα σχέδιο για τη λύση.
Τρίτον: Εκτελούμε το σχέδιο.
Τέταρτον: Εξετάζουμε τη λύση που βρήκαμε.
(σελ. 33, της ελληνικής έκδοσης)

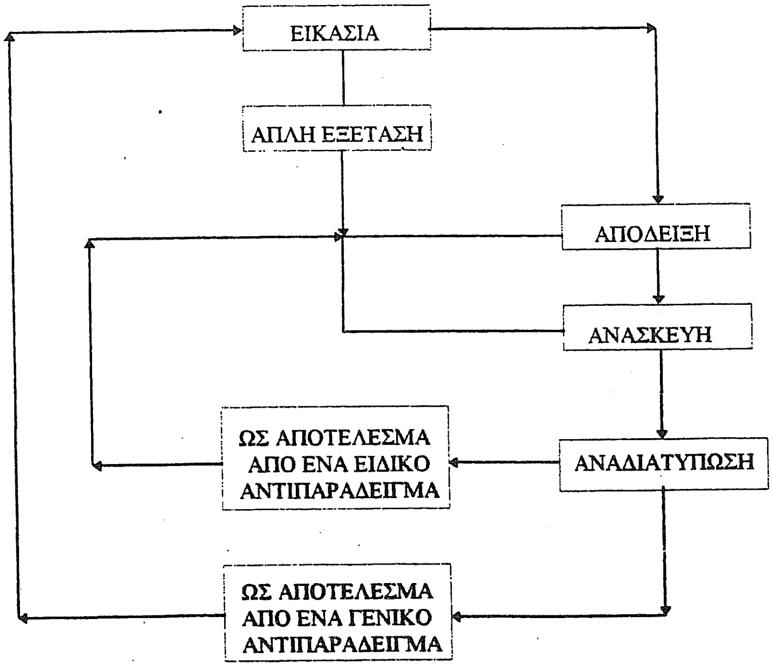
Οι τέσσερεις αυτές φάσεις που παρουσιάζει ο G. Polya αποτελούν πράγματι την ουσία της διαδικασίας επίλυσης κάθε προβλήματος. Είναι δε πολύ εύκολο να αναγνωριστούν και στο σχεδιάγραμμα αντιμετώπισης των προβληματικών καταστάσεων που ακολουθεί. (ΥΠΕΠΘ, Π.Ι., βιβλίο δραστηριοτήτων για το νηπιαγωγείο, σελ. 315).



Ένα πιο αναλυτικό μοντέλο της διαδικασίας ανακάλυψης ενός μαθηματικού γεγονότος (πρόταση, θεώρημα, αποτέλεσμα) παρουσιάζει ο I. Lakatos στο βιβλίο του "Proofs and Refutations" (1976). Το μοντέλο αυτό θεωρεί την ανακάλυψη ενός νέου γεγονότος ως αποτέλεσμα μιας δυναμικής διαδικασίας αναδιοργάνωσης (ανασκευής) των πληροφοριών που λαμβάνει χώρα με τη βοήθεια και την επίδραση αντιπαραδειγμάτων.

Το παράδειγμα της ευρετικής μεθόδου για τις αποδείξεις και τις ανασκευές παρουσιάζεται από τον I. Lakatos ως ένα μοντέλο για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης γενικά, θεωρώντας έτσι ότι μπορεί να αποτελέσει και παράδειγμα διαδικασίας ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης από το άτομο (μαθητή, φοιτητή, ερευνητή).

Οι P.J. Davis & R. Hersh (1980, σελ. 282) παρουσιάζουν ένα σχεδιάγραμμα του μοντέλου του I. Lakatos για την ερευτική μέθοδο της μαθηματικής ανακάλυψης:



Αναλύοντας το μοντέλο αυτό διαπιστώνουμε ότι η δομή του δε διαφέρει από τη δομή του μοντέλου του Polya. Η διαφορά τους έγκειται στο ότι ο καθένας τους παρουσιάζει αναλυτικότερα, δίνοντας δηλαδή μεγαλύτερη έμφαση, τη φάση εκείνη που θεωρεί σημαντικότερη: έτσι ο Polya δίνει έμφαση στη διαδικασία του σχεδίου (δηλαδή το πέρασμα από την εξέταση στην απόδειξη), ενώ ο Lakatos δίνει έμφαση στην ανασκευή (δηλαδή στον έλεγχο της λύσης και στο πέρασμα από το λάθος αποτέλεσμα στην αναδιατύπωση του προβλήματος).

Αναλύοντας τις φάσεις της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων και με βάση τα παραπάνω σχήματα περιγραφής της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων, διαπιστώνουμε ότι η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει λειτουργίες του ατόμου (π.χ. παρατήρηση, δράση, λήψη απόφασης, πειραματισμό, αναζήτηση, έλεγχο, αναπαραστατική λειτουργία,...) στα πλαίσια τριών ομάδων καταστάσεων:

- **καταστάσεις δράσης**, όπου το άτομο πειραματίζεται με τα δεδομένα, τα αναλύει, παίρνει αποφάσεις, εφαρμόζει διαδικασίες.

- **καταστάσεις επικοινωνίας**, όπου το άτομο προσπαθεί να εκφρασθεί, να αναπαραστήσει σε κοινό κώδικα, να επικοινωνήσει με το περιβάλλον, να ανταλλάξει πληροφορίες, να διατυπώσει τα συμπεράσματά του.

- **καταστάσεις ελέγχου**, όπου το άτομο χρειάζεται να επιβεβαιώσει, να αιτιολογήσει ή να δικαιολογήσει τις αποφάσεις του και τη δράση του.

Οι τρεις προαναφερθείσες καταστάσεις (δράσης, επικοινωνίας και ελέγχου) συναντώνται σε όλες τις φάσεις της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων στην τάξη. Έτσι π.χ. έλεγχος μπορεί να υπάρχει και κατά τη φάση του σχεδίου, όταν εξετάζουμε τις διάφορες ιδέες και προσπαθούμε να αποφασίσουμε τι θα κάνουμε. Στην ίδια φάση μπορεί να υπάρχει και επικοινωνία στην περίπτωση που οι μαθητές ασχολούνται ομαδικά με ένα πρόβλημα. Επικοινωνία υπάρχει και στη φάση ελέγχου της λύσης, όπου ο μαθητής προσπαθεί να διατυπώσει την αιτιολογία της ορθότητας ή της μη ορθότητας της λύσης του. Στη φάση ελέγχου της λύσης υπάρχει κατάσταση δράσης αφού ο μαθητές εφαρμόζουν κάποια διαδικασία ελέγχου. Ως παράδειγμα των παραπάνω να μελετηθεί η επίλυση του προβλήματος μοιρασιάς της τούρτας, που δίνεται στο παράρτημα.

Οι καταστάσεις λοιπόν δράσης, επικοινωνίας και ελέγχου είναι συστατικά της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων και κατ' επέκταση της δημιουργίας εννοιών και άρα είναι απαραίτητο να υπάρχουν και να εναλλάσσονται στις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων που λαμβάνουν χώρα στην τάξη.

4. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

4.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μια ***μαθηματική έννοια*** είναι ένα "αντικείμενο" ιδεατό, όπως όλα τα φαινόμενα που διαπραγματεύονται τα Μαθηματικά, καλά ορισμένο στα πλαίσια μιας θεωρίας. Έτσι θεωρούμενη η μαθηματική έννοια είναι ανεξάρτητη από κάθε πλαίσιο και συγκυρία, από κάθε άτομο και κατέχει μια θέση στο σώμα της επιστημονικής γνώσης που είναι κοινωνικά αναγνωρισμένη ως Μαθηματικά.

Ο ορισμός μιας μαθηματικής έννοιας γίνεται με τη βοήθεια ιδιοτήτων της, ενός θεωρήματος ύπαρξης ή μιας πραγματικής κατασκευής. Από αυτόν προκύπτει το ***πλάτος της έννοιας***, δηλαδή όλα τα ιδιαίτερα μαθηματικά αντικείμενα που αποτελούν την έννοια, και το ***βάθος της έννοιας***, δηλαδή όλες οι χαρακτηριστικές ιδιότητες της έννοιας και τα κοινά γνωρίσματα των μαθηματικών αντικειμένων που αποτελούν το πλάτος της έννοιας.

Από επιστημονική, λοιπόν, άποψη ο ορισμός μιας έννοιας είναι το στοιχείο εκείνο που προσδιορίζει την έννοια στα πλαίσια των Μαθηματικών. Εντούτοις από το μαθηματικό ορισμό μιας έννοιας δεν μπορούμε να γνωρίσουμε, να κατανοήσουμε την έννοια. Η ***σημασία μιας έννοιας*** βρίσκεται πέρα από τη λογική και το μαθηματικό φορμαλισμό (A. Sierpinska, 1992, σελ. 30). Συνδέεται δε με το ***πλαίσιο*** στο οποίο λειτουργεί η έννοια: τις **διαδικασίες** και τα **προβλήματα** στα οποία εμπλέκεται, τις **σχέσεις** της με τις άλλες μαθηματικές έννοιες, τις **αναπαραστάσεις** της.

Η **σημασία** δηλαδή μιας έννοιας δεν μπορεί να προκύψει μόνο από τον ορισμό της. Το πεδίο εφαρμογής της (προβλήματα όπου εμπλέκεται και χρήσεις της), τα θεωρήματα και οι υπόλοιπες ιδιότητες των αντικειμένων (αποτελέσματα, διαδικασίες και τεχνικές), οι σχέσεις της έννοιας με τις άλλες έννοιες, τα σύμβολα και οι τρόποι αναπαράστασής της είναι συστατικά του **νοήματος της έννοιας**.

Έτσι μια μαθηματική έννοια μπορεί να έχει έναν ορισμό (ή πολλούς ισοδύναμους από επιστημονική άποψη ορισμούς -π.χ. το παραλληλόγραμμο μπορεί να ορισθεί είτε ως το τετράπλευρο του οποίου οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες μεταξύ τους, είτε ως το τετράπλευρο του οποίου οι απέναντι πλευρές είναι ίσες μεταξύ τους), έχει όμως πολλές σημασίες, επιστημολογικά διαφορετικές μεταξύ τους (π.χ. το εμβαδόν ως επιφάνεια και το εμβαδόν ως μέτρο επιφανείας).

Η ***διαφοροποίηση μεταξύ ορισμού και σημασίας*** μιας έννοιας, εργαλείο απαραίτητο για την ιστορική και επιστημολογική ανάλυση μιας μαθηματικής έννοιας, είναι ***εργαλείο απαραίτητο και για τη διδακτική ανάλυση μιας έννοιας***.

Στα πλαίσια του παραπάνω προβληματισμού, ο G. Vergnaud (1991) θεωρεί ότι κατά τη μελέτη της ανάπτυξης και κατασκευής της μαθηματικής γνώσης πρέπει να λαμβάνουμε υπόψιν το **εννοιολογικό πεδίο** μιας έννοιας. Με τον όρο αυτό εννοεί την τριάδα (**S, I,** ***S***) όπου

S είναι το σύνολο των καταστάσεων (προβλημάτων) που δίνουν νόημα στην έννοια,

I είναι το σύνολο των λειτουργικών αναλλοίωτων που σχετίζονται με την έννοια, δηλαδή το σύνολο των ιδιοτήτων, θεωρημάτων, διαδικασιών, αλγορίθμων και τεχνικών που σχετίζονται με την έννοια, και

S είναι το σύνολο των σημαινόντων (αναπαραστάσεων και συμβολισμών) που επιτρέπουν την αναπαράσταση της έννοιας, των ιδιοτήτων της και των καταστάσεων που η έννοια μας επιτρέπει να συλλάβουμε.

Σ' αυτό το πλαίσιο η **αντίληψη μιας έννοιας (conception)** είναι το **ανάλογον** της μαθηματικής έννοιας που έχει το υποκείμενο, με άλλα λόγια **η γνώση του υποκειμένου για την έννοια**. Σημειώνουμε εδώ ότι στις σύγχρονες θεωρήσεις η μαθηματική γνώση θεωρείται όχι μόνο ως η εννοιολογική αντίληψη για κάποιες έννοιες, αλλά και οι επιστημολογικές και μεταγνωστικές αντιλήψεις των υποκειμένων για τα εννοιολογικά πεδία των εννοιών. Είναι δε η γνώση, που αποκτά το υποκείμενο, το αποτέλεσμα των μαθηματικών πληροφοριών (ύλη των Μαθηματικών) που επεξεργάζεται το υποκείμενο, του τρόπου με τον οποίο τις επεξεργάζεται (προβλήματα και διδακτικές διαδικασίες), καθώς και της επίδρασης που έχουν και άλλοι παράγοντες, όπως οι επιστημολογικές αντιλήψεις, οι μεταγνωστικές αντιλήψεις και ικανότητες, οι γνωστικές ικανότητες καθώς και τα συναισθήματα του υποκειμένου που αναπτύσσονται στο πλαίσιο επεξεργασίας των Μαθηματικών. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η "μαθηματική γνώση" ενός ατόμου είναι το αποτέλεσμα πέντε παραγόντων:

- των Μαθηματικών πληροφοριών,
- των επιστημολογικών χαρακτηριστικών αυτών των πληροφοριών (σημασία και φύση των Μαθηματικών γενικά αλλά και των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών),
- των μεταγνωστικών αντιλήψεων των υποκειμένων (αντιλήψεις που αφορούν τις διαδικασίες που πρέπει να χρησιμοποιεί για να κάνει και να μελετά Μαθηματικά καθώς και τις αντιλήψεις του για τη μαθηματική ικανότητά του),
- των γνωστικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων του ατόμου, καθώς και
- των συναισθημάτων που το άτομο αναπτύσσει.

4.2 ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ

Η **κατανόηση μιας έννοιας** συνδέεται στενά με το νόημα (σημασία) της έννοιας. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η κατανόηση μιας έννοιας συνδέεται με τα εξής:

1. ***αναγνώριση***, ότι κάτι αξίζει το ενδιαφέρον και τη μελέτη και αναγνωρίζεται αυτόνομα,
2. ***διαφοροποίηση***, αναγνώριση των διαφορών και μελέτη των ιδιοτήτων των αντικειμένων,
3. ***γενίκευση***, επέκταση του πεδίου εφαρμογής, απόρριψη κάποιων υποθέσεων (εικασιών) και ανακάλυψη νέων δυνατοτήτων ερμηνείας.
4. ***σύνθεση***, ανακάλυψη συσχετίσεων και οργάνωση μεμονομένων αποτελεσμάτων, γεγονότων, ιδιοτήτων, σχέσεων και αντικειμένων σε ένα συναφές όλον.

Οι Hoyles & Noss (1986) χρησιμοποίησαν πρώτοι τις παραπάνω κατηγορίες πράξεων (ενεργειών) στο μοντέλο μάθησης μαθηματικών εννοιών που κατασκεύασαν.

Η ***χρήση της έννοιας*** είναι μία άλλη πράξη, όχι κατανόησης, αλλά απαραίτητη συνθήκη για να πραγματωθεί μία οποιαδήποτε πράξη κατανόησης (A. Sierpinska, 1991).

4.3 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΛΟΓΙΑ

Η προσέγγιση των διαδικασιών μάθησης - διδασκαλίας μέσα από τη διδακτική φαινομενολογία οφείλεται στον Hans Freudenthal, που θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε "πατέρα της Διδακτικής των Μαθηματικών".

Κρίσιμο σημείο στη θεωρητική προσέγγιση αποτελεί η διάκριση μεταξύ **νοούμενου** και **φαινόμενου**. Τα μαθηματικά αντικείμενα είναι νοούμενα, αλλά ένα κομμάτι των Μαθηματικών μπορεί να εκφρασθεί ως φαινόμενο, π.χ. οι αριθμοί είναι νοούμενα αλλά το να εργάζεσαι με αριθμούς μπορεί να είναι ένα φαινόμενο.

Οι μαθηματικές έννοιες, δομές και ιδέες χρησιμεύουν στην οργάνωση φαινομένων, π.χ. οι αριθμοί οργανώνουν το φαινόμενο της ποσότητας. Σε ένα δεύτερο επίπεδο το φαινόμενο "αριθμοί" οργανώνεται μέσω του δεκαδικού συστήματος,..., και με συνεχείς αφαιρέσεις το ίδιο μαθηματικό φαινόμενο θεωρείται κάτω από το πρίσμα άλλων εννοιών - π.χ. ομάδα, σώμα, τοπολογικός χώρος, επαγωγή, παραγωγή,...

Η **φαινομενολογία μιας μαθηματικής έννοιας**, μιας μαθηματικής δομής αναφέρεται στην περιγραφή του εκάστοτε νοούμενου σε σχέση με τα φαινόμενα των οποίων είναι το μέσο οργάνωσης, με τα φαινόμενα για την οργάνωση των οποίων δημιουργήθηκε, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο δρα πάνω σ' αυτά, και τα φαινόμενα στα οποία μπορεί να επεκταθεί. "Αν σ' αυτήν τη σχέση νοούμενου και φαινόμενου τοποθετήσω το διδακτικό στοιχείο, δηλαδή αν δώσω σημασία στο πώς η σχέση κατακτιέται σε μία διαδικασία μάθησης - διδασκαλίας, τότε μιλώ για **διδακτική φαινομενολογία αυτού του νούμενου**" (H. Freudenthal, 1983, σελ. 28-29).

Παράδειγμα: Νόημα των φυσικών αριθμών

Απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση των αριθμών είναι η χρήση τους. Άρα η διδασκαλία των αριθμών πρέπει να γίνει μέσα στο πλαίσιο αυτό. Συνοπτικά, μπορούμε να πούμε ότι οι φυσικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται ως ακολουθία (για την περιγραφή διαδοχικών καταστάσεων), μέτρημα, πληθικοί, μέτρο, τακτικοί, και ως μη-αριθμητικοί.

Το νόημά τους, για την παιδική ηλικία, βρίσκεται στη χρήση των αριθμών, στο μέτρημα (καταμέτρηση), στη συσχέτιση μετρήματος και πληθικότητας, στο "σκέφτομαι με ομάδες" (σ' αυτό που ονομάζουμε προσθετική δομή των τάξεων), στο συμβολισμό τους καθώς και στη δομή, δηλαδή στις σχέσεις των αριθμών μεταξύ τους και τις ιδιότητες των πράξεων, του δεκαδικού συστήματος που χρησιμοποιούμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΘΕΩΡΙΕΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μέχρι τη δεκαετία του '60, η διδασκαλία των Μαθηματικών διαρθρωνόταν γύρω από τη μάθηση και ανάπτυξη των υπολογιστικών τεχνικών και διαδικασιών (procedural knowledge): οι μαθητές διδάσκονται τι να κάνουν και πώς να το κάνουν και η μάθηση εστιάζεται στην ανάπτυξη των υπολογιστικών ικανοτήτων των μαθητών μέσω της εξάσκησής τους σ' αυτές. Η επιτυχής μάθηση κρίνεται με βάση τις απαντήσεις των μαθητών, ενώ το ζήτημα της **κατανόησης των εννοιών** που εμπλέκονται δεν εξετάζεται συστηματικά. Με άλλα λόγια η κατανόηση των εμπλεκομένων εννοιών θεωρείται ως αυτόματη απόρροια της γνώσης των τεχνικών και μεθόδων επίλυσης.

Στη δεκαετία του '60 λαμβάνει χώρα μια εκ βάθρου αλλαγή στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Τα "Μαθηματικά με νόημα" αποτελούν πλέον το στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης, έχουμε δηλαδή στροφή από τις διαδικασίες στην εννοιολογική προσέγγιση των Μαθηματικών στο σχολείο. Οι λόγοι γι' αυτήν την αλλαγή, η οποία αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία με το όνομα "εισαγωγή στα σχολεία των νέων Μαθηματικών", είναι πολλοί. Οι πιο σημαντικοί είναι δύο: πρώτον η απαίτηση των πανεπιστημίων για φοιτητές που θα γνωρίζουν περισσότερα Μαθηματικά τελειώνοντας τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και δεύτερον η αποδοχή και η καθιέρωση "νέων" ψυχολογικών θεωριών μάθησης. Έτσι το περιεχόμενο των Μαθηματικών που διδάσκονται από το νηπιαγωγείο μέχρι το τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αλλάζει ριζικά και διαρθρώνεται πλέον γύρω από τη διδασκαλία των **μαθηματικών δομών**.

Το νέο αυτό περιεχόμενο των σχολικών Μαθηματικών δεν είναι εύκολο να διδαχθεί, ειδικά στις μικρές τάξεις, μια που πρόκειται για πολύπλοκες και αφηρημένες μαθηματικές έννοιες. Η ανάγκη εξεύρεσης τρόπων παρουσίασης και διδασκαλίας αυτών των εννοιών έστρεψε το ενδιαφέρον των ειδικών προς την Ψυχολογία και τις θεωρίες μάθησης. Όπως γράφουν και οι L. Resnick & W. Ford (1984, σελ. 98):

"αν το ενδιαφέρον μας έγκειται στο να οικοδομήσουμε την κατανόηση των μαθηματικών δομών στα παιδιά, και μάλιστα στους μικρούς μαθητές, πρέπει να κάνουμε κάτι παραπάνω από απλώς να παρουσιάσουμε σ' αυτούς αυτές τις δομές. Πρέπει επίσης να προσδιορίσουμε ποιες γνωστικές ικανότητες τα παιδιά κινητοποιούν κατά τη μάθηση των Μαθηματικών καθώς και πώς τα διδακτικά επεισόδια που αφορούν αυτές τις δομές αλληλοεπιδρούν μ' αυτές τις ικανότητες των παιδιών. Με άλλα λόγια, πρέπει να έχουμε μια θεωρία διανοητικής λειτουργίας μέσω της οποίας θα αξιολογήσουμε το κατά πόσο οι ειδικές διαπραγματεύσεις θα οικοδομήσουν την κατάλληλη κατανόηση."

Στη συνέχεια θα δούμε κάποια στοιχεία από τις θεωρίες των Bruner, Dienes, των Gestalt και του Piaget, δίνοντας έμφαση σ' εκείνα που έχουν άμεση σχέση με τα Μαθηματικά.

1. ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ ΤΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ (BRUNER ΚΑΙ DIENES)

Οι Bruner και Dienes ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με την προσπάθεια δημιουργίας κατάλληλων υλικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών δομών σε παιδιά μικρής ηλικίας.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των θεωριών τους θα κάνουμε μια σύντομη παρουσίαση της έννοιας της δομής στα Μαθηματικά, μια που ο όρος δομή χρησιμοποιείται πολύ και από τους ψυχολόγους της Gestalt και από τον Piaget. Όταν λέμε **δομή** στα Μαθηματικά εννοούμε ένα σύνολο μαζί με τις σχέσεις των στοιχείων του, σχέσεις που συνήθως απορρέουν από κάποια πράξη ορισμένη πάνω σ' αυτό το σύνολο. Η πιο απλή δομή είναι η **δομή της ομάδας**. Ένα παράδειγμα ομάδας είναι το σύνολο των ακεραίων αριθμών με την πράξη της πρόσθεσης. Οι ιδιότητες της πρόσθεσης που κάνουν το σύνολο των ακεραίων να έχει τη δομή ομάδας ως προς την πρόσθεση είναι οι παρακάτω:

- η πράξη είναι **κλειστή**, δηλαδή το αποτέλεσμα της πράξης είναι πάλι ακέραιος αριθμός,

- ισχύει η **προσεταιριστική ιδιότητα**, δηλαδή όταν έχουμε να προσθέσουμε τρεις αριθμούς δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία τους προσθέτουμε,

- υπάρχει **ουδέτερο στοιχείο** το 0, δηλαδή ένα στοιχείο που σε όποιον αριθμό και να το προσθέσουμε αφήνει αμετάβλητο τον αριθμό αυτό, και

- υπάρχει **αντίστροφο στοιχείο** για κάθε αριθμό, δηλαδή για κάθε αριθμό υπάρχει ο αντίθετός του που άμα τους προσθέσουμε έχουμε ως αποτέλεσμα το 0, το ουδέτερο στοιχείο.

Πρέπει επίσης να σημειώσουμε εδώ ότι οι δομές του Piaget έχουν στη βάση τους τη δομή ομάδας, όπου ως ουδέτερο στοιχείο θεωρείται η **διατήρηση** και ως αντίστροφο η **αντιστρεψιμότητα**.

1.1 Bruner

Ο Bruner εργάστηκε με παιδιά σε ατομικό επίπεδο σε καταστάσεις πειραματικής διδασκαλίας. Στηρίχθηκε στις ιδέες του Piaget και συνεργάστηκε με τον Dienes.

Η βασική έννοια που επεξεργάστηκε είναι αυτή της ***γνωστικής αναπαράστασης***. Μέλετησε δηλαδή "*τα μέσα με τα οποία οι οργανισμοί δέχονται, συγκρατούν και μετασχηματίζουν τις πληροφορίες*" (Bruner, Goodnow & Austin, 1956). Εξέτασε τις γνωστικές διαδικασίες των παιδιών και κυρίως το ενδιαφέρον του επικεντρώθηκε στο πώς τα παιδιά αναπαριστούν νοερά τις έννοιες και τις ιδέες που μαθαίνουν. Στηριζόμενος στην αναπτυξιακή θεώρηση του Piaget, ότι δηλαδή η ανάπτυξη έγκειται στις διαδοχικές αναδομήσεις γεγονότων και σχέσεων οι οποίες προκύπτουν από τις αλληλεπιδράσεις των παιδιών με το περιβάλλον και τον ενεργό χειρισμό αυτού, ο Bruner ενδιαφέρθηκε για το πώς ακριβώς τα αποτελέσματα μιας τέτοιας αλληλεπίδρασης αναπαριστώνται στο μυαλό του παιδιού.

Η **αναπαράσταση** για τον Bruner είναι το αποτέλεσμα, το τελικό προϊόν της κωδικοποίησης και επεξεργασίας της περασμένης εμπειρίας η οποία γίνεται με τρόπο ώστε αυτή να είναι σημαντική και χρησιμοποιήσιμη όταν τη χρειαζόμαστε.

Ο Bruner θεωρεί ότι κατά τη γνωστική ανάπτυξη οι αναπαραστάσεις εξελίσσονται ακολουθώντας πάντα την ίδια σειρά, την οποία ακολουθεί και η ανάπτυξη εννοιών και άρα αυτή πρέπει να είναι και η σειρά διδασκαλίας και αυτή που πρέπει να ακολουθήσουμε για το σχεδιασμό υλικού για τη μαθηματική εκπαίδευση. Σύμφωνα με τον Bruner (1964) οι τρεις τρόποι αναπαράστασης είναι:

- η ***ενεργή*** ή εμπράγματη αναπαράσταση (μέσω κατάλληλων κινητικών αντιδράσεων)
- η ***εικονική*** - νοερή αναπαράσταση του πραγματικού (που μοιάζει με την έννοια)
- η ***συμβολική*** με λέξεις ή σήματα αναπαράσταση (που δε μοιάζει με την έννοια).

Ως παράδειγμα των τριών τρόπων αναπαράστασης για τον αριθμό 5 μπορούμε να δώσουμε τις παρακάτω αναπαραστάσεις:

- ενεργή: η κίνηση των πέντε δακτύλων του χεριού μας κατά τη μέτρηση ή κατά την παρουσίαση της ποσότητας.
- εικονική: ο σχηματισμός ● ● ● ● ●, ή κάποιος άλλος σχηματισμός.
- συμβολική: το "5" ή το "πέντε".

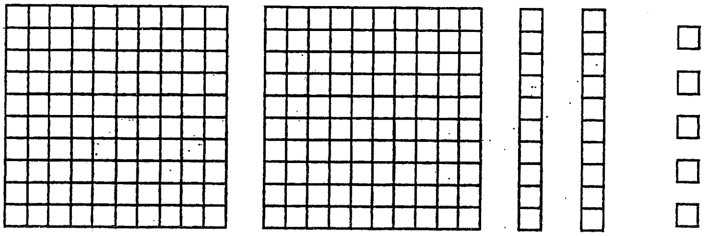
1.2 Dienes

Ο Dienes δούλεψε με τον Piaget και τον Bruner και το ενδιαφέρον του εστιάστηκε στο σχεδιασμό εκπαιδευτικού υλικού για τα Μαθηματικά στα πλαίσια της δομικής διδασκαλίας (Dienes, 1960, 1963, 1966, Dienes & Golding, 1971). Η βασική θεώρηση στην οποία στηρίχθηκε ο Dienes συνίσταται στα εξής:

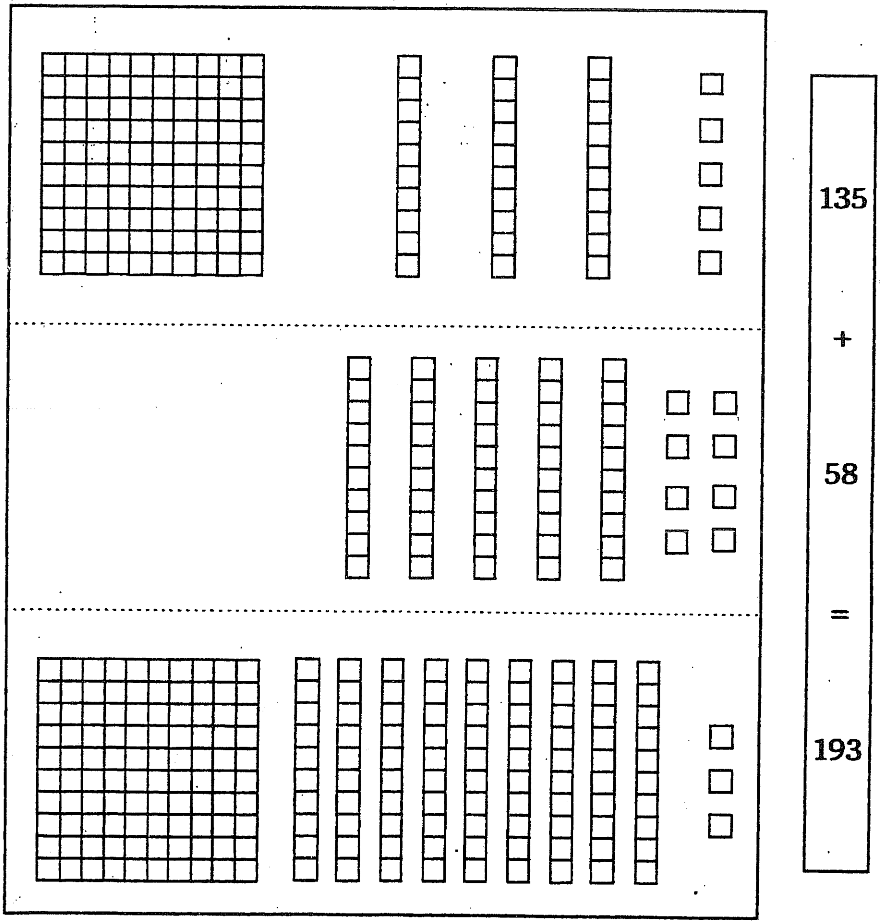
- τα παιδιά είναι βασικά "κατασκευαστικά" παρά αναλυτικά
- τα παιδιά έχουν ανάγκη τη συγκεκριμένη εμπειρία
- το υλικό που θα χρησιμοποιήσουμε πρέπει να είναι απαλλαγμένο από "θορύβους" που αποπροσανατολίζουν και να ενσωματώνει τις μαθηματικές δομές χωρίς να χρειάζεται να αναφερθούμε σε συμβολικά συστήματα αναπαράστασης.

Ο Dienes δημιούργησε τρία δομημένα υλικά για τη διδασκαλία των μαθηματικών δομών.

1. Τα ***αριθμητικά μπλοκ*** (multibase arithmetic blocks) τα οποία δίνουν τη δυνατότητα διαπραγμάτευσης των 4 αριθμητικών πράξεων χωρίς τη χρήση αριθμητικών αποτελεσμάτων μόνο με την καταμέτρηση και την εφαρμογή της αρχής της ανταλλαγής μόλις συμπληρώνεται η βάση με κομμάτια ανώτερης τάξης. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την αναπαράσταση του αριθμού 225.

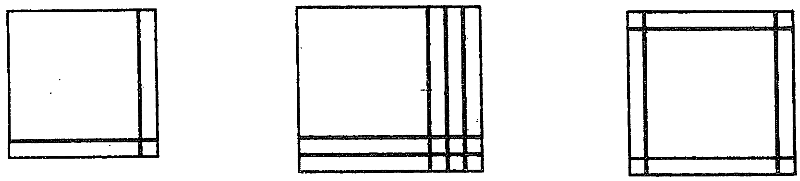


Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα πρόσθεσης



2. Τα *λογικά μπλοκ* (attribute blocks) που αποτελούνται από πλαστικά ή ξύλινα τρίγωνα, τετράγωνα, κύκλους και ορθογώνια σε διαφορετικά μεγέθη, χρώματα και πάχος. Επιτρέπουν δραστηριότητες ταξινόμησης και τη διαπραγμάτευση εννοιών από τη θεωρία συνόλων και τη λογική.

3. Τις ***ράβδους του Cuisenaire*** (Cuisenaire rods) που αποτελούνται από κύβους και ράβδους πολλών μεγεθών και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διαπραγμάτευση των εννοιών μέτρησης, κλασμάτων και αναλογιών. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε μια πραγμάτωση με υλικό Dienes της παραγοντοποίησης τριωνύμου.



$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1)$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)(x+2)$$

Ο Dienes υποστήριξε θεωρητικά τη χρήση του δομημένου υλικού που επεξεργάστηκε με τη θεώρηση του κύκλου μάθησης που είναι ένα σχήμα διδασκαλίας πολύπλοκων μαθηματικών εννοιών σε μικρά παιδιά. Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση το **δομημένο παιχνίδι** επιτρέπει στο παιδί μέσα από την ποικιλία των εμπειριών του να κρατήσει ό,τι είναι κοινό και να διώξει ό,τι είναι μη σημαντικό και έτσι να αποσπά την έννοια. Στη συνέχεια η διαπραγμάτευση των εννοιών πρέπει να γίνεται και σε **άλλα πλαίσια και μορφές**, όπως οι φυσικές, οι κοινωνικές, οι αριθμητικές και οι αλγεβρικές μορφές. Στο επόμενο στάδιο τα παιδιά πρέπει να καλούνται **να μιλήσουν για τα**