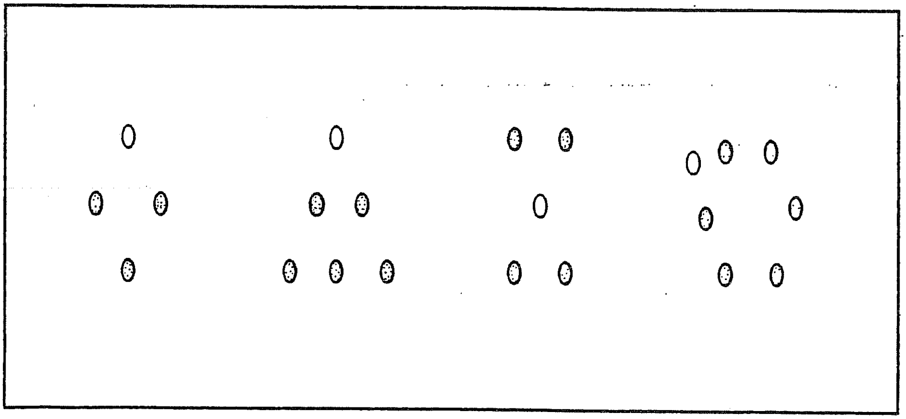
ευρήματά τους, να σχεδιάζουν εικόνες και γραφήματα και οι έννοιες να συνδεθούν με κάποιο μαθηματικό **συμβολισμό**, άτυπο στην αρχή, που να στηρίζεται δηλαδή σε δικά τους σύμβολα. Ο ρόλος του μαθητή, όπως τον αντιλαμβάνεται ο Dienes, σ' αυτό το σχήμα ανάπτυξης και διδασκαλίας των εννοιών είναι να **συστηματοποιεί** τη μάθηση (εμπειρίες και πληροφορίες) σ' ένα δομημένο σύστημα κανόνων.

2. ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΟΝΤΑΣ ΤΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (GESTALT)

Η κεντρική θέση της μορφολογικής θεωρίας (Gestalt = νοητική μορφή) είναι ότι η σκέψη και η κατανόηση κυριαρχούνται από μια ***έμφυτη τάση*** του ανθρώπου να αντιλαμβάνεται τη ***δομή μιας παράστασης*** και όχι τα μεμονωμένα στοιχεία που την αποτελούν.

Στο παρακάτω σχήμα π.χ. όλοι βλέπουμε ένα ρόμβο, ένα τρίγωνο, ένα ορθογώνιο και μία έλλειψη, παρά μαύρες και άσπρες τελείες.



Η οπτική δηλαδή αντίληψη κυριαρχείται από την τάση να βλέπουμε ομαδοποιημένα και όχι ως μεμονωμένα στοιχεία και έτσι το αποτέλεσμα της αντίληψης είναι ***ολιστικό*** (δηλαδή δομημένο: στοιχεία + σχέσεις) και όχι απλώς άθροισμα των μερών του.

[σημειώνεται εδώ ότι η θεώρηση αυτή μπορεί να εξηγήσει και πολλά από τα πιαζετιανά ευρήματα.]

Στη συνέχεια οι Gestalt ψυχολόγοι (όπως οι Wertheimer, Kohler, Koffka, Katona) απομακρύνθηκαν από τα ζητήματα της οπτικής αντίληψης και επικεντρώθηκαν στη φύση της σκέψης και την επίλυση προβλημάτων. Τα κύρια σημεία της προσέγγισής τους είναι:

- ***Ο σημαντικός ρόλος της ανακάλυψης στην επίλυση προβλημάτων.***

Παρατήρησαν στα πειράματά τους ότι η αναγνώριση της φύσης του προβλήματος και η λύση συχνά συμβαίνουν ξαφνικά και ταυτόχρονα μετά από μια μεγάλη περίοδο δραστηριοτήτων που μοιάζουν τυχαίες και ασύνδετες (πείραμα με τους γορίλες, τα ραβδιά και τις μπανάνες).

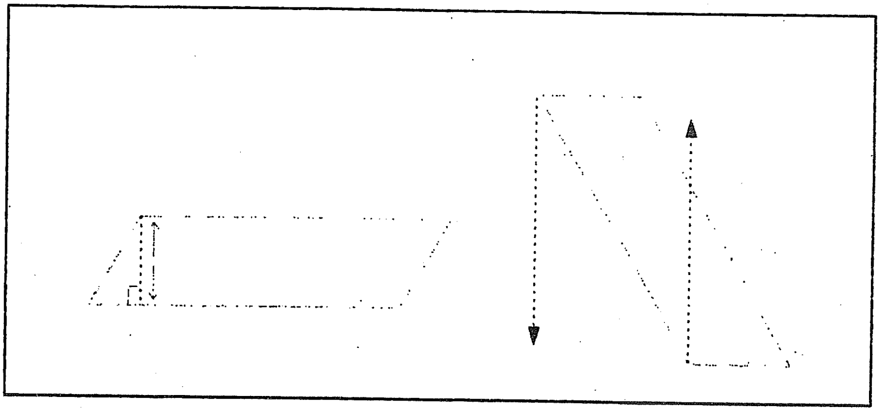
- ***Το πρόβλημα πρέπει να θεωρείται ως ένα λειτουργικό όλον.***

Η σκέψη και τα προβλήματα δεν πρέπει να θεωρούνται ως το άθροισμα των συστατικών που προέρχονται από συσχετίσεις ερεθισμάτων-αντιδράσεων, αλλά πρέπει να εμπλέκει την αντίληψη των προβλημάτων ως ένα λειτουργικό όλον. Η ανακάλυψη τότε μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της αναδιοργάνωσης των στοιχείων του προβλήματος με τρόπο ώστε αυτά να γίνουν αντιληπτά σ' ένα νέο πλαίσιο. Π.χ. η γρήγορη και μακράς διάρκειας απομνημόνευση της σειράς των αριθμών 149162536496481100 δεν είναι δυνατή παρά μόνο αν αυτή γίνει αντιληπτή ως 1-4-9-16-25-36-49-64-81-100, δηλαδή ως 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2. Όταν υπάρχει σύγκρουση (δηλ. η λύση δεν είναι προφανής) τότε η εξισορρόπηση μπορεί να θεωρηθεί ως κάποια μορφή αναδιοργάνωσης.

- ***Η δομή του προβλήματος παίζει καθοριστικό ρόλο.***

Η δομή του προβλήματος όταν ανακαλυφθεί θα ορίσει τις λειτουργίες και τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του προβλήματος και θα καθορίσει συνεπώς ποιες διεργασίες θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τη λύση.

Οι διδακτικές επιπτώσεις της θεωρητικής προσέγγισης των Gestalt ψυχολόγων εστιάζονται γύρω από τη μάθηση με νόημα και την αντίθεσή τους σχετικά με τη μάθηση που επικεντρώνεται και περιορίζεται στους στάνταρ αλγορίθμους και σχήματα. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε το στάνταρ παραλληλόγραμμο με το οποίο τα παιδιά του δημοτικού διδάσκονται τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού ενός παραλληλογράμμου και το παραλλόγραμμο που χρησιμοποίησε ο Wertheimer για να ελέγξει τη μάθηση με νόημα του εμβαδού.



Η μάθηση λοιπόν εξαρτάται από το κατά πόσο το πλαίσιο διαπραγμάτευσης της γνώσης και τα προβλήματα που προτείνονται επιτρέπουν να ανακαλυφθεί η δομή που κρύβεται μέσα στην προς διδασκαλία γνώση. Όταν το πλαίσιο διαπραγμάτευσης φανερώνει μια άλλη δομή ή μια περιορισμένη δομή επόμενο είναι η μάθηση να είναι περιορισμένη.

3. ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΟΝΤΑΣ ΔΟΜΕΣ (PIAGET)

Οι βασικές έννοιες γύρω από τις οποίες αρθρώνεται η πιαζετιανή θεωρία (Piaget, 1950, Piaget, Inhelder & Sheminska, 1960, Piaget, 1962, Inhelder & Piaget, 1964, Piaget & Garcia, 1974, Piaget, 1977, Piaget & Sheminska, 1991) είναι η έννοια της δομής, η έννοια του σταδίου, οι λογικές ενέργειες, η έννοια της προσαρμογής.

Ο Piaget θεωρεί ότι η κάθε πραγματικότητα μπορεί να αναλυθεί σε δύο απόψεις: τις **καταστάσεις** και τους **μετασχηματισμούς**. Κατάσταση είναι η μορφή που έχει ένα στοιχείο της πραγματικότητας σε μια δεδομένη στιγμή. Οι μετασχηματισμοί αναφέρονται στις αλλαγές που μπορεί να υποστεί ένα στοιχείο της πραγματικότητας με αποτέλεσμα να μεταβληθεί η κατάστασή του. Είναι προφανές ότι καταστάσεις και μετασχηματισμοί είναι αλληλένδετοι μεταξύ τους αφού οι μετασχηματισμοί αποτελούν τους συνδετικούς κρίκους ανάμεσα στις διάφορες καταστάσεις των στοιχείων της πραγματικότητας.

Η πραγματικότητα θεωρείται λοιπόν ως ένα σύνολο ξεχωριστών, ευδιάκριτων και αδιαίρετων στοιχείων (αντικείμενα, πρόσωπα, γεγονότα κλπ) πάνω στα οποία ο άνθρωπος μπορεί να **ενεργήσει** (πραγματικά ή νοερά) και τα οποία μπορεί να τα **οργανώσει** σύμφωνα με τις **κοινές ιδιότητές** τους ή σύμφωνα με τις **διαφορές** τους. Οι ενέργειες αυτές όταν εσωτερικευθούν (πάψουν δηλαδή να είναι περιστασιακές ενέργειες) συγκροτούνται **σε δομές λογικών πράξεων**. Αποκτούν έτσι τη δυνατότητα να λειτουργούν ανεξάρτητα από τις σχέσεις χώρου και χρόνου, μπορούν δηλαδή να λειτουργούν ανεξάρτητα από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των αντικειμένων με βάση τα οποία οι ενέργειες δομούνται.

Οι **τέσσερεις βασικές λογικές δομές** που χαρακτηρίζουν τη γνωστική ανάπτυξη και κυρίως την ανάπτυξη των μαθηματικών και φυσικών εννοιών είναι οι παρακάτω:

1. **Η προσθετική δομή των κλάσεων** (το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που προκύπτουν από το διαμερισμό ενός συνόλου και πράξη την ένωση συνόλων)
2. **Η προσθετική δομή των αντισυμμετρικών σχέσεων** (ένα διατεταγμένο σύνολο και πράξη η πρόσθεση των διαφορών)
3. **Η πολλαπλασιαστική δομή των κλάσεων** (διαμερισμός ενός συνόλου ως προς δύο σχέσεις ισοδυναμίας, δηλαδή τα σύνολα των επιμέρους κλάσεων που δημιουργούνται από κάθε μία σχέση ισοδυναμίας χωριστά και πράξη την τομή συνόλων)
4. **Η πολλαπλασιαστική δομή των σχέσεων** (ένα σύνολο με δύο διατάξεις και πράξη τη σύνθεση των δύο διατάξεων)

[ανάλυση των τεσσάρων δομών ☞ Α. Δημητρίου, 1993, σελ.46-61].

Αποτέλεσμα της πιαζετιανής θεώρησης είναι η αντίληψη ότι οι μαθηματικές γνώσεις ανάγονται στις αντίστοιχες λογικές πράξεις και σχέσεις που τις περιγράφουν (επίδραση της σχολής του λογικισμού). **Συνεπώς δεν μπορεί να υπάρξει κατανόηση των μαθηματικών εννοιών αν δεν προϋπάρχει κατασκευή της αντίστοιχης λογικής δομής.** Έτσι η έννοια π.χ. του αριθμού ανάγεται στην έννοια του πληθικού αριθμού και στην έννοια του τακτικού αριθμού. Ο πληθικός αριθμός είναι μια ιδιότητα (μέγεθος) των συνόλων: οι πληθικοί αριθμοί χαρακτηρίζουν τις κλάσεις ισοδυναμίας οι οποίες δημιουργούνται με βάση την ισοδυναμία των συνόλων, όπου ισοδυναμία δύο συνόλων υπάρχει όταν υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους. Άρα λοιπόν η δομή που στηρίζει την κατανόηση των πληθικών αριθμών είναι η προσθετική δομή των κλάσεων. Ο διατακτικός αριθμός είναι μια ιδιότητα που χαρακτηρίζει τη σειρά διάταξης των στοιχείων ενός διατεταγμένου συνόλου (1ο, 2ο, 3ο,....), άρα η κατανόηση των διατακτικών αριθμών προϋποθέτει την προσθετική δομή των αντισυμμετρικών σχέσεων. Συνεπώς η κατανόηση της έννοιας του αριθμού δεν μπορεί να έλθει, κατά την πιαζετιανή θεωρία, παρά μόνον όταν το παιδί έχει κατασκευάσει τις δύο πρώτες από τις λογικές δομές που προαναφέραμε. Η πρόσθεση δύο αριθμών ανάγεται, στα πλαίσια της ίδιας ανάλυσης, στην εύρεση του πληθικού αριθμού δύο κλάσεων (ξένων μεταξύ τους συνόλων). Στην ίδια κατεύθυνση η ανάπτυξη και κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών μελετάται από την πιαζετιανή θεωρία με βάση τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που το παιδί μπορεί να αναγνωρίσει, να χειρισθεί και να δομήσει σε αντίστοιχες ομάδες μετασχηματισμών.

Οι δομές που έχει κατασκευάσει το άτομο χαρακτηρίζουν το στάδιο ανάπτυξής του, αφού σχετίζονται με το είδος των σχέσεων και των ενεργειών που μπορεί να διευθετήσει και να χειρισθεί επιτυχώς το άτομο. Ο Piaget διακρίνει 4 βασικά στάδια:

1. το στάδιο των αισθησιοκινητικών ενεργειών,
2. το στάδιο των προλειτουργικών ενεργειών,
3. το στάδιο των συγκεκριμένων ενεργειών,
4. το στάδιο της τυπικής σκέψης.

Το παιδί του νηπιαγωγείου βρίσκεται τυπικά στο πέρασμα από το στάδιο των προλειτουργικών ενεργειών στο στάδιο των συγκεκριμένων ενεργειών. Το **στάδιο των προλειτουργικών ενεργειών** χαρακτηρίζεται από το ότι η σκέψη ξεπερνά την άμεση αντίληψη, δέχεται την ύπαρξη περισσοτέρων από μία καταστάσεις στα πλαίσια μιας δοσμένης συνθήκης καθώς και ότι ο μετασχηματισμός που απαιτείται για το πέρασμα από μια κατάσταση στην άλλη μπορεί να μην είναι μοναδικός. Ωστόσο οι νοητικές ενέργειες του παιδιού δεν είναι ακόμα συγκροτημένες σε αντιστρέψιμες λογικές πράξεις, δεν έχουν δηλαδή δομηθεί οι προαναφερθείσες λογικές δομές, η δόμηση των οποίων χαρακτηρίζει το **στάδιο των συγκεκριμένων ενεργειών**.

Οι δομές που χαρακτηρίζουν τη γνωστική ανάπτυξη του ατόμου (δηλαδή την ικανότητα αναπαράστασης, επεξεργασίας και κατανόησης της πραγματικότητας) δεν είναι δοσμένες a priori. Προκύπτουν η μία από την άλλη ως αποτέλεσμα μιας **συνεχούς αναπροσαρμογής** των προηγούμενων δομών στα καινούργια δεδομένα και στις καινούργιες πληροφορίες - που και αυτές με τη σειρά τους προκύπτουν από την αλληλεπίδραση του ατόμου με το περιβάλλον. Η ανάπτυξη αυτή πραγματώνεται μέσα από τους μηχανισμούς **αφομοίωσης** και **εξισορρόπησης**. Κεντρική έννοια στη θεώρηση αυτή αποτελεί ο παράγοντας της **προσαρμογής** (στο περιβάλλον) που χαρακτηρίζει κάθε βιολογικό ον. Η έννοια-κλειδί για την κινητοποίηση των γνωστικών διαδικασιών και μηχανισμών προς μια πορεία συμμόρφωσης, αφομοίωσης των νέων δεδομένων και εξισορρόπησης των δομών είναι η έννοια της γνωστικής σύγκρουσης. **Γνωστική σύγκρουση** έχουμε όταν το παιδί (το άτομο) **διαπιστώσει** ότι οι υπάρχουσες γνώσεις και ικανότητές του δεν αρκούν για την επιτυχή διαπραγμάτευση των **προβληματικών καταστάσεων** που αντιμετωπίζει και ότι επομένως απαιτείται καινούργια προσέγγιση του προβλήματος.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι:

- Η βασική ιδέα γύρω από την οποία αρθρώνεται η πιαζετιανή θεωρία είναι ότι το άτομο αναπτύσσεται ***κατακευάζοντας δομές***. Η κατασκευή (οικοδόμηση) δομών κατά την πιαζετιανή έννοια εμπλέκει την κατασκευή σχέσεων τέτοιων ώστε η αλλαγή που επέρχεται σε οποιοδήποτε μέρος του συστήματος να επηρεάζει όλο το σύστημα. Οι δομές αυτές δεν προέρχονται από την εξωτερική πραγματικότητα: τα παιδιά δεν κοιτάνε το τετράγωνο και ξέρουν αμέσως τι είναι τετράγωνο. Η κατανόηση εμπλέκει τη γνώση του πώς τα διάφορα μέρη συνδέονται το ένα με το άλλο. Έτσι η δομή στην πιαζετιανή θεωρία είναι κάτι που ***κατασκευάζεται ενεργά*** από τον ανθρώπινο οργανισμό σε αλληλεπίδραση με το ***περιβάλλον***.

- Κεντρική λοιπόν έννοια στην πιαζετιανή θεωρία ανάπτυξης αποτελεί η έννοια της ***ενέργειας*** (πράξης, operation). Τα είδη των ενεργειών που είναι σε θέση να κάνει ο άνθρωπος χαρακτηρίζουν το στάδιο ανάπτυξής του. Ο Piaget διακρίνει τέσσερα βασικά ***στάδια*** στην ανθρώπινη ανάπτυξη. Ο Piaget μελέτησε τα διάφορα στάδια ανάπτυξης εστιαζόμενος στην ανάπτυξη των λογικών και μαθηματικών εννοιών. Οι έννοιες κλειδιά για τη μελέτη αυτή αποτελούν η αντίληψη της ***διατήρησης*** των ποσοτήτων και η ικανότητα ***αντιστρεψιμότητας*** των μετασχηματισμών.

Η κατά στάδια διάρθρωση της ανάπτυξης και η έμφαση στη λογική ικανότητα (π.χ. διάφορες έρευνες έχουν πιστοποιήσει ότι πολύ μικρό ποσοστό των ενηλίκων έχει κατακτήσει την τυπική σκέψη) αποτέλεσαν τα κύρια ζητήματα ως προς τα οποία αμφισβητήθηκε η πιαζετιανή θεωρία. Όμως άλλα στοιχεία της θεωρίας του Piaget έχουν γίνει ευρέως αποδεκτά στο χώρο της εκπαίδευσης και αποτέλεσαν βασικές ψυχολογικές υποθέσεις μάθησης για τη Διδακτική των Μαθηματικών:

- ***η ενεργητική κατασκευή*** του οικοδομήματος της γνώσης από το άτομο μέσα από διαδικασίες επίλυσης προβληματικών καταστάσεων,
- ***η αλληλεπίδραση με το περιβάλλον*** ως απαραίτητο συστατικό της διαπραγμάτευσης της γνώσης, και
- ***η γνωστική σύγκρουση*** ως αιτία ενεργοποίησης των γνωστικών μηχανισμών σε μια διαδικασία μάθησης.

4. ΠΕΡΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΔΟΜΕΣ

Τα τελευταία χρόνια οι ιδέες του ***Vygotsky*** (1988 ελλ. έκδ), - καθώς και άλλων ψυχολόγων από το χώρο της κοινωνικής ψυχολογίας, - για τη μάθηση και την ανάπτυξη (***ζώνη επικείμενης ανάπτυξης***, συμβολικό παιχνίδι, ρόλος της γλωσσικής ανάπτυξης) και οι ιδέες της ***κοινωνικο-γνωστικής*** σύγκρουσης και ανάπτυξης αναδεικνύονται ως κατάλληλα εργαλεία για την ανάλυση και ερμηνεία των φαινομένων διδασκαλίας / μάθησης των Μαθηματικών.

Κεντρική ιδέα της κοινωνικής ψυχολογίας είναι η θεώρηση ότι η ανθρώπινη συνείδηση, οι νοητικές διαδικασίες και η σκέψη δεν είναι εσωτερικές ιδιότητες του ανθρώπινου πνεύματος, αλλά μορφές αντανάκλασης της πραγματικότητας και αποτέλεσμα της **κοινωνικής και ιστορικής εξέλιξης**: "*σε άλλες κοινωνικο-ιστορικές συνθήκες, όπου η εμπειρία βασίζεται στην πρακτική και δεν υπάρχουν επιδράσεις από την εκπαίδευση, η διαδικασία κωδικοποίησης είναι διαφορετική, ορίζεται από ένα διαφορετικό γλωσσικό σύστημα και υπακούει σε διαφορετικούς νόμους*" (A. Luria, 1992, σελ. 57-58).

Η **γλωσσική ικανότητα** παίζει λοιπόν κυρίαρχο ρόλο στη γνωστική ανάπτυξη και οι λέξεις θεωρούνται από τον L. Vygotsky ως η αφετηρία για το σχηματισμό των εννοιών και μάλιστα των ακαδημαϊκών (επιστημονικών και άρα μαθηματικών) εννοιών.

Οι **λέξεις** λοιπόν, οι οποίες είναι προϊόντα της κοινωνικής εξέλιξης είναι εργαλεία για την ταξινόμηση, την αφαίρεση και τη γενίκευση και επιτρέπουν τη μετάβαση από την αισθητηριακή αντανάκλαση της πραγματικότητας στη λογική σκέψη. Στα πρώτα στάδια οι λέξεις δεν αποτελούν παράγοντα οργάνωσης της πραγματικότητας. Στη συνέχεια έχουν **καταγραφική σημασία** και επιτρέπουν την **περιστασιακή ομαδοποίηση και ταξινόμηση** της πραγματικότητας. Στην εφηβεία, περίοδο ανάλυσης μέσα από τη σύνθεση, μέσα από λειτουργίες απομόνωσης χαρακτηριστικών και εξαγωγής συμπερασμάτων, το άτομο δημιουργεί ιεραρχικά συστήματα ταξινόμησης και έτσι αναπτύσσεται **η κατηγορική και εννοιολογική σκέψη**. Όπως λέει και ο Vygotsky: *τα παιδιά σκέπτονται μέσω της μνήμης, ενώ ο έφηβος θυμάται μέσω της σκέψης* (A. Luria, 1992, σελ. 22).

Η πορεία λοιπόν της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου δε χαρακτηρίζεται στη βιγκοτσκιανή θεώρηση από στάδια διαφορετικών λογικών ικανοτήτων αλλά από

περιόδους διαφορετικής σημασίας και νοήματος των εννοιών ανάλογα με το είδος των δραστηριοτήτων του ατόμου.

Ο ρόλος της σχολικής εκπαίδευσης είναι πρωταρχικός για τη γνωστική ανάπτυξη του ατόμου. Σκοπός της εκπαίδευσης είναι να προσφέρει και να οργανώσει εκείνο το είδος των δραστηριοτήτων που θα επιτρέψουν στο άτομο να αναπτύξει τις διαφορετικές σημασίες των εννοιών στα πλαίσια της **ζώνης επικείμενης ανάπτυξης**. Οι έννοιες στη βιγκοτσκιανή θεώρηση αναπτύσσονται σε σχέση με τις δραστηριότητες του ατόμου και σε στενή αλληλεπίδραση με το φυσικό και **κοινωνικό περιβάλλον**. Επομένως η εκπαίδευση μπορεί να επιδράσει στην ανάπτυξη του ατόμου.

Η ζώνη επικείμενης ανάπτυξης παίζει το ρόλο του σταδίου στη βιγκοτσκιανή θεώρηση. Η βασική διαφορά αυτής από την πιαζετιανή έννοια του σταδίου συνίσταται στο ότι είναι πιο εύκαμπτη: στην πιαζετιανή θεώρηση δεν υπάρχει τρόπος να προκαλέσουμε πιο γρήγορη ανάπτυξη και να επιταχύνουμε το πέρασμα από το ένα στάδιο στο άλλο μέσω της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Η ζώνη επικείμενης ανάπτυξης χαρακτηρίζεται από τα προβλήματα που το παιδί μπορεί να λύσει, αλλά και από τα προβλήματα που το παιδί θα μπορέσει να λύσει με τη βοήθεια του διδάσκοντα και του διδακτικού περιβάλλοντος. Διαφορετικό διδακτικό και διφορετικό κοινωνικό περιβάλλον προκαλεί διαφορετική εξέλιξη σε παιδιά που βρίσκονται στην ίδια ζώνη επικείμενης ανάπτυξης. Έτσι, η εκπαίδευση δεν υποβοηθάει απλώς την εξέλιξη, αλλά αποτελεί **πηγή ανάπτυξης** για το άτομο. Η βιγκοτσκιανή θεωρία αποτελεί μία από τις θεωρίες που πρόσφατα άρχισαν να εφαρμόζονται στην εκπαίδευση. Το αναλυτικό πρόγραμμα των πρώτων σχολικών τάξεων π.χ. στις Η.Π.Α, όσον αφορά τουλάχιστον τα Μαθηματικά, στηριζόμενο και σε αποτελέσματα ερευνών που καταδεικνύουν τη μη αποτελεσματικότητα της εξάσκησης στις λογικές σχέσεις και την ποιοτική μόνο προσέγγιση των εννοιών (σύγκριση πλήθους χωρίς χρήση αριθμών) έχει πολύ επηρεαστεί από αυτήν. Έτσι π.χ. η προσέγγιση των αριθμητικών εννοιών στο νηπιαγωγείο γίνεται μέσα από το παρακάτω σχήμα:

- εκμάθηση της αριθμητικής ακολουθίας
- καταμέτρηση

- κατανόηση του πληθικού αριθμού μέσα από την επανάληψη του τελευταίου αριθμού της καταμέτρησης (1, 2, 3, 4, τέσσερα είναι τα μήλα).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε μερικές από τις έννοιες που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της Διδακτικής των Μαθηματικών και οι οποίες μας επιτρέπουν να περιγράψουμε τα ιδιαίτερα φαινόμενα που παρατηρούνται κατά τις διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών. Οι έννοιες αυτές είναι ο διδακτικός μετασχηματισμός ή διδακτική μετάπλαση, το διδακτικό συμβόλαιο, η διδακτική και αδιδακτική κατάσταση, το φαινόμενο Jourdain, το φαινόμενο Topaze, το μεταγνωστικό ή μεταδιδακτικό ολίσθημα, το εννοιολογικό πλαίσιο, το παιχνίδι πλαισίων και η διαλεκτική αντικειμένου-εργαλείου.

1. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΤΑΠΛΑΣΗ

Ο όρος **διδακτικός μετασχηματισμός** ή **διδακτική μετάπλαση** περιγράφει την εννοιολογική αλλαγή που υφίστανται τα Μαθηματικά για να γίνουν διδακτέα ύλη.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει οι μαθηματικές έννοιες και τα μαθηματικά αποτελέσματα (θεώρημα, πρόταση, ιδιότητα) δημιουργούνται κατά την προσπάθεια επίλυσης κάποιων προβλημάτων, εσωτερικών ή εξωτερικών των Μαθηματικών. Η μαθηματική γνώση παράγεται λοιπόν σε κάποια πλαίσια προσωπικά (του ερευνητή), χρονικά (ιστορική συγκυρία) και επιστημολογικά (η μορφή της επιστήμης κατά τη διάρκεια εκείνης της περιόδου). Κατά την επισημοποίηση της έτσι παραχθείσας μαθηματικής γνώσης χάνονται πολλά από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του πλαισίου παραγωγής της. Έτσι κατά τη διαδικασία ενσωμάτωσης της μαθηματικής γνώσης στη μαθηματική επιστήμη και κατά την πορεία εξέλιξης αυτής, η μαθηματική γνώση αποπλαισιώνεται. Για να γίνει διδάξιμο ένα κομμάτι της μαθηματικής επιστήμης απομονώνεται από το υπόλοιπο οικοδόμημα και για να παρουσιαστεί στους μαθητές συνδέεται με άλλα προβλήματα, κατάλληλα για την ηλικία τους και τις τρέχουσες γνώσεις τους και πολλές φορές απλοποιείται επιστημολογικά και εννοιολογικά. Η διαδικασία αυτή προσαρμογής της μαθηματικής γνώσης στα σχολικά πλαίσια περιγράφεται με τον όρο διδακτική μετάπλαση ή διδακτικός μετασχηματισμός.

Ως παραδείγματα της διδακτικής μετάπλασης θα εξετάσουμε τα ζητήματα των φυσικών αριθμών και των ρητών (κλασματικών) αριθμών. Θα δώσουμε για κάθε περίπτωση τον τρόπο ορισμού της αντίστοιχης έννοιας στα πλαίσια της μαθηματικής επιστήμης και τον τρόπο εισαγωγής, παρουσίασης και ορισμού των εννοιών στα πλαίσια των σχολικών Μαθηματικών του τρέχοντος αναλυτικού προγράμματος του Δημοτικού σχολείου στην Ελλάδα.

1.1 Διδακτική Μετάπλαση των Φυσικών Αριθμών

1.1.1 Πλαίσιο ορισμού του συνόλου των Φυσικών αριθμών

Το ευκλείδειο σύστημα αποτέλεσε για αιώνες τη βάση πάνω στην οποία στηρίχθηκε η ανάπτυξη των Μαθηματικών και η Γεωμετρία ήταν τα θεμέλια των Μαθηματικών. 'Ολοι οι κλάδοι των Μαθηματικών που δημιουργήθηκαν από την εποχή του Ευκλείδη μέχρι τον 19ο αιώνα, ακόμη και η Ανάλυση (συναρτήσεις, απειροστικός και διαφορικός λογισμός), έπαιρναν το νόημά τους και αντλούσαν τη νομιμότητά τους μέσα από τους δεσμούς τους με τη Γεωμετρία. Κατά τη διάρκεια όμως του 19ου αιώνα συνέβησαν διάφορες "καταστροφές", όπως π.χ. η κατασκευή καμπυλών που γεμίζουν όλο το χώρο ή που δεν είναι πουθενά διαφορήσιμες, που έθεσαν σε αμφισβήτηση αυτήν την εδραιωμένη στη Γεωμετρία βεβαιότητα.

Για την επανάκτηση της χαμένης βεβαιότητας, οι μαθηματικοί του 19ου αιώνα στρέφονται στην Αριθμητική και τη Συνολοθεωρία, ψάχνοντας τη βάση όπου θα στηρίζεται η **αξιωματική θεμελίωση των Μαθηματικών**. Το βασικό μέλημα είναι η αποσαφήνιση και ο ορισμός του συνόλου των **πραγματικών αριθμών**. [Οι πραγματικοί αριθμοί περιλαμβάνουν πέρα από τους ρητούς αριθμούς και τις ρίζες των ρητών καθώς και τους υπερβατικούς αριθμούς, δηλαδή αριθμούς που δεν μπορούν να γραφούν ως ρίζες ρητών. Τέτοιοι αριθμοί είναι π.χ. ο αριθμός π, ο αριθμός e,... οι οποίοι μπορούν να προσδιορισθούν μόνον ως όρια συγκλινουσών ακολουθιών ρητών αριθμών (π.χ. e = $\lim_{n\to\infty}(1+ 1/n)^n$) σύμφωνα με τον ορισμό του Weierstrass].

Τρεις διαφορετικές μέθοδοι ορισμού του συνόλου των πραγματικών αριθμών προτάθηκαν από τους Cantor, Dedekind και Weierstrass. Η αναλυτική παρουσίασή τους ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτών των σημειώσεων. Αυτό όμως που πρέπει να τονίσουμε είναι ότι και οι τρεις μέθοδοι κατασκευάζουν τους πραγματικούς αριθμούς ξεκινώντας από το σύνολο των **Φυσικών αριθμών** και όλοι χρησιμοποιούν **απειροσύνολα** ρητών αριθμών για τον ορισμό των πραγματικών αριθμών. Έτσι, η αξιωματική θεμελίωση των Μαθηματικών ανάγεται πλέον στην αξιωματική θεμελίωση των φυσικών αριθμών, η οποία αποτελεί και το επομένο βήμα στις προσπάθειες των μαθηματικών. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι φυσικοί αριθμοί, οι πρώτοι που εμφανίζονται στην ιστορία της ανθρωπότητας, είναι οι τελευταίοι που ορίζονται συστηματικά.

Ας δούμε, λοιπόν, τους τρόπους ορισμού των φυσικών αριθμών που έχουν προταθεί από τους μαθηματικούς του 19ου και του 20ου αιώνα.

1.1.2 Ορισμός του Peano

Οι φυσικοί αριθμοί είναι ένα σύνολο N για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Το 0 είναι στοιχείο του N

(2) Υπάρχει μία 1-1 απεικόνιση f (που καλείται "διάδοχος του...") του N στο N

(3) $fN=N\setminus\{0\}$, δηλαδή κάθε φυσικός αριθμός έχει ένα μοναδικό διάδοχο και κάθε φυσικός εκτός του 0 έχει μοναδικό προηγούμενο

(4) αν M είναι υποσύνολο του N τέτοιο ώστε

$(0\in M\subset N) \wedge (f(M)\subset M)$ τότε M=N, δηλαδή για το σύνολο αυτό ισχύει το αξίωμα της πλήρους επαγωγής.

1.1.3 Ορισμός του Cantor

Ο Cantor (1897, Math. Annalen 46, pp. 282-284)ορίζει τους πληθικούς αριθμούς ως εξής:

*"**Δύναμη ή πληθικό αριθμό** του Μ καλούμε τη γενική έννοια (concept) η οποία, διά μέσου της ενεργούς δύναμης σκέψης, δημιουργείται από ένα σύνολο Μ με αφαίρεση όλων των διάφορων (ποιοτικών) ιδιοτήτων των στοιχείων m και τη σειρά παρουσίασής τους. Αφού κάθε ένα στοιχείο m, αν του αφαιρέσουμε τις ιδιότητές του, γίνεται ένα "ένα", ο πληθικός αριθμός Μ (του Μ) είναι ο ίδιος ένα ορισμένο σύνολο που αποτελείται από μονάδες, το οποίο υπάρχει στο μυαλό μας ως η νοερή εικόνα ή προβολή του συνόλου Μ".*

Στη συνέχεια δίνει τον ορισμό της ισοδυναμίας δύο συνόλων: *"Δύο σύνολα Μ και Ν λέγονται ισοδύναμα αν υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία του ενός επί του άλλου"*, και *"Δύο σύνολα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό αν και μόνο αν είναι ισοδύναμα"*.

Επισημαίνουμε εδώ, ότι ο ορισμός του Cantor ακολουθεί την ευκλείδεια αντίληψη για τους φυσικούς αριθμούς ως σύνθεση μονάδων.

1.1.4 Ορισμός των Frege και Russel & Whitehead

Στον ορισμό του Cantor ορίζεται ουσιαστικά ο πληθικός αριθμός ενός συνόλου, δεν ορίζονται όμως οι ίδιοι οι φυσικοί αριθμοί. Οι Frege, Russel & Whitehead επέκτειναν τον ορισμό αυτόν ως εξής:

Θεωρούμε όλα τα σύνολα και τις κλάσεις ισοδυναμίας που δημιουργούνται με τη σχέση ισοδυναμίας, όπως αυτή ορίζεται στον ορισμό του Cantor. Η πληθικότητα ενός συνόλου Μ ορίζεται πλέον ως η κοινή ιδιότητα που έχουν όλα τα σύνολα που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με το Μ.

Ξεκινώντας δε από το κενό σύνολο οι Russel & Whitehead δημιουργούν το σύνολο Φ, για το οποίο ισχύουν:

το Φ περιέχει το κενό σύνολο

αν το Φ περιέχει ένα σύνολο Χ, τότε περιέχει και το σύνολο $X \cup \{ X \}$

και το Φ είναι το μικρότερο από όλα τα σύνολα που πληρούν τις παραπάνω ιδιότητες.

Το παραδειγματικό σύνολο Φ είναι τότε αυτό που έχει ως στοιχεία τα σύνολα

$0, \{0, \{0\}\}, \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}, \ldots$

Η ύπαρξη ενός τέτοιου συνόλου Φ πρέπει κατά τους Russel & Whitehead να βεβαιωθεί αξιωματικά.

Η κοινή ιδιότητα των συνόλων που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με το 0 είναι η πληθικότητα 1, με το $\{0, \{0\}\}$ είναι το 2, κοκ.

Η θεώρηση των Frege και Russel & Whitehead είναι πολύ απομακρυσμένη από τη θεώρηση των Ευκλείδη και Cantor. Αποτελεί δε χαρακτηριστικό παράδειγμα της ανοντολογικής εξέλιξης των μαθηματικών ορισμών και όπως αναφέρει ο H. Freudenthal (1983, σελ. 77) "*είναι τόσο παράδοξη για τους μη μαθηματικούς ώστε για παράδειγμα ο Piaget διάβασε τον ορισμό ως ο πληθικός αριθμός να είναι κλάση ισοδύναμων μονάδων*".

1.1.5 Ο ορισμός του Dedekind

Ο Dedekind ξεκίνησε από τον ορισμό του απειροσυνόλου (ας μην ξεχνάμε ότι το σύνολο των Φυσικών αριθμών είναι απειροσύνολο). Ένα σύνολο, λοιπόν, είναι απειροσύνολο όταν υπάρχει γνήσιο υποσύνολό του το οποίο είναι ισοδύναμο με αυτό. Π.χ. αν θεωρήσουμε το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών και το σύνολο όλων των άρτιων φυσικών, η απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση $n \to 2n$ αποδεικνύει ότι τα δύο αυτά σύνολα είναι ισοδύναμα, έχουν δηλαδή τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

Στη συνέχεια ορίζει το σύνολο των Φυσικών αριθμών ξεκινώντας από ένα τυχαίο απειροσύνολο M. Θεωρεί την 1-1 απεικόνιση f με την οποία το M απεικονίζεται σ' ένα γνήσιο υποσύνολό του και ένα στοιχείο α του συνόλου M-f(M). Τότε το σύνολο των φυσικών αριθμών θα είναι το μικρότερο υποσύνολο του M για το οποίο ισχύει:

$$\alpha \in N \text{ και } f(N) \subset N.$$

1.1.6 Εισαγωγή των Φυσικών αριθμών στις πρώτες τάξεις του σχολείου

Στις πρώτες τάξεις του σχολείου (νηπιαγωγείο, πρώτη και δευτέρα δημοτικού) οι πρώτοι είκοσι φυσικοί αριθμοί εισάγονται ως πληθικοί αριθμοί, όπως θεωρούνται και στους ορισμούς των Cantor, Frege και Russel & Whitehead. Στην παρουσίαση όμως των φυσικών αριθμών που διδάσκονται σ' αυτές τις τάξεις η 1-1 αντιστοιχία δεν παίζει το ρόλο της σχέσης μέσω της οποίας τα σύνολα χωρίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την πληθικότητά τους, αλλά το κριτήριο ίσης ή διαφορετικής πληθικότητας συλλογών αντικειμένων. Η διαδικασία αυτή επιτρέπει μόνο μία ποιοτική προσέγγιση της έννοιας της πληθικότητας. Δεν προσφέρει τη δυνατότητα ποσοτικοποίησης του πλήθους και προσέγγισης των αριθμών: δεν μπορούμε δηλαδή να απαντήσουμε στην ερώτηση "πόσα είναι; ". Οπότε η παρουσίαση-εισαγωγή των φυσικών αριθμών ουσιαστικά γίνεται σύμφωνα με τον ορισμό του Peano: κάθε αριθμός παρουσιάζεται ως πληθικότητα συνόλου το οποίο αποτελείται από τόσα στοιχεία όσα και ο προηγούμενος αριθμός συν ένα ακόμα.

1.2 Διδακτική Μετάπλαση των Ρητών Αριθμών

Οι ρητοί (κλασματικοί) αριθμοί ορίζονται στη σύγχρονη άλγεβρα με αφετηρία το σύνολο των ακέραιων αριθμών. Αν περιοριστούμε στους θετικούς ρητούς, μια που στο Δημοτικό σχολείο αυτοί παρουσιάζονται πριν από τους αρνητικούς αριθμούς, τότε αυτοί μπορούν να οριστούν με βάση τους φυσικούς αριθμούς. Η ουσιώδης διαφορά μεταξύ του συνόλου των φυσικών αριθμών και του συνόλου των ρητών αριθμών βρίσκεται στη ***διακριτή*** δόμηση των πρώτων και την ***πυκνή*** δόμηση των δεύτερων. Ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών λέγεται διακριτό όταν κάθε στοιχείο του "απέχει" από τα άλλα, μπορούμε δηλαδή να βρούμε μια περιοχή γύρω από αυτό που να μην περιέχει κανένα άλλο στοιχείο του υποσυνόλου αυτού: μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε τον επόμενο και προηγούμενο αριθμό, όπως συμβαίνει στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Ένα υποσύνολο όμως των πραγματικών αριθμών λέγεται πυκνό όταν μεταξύ δύο στοιχείων του υποσυνόλου υπάρχει <u>**πάντα ένας τουλάχιστον**</u> άλλος αριθμός του υποσυνόλου (η ύπαρξη ενός τουλάχιστον ενδιάμεσου αριθμού ισοδυναμεί με την ύπαρξη άπειρων στο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών). Τέτοια πυκνά σύνολα είναι οι δεκαδικοί και οι ρητοί αριθμοί. Π.χ. ανάμεσα στο 1,3 και το 1,4 υπάρχει το 1,35, ανάμεσα στο 1,3 και το 1,35 υπάρχει το 1,305, ανάμεσα στο 1,3 και το 1,305 υπάρχει το 1,3005, ανάμεσα στο 1,3 και το 1,3005 υπάρχει το 1,30005, ... και η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον. Όμοια ανάμεσα στο 1/2 και το 1/3 υπάρχει το 5/12, ανάμεσα στο 1/2 και το 5/12 υπάρχει το 11/14, ανάμεσα στο 1/2 και το 11/14 υπάρχει το 9/14, ... κ.ο.κ.

Έτσι, το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των ρητών αριθμών είναι διαφορετικά ως προς την πυκνότητά τους: το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι διακριτό, ενώ το σύνολο των ρητών αριθμών είναι πυκνό. Η σημαντική αυτή διαφορά στη σχέση μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων χάνεται κατά τη διδακτική μετάπλαση των ρητών αριθμών.

1.2.1 Ορισμός των (θετικών) ρητών αριθμών.

Για να ορίσουμε τους θετικούς ρητούς αριθμούς ξεκινάμε από τους φυσικούς αριθμούς (το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με IN). Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο IN x IN, δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β), όπου τα α και β είναι φυσικοί αριθμοί. Στο σύνολο αυτό ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας: δύο ζεύγη (α, β) και (γ, δ) λέμε ότι είναι ισοδύναμα και γράφουμε (α, β)~(γ, δ), όταν ισχύει αδ=βγ. Η σχέση αυτή χωρίζει το σύνολο INxIN σε κλάσεις ισοδυναμίας, όπου κάθε κλάση ισοδυναμίας περιλαμβάνει τα ζεύγη που είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι καλά ορισμένες, δηλαδή κάθε ζεύγος ανήκει σε μία κλάση ισοδυναμίας και δεν υπάρχει ζεύγος που να μην ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας (αυτό συμβαίνει σε κάθε σχέση ισοδυναμίας). Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή το σύνολο που τα στοιχεία του είναι οι παραπάνω κλάσεις ισοδυναμίας (ένα τέτοιο σύνολο το λέμε σύνολο πηλίκο της σχέσης ισοδυναμίας), αποτελεί το σύνολο των ρητών αριθμών. Τα διάφορα ζεύγη που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας αποτελούν τις διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου κλασματικού αριθμού.

1.2.2 Οι κλασματικοί αριθμοί στο δημοτικό σχολείο

Στην τετάρτη τάξη του Δημοτικού σχολείου εισάγονται οι κλασματικοί αριθμοί. Η εισαγωγή τους γίνεται με βάση τις κλασματικές μονάδες (τα εναδικά κλάσματα όπως λέγονται στα Μαθηματικά), δηλαδή τα κλάσματα με αριθμητή το 1. Οι κλασματικές μονάδες εισάγονται με βάση το χωρισμό ενός αντικειμένου σε ίσα μέρη. Οι κλασματικοί αριθμοί θεωρούνται ως οι αριθμοί που μπορούμε να δημιουργήσουμε με επανάληψη κάποιας κλασματικής μονάδας. Δημιουργούνται έτσι πολλά σύνολα, ανεξάρτητα μεταξύ τους, κλασματικών αριθμών. Στο εσωτερικό δε κάθε τέτοιου συνόλου η δομή είναι διακριτή, αφού π.χ μεταξύ του 3/8 και του 4/8 δεν υπάρχει άλλος κλασματικός αριθμός που δημιουργείται με βάση την κλασματική μονάδα 1/8. Ένας κλασματικός αριθμός μπορεί να υπάρχει σε πολλά σύνολα κλασματικών αριθμών, π.χ το 1/2, το 2/4, το 4/8,... Η ισοδυναμία αυτών των κλασματικών αριθμών (που δεν είναι όμως διαφορετικοί κλασματικοί αριθμοί σύμφωνα με τον ορισμό των κλασματικών αριθμών στα Μαθηματικά αλλά διαφορετικά κλάσματα) παρουσιάζεται ύστερα ως ισότητα. Η διδακτική μετάπλαση στην περίπτωση των κλασματικών αριθμών αντιστρέφει τελείως την κατασκευή της αντίστοιχης μαθηματικής έννοιας.

2. ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΣΥΜΒΟΛΑΙΟ

Σε κάθε τάξη, σε κάθε μάθημα και σε κάθε επίπεδο εκπαίδευσης υπάρχει ένα σύνολο κανόνων που διέπουν τις σχέσεις μεταξύ διδασκόντων και διδασκομένων. Πολλοί από αυτούς τους κανόνες αφορούν τη συμπεριφορά μέσα στην τάξη, άλλοι όμως αφορούν τον τρόπο διαπραγμάτευσης της γνώσης από το διδάσκοντα και τους μαθητές.

Το σύνολο των ρητά ή έμμεσα διατυπωμένων κανόνων που αφορούν τη διαπραγμάτευση της μαθηματικής γνώσης και επιδρούν πάνω στη γνώση και τη στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά ονομάζουμε **διδακτικό συμβόλαιο**.

Παράδειγμα: Δόθηκαν στον Αλέξανδρο δύο καλαθάκια με τουρμπίνια. Το ένα καλαθάκι περιείχε 10 κόκκινα τουρμπίνια και το άλλο 12 μπλε τουρμπίνια. Ζητήθηκε από τον Αλέξανδρο να βρει σε ποιο καλαθάκι υπήρχαν περισσότερα τουρμπίνια. Ο Αλέξανδρος απάντησε σωστά. Όταν ρωτήθηκε πώς το ξέρει, απάντησε ότι τα μέτρησε. Η συνετεύκτρια επέμενε να της δικαιολογήσει την απάντησή του και να της εξηγήσει γιατί είναι σίγουρος. Τότε ο Αλέξανδρος είπε "Τώρα κατάλαβα, θέλεις να κάνω όπως στο σχολείο" και αμέσως τα έβαλε σε δύο σειρές αντιστοιχίζοντας ένα κόκκινο με ένα μπλε τουρμπίνι.

Στο παραπάνω επεισόδιο η αντίδραση του Αλέξανδρου *"Τώρα κατάλαβα, θέλεις να κάνω όπως στο σχολείο"* είναι αποτέλεσμα του διδακτικού συμβολαίου, όπως αυτό διαμορφώθηκε στην τάξη του και όπως έγινε αντιληπτό από τον ίδιο. Για τον Αλέξενδρο η διαδικασία σύγκρισης ποσοτήτων με τη βοήθεια της 1-1 αντιστοιχίας είναι **σχολική γνώση**. Δεν μπόρεσε να αποκτήσει η διαδικασία αυτή το νόημα μαθηματικού εργαλείου σύγκρισης ποσοτήτων. Έχουμε λοιπόν στην περίπτωση αυτή ένα παράδειγμα επίδρασης του διδακτικού συμβολαίου στη μαθηματική γνώση του παιδιού.

Μερικά χαρακτηριστικά του συνηθισμένου διδακτικού συμβολαίου για τα Μαθηματικά είναι τα εξής:

1. Τα προβλήματα και οι ασκήσεις που δίνονται στους μαθητές εμπλέκουν την πρόσφατα διδαχθείσα ύλη.
2. Κάθε πρόβλημα που δίνεται έχει μία λύση και αυτήν πρέπει να βρει ο μαθητής.
3. Τα δεδομένα που χρειάζονται για την επίλυση και μόνον αυτά δίνονται στην εκφώνηση.
4. Η λύση προέρχεται από το αποτέλεσμα (συνήθως ακριβές) των πράξεων που γίνονται με τα αριθμητικά δεδομένα.
5. Οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν γνώσεις γνωστές και όχι να ανακαλύψουν μεθόδους ή διαδικασίες.

3. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ - ΑΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Το διδακτικό περιβάλλον στο οποίο η διαπραγμάτευση της γνώσης γίνεται στα πλαίσια του τρέχοντος διδακτικού συμβολαίου και στο οποίο θεωρείται ότι η μάθηση είναι προσαρμογή στην ήδη συγκροτημένη μαθηματική γνώση ή είναι προσαρμογή μιας υπό συγκρότηση μαθηματικής γνώσης στην διδακτική πρόθεση του διδάσκοντα - όπου ο διδάσκων δίνει πληροφορίες και οδηγίες, βοηθάει με τεχνάσματα, καθιστά σαφές το τι περιμένει από τον μαθητή - ονομάζεται **διδακτική κατάσταση** (Brousseau, 1991).

Η ρήξη των όρων του διδακτικού συμβολαίου οδηγεί συνήθως σε μια **αδιδακτική κατάσταση**. Αδιδακτική κατάσταση έχουμε όταν οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν προβλήματά για την επίλυση των οποίων απαιτείται η διαπραγμάτευση, η ανακάλυψη νέων μεθόδων και νέων εννοιών (π.χ. για τα παιδιά του νηπιαγωγείου το πρόβλημα μοιρασιάς της τούρτας που δίνεται στο παράρτημα). Η συμμετοχή του διδάσκοντα στην περίπτωση αυτή πρέπει να είναι διαχειριστική και όχι παρεμβατική εφενός όσον αφορά την παρουσίαση της λύσης, δηλαδή ο διδάσκων "*αρνείται να παρέμβει ως το πρόσωπο που προτείνει τις γνώσεις που θέλει να δει να εμφανίζονται*" (Brousseau, 1991, σελ. 75), και αφετέρου όσον αφορά τη χρησιμοποίηση ενδείξεων που μπορεί να οδηγήσουν στη λύση: ο διδάσκων "*πρέπει ακατάπαυστα να βοηθά τον μαθητή να απογυμνώσει όσο γίνεται την κατάσταση από όλα τα διδακτικά τεχνάσματα για να του αφήσει την προσωπική και αντικειμενική γνώση*" (Brousseau, 1991, σελ. 76).

Μετά την ανακάλυψη των νέων στοιχείων της μαθηματικής γνώσης ο διδάσκων αναλαμβάνει ενεργό ρόλο στην **επισημοποίηση** της καινούργιας γνώσης ως μαθηματικής γνώσης.

Είναι φανερό ότι για να λειτουργήσει η αδιδακτική κατάσταση το πρόβλημα πρέπει να είναι αρκετά κοντά στις γνώσεις και τα ενδιαφέροντα των παιδιών, ώστε να μπορέσουν αυτά να αναπτύξουν αυθόρμητες στρατηγικές. Πρέπει να υπάρχει επίσης η δυνατότητα **ελέγχου της εγκυρότητας ή μη** των προτεινομένων λύσεων.

Η διαπραγμάτευση της γνώσης μέσω αδιδακτικών καταστάσεων κρίνεται απαραίτητη για τη διευθέτηση παρανοήσεων και δύσκολων εννοιών για τα παιδιά. Δίνουν επίσης τη δυνατότητα στο διδάσκοντα να ανακαλύψει τις πραγματικές αντιλήψεις των παιδιών και το νόημα που έχουν αποκτήσει γι' αυτά οι διάφορες έννοιες και διαδικασίες που έχουν ήδη διδαχθεί.

Κρίνεται απαραίτητο να τονίσουμε ότι δεν είναι βέβαια δυνατόν η διαπραγμάτευση όλου του αναλυτικού προγράμματος να γίνεται μέσα από αδιδακτικές καταστάσεις. Η εκχώρηση αδιδακτικών καταστάσεων πρέπει να γίνεται σε επιλεγμένα θέματα όπου τα παιδιά έχουν να κατακτήσουν νέες γνώσεις ή να αλλάξουν αντιλήψεις. Έτσι για τη διαπραγμάτευση μιας εννοιολογικής περιοχής θα υπάρχει εναλλαγή διαδακτικών και αδιδακτικών καταστάσεων. Ακόμη πρέπει να σημειώσουμε ότι ο διδάσκων "*δεν*