Θεωρία Αριθμών (2021-2022)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #1, Μιγαδικοί αριθμοί

1. Στο μιγαδικό επίπεδο να σημειώσετε τις εικόνες και τις διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών αριθμών: $1+i, \quad 1, \quad i, \quad -2i, \quad 3+4i, \quad 3-4i, \quad 5, \quad 0.$

2. Ποιος είναι ο $\bar{z}$ όταν

$$z=-5+7i, \qquad z=-4+9i, \qquad z=4i \qquad z=11, \qquad z=-i.$$

3. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών

$$1+i, \qquad -5i, \qquad 0, \qquad -4, \qquad (1-i)^2(1+i)^4, \qquad (3+i)/(4-3i).$$

4. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή $\alpha+\beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $(-4+6i)+(7-2i)$, $\quad (4+4i)+(-8-7i)+(5+3i)$
- $(3-2i)-(6+4i)$, $\quad (3+2i)(4+5i)$
- $3i(6+i)$, $\quad (4+3i)(4-3i)$
- $1/(1+i)$, $\quad i^6$
- i^2+2i+1, $\quad (1+i\sqrt{3})^2$
- $(3+i)/(2-i)$, $\quad (6-i\sqrt{2})/(1+i\sqrt{2})$

5. Για έναν μιγαδικό αριθμό z να αποδείξετε ότι:

- Ο z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z=\bar{z}$.
- Ο z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z=-\bar{z}$.

6. Αν $z_1=(5-9i)/(7+4i)$ και $z_2=(5+9i)/(7-4i)$ να δείξετε ότι ο z_1+z_2 είναι πραγματικός αριθμός, ενώ ο z_1-z_2 είναι φανταστικός αριθμός.

7. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει

- $(x+y)+(x-y)i=3-i$
- $(3-2i)^2-(x+yi)=x-yi$
- $((1+i)/(1-i))^2+1/(x+yi)=1+i$

8. Να λύσετε, για z μιγαδικό αριθμό, τις εξισώσεις

- $\bar{z}=z^2$
- $\bar{z}=z^3$

Θεωρία Αριθμών (2021-2022)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #2, Μιγαδικοί αριθμοί (Συνέχεια)

1. Να λύσετε, για z μιγαδικό αριθμό, τις εξισώσεις:

$$z^2 - 3z + 2 = 0, \qquad z^2 - 2z + 3 = 0, \qquad z + 1/z = 1.$$

2. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$ (με $x, y \in \mathbb{R}$) για τους οποίους ισχύει:

$$|z^2| = z^2, \qquad |z - 1| = z, \qquad |z + i| = 2\bar{z}.$$

3. Να βρείτε πού ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους

$$|z| = 1, \qquad |z - i| = 1, \qquad 1 < |z| < 2, \qquad |z| \geq 2.$$

4. Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z| = 1$, να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με $w = 2z + 1$. Με άλλα λόγια, περιγράψτε το σύνολο

$$A = \{2z + 1 : z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

5. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς:

$$1 + \sqrt{3}i, \qquad 1 - \sqrt{3}i, \qquad -1 - \sqrt{3}i, \qquad -1 + \sqrt{3}i, \qquad 4, \qquad -4.$$

6. Να υπολογίσετε την παράσταση $((1 + i)/(\sqrt{2}))^6$.

7. Αν $z = (1 + i\sqrt{3})/2$ να υπολογίσετε τον z^{2021}.

8. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη διαίρεση ενός μιγαδικού z με i.

9. Αν $\theta \in \mathbb{R}$ και $z = \cos\theta + i\sin\theta$ να αποδείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$z^n + (1/z)^n = 2\cos(n\theta), \qquad z^n - (1/z)^n = 2i\sin(n\theta).$$

10. Αν $n \geq 2$ είναι θετικός ακέραιος και $\omega = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ να αποδείξετε ότι

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1} = 0, \qquad 1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \ldots \cdot \omega^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις στο μιγαδικό επίπεδο:

$$z^3 = 1, \qquad z^4 = 1, \qquad z^6 = 1.$$

12. Να λύσετε, για z μιγαδικό αριθμό, τις εξισώσεις:

$$z^3 = -i, \qquad z^4 = 16(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)), \qquad z^6 = -64,$$

$$z^3 = 1 - i, \qquad z^7 + 1 = 0, \qquad z^4 + 5z^2 + 4 = 0.$$