ΣΥΝΟΛΑ

Τι είναι σύνολο;

- Ένας ορισμός

  «*Μια συλλογή αντικειμένων διακεκριμένων και πλήρως καθορισμένων που λαμβάνονται από τον κόσμο είτε της εμπειρίας μας είτε της σκέψης μας*» (Cantor, 19ος αιώνας)

- Ο ορισμός αυτός είναι σύμφωνος με τη διαισθητική μας κατανόηση για το τι είναι σύνολο
  - Τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να είναι διαφορετικά μεταξύ τους
  - Δοθέντος ενός συνόλου, πρέπει να μπορούμε να αποφασίσουμε αν ένα «αντικείμενο» ανήκει ή όχι στο σύνολο

Ο «διαισθητικός» ορισμός του συνόλου…

- … μας καλύπτει σε πάρα πολλές περιπτώσεις
  - Πρακτικά, σε όλες όσες θα συναντήσουμε
- … αλλά οδηγεί σε παράδοξα όταν εξεταστούν κάποια «παράξενα» σύνολα
  - Τα σύνολα που ανήκουν στον εαυτό τους
    - Σ: Το σύνολο όλων των αντικειμένων που περιγράφονται με έντεκα ελληνικές λέξεις
      - Το Σ περιγράφεται με έντεκα ελληνικές λέξεις, και άρα το Σ είναι στοιχείο του Σ.

Το παράξοξο του B. Russel

- Έστω S το σύνολο όλων των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους
  - Ανήκει το S στον εαυτό του ή όχι;
- Σε ένα χωριό, υπάρχει μόνο ένας κουρέας. Κάποιο από τους χωριανούς ξυρίζονται μόνοι τους, κάποιοι πηγαίνουν στον κουρέα. Ο κουρέας ξυρίζει μόνο αυτούς που δεν ξυρίζονται μόνοι τους.
  - Ποιος ξυρίζει τον κουρέα;

Παράδοξα σαν το προηγούμενο…

- ..δείχνουν ότι η «λογική του κοινού νου» μπορεί να μας παραπλανήσει, όταν πρόκειται για έννοιες που είναι φαινομενικά απλές (όπως η έννοια του συνόλου) ή πάνε κόντρα στη διαίσθησή μας (όπως η έννοια του απείρου)
- Εδώ φαίνεται η αξία των μεθόδων που χρησιμοποιούν τα μαθηματικά

Τι θα ορίσουμε ως *σύνολο*;

- Σύνολο καλούμε κάθε ομάδα τυχαίων *αντικειμένων* (:στοιχεία του συνόλου) που ικανοποιεί τα εξής:
  - Το ίδιο στοιχείο δεν μπορεί να ανήκει δυο φορές στο ίδιο σύνολο
  - Το σύνολο δεν μπορεί να έχει ως στοιχείο τον εαυτό του

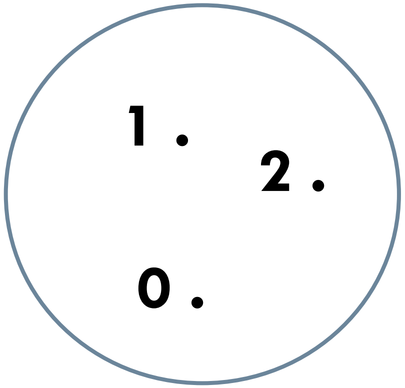
Ορισμοί και Συμβολισμοί

Στοιχεία συνόλου

- Όταν ένα αντικείμενο x είναι στοιχείο ενός συνόλου A γράφουμε $x \in A$
  - "το x ανήκει στο A"
- Στην αντίθετη περίπτωση γράφουμε $y \notin A$
  - "το y δεν ανήκει στο A"

Περιγραφή συνόλου

- Αναγραφή των στοιχείων μέσα σε άγκιστρα
  - {1, 2, 3, 4}
- Χρήση της ιδιότητας που πληρούν τα στοιχεία του συνόλου (εφόσον υπάρχει τέτοια ιδιότητα)
  - {x/ x φυσικός και x <3}
- Διάγραμμα Venn



Αξιοσημείωτα σύνολα

- Το σύνολο Μ που αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο ονομάζεται μονοσύνολο.
- Το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο ονομάζεται κενό .
  - Συμβολίζεται είτε με το Ø είτε με το { }.
- Το σύνολο U που περιέχει είτε τα στοιχεία όλων των συνόλων είτε όλα τα στοιχεία με τα οποία ασχολούμαστε σε μια συγκεκριμένη περίπτωση ονομάζεται καθολικό

Αν η περίπτωση είναι η ρίψη ενός ζαριού…

- …ποιο μπορεί να είναι το καθολικό σύνολο;
- Περιγράψτε ένα μονοσύνολο
- Δώστε μια περιγραφή συνόλου που αντιστοιχεί στο κενό σύνολο
- Πόσα στοιχεία έχει το δυναμοσύνολο του καθολικού συνόλου; Δώστε μερικά παραδείγματα στοιχείων του

*Σχέση** ισότητας συνόλων

- Δύο σύνολα λέγονται ίσα όταν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B και αντίστροφα

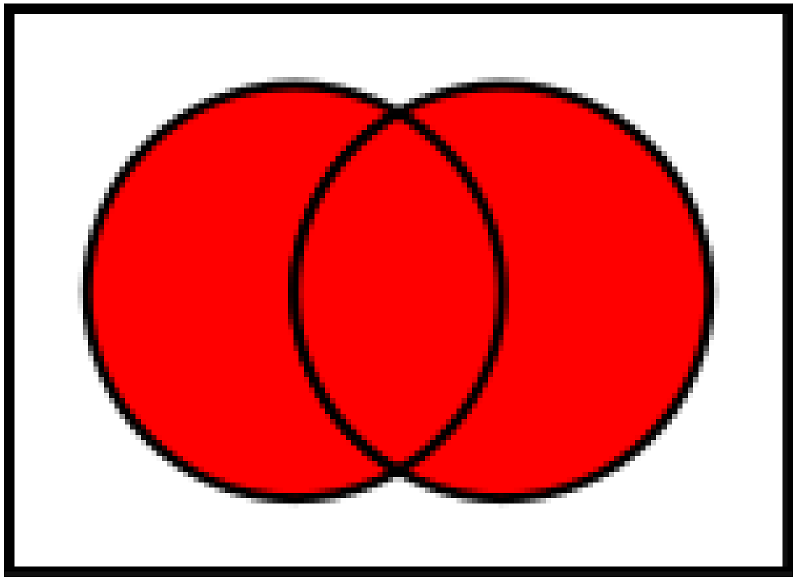
* Προτρέχοντας, αφού δεν έχουμε ορίσει ακόμα τι είναι σχέση

Σχέση εγκλεισμού

- Δοθέντων δύο συνόλων A, B, το B είναι υποσύνολο του A αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία του B είναι και στοιχεία του A.
  - $B \subseteq A \Leftrightarrow$ Αν $x \in B$ τότε $x \in A$.
- Ο ορισμός αυτός επιτρέπει το B να περιέχει όλα τα στοιχεία του A (B=A).
- Στην περίπτωση που το B είναι διάφορο του A, ονομάζεται γνήσιο υποσύνολο του A
  - $B \subset A$.

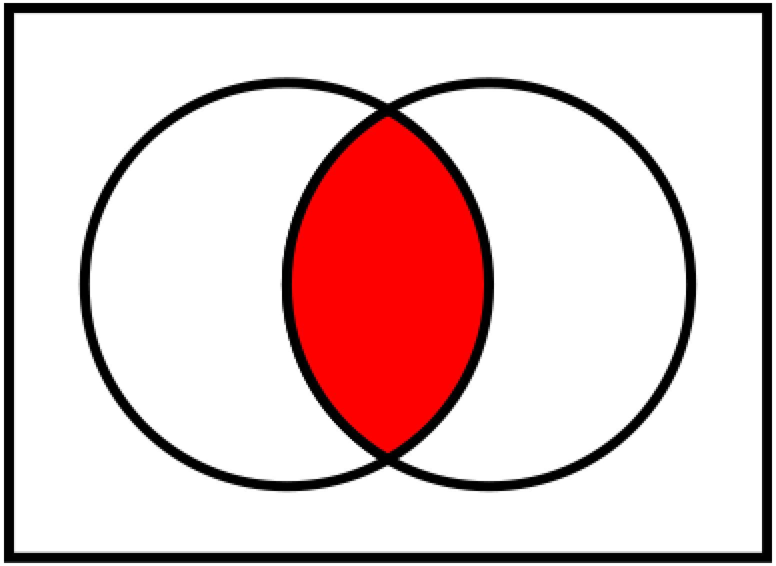
Πράξεις με σύνολα: Ένωση συνόλων

- Ένωση των συνόλων Α και Β ονομάζεται το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο ένα είτε στο άλλο σύνολο : $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$
- Αν τα σύνολα έχουν κοινά στοιχεία αυτά στην ένωση λαμβάνονται από μία φορά.
- Η ένωση συνόλων έχει τις εξής ιδιότητες
  - αντιμεταθετική
    - $A \cup B = B \cup A$
  - προσεταιριστική
    - $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$
  - ουδέτερο στοιχείο
    - $(A \cup\ ) \cup \emptyset = A$



Πράξεις με σύνολα: Τομή συνόλων

- Τομή των συνόλων Α και Β ονομάζεται το σύνολο που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων
  - $A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$
- Η τομή συνόλων έχει τις εξής ιδιότητες
  - αντιμεταθετική
    - $A \cap B = B \cap A$
  - προσεταιριστική
    - $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$



Επιμεριστικότητα

- $(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$
- $(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$

Τι σας θυμίζουν οι ιδιότητες των πράξεων των συνόλων;

Συμπλήρωμα

- Αν A, B δύο σύνολα και $A \subseteq B$, τότε καλούμε συμπλήρωμα του A ως προς το B (ή διαφορά του A από το B) και συμβολίζουμε A^C (αντ. B-A) το σύνολο εκείνο που αποτελείται από τα στοιχεία του B που δεν ανήκουν στο A.
  - $A^C = \{x / \ x \in B \text{ και } x \notin A\}$

- Ισχύει η αντιμετάθεση στην περίπτωση της συμπληρωματικής διαφοράς;

Ιδιότητες του συμπληρώματος

- Έστω Ω: το σύνολο αναφοράς και A, B με $A,B \subseteq \Omega$. Τότε:
  - $(A^c)^c = A$
  - $A \cap A^c = \varnothing$
  - $A \cup A^c = \Omega$
  - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
  - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

➢ Αναπαραστήστε τα παραπάνω με διαγράμματα Venn

Πληθικός αριθμός

- Ο αριθμός που εκφράζει το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου ονομάζεται πληθικός αριθμός
  - n(A)
- Ποια από τα παρακάτω σύνολα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό;
  - A={α, β}, B={1, 2, 3}, Γ={♥, ♣}

Η σύγκριση δύο συνόλων ως προς τον πληθικό τους αριθμό …

- …είναι «απλή» όταν τα σύνολα έχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων
- …αλλά όχι και τόσο απλή όταν έχουμε σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων
- Το συγκεκριμένο ζήτημα προκάλεσε μεγάλη αναστάτωση στο χώρο των μαθηματικών

Ποιο σύνολο έχει μεγαλύτερο πληθικό αριθμό…

- … το σύνολο των φυσικών αριθμών
- …ή το σύνολο που περιέχει τους φυσικούς που είναι πολλαπλάσια του 100;

$$\begin{array}{lcccc} \mathrm{N}=\{ & 1, & 2, & 3, & 4, \ldots\ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathrm{E}=\{ & 100, & 200, & 300, & 400, \ldots\} \end{array}$$

- Παρά το γεγονός ότι το E είναι υποσύνολο του N, τα δύο σύνολα είναι ισοδύναμα (έχουν το ίδιο πληθικό αριθμό)

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι…

- …όταν θέλουμε να συγκρίνουμε απειροσύνολα ως προς τον πληθικό τους αριθμό βασιζόμαστε στην 1-1 αντιστοιχία των στοιχείων τους, ακριβώς όπως όταν ξεκινάμε τη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων στο Νηπιαγωγείο και τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού
  - Υπάρχουν τόσες καρέκλες όσα είναι τα παιδιά;

Κάτι ενδιαφέρον (εκτός ύλης)

- Ποιο σύνολο έχει μεγαλύτερο πληθικό αριθμό
  - το σύνολο των φυσικών
  - ή το σύνολο των ρητών;

	1	2	3	4	5	6	7	8	⋯
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	⋯
2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	⋯
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	⋯
4	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	⋯
5	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	⋯
6	$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	⋯
7	$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	⋯
8	$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Το γεγονός ότι...

- ...οι φυσικοί και οι ρητοί έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό, δε σημαίνει ότι όλα τα απειροσύνολα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό
- Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των πραγματικών έχει μεγαλύτερο πληθάριθμο από το σύνολο των φυσικών και των ρητών

Ένα ακόμα αξιοσημείωτο σύνολο

- Δυναμοσύνολο ενός συνόλου X είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του.
  - Συνήθως συμβολίζεται με P(X) (από τον αγγλικό όρο power set)
- Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου με n στοιχεία έχει 2^n (το πλήθος) στοιχεία.

Απαγορευμένα ζεύγη

Διατεταγμένα ζεύγη

- Έστω δυο σύνολα Σ_1 και Σ_2. Αν θεωρήσουμε δύο στοιχεία $\alpha \in \Sigma_1$ και $\beta \in \Sigma_2$ μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα νέο αντικείμενο που είναι το ζεύγος α, β .
- Το ζεύγος αυτό ονομάζεται διατεταγμένο όταν η σειρά των στοιχείων α, β στη δυάδα έχει σημασία
  - Πρώτο το α, δεύτερο το β
  - Συμβολίζουμε: (α, β)
- Τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) και (β,α) είναι διαφορετικά μεταξύ τους
- Αν $(\alpha,\beta)=(\gamma, \delta)$ τότε $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$.

Παράδειγμα

- A={ κρέας, ψάρι }
- B = { πατάτες, μακαρόνια, ρύζι, λαχανικά }
- Πόσα διαφορετικά πιάτα μπορώ να φτιάξω συνδυάζοντας τα στοιχεία του A με τα στοιχεία του B;
- Εδώ θα «μετρούσατε» το ζεύγος (κρέας, πατάτες) ως διαφορετικό από το ζεύγος (πατάτες, κρέας);

Παράδειγμα

- Α= { ΑΕΚ, ΠΑΟ, ΟΣΦΠ }
- Β = { ΠΑΣ ΓΙΑΝΝΕΝΑ, ΠΑΟΚ}

- Αν το ζεύγος (ΑΕΚ, ΠΑΟΚ) συμβολίζει έναν αγώνα μεταξύ των δύο ομάδων, είναι το ίδιο ή διαφορετικό από το ζεύγος (ΠΑΟΚ, ΑΕΚ);

Καρτεσιανό γινόμενο

- Καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων A, B ονομάζεται το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (α, β) όπου το πρώτο στοιχείο προέρχεται από το σύνολο A και δεύτερο από το B
  - Συμβολίζουμε με AxB
  - $A\times B=\{(\alpha, \beta): \alpha\in A \text{ και } \beta\in B\}$

Οικείο παράδειγμα καρτεσιανού γινομένου

- Καρτεσιανές συντεταγμένες
  - Το σύνολο των ζευγών πραγματικών αριθμών που παριστάνει το επίπεδο

➢ $\mathbb{R} \mathrm{x} \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{ (x, y) : x, y \in \mathbb{R} \}$

➢ Γιατί έχει σημασία η σειρά σε αυτά τα ζεύγη;

Πληθικός αριθμός και τρόποι παράστασης ενός καρτεσιανού γινομένου

Έστωσαν…

- …A= {1, 2}, B={3, 4, 5}
  - Μπορείτε να προβλέψετε πόσα στοιχεία θα περιέχει το καρτεσιανό γινόμενο AxB;
  - Μπορείτε να προβλέψετε πόσα στοιχεία θα περιέχει το καρτεσιανό γινόμενο BxA;
  - Τα σύνολα AxB και BxA θα περιέχουν τα ίδια στοιχεία;
  - Πώς θα παραστήσετε π.χ. το καρτεσιανό γινόμενο AxB;

Τρόποι παράστασης ενός καρτεσιανού γινομένου: Ένα παράδειγμα

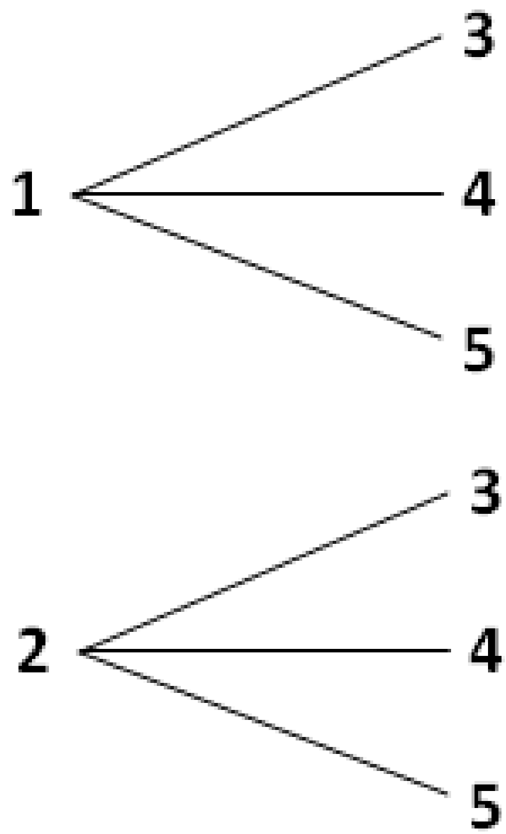
- Με αναγραφή των στοιχείων:
- Με δενδροδιάγραμμα
- Με πίνακα διπλής εισόδου
- Με πίνακα γραμμών

Με αναγραφή των στοιχείων

- A= {1, 2}, B={3, 4, 5}

- AxB = { (,), (,), (,), (,), (,), (,) }

Με δενδροδιάγραμμα



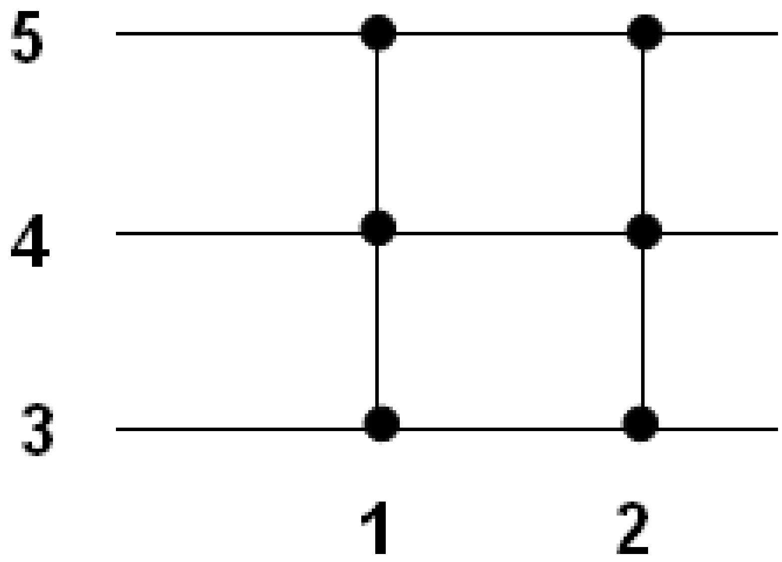
Με πίνακα διπλής εισόδου

- A= {1, 2}, B={3, 4, 5}

B \ A	1	2
3	(1,3)	(2,3)
4	(1,4)	(2,4)
5	(1,5)	(2,5)

Με πίνακα γραμμών

- A= {1, 2}, B={3, 4, 5}



Δοκιμάστε τις διάφορες αναπαραστάσεις…

- … με το καρτεσιανό γινόμενο AxA

Διμελής σχέση

- Έστω δύο σύνολα A, B και το καρτεσιανό τους γινόμενο AxB.
- Κάθε υποσύνολο του AxB ονομάζεται διμελής σχέση
  - στο AxB / μεταξύ των A, B / από το A στο B
- A: σύνολο αφετηρίας/ ορισμού
- B: Σύνολο άφιξης
- Το A και το B είναι δυνατό να ταυτίζονται

Τι νόημα έχει αυτός ο ορισμός;

- Ας θεωρήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων Α και Β. Αυτό αποτελείται από ζεύγη στοιχείων (α, β) με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$.
- Αν από το σύνολο των ζευγών κρατήσουμε μόνο ένα μέρος, δηλ. αν πάρουμε ένα υποσύνολο του ΑxΒ, τότε ουσιαστικά έχουμε ορίσει μία σχέση ανάμεσα στα στοιχεία αυτά.
- Στις περιπτώσεις που θα μελετήσουμε, η σχέση θα έχει κάποιο «διαισθητικά εμφανές» νόημα

Παράδειγμα

- Θεωρούμε τρία παιδιά, το Γιάννη, τον Πέτρο και τον Ανδρέα και τις αδελφές τους αντίστοιχα, Μαρία, Ιωάννα και Κική.
  - A= {Γιάννης, Πέτρος, Ανδρέας}
  - B= {Μαρία, Ιωάννα, Κική}
- Ποιο είναι το καρτεσιανό γινόμενο AxB;
- Ποιο υποσύνολο του AxB είναι η σχέση «ο x είναι αδερφός της y»;

Όροι και Συμβολισμοί

- Έστω A και B δύο σύνολα και AxB το καρτεσιανό τους γινόμενο.
- Έστω $R \subseteq AxB = \{(\ , \ ), (\ , \ ), (\ , \ ) \ldots\}$ μια σχέση
- Αν $(α, β) \in R$, τότε συμβολίζουμε με αRβ
  - Το α βρίσκεται σε σχέση με το β
  - Το α σχετίζεται με το β μέσω της σχέσης R
- Αν $(α, β) \notin R$, τότε συμβολίζουμε με $α\not R β$
  - Το α δε βρίσκεται σε σχέση με το β.
  - Το α δε σχετίζεται με το β μέσω της σχέσης R

Παράδειγμα

- A= {4}
- B={1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
- Ποιο είναι το καρτεσιανό γινόμενο AxB;
- Ποιο υποσύνολό του αντιστοιχεί στη σχέση «το β είναι πολλαπλάσιο του α», όπου $\alpha \in A$ και $\beta \in B$;
- Ανήκει το (2, 4) στο AxB; Ανήκει το (4, 2) στο AxB;
- Ισχύει ότι 4**R**2; Ισχύει ότι 4**R**16;

Ιδιότητες που μπορεί να έχει (ή να μην έχει) μια σχέση σε ένα σύνολο A

Ανακλαστική σχέση

- Μια σχέση R στο σύνολο A καλείται ανακλαστική ανν κάθε στοιχείο $\alpha \in A$ βρίσκεται σε σχέση με τον εαυτό του (α**R**α ή $(\alpha,\alpha) \in R$)

- Έστω A το σύνολο που αποτελείται από τα παιδιά και τους γονείς ενός Νηπιαγωγείου και έστω $R \subseteq A\mathrm{x}A$ η σχέση που περιγράφεται ως εξής: $(\alpha, \beta) \in R$ αν το α είναι παιδί και το β είναι η μητέρα του. Είναι η σχέση ανακλαστική;

- Έστω A το σύνολο των φυσικών αριθμών και $R \subseteq A\mathrm{x}A$ η σχέση η οποία περιγράφεται ως εξής: $(\alpha, \beta) \in R$ αν το α είναι πολλαπλάσιο του β. Είναι η σχέση ανακλαστική;

Συμμετρική σχέση

- Μια σχέση R στο σύνολο A καλείται συμμετρική στην περίπτωση που:

  Αν $(\alpha, \beta) \in R$, τότε και $(\beta, \alpha) \in R$ (διαφορετικά, αν α**R**β, τότε και β**R**α

- Έστω Α το σύνολο που αποτελείται από τα παιδιά ενός σχολείου και έστω $R \subseteq AxA$ η σχέση που περιγράφεται ως εξής: $(\alpha, \beta) \in R$ αν το α είναι αδερφός/αδερφή του β. Είναι η σχέση συμμετρική;
- Έστω Α το σύνολο των φυσικών αριθμών και $R \subseteq AxA$ η σχέση η οποία περιγράφεται ως εξής: $(\alpha, \beta) \in R$ αν το α είναι πολλαπλάσιο του β. Είναι η σχέση συμμετρική;

Αντισυμμετρική σχέση

- Μια σχέση R στο σύνολο A καλείται αντισυμμετρική στην περίπτωση που: Αν $(\alpha, \beta) \in R$ ΚΑΙ $(\beta, \alpha) \in R$, τότε το α και το β ταυτίζονται (διαφορετικά, αν α**R**β ΚΑΙ β**R**α, τότε $\alpha=\beta$)

- Έστω A το σύνολο των φυσικών αριθμών και $R \subseteq AxA$ η εξής σχέση που περιγράφεται ως εξής: $(\alpha, \beta) \in R$ ανν το α είναι μικρότερο ή ίσο του β (δηλ. $\alpha \leq \beta$). Είναι η σχέση αντισυμμετρική;

- Έστω A το σύνολο που αποτελείται από τα παιδιά ενός σχολείου και έστω $R \subseteq AxA$ η σχέση που περιγράφεται ως εξής: $(\alpha, \beta) \in R$ αν το α είναι αδερφός/αδερφή του β. Είναι η σχέση αντισυμμετρική;

Μεταβατική σχέση

- Μια σχέση R στο σύνολο Α καλείται μεταβατική στην περίπτωση που: Αν (α, β)$\in$R ΚΑΙ (β, γ)$\in$R, τότε το (α, γ)$\in$R (διαφορετικά, αν α**R**β ΚΑΙ β**R**γ, τότε α**R**γ).
  - Έστω Α το σύνολο που αποτελείται από τα παιδιά ενός σχολείου και έστω R $\subseteq$ AxA η σχέση που περιγράφεται ως εξής: (α, β) $\in$ R αν το α είναι αδερφός/αδερφή του β. Είναι η σχέση μεταβατική;
  - Έστω Α το σύνολο που αποτελείται από τα παιδιά ενός σχολείου και έστω R $\subseteq$ AxA η σχέση που περιγράφεται ως εξής: (α, β) $\in$ R αν το α είναι φίλος/φίλη του β. Είναι η σχέση μεταβατική;

Σχέση ισοδυναμίας

- Μια σχέση η οποία είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική καλείται σχέση ισοδυναμίας
  - Είναι η σχέση «…έχει το ίδιο χρώμα με…» σχέση ισοδυναμίας;
  - Είναι η ισότητα στο σύνολο των φυσικών σχέση ισοδυναμίας;
  - Είναι η σχέση «…είναι πατέρας του…» σχέση ισοδυναμίας;

Σχέση (μερικής) διάταξης

- Μια σχέση η οποία είναι αναклαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική καλείται σχέση (μερικής) διάταξης
- Είναι η σχέση «…είναι μικρότερος από…» στο σύνολο των φυσικών σχέση διάταξης;
- Είναι η σχέση «…είναι πολλαπλάσιο του…» στο σύνολο των φυσικών σχέση διάταξης;
- Είναι η σχέση «…είναι υποσύνολο του…» σχέση διάταξης;

Σκεφτείτε ότι…

- … η έννοια της σχέσης που ορίσαμε με μαθηματικά εργαλεία είναι πολύ γενική και μπορεί εφαρμοστεί σε ένα πλήθος περιπτώσεων

Ταξινόμηση

Διαμερισμός και κλάσεις ισοδυναμίας

Διαμερισμός ενός συνόλου

- Διαμερισμός ενός συνόλου καλείται ο χωρισμός του σε υποσύνολα
  - τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους
    - δεν έχουν κοινά στοιχεία
  - των οποίων η ένωση είναι το σύνολο Α

- Έστω σύνολο Α = { 1, 2, 3, 4}
  - Αποτελούν τα (υπο)σύνολα Β={1}, Γ={1,2,3} και Δ={ 4} διαμερισμό του Α;
  - Αποτελούν τα (υπο)σύνολα Γ={1,2,3} και Δ={ 4} διαμερισμό του Α;
  - Κατασκευάστε ένα διαμερισμό του συνόλου Α

Κλάσεις ισοδυναμίας

- Έστω ένα σύνολο Α στο οποίο έχει οριστεί μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$. Για κάθε στοιχείο $\alpha \in A$, θεωρούμε το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του Α, τα οποία είναι ισοδύναμα με το α. Το σύνολο αυτό καλείται κλάση ισοδυναμίας του α ως προς τη σχέση $\sim$.

- Αν η $\sim$ είναι η γνωστή σας σχέση ισοδυναμίας κλασμάτων, τότε ποια στοιχεία περιέχει η κλάση ισοδυναμίας του 1/2 ;

Διαμερισμός και κλάσεις ισοδυναμίας

- Όταν χωρίζουμε ένα σύνολο Α σε κλάσεις ισοδυναμίας, τότε παίρνουμε ένα διαμερισμό του Α
- Και αντίστροφα:
- Αν διαμερίσουμε ένα σύνολο Α, οδηγούμαστε στον ορισμό μια σχέσης ισοδυναμίας στο Α.

Από τη σχέση ισοδυναμίας στο διαμερισμό: Παράδειγμα

- A={1, 2, 3, 4, 5}
- Ορίζω μια σχέση ισοδυναμίας, έτσι ώστε:
  - Το 2 να είναι ισοδύναμο με το 4
  - το 1 να είναι ισοδύναμο με το 3 και το 5
    - Πώς μου ήρθε αυτή η ιδέα;

R = { (**2, 2**), (**2, 4**), (**4, 2**), (**4, 4**),

(**1**,**1**), (**1, 3**), (**1, 5**), (**3, 1**), (**3, 3**), (**3, 5**), (**5**,**1**), (**5, 3**), (**5, 5**)

  - Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι οι Α΄={2, 4}, Α΄΄={1, 3, 5}
- Διαμερίζουν οι Α΄ και Α΄΄ το Α;
  - A ={2, 4} $\cup$ {1, 3, 5}

Από το διαμερισμό στη σχέση ισοδυναμίας

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Διαμερισμός
  - $A=\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4\}$
- Από το διαμερισμό στη σχέση ισοδυναμίας
  - Ορίζουμε μια σχέση, ως προς την οποία το 1, το 3 και το 5 είναι ισοδύναμα ΚΑΙ το 2 και το 4 είναι ισοδύναμα
  - $R = \{ (1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3, 3), (3, 5), (5,1), (5,3), (5,5), (2,2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$
    - Είναι η R πράγματι σχέση ισοδυναμίας; Ελέγξτε το!

Σκεφτείτε ότι…

- Διαδικασίες σαν αυτές που περιγράψαμε οδηγούν σε ταξινομήσεις
  - Η πορεία από το γενικό στο μερικό
  - Η αντίστροφη πορεία (από το μερικό) στο γενικό οδηγεί σε πιο γενικευμένες κλάσεις
    - Ομαδοποίηση, κατηγοριοποίηση

Σειροθέτηση

Σχέση ολικής διάταξης

Σχέση **ολικής** διάταξης: Το ερώτημα

- Ορίσαμε τι σημαίνει σχέση (μερικής) διάταξης σε ένα σύνολο A.
  - Ανακλαστική, Αντισυμμετρική, Μεταβατική
- Η γνωστές σας σχέσεις ‘$\leq$’ στους αριθμούς και ‘$\subseteq$’ στα σύνολα είναι σχέσεις (μερικής) διάταξης
- Σκεφτείτε τις εξής ερωτήσεις:
  - Θεωρούμε οποιουσδήποτε π.χ. φυσικούς αριθμούς α, β. Μπορούμε πάντα να τους συγκρίνουμε, δηλ. να αποφανθούμε αν $\alpha\leq\beta$ ή $\beta \leq\alpha$;
  - Ισχύει το ίδιο και στην περίπτωση των συνόλων;

Σχέση **ολικής** διάταξης: Ο ορισμός

- Θεωρούμε ένα σύνολο A και μια σχέση διάταξης R σε αυτό.
- Αν για την R ισχύει επιπλέον ότι για κάθε (α,β) $\in$ AxA ισχύει αRβ, ή βRα
  - Με άλλα λόγια, μπορούμε να συγκρίνουμε οποιαδήποτε δύο στοιχεία του A.
- τότε η σχέση λέγεται σχέση ολικής διάταξης και το σύνολο A καλείται ολικά διατεταγμένο

Το σύνολο των φυσικών…

- …με τη συνήθη σχέση διάταξης ‘≤’ είναι ολικά διατεταγμένο
- Επιπλέον, τα στοιχεία του μπορούν να τοποθετηθούν σε ‘αύξουσα’ σειρά
  - Σειροθέτηση
- Τι από τα παραπάνω ισχύει στα σύνολα των ρητών και των πραγματικών