ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τμημα Μαθηματικων

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ

TATE Συνομολογια πεπερασμενων ομαδων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2021

Αφιερώνεται στους γονείς μου και την αρραβωνιαστικιά μου Σοφία, Δημήτρη και Γεωργία.

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Μαθηματικά που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 05/04/2021 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Επαμεινώνδας Κεχαγιάς	Καθηγητής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
Ευστράτιος Πρασίδης	Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου
Αριστείδης Κοντογεώργης	Καθηγητής Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ

Ευχαριστιες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ.Επαμεινώνδα Κεχαγιά για την πολύτιμη βοήθεια και την σωστή καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη την διάρκεια της εκπόνησης της μεταπτυχιακής μου διατριβής και για την άριστη συνεργασία που είχαμε όλο αυτό τον καιρό. Επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ στα μέλη της επιτροπής αξιολόγησης καθηγητή κ.Πρασίδη Ευστράτιο και κ.Κοντογεώργη Αριστείδη για τις χρήσιμες συμβουλές και διορθώσεις που μου υπέδειξαν.

Τέλος οφείλω να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου οι οποίοι, με κατανόηση, μου στάθηκαν και με βοήθησαν καθ'ολο το πέρας αυτής της χρονικής περιόδου.

Περιληψη

Στην διατριβή αυτή θα μελετήσουμε τη συνομολογία του Tate για πεπερασμένες ομάδες. Θα δώσουμε μια εισαγωγή στην ομολογιακή άλγεβρα μελετώντας πλήρεις αναλύσεις και τη ραβδοειδή διάλυση τις οποίες θα εφαρμόσουμε στους συναρτητές $H^*_*(-,-)$ των οποίων θα παρουσιάσουμε κύριες ιδιότητες. Μια εφαρμογή των προηγουμένων θα είναι η σχέση της συνομολογίας ομάδων με τις κλάσεις ισοδυναμίας επεκτάσεων μιας πεπερασμένης ομάδας. Θα αποδειχθεί το Θεώρημα των Chevalley και Artin-Tate μέσω του πηλίκου του Herbrand όπως και οι συνθήκες των Nakayama-Tate για συνομολογιακά τετριμμένα πρότυπα.

Abstract

In this thesis we will study Tate cohomology for finite groups. We will outline the foundations of homological algebra starting with complete and bar resolutions which will be applied on the functors $H^*_*(-,-)$ studying their main properties. We will apply the theory built thus far to the case of group cohomology to classify equivalence classes of group extensions. The Theorem of Chevalley and Artin-Tate will be proved using Herbrand's quotient along with the Nakayama-Tate conditions for cohomological triviality.

Περιεχομενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγη

Οι πεπερασμένες ομάδες μπορούν να μελετηθούν σαν ομάδες συμμετριών. Θα μπορούσαν να ειδωθούν σαν ομάδες μεταθέσεων ή ομάδες πινάκων. Στην τοπολογία αντιμετωπίζουμε τις ομάδες σαν μετασχηματισμούς σημαντικών τοπολογικών χώρων οι οποίοι αποτελούν μια φυσική επέκταση του προβλήματος της ταξινόμησης των συμμετριών γεωμετρικών αντικειμένων. Η συνομολογία ομάδων αποτελεί ένα μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη των ομάδων κάνοντας χρήση εργαλείων από την αλγεβρική τοπολογία. Η μελέτη επίσης γίνεται μέσω της δράσης της ομάδας G πάνω σε G-πρότυπα. Οι ομάδες μπορούν να μελετηθούν ομολογιακά μέσω των αντίστοιχων αλγεβρών ομάδων και αυτή η αντιμετώπιση συνδέεται με ιδιαίτερους τοπολογικούς χώρους τους ονομαζόμενους χώρους ταξινόμησης. Αυτοί οι χώροι αποτελούν τα βασικά στοιχεία της θεωρίας σταθερής ομοτοπίας ή οποία κατέχει κεντρική θέση στον κλάδο της αλγεβρικής τοπολογίας. Η συγκεκριμένη θεωρία παίζει ιδιαίτερο ρόλο στη μελέτη των σταθερών σημείων της δράσης της ομάδας σε κάποιο πρότυπο ή τοπολογικό χώρο όπως οι σφαίρες. Έχει εφαρμογές στην ομολογιακή άλγεβρα, αλγεβρική τοπολογία και αλγεβρική θεωρία αριθμών.

Η συνομολογία ομάδων αλληλεπιδρά σημαντικά μεταξύ άλγεβρας και τοπολογίας και ουσιαστικά συνέβαλε στη δημιουργία των κλάδων της Ομολογιακής Άλγεβρας και Αλγεβρικής K-Θεωρίας. Η μελέτη της ξεκινά γύρω στο 1920 ανεξάρτητα από τοπολόγους και μαθηματικούς στη θεωρία αριθμών. Στη θεωρία αριθμών, η συνομολογία ομάδων προέκυψε φυσικά σαν εργαλείο για την ανάλυση και περιγραφή της ομάδας Brauer ενός σώματος. Ας υποθέσουμε ότι μία ομάδα E περιέχει μια κανονική υποομάδα A με πηλίκο $G \cong E/A$, κεφάλαιο 9. Δημιουργείται το εξής ερώτημα. Αυτές οι υποομάδες καθορίζουν πλήρως την E;

$$1 \to A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow G \to 1.$$

Μπορούμε να καθορίσουμε όλες αυτές τις ομάδες E οι οποίες είναι επεκτάσεις των A και G; Η απάντηση είναι όχι και ακόμα και για μικρές A και G η απάντηση είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Η περίπτωση της E αβελιανής είναι προφανώς γνωστή.

Τα εργαλεία για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος δίνονται από τη συνομολογία ομάδων. Το προηγούμενο πρόβλημα σχετίζεται και με το τρίτο πρόβλημα του Hilbert. Η ομάδα $H^3(G, A)$ εκφράζει τη δυσκολία της ύπαρξης τέτοιων επεκτάσεων ενώ η $H^2(G, C)$ μετρά τον αριθμό των διαφορετικών επεκτάσεων. Εδώ C είναι το κέντρο της A.

Ας υποθέσουμε ότι η E είναι πεπερασμένη ομάδα και p πρώτος ο οποίος διαιρεί την τάξη της E. Πότε η E περιέχει μια κανονική υποομάδα A_p τάξης δύναμης του p; Υπάρχει μια σημαντική εικασία του Quillen η οποία δίνει μια αναπάντεχη απάντηση η οποία σχετίζεται με τις τοπολογικές ιδιότητες του μερικώς διατεταγμένου συνόλου των υποομάδων τάξης p^n της E.

Έστω μια πεπερασμένη ομάδα E. Ένα από τα βασικά εργαλεία για την κατανόησή της είναι η έκφρασή της σαν επέκταση άλλων ομάδων

$$1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} G \to 1$$

όπου A είναι μια κανονική υποομάδα της και η G είναι το πηλίκο E/A. Θα πρέπει λοιπόν να μελετηθούν όλες οι μη ισοδύναμες επεκτάσεις αυτού του τύπου. Ας υποθέσουμε ότι η A είναι αβελιανή. Αν επιλέξουμε μια απεικόνιση

$$\rho : G \to E,\ g \mapsto e_g$$

ώστε $\rho(1) = 1$ και $j\rho = 1_G$, τότε η αλγεβρική δομή της E μας δίνει ότι για $g_1, g_2 \in G$ υπάρχει $a_{g_1,g_2} \in A$ ώστε $e_{g_1}e_{g_2} = a_{g_1,g_2}e_{g_1g_2}$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να ορισθεί μια απεικόνιση

$$G \times G \to A$$

η οποία ικανοποιεί ιδιαίτερες ¨συνκυκλικές ιδιότητεσ¨. Η συνομολογία ομάδων έρχεται στο προσκήνιο δίνοντας εργαλεία για να μελετήσουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας αυτών των απεικονίσεων, κεφάλαιο 4.5.2. Δηλαδή οι κλάσεις ισοδυναμίας επεκτάσεων της συγκεκριμένης ομάδας είναι σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με κλάσεις ισοδυναμίας 2-συνκύκλων. Οι τελευταίες είναι στοιχεία της δεύτερης συνομολογίας $H^2(G, A)$ της G με συντελεστές στην A. Ας περιγράψουμε τα βασικά στοιχεία των προηγούμενων επισημάνσεων. Ας είναι $\mathbb{Z}$ οι ακέραιοι στους οποίους η G δρα τετριμμένα. Μπορούμε να απεικονίσουμε ένα αντίγραφο του δακτυλίου ομάδας $\mathbb{Z}G$ στον $\mathbb{Z}$ με πυρήνα IG ο οποίος να είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Χρησιμοποιώντας τους γεννήτορες του IC, το οποίο θεωρούμε ένα $\mathbb{Z}G$-πρότυπο, μπορούμε να απεικονίσουμε ένα ελεύθερο $\mathbb{Z}G$-πρότυπο πεπερασμένης διάστασης πάνω στο IG. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ακολουθία από ελεύθερα $\mathbb{Z}G$-πρότυπα και $\mathbb{Z}G$ -απεικονίσεις

$$\cdots \to A_r \xrightarrow{d_r} A_{r-1} \xrightarrow{d_{r-1}} \cdots A_1 \xrightarrow{d_1} A_0$$

ώστε σε κάθε βήμα η εικόνα του εισερχόμενου ομομορφισμού να είναι ίση με τον πυρήνα του εξερχόμενου. Ουσιαστικά δημιουργείται μια ελεύθερη διάλυση για το $\mathbb{Z}$. Με ανάλογο τρόπο μπορεί να κατασκευαστεί μια ελεύθερη διάλυση ενός πεπερασμένα παραγόμενου $\mathbb{Z}G$-πρότυπο αντί για το $\mathbb{Z}$.

Ας δούμε τώρα τη γεωμετρική ερμηνεία της συνομολογίας ομάδων. Έστω X ένας τ.χ. και $Aut(X)$ η ομάδα των ομοιομορφισμών του X στον εαυτό του. Μία ομάδα G δρα στον X εάν υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\mu : G \to Aut(X)$. Ισοδύναμα λέμε ότι σε κάθε $g \in G$ και κάθε $x \in X$ δίνεται ένα μοναδικό σημείο $gx = \mu(g)(x)$ ώστε η gx να είναι συνεχής στο x για κάθε $x \in X$ και

$$(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2 x), 1x = x.$$

Ένα ανοικτό σύνολο $U \in X$ καλείται **κύριο** (proper) κάτω από τη δράση της G , αν $gU \cap U = \emptyset$ για $g \neq 1$. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι η G δρα **κυρίως ασυνεχώς** στον X, αν κάθε σημείο του X περιέχεται σε κάποιο κύριο ανοικτό σύνολο, ώστε τα κύρια σύνολα να παρέχουν μια βάση για την τοπολογία του X. Στην περίπτωση που η G δρα κυρίως ασυνεχώς δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $\mu(g)$ με $g \neq 1$ ο οποίος να έχει σταθερό σημείο.

Ας υποθέσουμε ότι μια ομάδα G δρα κυρίως ασυνεχώς σ' έναν απλά συνεκτικό χώρο X. Ο χώρος πηλίκο X/G είναι ο χώρος του οποίου τα σημεία είναι οι τροχιές των σημείων του $x \in X$ κάτω από τη δράση της G. Η φυσική προβολή ορίζεται ως $p : X \to X/G$ με $px_1 = px_2$ αν και μόνο αν υπάρχει $g \in G$ με $x_1 = gx_2$. Το σύνολο X/G εφοδιάζεται με την τοπολογία πηλίκο ώστε η p να είναι συνεχής. Μια βάση για αυτήν την τοπολογία αποτελείται από τα pU με U κύριο ανοικτό στον X ως προς G. Τα ανοικτά σύνολα $p(U)$ καλούνται επίσης κύρια στον X/G.

Το σύνολο $p^{-1}(p(U))$ αποτελείται από ξένη ένωση ανοικτών υποσυνόλων V_i ώστε ο περιορισμός $p|_{V_i}$ είναι ομοιομορφισμός $V_i \cong pU$.

Προφανώς ο X είναι καλυπτικός χώρος του X/G και $\pi_1(X/G) \cong G$. Αν επιπλέον ο X/G είναι aspherical δηλαδή όλες οι ανώτερες ομοτοπικές ομάδες είναι τετριμμένες, τότε η συνομολογία του είναι ισόμορφη με την συνομολογία της G. Ο Hurewich έδειξε ότι η συνομολογία του X/G εξαρτάται μόνο από την πρωταρχική ομάδα. Οι Eilenberg και MacLane καθόρισαν πλήρως αυτήν την εξάρτηση, κεφάλαιο 7. Ανεξάρτητα αυτό έγινε και από τον Eckmann. Αν λοιπόν η G δρα κυρίως ασυνεχώς στον X, τότε το singular complex $S(X)$ είναι ένα complex απο ελεύθερα G-πρότυπα.

$$\cdots S_1(X) \to S_0(X) \to \mathbb{Z} \to 0$$

είναι ένα ελεύθερο complex του τετριμμένου $\mathbb{Z}$ προτύπου. Άρα έχουμε

$$Ext^n_{\mathbb{Z}(G)}(G, A) \cong H^n(G, A).$$

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα στη συνομολογία των πεπερασμένων ομάδων είναι ότι η συνομολογία $H^n(G, A)$ μηδενίζεται αν πολλαπλασιαστεί με την τάξη της ομάδας G για κάθε G-πρότυπο A, $n > 0$. Αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι προφανές από τους ορισμούς ή από τους υπολογισμούς μέσω της **ραβδωτής διάλυσης** (bar resolution). Αυτό το υπέροχο αποτέλεσμα μπορεί να δοθεί σαν εφαρμογή της προσέγγισης του Grothendieck μέσω της μεθόδου ¨μετακίνησης βαθμού' η οποία έχει χρησιμοποιηθεί επανειλημμένως στην άλγεβρα και την τοπολογία. Το βασικό σημείο της απόδειξης ότι οι ανώτερες G-συνομολογίες μηδενίζονται με πολλαπλασιασμό επι $|G|$ όταν η G είναι πεπερασμένη είναι η δημιουργία συνομολογιακών τελεστών οι οποίοι καλούνται **περιορισμός** (restriction) και **συνπεριορισμός** (corestriction). Αυτοί συνδέουν τις G-συνομολογίες με τις G'-συνομολογίες όπου G' είναι υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη. Η G δεν είναι απαραίτητο να είναι πεπερασμένη.

Σ' αυτήν τη διατριβή θα μελετήσουμε μια παραλλαγή της συνομολογίας ομάδων ονομαζόμενη **Tate συνομολογία** και θα χρησιμοποιήσουμε το πηλίκο του Herbrand, $Q_{f,g}(A)$, για να αποδείξουμε τα Θεωρήματα των Chevalley και Artin-Tate στο κεφάλαιο 5.0.10.

Θεώρημα 5.0.10 *Έστω G μια κυκλική ομάδα τάξης πρώτου p. A είναι ένα πεπερασμένα γεννόμενο G-πρότυπο ώστε να ορίζεται το $Q_{(o,p)}(A)$. Τότε τα $Q_{(o,p)}(A^G)$ και $Q_{2/1}(G, A)$ ορίζονται επίσης και δίνονται από*

$$(Q_{2/1}(G, A))^{(p-1)} = \frac{Q_{(o,p)}(A^G)^p}{Q_{(o,p)}(A)}.$$

Για τη μελέτη μιας ομάδας G συνήθως εξετάζουμε αν αυτή δημιουργείται σαν επέκταση από υποομάδες της. Αντίστοιχα για τον υπολογισμό της συνομολογίας μιας πεπερασμένης ομάδας G μελετάμε τη σχέση της με τη συνομολογία υποομάδων της. Προς αυτήν την κατεύθυνση υπάρχουν δυο βασικά εργαλεία:
α) την απεικόνιση του **περιορισμού** (restriction), res, ο οποίος συνδέει την συνομολογία της G με αυτήν μιας υποομάδας της U και
β) την απεικόνιση του **μεταφορέα** (tranfer), tr ή V, ο οποίος συνδέει τη συνομολογία μιας υποομάδας U με αυτήν της G .

Οι δύο αυτοί βασικοί ομομορφισμοί της συνομολογίας ομάδων μελετούνται στο κεφάλαιο 6 αυτής της μελέτης. Υπάρχει και ένας τρίτος σημαντικός ομομορφισμός ο οποίος συνδέεται με κανονικές υποομάδες της G. Σ' αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε τη συνολογία της G/U για τον υπολογισμό της συνομολογίας της G. Εδώ $U \triangleleft G$. Αυτό γίνεται με τον ομομορφισμό της εμφύσησης (inflation), inf, ο οποίος κάτω από κατάλληλες υποθέσεις παρέχει την επόμενη ακριβή ακολουθία

$$0 \to H^r(G/U, A^U) \overset{inf}{\to} H^r(G, A) \to H^r(U, A).$$

Εφαρμογή των προηγουμένων ομομορφισμών θα γίνει στη μελέτη του πότε ένα G-πρότυπο είναι συνομολογιακά τετριμμένο και της συνομολογιακής ισοδυναμίας.

Ένα G-πρότυπο A καλείται συνομολογιακά τετριμμένο, αν για κάθε υποομάδα U της G και κάθε ακέραιο r ισχύει ότι

$$H^r(U, A) = 0.$$

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα των Nakayama-Tate το οποίο παρέχει ισοδύναμες εκφράσεις σχετικά με το πότε ένα G -πρότυπο A είναι συνομολογικά τετριμμένο.

Θεώρημα 6.5.1 *Ισχύει $H^\nu(U, A) = 0$, για δυο οποιουσδήποτε διαδοχικούς ακεραίους ν και κάθε υποομάδα U της G, τότε και μόνο τότε, αν το A είναι συνομολογιακά τετριμμένο.*

Θα τελειώσουμε αυτή τη μελέτη με τη μερική περίπτωση της περιοδικότητας η οποία αποδείχθηκε από τον Tate στο [22].

Θεώρημα 6.6.4 *Ας είναι A ένα G-πρότυπο τέτοιο ώστε, για κάθε $U \leq G$, $H^1(U, A) = 0$ και η $H^2(U, A)$ είναι κυκλική τάξης $|U|$. Τότε, για κάθε r και κάθε $U \leq G$, ισχύει*

$$H^r(U, A) \cong H^{r-2}(U, \mathbb{Z})$$

Η μελέτη μας βασίζεται κυρίως στο άρθρο του Babakhanian [5].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Προτυπα

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε γνωστές ιδιότητες και προτάσεις από τη θεωρία προτύπων.

Ορισμός 2.0.1. *Ας είναι ένας δακτύλιος με ταυτότητα R. Ένα ελεύθερο R-πρότυπο θα είναι της μορφής : $\Sigma_{i\epsilon I}R_i$ με $R_i = R$, για όλα τα $i \in I$ ή για ευκολία $\Sigma_{i\epsilon I}Rx_i$ με x_i διακριτά σύμβολα. Άρα τα στοιχεία του μπορούν να γραφούν ως:*

$$a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + ... + a_{is}x_{is}$$

με $a_{ij}\epsilon R$.

Ισχύει ότι $\Sigma_{i=1}^{s} a_{ij}x_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall i, j$.

Πρόταση 2.0.2. *Ας είναι $A = \Sigma_{i\epsilon I}Rx_i$ ένα ελεύθερο R-πρότυπο και B ένα R-πρότυπο:*
(1) Ένας R-ομομορφισμός προτύπων $f : A \to B$ θα καθορίζεται πλήρως από το που στέλνει τα στοιχεία της μορφής $f(1x_i)$.
(2) Αν $\{b_i, i\epsilon I\}$ είναι μία τυχαία οικογένεια στοιχείων του B, τότε θα υπάρχει

$$f : A \to B : f(1x_i) = b_i.$$

Πρόταση 2.0.3. *Κάθε R-πρότυπο ειναι πηλίκο κάποιου ελεύθερου προτύπου.*

Απόδειξη. Ας είναι ένα R-πρότυπο A και $\{a_i, i \in I\}$ ένα σύνολο γεννητόρων αυτού (π.χ. το ίδιο το A). Τότε το $F = \Sigma_{i\epsilon I}Rx_i$ είναι ελεύθερο και μπορούμε να ορίσουμε τον ομομορφισμό: $f : F \to A : f(1x_i) = a_i$, ο οποίος ειναι επί καθώς:

$$y\epsilon A \Rightarrow y = \Sigma r_i a_i$$

άρα $f(\Sigma r_i x_i) = \Sigma r_i a_i = y$ για κάποια $r_i\epsilon R$ πεπερασμένα σε πλήθος στοιχεία. Άρα βάσει των Θεωρημάτων ισομορφισμού προτύπων έχουμε ότι αν $K = kerf \Rightarrow A \cong F/K$. □

Άν $f, g : A \to B$ είναι R-ομομορφισμοί, τότε μπορούμε να ορίσουμε τον R-ομομορφισμό $(f+g) : A \to B$ ως : $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ ο οποίος είναι ομομορφισμός, καθώς:

$(f+g)(a+b) = f(a+b)+g(a+b) = f(a)+f(b)+g(a)+g(b) = (f+g)(a)+(f+g)(b)$ και

$$(f+g)(ra) = f(ra) + g(ra) = r(f(a) + g(a)) = r(f+g)(a).$$

Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε και τον ομομορφισμό : $(f-g)(a) = f(a) - g(a)$.

Άρα το $Hom_R(A, B)$ έχει δομή αβελιανής ομάδας, αλλά γενικά όχι δομή R-προτύπου καθώς θα έπρεπε:

$$rf(r^{'}a) = r^{'}rf(a),$$

αλλά έχουμε ότι : $rf(r^{'}a) = rr^{'}f(a)$, άρα θα έπρεπε $rr^{'} = r^{'}r$ το οποίο δέν ισχύει αν ο R δεν είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος.

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε για $f : A \to B$ και $g : B \to C$ την σύνθεση η οποία είναι ομομορφισμός $gf(a) = g(f(a))$.

2.1 Τανυστικά Γινόμενα

Θα θεωρήσουμε παρακάτω ότι ο R είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.

2.1.1 Διγραμμικές απεικονίσεις

Θα ξεκινήσουμε με τον αφηρημένο ορισμό του τανυστικού γινομένου.

Ορισμός 2.1.1. *1. Άς είναι A, B και T αριστερά R-πρότυπα. Μία απεικόνιση $\theta : A \times B \to T$ θα καλείται διγραμμική απεικόνιση αν και μόνο αν :*

$\theta(a_1 + a_2, b) = \theta(a_1, b) + \theta(a_2, b).$

$\theta(a, b_1 + b_2) = \theta(a, b_1) + \theta(a, b_2).$

$\theta(ra, b) = \theta(a, rb) = r\theta(a, b).$

2. Το ζεύγος (T, θ) θα καλείται τανυστικό γινόμενο των A και B αν και μόνο αν:

1. *(T1) : $Im\theta = T$.*

2. *(T2) : Για κάθε R-πρότυπο C και για κάθε $f : A \times B \to C$: διγραμμική απεικόνιση, θα υπάρχει μια απεικόνιση $\bar{f} : T \to C$ τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να μετατίθεται:*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f"] & T \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ C. & \end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι, καθώς $\bar{f}(\theta(a, b)) = f(a, b)$, για κάθε $\theta(a, b)$ γεννήτορα της T, η $\bar{f}$ καθορίζεται πλήρως από την f.

Επίσης, αν (T_1, θ_1) και $T_2, \theta_2)$ τανυστικά γινόμενα των R-προτύπων A και B, θα υπάρχουν μοναδικοί ομομορφισμοί $\bar{\theta_1} : T_2 \to T_1$ και $\bar{\theta_2} : T_1 \to T_2$ ώστε να κάνουν το παραπάνω διάγραμμα μεταθετικό. Άρα από την μεταθετικότητα των διαγραμμάτων θα προκύψει : $\theta_2 = \bar{\theta_2}\bar{\theta_1}\theta_2$ και $\theta_1 = \bar{\theta_1}\bar{\theta_2}\theta_1$. Άρα τα $\bar{\theta_2}\bar{\theta_1}$ και $\bar{\theta_1}\bar{\theta_2}$ είναι οι ταυτοτικοί ομομορφισμοί των T_2 και T_1 αντίστοιχα. Άρα θα προκύψει οτι $T_2 \cong T_1$.
Άρα το τανυστικό γινόμενο των A και B είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό και θα το συμβολίζουμε

$$A \otimes_R B.$$

2.1.2 Ιδιότητες

Αν το τανυστικό γινόμενο $A \otimes_R B$ υπάρχει, γράφουμε $\theta(a, b) = a \otimes b$ και ισχύει
1. $(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b$.
2. $a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$.
3. $r(a \otimes b) = ra \otimes b = a \otimes rb$.

Το $A \otimes_R B$ γεννάται από τα στοιχεία $a \otimes b$, δηλαδή

$$x \epsilon A \otimes_R B \Rightarrow x = \Sigma_i r_i(a_i \otimes b_i).$$

Τονίζουμε οτι αυτή η γραφή δεν είναι μοναδική. Παραδείγματος χάριν, $0_{A \otimes_R B} = 0_A \otimes b = a \otimes 0_B$, για κάθε $a \epsilon A$ και $b \epsilon B$.

2.2 Ύπαρξη Τανυστικών γινομένων

Τώρα θα δώσουμε την κατασκευή του τανυστικού γινομένου.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω A ένα R-πρότυπο, ισχύει ότι $R \otimes_R A \cong A$.*

Απόδειξη. Αν ορίσουμε την $\theta : R \times A \to A$ με $\theta(r,a) = ra$, έχουμε οτι ισχύουν οι ιδιότητες του τανυστικού γινομένου καθώς, το A παράγεται από όλα τα ra, άρα πληροί την ιδιότητα T1. Ενώ αν έχουμε μια $f : R \times A \to C$ διγραμμική απεικόνιση, ορίζουμε την $\bar{f} : A \to C : \bar{f}(ra) = f(r,a)$ η οποία πληροί την ιδιότητα T2.
Άρα το A πληροί τον ορισμό ώστε να είναι τανυστικό γινόμενο, και άρα

$$A \cong R \otimes_R A$$

. □

Πρόταση 2.2.2. *Ας είναι $A = \Sigma_{i\epsilon I} A_i$ ένα ευθύ άθροισμα R-προτύπων τέτοιο ώστε για κάθε $i\epsilon I$ το $A_i \otimes B$ να υπάρχει, για ένα R-πρότυπο B. Τότε το τανυστικό γινόμενο υπάρχει και είναι : $A \otimes_R B \cong \Sigma_{i\epsilon I}(A_i \otimes_R B)$.*
Δηλαδή το τανυστικό γινόμενο σέβεται το ευθύ άθροισμα.

Απόδειξη. Ορίζουμε την $\theta : A \times B \to \Sigma_{i\epsilon I}(A_i \otimes_R B)$ με τύπο $\theta(\Sigma a_i, b) = \Sigma(a_i \otimes b)$. Τα στοιχεία $a_i \otimes b$ παράγουν το $A_i \otimes_R B$ για κάθε $i\epsilon I$. Δηλαδή πληρείται η ιδιότητα T1. Επίσης αν η $f : A \times B \to C$ είναι διγραμμική, τότε θεωρούμε τις

$$f_i : A_i \times B \to C$$

ως την σύνθεση $f(i_i \times 1_B)$, όπου $i_i \times 1_B : A_i \times B \to A \times B$ με i_i να είναι η έγκλιση του A_i στο $A = \Sigma_i A_i$.
Οι f_i είναι διγραμμικές ως σύνθεση τέτοιων. Άρα υπάρχουν $\bar{f}_i : A_i \otimes_R B \to C$ τέτοιες ώστε το παρακάτω διάγραμμα να μετατίθεται, για κάθε $i\epsilon I$

$$\begin{tikzcd} A_i \times B \arrow[r, "\theta_i"] \arrow[d, "f_i"] & A_i \otimes_R B \arrow[dl, "\bar{f}_i"] \\ C & \end{tikzcd}$$

Αρκεί λοιπόν να ορίσουμε την

$$\bar{f} : \Sigma_i(A_i \otimes_R B) \to C : \Sigma_{i,k} a_{ik} \otimes b_{ik} \mapsto \Sigma_i \bar{f}_i(\Sigma_k a_{ik} \otimes b_{ik}),$$

η οποία είναι R-ομομορφισμός και να δούμε ότι

$$\bar{f}\theta(\Sigma a_i, b) = \bar{f}(\Sigma(a_i \otimes b) = \Sigma \bar{f}_i(a_i \otimes b) = \Sigma f_i(a_i, b) = f(\Sigma a_i, b).$$

□

Πρόταση 2.2.3. *Αν A είναι ένα ελεύθερο R-πρότυπο διάστασης ένα και B ένα τυχών, τότε $A \otimes_R B \cong B$.*

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα είναι άμεσο απο τις Προτάσεις

Πρόταση 2.2.4. *Έστω A και B R-πρότυπα. $M \leq_R A$ και $N \leq_R B$ υποπρότυπα και $A \otimes_R B$ το τανυστικό τους γινόμενο, τότε αν θεωρήσουμε το E να παράγεται από όλα τα στοιχεία*

$$m \otimes b \text{ και } a \otimes n$$

με $m \epsilon M$, $n \epsilon N$, $a \epsilon A$ και $b \epsilon B$ θα έχουμε οτι το τανυστικό γινόμενο υπάρχει και ισχύει

$$A/M \otimes_R B/N \cong (A \otimes_R B)/E.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την $\theta : A/M \times B/N \to (A \otimes_R B)/E$ με

$$\theta(a + M, b + N) = a \otimes b + E,$$

Η θ είναι μία καλά ορισμένη διγραμμική απεικόνιση. Επίσης τα $a \otimes b + E$ παράγουν το $(A \otimes_R B)/E$. Οπότε πληρείται η ιδιότητα Τ1. Έχουμε λοιπόν ότι η

$$f : A/M \times B/N \to C$$

είναι διγραμμική απεικόνιση και ορίζουμε την

$$f_1(a, b) = f(a + M, b + N)$$

η οποία είναι καλά ορισμένη και διγραμμική ως σύνθεση των fc. Εδώ

$$c : A \times B \to A/M \times B/N$$

με $c(a, b) = (a + M, b + M)$. Η οποία είναι R-ομομορφισμός. Άρα υπάρχει η

$$\bar{f}_1 : A \otimes B \to C$$

με $\bar{f}_1(a \otimes b) = f_1(a, b)$. Ισχύει ότι

$$\bar{f}_1(m \otimes m) = f_1(m, b) = f(M, b + N) = 0$$

και $\bar{f}_1(a\otimes n) = 0$ αντίστοιχα για $m\epsilon M$ και $n\epsilon N$. Έχουμε λοιπόν ότι $Ker\bar{f}_1 = E$. Ορίζουμε τώρα την $\bar{f} : (A \otimes_R B)/E \to C$ ως $\bar{f}(\Sigma a \otimes b + E) = \bar{f}_1(\Sigma a \otimes b)$ η οποία είναι καλά ορισμένη διότι

$$\bar{f}(\Sigma a \otimes b + e + E) = \bar{f}_1(\Sigma a \otimes b + e) = \bar{f}_1(\Sigma a \otimes b) + 0 = \bar{f}(\Sigma a \otimes b + E).$$

Επίσης έχουμε ότι $f(a + M, b + N) = f_1(a, b) = \bar{f}_1(a \otimes b) = \bar{f}(a \otimes b + E)$. Τελικά πληρείται και η ιδιότητα Τ2. □

Πρόταση 2.2.5. *Το τανυστικό γινόμενο κάθε R-προτύπων A και B υπάρχει.*

Απόδειξη. Αν A και B είναι R-πρότυπα, θα έχουμε οτι $A \cong F/K$ όπου K υποπρότυπο του ελευθέρου R-προτύπου F. Άρα απο τα παραπάνω θα υπάρχει και το

$$F \otimes_R B.$$

Θα υπάρχει και το $F/K \otimes_R B$ με

$$F/K \otimes_R B \cong A \otimes_R B.$$

Τελικά το τανυστικό γινόμενο των A και B υπάρχει. □

Παρατήρηση 2.2.6. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το $A \otimes B$ ως εξής. Αν πάρουμε το ελεύθερο R-πρότυπο που παράγεται απο το $A \times B$ δηλαδή το $F_{A\times B}$, βλέπουμε ότι :

$$A \otimes_R B \cong F_{A\times B}/E$$

όπου το E γεννάται από τα στοιχεία

$$< (a_1+a_2, b)-(a_1, b)-(a_2, b), (a, b_1+b_2)-(a, b_1)-(a, b_2), (ra, b)-(a, rb), r(a, b)-(ra, b) > .$$

Δηλαδή ακριβώς από τα στοιχεία τα οποία στο τανυστικό γινόμενο θα ήταν 0.

Παράδειγμα 2.2.7. Αν πάρουμε το τανυστικό γινόμενο των $\mathbb{Z}/(2) = \{0, x\}$ και $\mathbb{Z}/(3) = \{0, y, 2y\}$ σαν $\mathbb{Z}$-πρότυπα, βλέπουμε ότι

$$x \otimes y = 3x \otimes y = x \otimes 3y = x \otimes 0 = 0$$

και $x \otimes 2y = 0$. Άρα $\mathbb{Z}/(2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(3) = 0$.

2.3 Ο ομομορφισμός $f \otimes g$

Στα παρακάτω θα γράφουμε $A \otimes B$ αντί $A \otimes_R B$, όταν είναι σαφές ότι πρόκειται για R-πρότυπα.

Ορισμός 2.3.1. *Ας είναι $f : A \to A'$ και $g : B \to B'$ δύο R-ομομορφισμοί. Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$F : A \times B \to A' \otimes B' \text{ με τύπο } F(a,b) = f(a) \otimes g(b).$$

Η F είναι διγραμμική καθώς :

$$F(a_1 + a_2, b) = f(a_1 + a_2) \otimes g(b) \quad = f(a_1) \otimes g(b) + f(a_2) \otimes g(b) = F(a_1, b) + F(a_2, b)$$

και
$f(ra) \otimes g(b) = rf(a) \otimes g(b) = f(a) \otimes g(rb)$. *Οπότε* $F(ra,b) = rF(a,b) = F(a,rb)$.
Άρα εξ ορισμού του τανυστικού γινομένου θα υπάρχει:
$\bar{F} : A \otimes B \to A' \otimes B'$ *με* $\bar{F}(a \otimes b) = F(a,b)$ *στους γεννήτορες.*
Τελικά $\bar{F}(\Sigma a \otimes b) = \Sigma f(a) \otimes g(b)$ *και θα τον συμβολίζουμε ως* $f \otimes g$.

2.3.1 Ιδιότητες

Θεωρούμε τους R-ομομορφισμούς

$$A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A'',$$

$$B \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g'} B''.$$

Έτσι θα εχουμε τους ομομορφισμούς

$$f'f \otimes g'g : A \otimes B \to A\text{''} \otimes B\text{''}$$

και

$$(f' \otimes g')(f \otimes g) : A \otimes B \to A\text{''} \otimes B\text{''}.$$

Αν δράσουν οι παραπάνω σε ένα γεννήτορα $a \otimes b$ θα έχουμε

$$(f' \otimes g')(f \otimes g)(a \otimes b) = (f' \otimes g')(f(a) \otimes g(b)) =$$

$$f'f(a) \otimes g'g(b) = (f'f \otimes g'g)(a \otimes b).$$

Επίσης αν $f, f' : A \to A'$ και $g : B \to B'$ θα πάρουμε ότι

$$(f + f') \otimes g = (f \otimes g) + (f' \otimes g).$$

Πρόταση 2.3.2. $A \otimes B \cong B \otimes A$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $\tau : B \times A \to A \otimes B : \tau(b, a) = a \otimes b$, η οποία είναι διγραμμική, άρα υπάρχει $\bar{\tau} : B \otimes A \to A \otimes B : \bar{\tau}(b \otimes a) = a \otimes b$.
Με αντίστοιχο τρόπο θα υπάρχει $\bar{\sigma} : A \otimes B \to B \otimes A : \bar{\sigma}(a \otimes b) = b \otimes a$.
Από την μοναδικότητα των $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ έχουμε ότι : $\bar{\sigma}\bar{\tau} = 1_{B \otimes A}$ και $\bar{\tau}\bar{\sigma} = 1_{A \otimes B}$, άρα $A \otimes B \cong B \otimes A$. □

2.4 Τανυστικά γινόμενα Αλγεβρών

Ορισμός 2.4.1. *Ας είναι R ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Ο δακτύλιος A, όχι απαραίτητα με μονάδα, καλείται $R-$**άλγεβρα** αν και μόνο αν*

[λαβελ=()]

(α′) Το A είναι ένα αριστερό (ή δεξιό) R-πρότυπο.

(β′) Αν $r_1, r_2 \in R$ και $a_1, a_2 \in A$, ισχύει ότι

$$r_1(a_1) \cdot r_2(a_2) = r_1 r_2(a_1 a_2).$$

Ορισμός 2.4.2. *Ας είναι A και B $R-$άλγεβρες. Θα δώσουμε δομή $R-$άλγεβρας στο πρότυπο $A \otimes B$. Ορίζουμε πολλαπλασιασμό στο $A \otimes B$ ως εξής*

$$\Big(\sum_i a_i \otimes b_i\Big)\Big(\sum_k a'_k \otimes b'_k\Big) = \sum_{i,k} a_i a'_k \otimes b_i b'_k \,.$$

Ο πολ/μός είναι καλά ορισμένος, καθώς αν

$$(a_0, b_0) \epsilon A \times B$$

η απεικόνιση $f_{(a_0,b_0)} : A \times B \to A \otimes B$ με τύπο $f_{(a_0,b_0)}(a, b) = aa_0 \otimes bb_0$ είναι διγραμμική. Άρα ορίζεται η

$$\bar{f}_{(a_0,b_0)} : A \otimes B \to A \otimes B$$

με τύπο

$$\bar{f}_{(a_0,b_0)}(a \otimes b) = aa_0 \otimes bb_0.$$

Καθώς είναι γραμμική με $\bar{f}_{(ra,b)} = \bar{f}_{(a,rb)} = r\bar{f}_{(a,b)}, \forall (a, b) \epsilon A \times B$ επεκτείνεται σε μια απεικόνιση $\bar{f}_{(-,-)}(\Sigma a_i \otimes b_i) : A \times B \to A \otimes B$ διγραμμική.

Άρα θα υπάρχει ένας (μοναδικός) ομομορφισμός

$$\bar{f}_{(-,-)}(\Sigma a_i \otimes b_i) : A \otimes B \to A \otimes B$$

τέτοιος ώστε :

$$\bar{f}_{(a' \otimes b')}(\Sigma a_i \otimes b_i) = \Sigma a_i a' \otimes b_i b'.$$

Άρα έχουμε οτι

$$\bar{f}_{(\Sigma a'_k \otimes b'_k)}(\Sigma a_i \otimes b_i) = \Sigma a_i a'_k \otimes b_i b'_k.$$

Δείχνοντας έτσι ότι ο πολ/μός είναι καλά ορισμένος.

Επίσης εύκολα έχουμε οτι το $A \otimes B$ με τον παραπάνω πολ/μό είναι άλγεβρα, διότι
1. Το $A \otimes_R B$ ξέρουμε πως είναι αριστερό πρότυπο.
2. Ισχύει
$r\Big(\sum_i a_i \otimes b_i\Big) \cdot r'\Big(\sum_k a'_k \otimes b'_k\Big) = \Big(\sum_i r a_i \otimes b_i\Big) \cdot \Big(\sum_k r' a'_k \otimes b'_k\Big) = \sum_{i,k} r a_i \cdot r' a'_k \otimes b_i b'_k = \sum_{i,k} r r' a_i a_k \otimes b_i b'_k = r r' \sum_{i,k} a_i a'_k \otimes b_i b'_k$.

Παρατήρηση 2.4.3. Έστω A, B και C άλγεβρες και $f : A \to C$ και $g : B \to C$ ομομορφισμοί αλγεβρών με

$$f(a)g(b) = g(b)f(a) \text{ για κάθε } a \epsilon A \text{ και } b \epsilon B.$$

Τότε η $F : A \otimes B \to C$ με τύπο $F(a, b) = f(a)g(b)$ είναι διγραμμική και έχουμε ότι θα υπάρχει ένας ομομορφισμός αλγεβρών :

$$\bar{F} : A \otimes B \to C.$$

Έτσι αν A και B είναι μεταθετικές R-άλγεβρες με μονάδα, τότε η $A \otimes B$ αντιπροσωπεύει το ευθύ άθροισμα των A και B στην κατηγορία των μεταθετικών R-αλγεβρών. Αυτό προκύπτει από το αξίωμα (T2) για τα τανυστικά γινόμενα. Οι εγκλείσεις $i_A : A \to A \otimes_R B$ και $i_B : B \to A \otimes_R B$ ορίζονται ως $i_A a = a \otimes 1$ και $i_B b = 1 \otimes b$. Συγκεκριμένα το ευθύ άθροισμα δυο μεταθετικών δακτυλίων A, B με μονάδα είναι η $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$.

2.5 Τριγραμμικές Απεικονίσεις

Σε αυτήν την ενότητα ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και τα A_1, A_2, A_3, B είναι R-πρότυπα.

Ορισμός 2.5.1. *Η απεικόνιση $f : A_1 \times A_2 \times A_3 \to B$ καλείται* ***τριγραμμική*** *αν-ν:*

> *[λαβελ=()]Για δεδομένα $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$ η f είναι ένας R-ομομορφισμός από το A_k στο B, όπου i, j, k διακεκριμένα στοιχεία του $\{1, 2, 3\}$. Για κάθε $r \in R$ ισχύει*
>
> $$f(ra_1, a_2, a_3) = f(a_1, ra_2, a_3) = f(a_1, a_2, a_3)\,.$$

Λέμε ότι το R-πρότυπο T αναπαριστά το ***τανυστικό γινόμενο*** *των A_1, A_2, A_3(το οποίο συμβολίζουμε $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$), αν πληροί την παραπάνω καθολική ιδιότητα για τις τριγραμμικές απεικονίσεις από το σύνολο $A_1 \times A_2 \times A_3$.*

Πρόταση 2.5.2. *Το τανυστικό γινόμενο των A_1, A_2, A_3 υπάρχει και μάλιστα ισχύει ότι: $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \cong (A_1 \otimes A_2) \otimes A_3 \cong A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3)$*

2. *Απόδειξη.* Ας είναι μια τριγραμμική απεικόνιση $f : A_1 \times A_2 \times A_3 \to B$. Για δεδομένο $a_3 \in A_3$ ορίζουμε την απεικόνιση $f_{a_3} : A_1 \times A_2 \to B$ με $f_{a_3}(a_1, a_2) = f(a_1, a_2, a_3)$ η οποία είναι διγραμμική. Συνεπώς υπάρχει ένας R-ομομορφισμός $\bar{f}_{a_3} : A_1 \otimes A_2 \to B$ με $\bar{f}_{a_3}(a_1 \otimes a_2) = f_{a_3}(a_1, a_2)$. Αν ορίσουμε την $g : (A_1 \otimes A_2) \times A_3 \to B$ ως

$$g\big(\textstyle\sum_{(a_1,a_2)} a_1 \otimes a_2, a_3\big) = \bar{f}_{a_3}\big(\textstyle\sum_{(a_1,a_2)} a_1 \otimes a_2\big)\,,$$

είναι διγραμμική και έτσι υπάρχει ένας R-ομομορφισμός $\bar{g} : (A_1 \otimes A_2) \otimes A_3 \to B$ με $\bar{g}((a_1 \otimes a_2) \otimes a_3) = f(a_1, a_2, a_3)$.
Για να δείξουμε τώρα το ζητούμενο, αρκεί να θεωρήσουμε την τριγραμμική απεικόνιση $\theta : A_1 \times A_2 \times A_3 \to (A_1 \otimes A_2) \otimes A_3$ με $\theta(a_1, a_2, a_3) = (a_1 \otimes a_2) \otimes a_3$ και να παρατηρήσουμε ότι η εικόνα της παράγει το $(A_1 \otimes A_2) \otimes A_3$ και ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
A_1 \times A_2 \times A_3 \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "f"'] & & (A_1 \otimes A_2) \otimes A_3 \arrow[dl, "\bar{f}"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Ομοίως προκύπτει και ότι το τανυστικό γινόμενο των A_1, A_2, A_3 είναι το $A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3)$. $\square$

2.6 Ακρίβεια

Στα παρακάτω θα υποθέσουμε ότι R θα είναι ένας δακτύλιος (όχι απαραίτητα μεταθετικός), $A, B, C,$ ... αριστερά (ή δεξιά) $R-$πρότυπα και $f, g, i, j,$ ... R-ομομορφισμοί.

2.6.1 Ακριβείς Ακολουθίες

Ορισμός 2.6.1. *Μία ακολουθία* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *καλείται* ***ακριβής*** *στο* B *αν-ν* $\mathsf{Ker}\, g = \mathsf{Im}\, f$ *(δηλ.* $f(A) = g^{-1}(0)$*).*

1. Η $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ είναι ακριβής $\Leftrightarrow$ Η f είναι μονομορφισμός.
2. Δυικά, η $A \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$ είναι ακριβής $\Leftrightarrow$ Η g είναι επιμορφισμός.
3. Η $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ είναι ακριβής $\Leftrightarrow$ Η f είναι ισομορφισμός.
4. Η $0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ είναι ακριβής $\Leftrightarrow A = 0$.
5. Η ακολουθία $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ είναι ακριβής $\Leftrightarrow$ Η i είναι μονομορφισμός, η j είναι επιμορφισμός και ισχύει ότι $\mathsf{Im}\, i = \mathsf{Ker}\, j$.
6. Αν A είναι ένα R-υποπρότυπο του B η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} A/B \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής, όπου i είναι η εμφύτευση του A στο B και j η κανονική προβολή του B στο πηλίκο A/B.

Θεώρημα 2.6.2. *Ας είναι* R *ένας μεταθετικός δακτύλιος. Αν η*

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

είναι μιά ακριβής ακολουθία R*-ομομορφισμών και το* X *ένα* R*-πρότυπο, τότε η ακολουθία*

$$A' \otimes X \xrightarrow{f \otimes 1_X} A \otimes X \xrightarrow{g \otimes 1_X} A'' \otimes X \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Αν A', B' υποπρότυπα των A, B, αντίστοιχα, από την ενότητα 3 θα έχουμε ότι η ακολουθία

$$(A' \otimes B) \oplus (A \otimes B') \xrightarrow{(i_{A'} \otimes 1_B) \oplus (1_A \otimes i_{B'})} A \otimes B \xrightarrow{j_A \otimes j_B} A/A' \otimes B/B' \to 0 \ (*)$$

είναι ακριβής, όπου $i_{A'} : A' \to A$, $i_{B'} : B' \to B$ είναι οι κανονικές εμφυτεύσεις και $j_{A'} : A \to A/A'$, $j_{B'} : B \to B/B'$ είναι οι κανονικοί επιμορφισμοί.
Από την ακρίβεια της $(*)$ προκύπτει ότι αν οι ακολουθίες

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{f'} B \xrightarrow{g'} B'' \longrightarrow 0$$

είναι ακριβείς, τότε είναι ακριβής και η

$$(A' \otimes B) \oplus (A \otimes B') \xrightarrow{(f \otimes 1_B) \oplus (1_A \otimes f')} A \otimes B \xrightarrow{g \otimes g'} A'' \otimes B'' \longrightarrow 0 \qquad (**)$$

Συγκεκριμένα, η ακρίβεια των ακολουθιών

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0$$

όπου X είναι ένα R-πρότυπο, επάγουν και την ακρίβεια της

$$A' \otimes X \xrightarrow{f \otimes 1_X} A \otimes X \xrightarrow{g \otimes 1_X} A'' \otimes X \longrightarrow 0 \ .$$

□

2.6.2 Ο Ομομορφισμός $\mathsf{Hom}_R(f, g)$

Ακόμη και αν ο δακτύλιος R δεν είναι μεταθετικός, το σύνολο $\mathsf{Hom}_R(A, B)$ των R-ομομορφισμών από το R-πρότυπο A στο R-πρότυπο B αποτελεί αβελιανή ομάδα.

Ας είναι $f : A' \to A, g : B' \to B$, R-ομομορφισμοί. Ορίζουμε την απεικόνιση $\mathsf{Hom}_R(f, g) : \mathsf{Hom}_R(A, B) \to \mathsf{Hom}_R(A', B')$ ως

$$\mathsf{Hom}_R(f, g)(\varphi) = g\varphi f \ .$$

Η $\mathsf{Hom}_R(f,g)$ είναι ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων αφού

$\mathsf{Hom}_R(f,g)(\varphi+\psi) = g(\varphi+\psi)f \quad = g\varphi f + g\psi f = \mathsf{Hom}_R(f,g)(\varphi) + \mathsf{Hom}_R(f,g)(\psi)\,.$

Επιπλέον ισχύουν $\mathsf{Hom}_R(f_1+f_2,g) = \mathsf{Hom}_R(f_1,g)+\mathsf{Hom}_R(f_2,g)\,, \mathsf{Hom}_R(f,g_1+$
$g_2) =$
$\mathsf{Hom}_R(f,g_1) + \mathsf{Hom}_R(f,g_2)\,.$

Αν $f' : A'' \to A',\ f : A' \to A$ και $g' : B'' \to B',\ g : B' \to B$, τότε:

$\mathsf{Hom}_R(f',g')\,\mathsf{Hom}_R(f,g)(\varphi) = \mathsf{Hom}_R(f',g')(g\varphi f)$
$g'g\varphi ff' \qquad\qquad \Rightarrow \mathsf{Hom}_R(f',g')\,\mathsf{Hom}_R(f,g) = \mathsf{Hom}_R(ff',g'g)\,.$

Θεώρημα 2.6.3. *Ας είναι μια ακριβής ακολουθία R-ομομορφισμών*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ j\ } C \longrightarrow 0$$

και X ένα R-πρότυπο, τότε οι παρακάτω ακολουθίες είναι ακριβείς:(*)

1. $0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(X,A) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_R(1_X,i)} \mathsf{Hom}_R(X,B) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_R(1_X,j)} \mathsf{Hom}_R(X,C)\,.$

2. $0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(C,X) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_R(j,1_X)} \mathsf{Hom}_R(B,X) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_R(i,1_X)} \mathsf{Hom}_R(A,X)\,.$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο το (ii) καθώς το (i) αποδεικνύεται όμοια.
Ακρίβεια στην $\mathsf{Hom}_R(C,X)$: Ας είναι $f \in \mathsf{Hom}_R(C,X)$ τέτοιος ώστε

$$\mathsf{Hom}_R(j,1_X)(f) = fj = 0.$$

Τότε, αφού το j είναι επιμορφισμός, θα έχουμε ότι $f = 0$.
Ακρίβεια στην $\mathsf{Hom}_R(B,X)$: Ας είναι $f \in \mathsf{Hom}_R(C,X)$. Τότε

$$\mathsf{Hom}_R(i,1_X)\,\mathsf{Hom}_R(j,1_X)(f) = ifj = 0\,.$$

Άρα $\mathsf{Im}\,\mathsf{Hom}_R(j,1_X) \subseteq \mathsf{Ker}\,\mathsf{Hom}(i,1_X)$, και έτσι αρκεί να δείξουμε τον αντίθετο εγκλεισμό ώστε να ολοκληρωθεί η απόδειξη.
Ας είναι $g \in \mathsf{Hom}_R(B,X)$ τέτοιος ώστε $\mathsf{Hom}_R(i,1_X)(g) = gi = 0$ και $f : C \to X$ με $f(c) = g(b)$, όπου $b \in j^{-1}(c)$. Η f είναι καλά ορισμένη (διότι αν $b' \in j^{-1}$, τότε $j(b-b') = 0$ και, συνεπώς, θα υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $i(a) = b - b'$. Έτσι $g(b-b') = gi(a) = 0$).
Η f ανήκει στο $\mathsf{Hom}_R(C,X)$ (διότι $f(c+c') = g(b+b')$, όπου $b \in j^{-1}(c), b' \in j^{-1}(c')$, και $f(rc) = g(rb) = eg(b) = rf(c)$).

Η ισότητα $\mathsf{Hom}_R(j, 1_X)(f) = fj = g$ ολοκληρώνει την απόδειξη του αντίστροφου εγκλεισμού.
Έτσι, αποδεικνύοντας την ακρίβεια της ακολουθίας στο $\mathsf{Hom}_R(B, X)$, ολοκληρώθηκε η απόδειξη. □

Θεώρημα 2.6.4. *Ας είναι η ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ j\ } C \longrightarrow 0$$

με $B = i(A) \oplus B'$, για κάποιο R-πρότυπο B'. Τότε για κάθε R-πρότυπο X ισχύουν:(*)

1. *Αν ο R είναι μεταθετικός, η επόμενη ακολουθία είναι ακριβής.*
   $0 \to A \otimes X \xrightarrow{i \otimes 1_X} B \otimes X \xrightarrow{j \otimes 1_X} C \otimes X \to 0$

2. *Η επόμενη ακολουθία είναι ακριβής.*

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(C, X) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_R(j,1_X)} \mathsf{Hom}_R(B, X) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_R(i,1_X)} \mathsf{Hom}_R(A, X) \longrightarrow 0$$

3. *Η επόμενη ακολουθία είναι ακριβής.*

$$0 \to \mathsf{Hom}_R(X, A) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_R(i,1_X)} \mathsf{Hom}_R(X, B) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_R(j,1_X)} \mathsf{Hom}_R(X, C) \to 0$$

Απόδειξη. Για το (i) μπορούμε απλά να δούμε ότι $B \otimes X = (i(A) \otimes X) \oplus (B' \otimes X)$ άρα ο $i \otimes 1_X$ είναι μονομορφισμός (ως τανυστικό γινόμενο τέτοιων), ενώ έχουμε αποδείξει ήδη την ακρίβεια του $j \otimes 1_X$.
Για τα υπόλοιπα αποδείξαμε στην προηγούμενη πρόταση την ακρίβεια από αριστερά, άρα αρκεί να το δείξουμε και για την δεξιά πλευρά ώστε να ολοκληρωθεί η απόδειξη.
Για το (ii) λοιπόν, ας είναι $f \in \mathsf{Hom}_R(A, X)$. Ορίζουμε $f' \in \mathsf{Hom}_R(i(A), X)$ με $f'(i(a)) = f(a)$ και $g \in \mathsf{Hom}_R(B, X)$ με $g(a) = \begin{cases} f'(a)\,, & a \in i(A) \\ 0\,, & a \in B' \end{cases}$. Τότε $f = \mathsf{Hom}_R(i, 1_X)g$ διότι $(\mathsf{Hom}_R(i, 1_X)g)(a) = (gi)(a) = f'(i(a)) = f(a)$, άρα η f είναι επιμορφισμός (και η ακολουθία ακριβής).
Για το (iii) από την άλλη, ας είναι $f \in \mathsf{Hom}_R(X, C)$ και $i(a) + b' \in i(A) \oplus B'$ τέτοιο ώστε $j(i(a) + b') = f(x)$. Αν $b \in j^{-1}(f(x))$ τότε $b - (i(a) + b') \in i(A)$, άρα αν $i(a_1) + b'_1, i(a_2) + b'_2 \in j^{-1}(f(x))$ με $a_1, a_2 \in A, b'_1, b'_2 \in B'$, θα έχουμε ότι $b'_1 = b'_2$. Ορίζουμε λοιπόν τον ομομορφισμό $g : X \to B$ με $g(x) = b'$ και έχουμε ότι $\mathsf{Hom}_R(1_X, j)g = jg = f$. □

Ορισμός 2.6.5. *Το R-πρότυπο P καλείται* **προβολικό** *αν-ν δοθέντος ενός διαγράμματος*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ B \arrow[r, "j"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

όπου j επιμορφισμός, υπάρχει ένας ομομορφισμός $g : P \to B$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "g"'] & \\ B \arrow[r, "j"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

Παράδειγμα 2.6.6. Ας είναι $\mathbb{Z}$ οι ακέραιοι και $\mathbb{Z}_n$ το σύνολο των κλάσεων υπολοίπων των ακεραίων modulo n. Το $\mathbb{Z}_2$ δεν είναι προβολικό $\mathbb{Z}$-πρότυπο διότι, δεδομένου του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "1_{\mathbb{Z}_2}"] & \\ \mathbb{Z}_4 \arrow[r, "j"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

όπου $j(1) = j(3) = 1,\ j(0) = j(2) = 0$, δεν υπάρχει $\mathbb{Z}$-ομομορφισμός $g : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ τέτοιος ώστε $jg = 1_{\mathbb{Z}_2}$ (Αν $g(1) = 1$ ή $g(1) = 3$, τότε θα θα είχαμε $0 = 2$ στο $\mathbb{Z}_4$. Αν $g(1) = 2$, τότε θα θα είχαμε $0 = 1$ στο $\mathbb{Z}_2$).

Παρατήρηση 2.6.7. Από τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να δούμε ότι εάν το X είναι προβολικό R-πρότυπο και η ακολουθία $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ είναι ακριβής, θα είναι ακριβής και η

$$0 \to \mathsf{Hom}_R(X, A) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_R(1_X, i)} \mathsf{Hom}_R(X, B) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_R(1_X, j)} \mathsf{Hom}_R(X, C) \to 0\ .$$

Θεώρημα 2.6.8. *Κάθε ελεύθερο R-πρότυπο είναι προβολικό.*

Απόδειξη. Ας είναι $F = \sum_{i \in I} Rx_i$ είναι ένα ελεύθερο R-πρότυπο παραγόμενο από τα στοιχεία x_i, $i \in I$. Δεδομένου διαγράμματος

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & & \downarrow f & & \\ B & \xrightarrow{j} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

με την γραμμή να είναι ακριβής, θεωρούμε το σύνολο $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq B$ να είναι τέτοιο ώστε $j(b_i) = f(1x_i)$, για κάθε $i \in I$, και ορίζουμε τον ομομορφισμό $g : F \to B$ ως $g(1x_i) = b_i$. Έχουμε ότι $jg = f$ (διότι $jg(1x_i) = j(b_i) = f(1x_i)$ στους γεννήτορες). □

2.7 Ομολογία και Συνομολογία

Σε αυτήν την ενότητα ο δακτύλιος R δεν θεωρείται μεταθετικός, εκτός αν αναφέρεται ρητά.

Ορισμός 2.7.1. *Ένα* ***αλυσιδωτό σύμπλοκο*** *R-ομομορφισμών είναι μια ακολουθία*

$$A_* : \quad \cdots \longleftarrow A_{r-2} \xleftarrow{d_{r-1}} A_{r-1} \xleftarrow{d_r} A_r \longleftarrow \cdots,$$

R-ομομορφισμών, τέτοια ώστε, για κάθε $r \in \mathbb{Z}$, να ισχύει $d_{r-1}d_r = 0$.
Σε ένα αλυσιδωτό σύμπλοκο A_* οι d_r καλούνται ***συνοριακοί ομομορφισμοί****, τα στοιχεία του υποπροτύπου $C_r = \{a \in A_r : d_r(a) = 0\}$ καλούνται* ***r-κύκλοι****, ενώ στοιχεία του $B_r = \{a \in A_r : (\exists\, a' \in A_{r+1})\ a = d_{r+1}(a')\}$ καλούνται* ***r-σύνορα*** *του συμπλόκου.*
Ένα αλυσιδωτό σύμπλοκο θα λέγεται ***άκυκλο*** *(* ***ή ακριβές*** *) αν-ν, για κάθε $r \in \mathbb{Z}$, ισχύει $B_r = C_r$.*[1]
Το R-πρότυπο $H_r(A_*) = C_r/B_r$ καλείται η ***r-οστή ομολογία*** *του αλυσιδωτού συμπλόκου, και «μετράει» πόσο απέχει το A_* από το να είναι ακριβές.*

Ορισμός 2.7.2. *Ένα* ***συναλυσιδωτό σύμπλοκο*** *είναι μια ακολουθία*

$$A^* : \quad \cdots \longrightarrow A_{r-1} \xrightarrow{d^{r-1}} A_r \xrightarrow{d^r} A_{r+1} \longrightarrow \cdots,$$

R-ομομορφισμών, τέτοια ώστε, για κάθε $r \in \mathbb{Z}$, να ισχύει $d^{r+1}d^r = 0$.
Σε ένα συναλυσιδωτό σύμπλοκο A^* οι d^r καλούνται ***συνσυνοριακοί ομομορφισμοί*** *και τα στοιχεία των C^r, B^r, κατ' αντιστοιχία με τα C_r, B_r, καλούνται*

[1] γενικά ισχύει ότι : $B_r \leq C_r$.

*r-**συνκύκλοι** και r-**συνσύνορα** ενώ το σύμπλοκο A^* καλείται **άκυκλο** (ή **ακριβές**) αν $C^r = B^r$.*
*Το R-πρότυπο $H^r(A^*) = C^r/B^r$ καλείται r-**οστή συνομολογία** του συναλυσιδωτού συμπλόκου.*

Παρατήρηση 2.7.3. Δεδομένου ενός A_* αλυσιδωτού συμπλόκου μπορούμε να κατασκευάσουμε άλλα. Ας είναι X ένα R-πρότυπο. Αν θεωρήσουμε τα A_r, $r \in \mathbb{Z}$, και X ως $\mathbb{Z}$-πρότυπα και το d_r ως $\mathbb{Z}$-ομομορφισμό, κατασκευάζουμε τον ομομορφισμό $d_r \otimes 1_X : A_r \otimes_Z X \to A_{r-1} \otimes_Z X$ και έχουμε την ακολουθία

$$A_* \otimes_{\mathbb{Z}} X : \quad \cdots \longleftarrow A_{r-1} \otimes_{\mathbb{Z}} X \xleftarrow{d_r \otimes 1_X} A_r \otimes_{\mathbb{Z}} X \longleftarrow \cdots ,$$

όπου παρατηρούμε ότι $(d_r \otimes 1_X)(d_{r+1} \otimes 1_X) = 0$, άρα πρόκειται για αλυσιδωτό σύμπλοκο.
Μπορούμε επίσης να κατασκευάσουμε το συναλυσιδωτό σύμπλοκο $\mathbb{Z}$-ομομορφισμών :

$$\mathsf{Hom}_R(A_*, X) : \cdots \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(A_{r-1}, X) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_R(d_r, 1_X)} \mathsf{Hom}_R(A_r, X) \longrightarrow \cdots ,$$

με $\mathsf{Hom}_R(d_{r+1}, 1_X)\,\mathsf{Hom}_R(d_r, 1_X) = \mathsf{Hom}_R(d_r d_{r+1}, 1_X) = 0$ επίσης.

Ορισμός 2.7.4. *Ας είναι A_*, A'_* αλυσιδωτά σύμπλοκα. Ένας **μορφισμός συμπλόκων** $f : A_* \to A'_*$ είναι μια ακολουθία R-ομομορφισμών $f_r : A_r \to A'_r$, $r \in \mathbb{Z}$, όπου, για κάθε δείκτη r, το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
\cdots & A_{r-1} \arrow[l] \arrow[d, "f_{r-1}"] & A_r \arrow[l, "d_r"'] \arrow[d, "f_r"] & A_{r+1} \arrow[l, "d_{r+1}"'] \arrow[d, "f_{r+1}"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & A'_{r-1} \arrow[l] & A'_r \arrow[l, "d'_r"'] & A'_{r+1} \arrow[l, "d'_{r+1}"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Άτυπα θα αναφερόμαστε στη μεταθετικότητα του διαγράμματος γράφοντας $fd = d'f$.

Κάθε μορφισμός συμπλόκων $f : A_* \to A'_*$ επάγει, για κάθε r, έναν ομομορφισμό $\bar{f}_r : H_r(A_*) \to H_r(A'_*)$ με τύπο

$$\bar{f}_r(c_r + B_r) = f_r(c_r) + B'_r ,$$

όπου c_r είναι ένας r-κύκλος, $B_r = d_{r+1}(A_{r+1})$ είναι το υποπρότυπο των r-συνόρων του A_*, και αντίστοιχα $B'_r = d'_{r+1}(A'_{r+1})$.
Πράγματι ο $\bar{f}_r$ είναι μια απεικόνιση στον $H_r(A'_*)$, αφού

$$d'_r f_r(c_r) = f_{r-1} d_r(c_r) = f_{r-1}(0) = 0,$$

δηλαδή ο $f_r(c_r)$ είναι ένας r-κύκλος.
Για να δείξουμε ότι ο $\bar{f}_r$ είναι καλά ορισμένος ας θεωρήσουμε έναν άλλο αντιπρόσωπο της κλάσης $c_r + B_r \in H_r(A_*)$, έστω $c_r + d_{r+1}(a_{r+1}) + B_r$. Τότε

$\bar{f}_r\big(c_r + d_{r+1}(a_{r+1}) + B_r\big) = f_r(c_r) + f_r d_{r+1}(a_{r+1}) + B'_r =$
$f_r(c_r) + d'_{r+1} f_{r+1}(a_{r+1}) + B'_r = f_r(c_r) + B'_r$. Συνεπώς η $\bar{f}_r$ είναι καλά ορισμένη και αφού η f_r είναι ένας R-ομομορφισμός, έπεται ότι και η $\bar{f}_r$ είναι ένας R-ομομορφισμός.

Ορισμός 2.7.5. *Ας είναι A_*, A'_*, A''_* αλυσιδωτά σύμπλοκα. Λέμε ότι η ακολουθία*

$$0 \longrightarrow A'_* \xrightarrow{\ i\ } A_* \xrightarrow{\ j\ } A''_* \longrightarrow 0$$

μορφισμών των αλυσιδωτών συμπλόκων είναι ***ακριβής****, αν-ν η ακολουθία*

$$0 \longrightarrow A'_r \xrightarrow{\ i_r\ } A_r \xrightarrow{\ j_r\ } A''_r \longrightarrow 0$$

των R-ομομορφισμών είναι ακριβής για κάθε $r \in \mathbb{Z}$.
Ορίζουμε τον R-ομομορφισμό $\bar{d}_r : H_r(A''_*) \to H_{r-1}(A'_*)$, τον οποίο καλούμε ***συνδετικό ομομορφισμό*** *ως*

$$\bar{d}_r(a''_r + B''_r) = a'_{r-1} + B'_{r-1}\,,$$

όπου B''_r, B'_{r-1} είναι το r-οστό σύνορο και το $(r-1)$-οστό σύνορο των συμπλόκων A''_*, A'_* αντίστοιχα, και το στοιχείο a'_{r-1} λαμβάνεται ως εξής:(*)

1. *Ας είναι $a_r \in j^{-1}(a''_r)$.*
2. *Καθώς $j_{r-1}(d_r(a_r)) = d''_r j_r(a_r) = d''_r(a''_r) = 0$, έχουμε ότι $a'_{r-1} \in A'_{r-1}$ τέτοιο ώστε : $i_{r-1}d'_{r-1}(a'_{r-1}) = d_r(a_r)$.*
3. *Το a'_r είναι κύκλος, διότι*

   $$i_{r-2}d'_{r-2}(a'_{r-1}) = d_{r-1}i_{r-1}(a'_{r-1}) = d_{r-1}d_r(a'_{r-1})$$

   και i_{r-2} μονομορφισμός.
4. *Το $a'_{r-1}+B'_{r-1}$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή αντιπροσώπου του $a''_r+B''_r$ και την επιλογή του a_r, καθώς:*
   Αν $a''_r + d''_r(a''_{r+1}) + B''_r$ είναι μια άλλη αναπαράσταση του $a''_r + B''_r$, τότε αντικαθιστώντας στα (1),(2),(3) το a''_r με $a''_r + d''_{r+1}(a''_{r+1})$ και υποθέτοντας

$a''_{r+1} = j_{r+1}(a_{r+1})$, αν αντικαταστήσουμε το a_r με $a_r + d_{r+1}(a_{r+1} + i(a'_r)$ θα έχουμε το ίδιο συμπέρασμα, αφού το a'_{r-1} αντικαθίσταται από το $a'_{r-1} + d'_r(a'_r)$ που ανήκουν στην ίδια κλάση (άρα με τον παραπάνω ορισμό του a'_{r-1}, ο ομομορφισμός είναι καλά ορισμένος).

Η επαλήθευση ότι ο $\bar{d}_r$ είναι ένας R-ομομορφισμός προκύπτει από τα (1) και (2).

Θεώρημα 2.7.6. *Αν η ακολουθία*

$$0 \longrightarrow A'_* \xrightarrow{\ i\ } A_* \xrightarrow{\ j\ } A''_* \longrightarrow 0$$

μορφισμών των αλυσιδωτών συμπλόκων είναι ακριβής, θα είναι ακριβής και η μακρά ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{\bar{j}_{r+1}} H_{r+1}(A''_*) \xrightarrow{\bar{d}_{r+1}} H_r(A'_*) \xrightarrow{\bar{i}_r} H_r(A_*) \xrightarrow{\bar{j}_r} H_r(A''_*) \longrightarrow \cdots$$

των R-ομομορφισμών.

Απόδειξη. Τα βήματα (i)-(iii) αποδεικνύουν ότι η παραπάνω μακρά ακολουθία είναι σύμπλοκο, ενώ τα (iv)-(vi) ολοκληρώνουν την απόδειξη.(*)

1. $$\bar{j}_r\bar{i}_r(a'_r + B'_r) = \bar{j}_r\big(i_r(a'_r) + B_r\big) = j_r i_r(a'_r) + B''_r = B''_r\,.$$

2. $$\bar{d}_r\bar{j}_r(a_r + B_r) = \bar{d}_r\big(j_r(a_r) + B''_r\big) = a'_{r-1} + B'_r\,,$$

   όπου $i_r(a'_{r-1}) = d_r(a_r)$. Αλλά καθώς το a_r είναι κύκλος, έπεται ότι $a_{r-1} = 0$. Άρα $\bar{d}_r\bar{j}_r(a_r + B_r) = B'_r$.

3. $\bar{i}_r\bar{d}_{r+1}(a''_{r+1} + B''_{r+1}) = \bar{i}_r(a'_r + B'_r)$, όπου εάν $a_{r+1} \in j^{-1}_{r+1}(a''_r)$, θα έχουμε ότι $i_r(a'_r) = d_{r+1}(a_{r+1})$. Επομένως

   $$\bar{i}_r\bar{d}_{r+1}(a''_{r+1} + B''_{r+1}) = d_{r+1}(a_{r+1}) + B_r = B_r\,.$$

4. Ας είναι $\bar{i}_r(a'_r + B'_r) = B_r$, τότε $i_r(a'_r) = d_{r+1}(a_{r+1})$ για κάποιο $a_{r+1} \in A_{r+1}$. Επιπλέον το $j_{r+1}(a_{r+1})$ είναι κύκλος, καθώς

   $$d''_{r+1}j_{r+1}(a_{r+1}) = j_r d_{r+1}(a_{r+1}) = j_r i_r(a'_r) = 0.$$

   Από τον ορισμό του $\bar{d}_r$ προκύπτει:

   $$\bar{d}_r\big(j_{r+1}(a_{r+1}) + B_{r+1}\big) = a'_r + B'_r.$$

5. Ας είναι $\bar{j}_r(a_r + B_r) = B''_r$, τότε $j_r(a_r) = d''_{r+1}(a''_{r+1})$ για κάποιο $a''_{r+1} \in A''_{r+1}$. Αν a_{r+1} τέτοιο ώστε $j_{r+1}(a_{r+1}) = a''_{r+1}$, θα ισχύει ότι $j_r(a_r - d_{r+1}(a_{r+1})) = 0$. Άρα υπάρχει $a'_r \in A'_r$ τέτοιο ώστε $i_r(a'_r) = a_r - d_{r+1}(a_{r+1})$. Το a'_r είναι κύκλος, αφού $i_{r-1}d'_r(a'_r) = d_r i_r(a'_r) = 0$. Συνεπώς

$$\bar{i}_r(a'_r + B'_r) = a_r - d_{r+1}(a_{r+1}) + B_r = a_r + B_r\,.$$

6. Ας είναι $\bar{d}_r(a''_r + B''_r) = B'_{r-1}$, τότε εάν $a''_r = j_r(a_r)$, έχουμε ότι $d_r(a_r) = i_{r-1}d'_r(a'_r)$ για κάποιο $a'_r \in A'_r$.
Επομένως το $a_r - i_r(a'_r)$ είναι κύκλος και, επιπλέον, ισχύει $j_r(a_r - i_r(a'_r)) = a''_r$. Άρα
$$\bar{j}_r\big(a_r - i_r(a'_r) + B_r\big) = a''_r + B''_r\,.$$

∎

Θεώρημα 2.7.7. *Ας είναι* $f : X_* \to X'_*$, $g : Y_* \to Y'_*$, $h : Z_* \to Z'_*$ *μορφισμοί αλυσιδωτών συμπλόκων. Αν το μεταθετικό διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_* \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & Y_* \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & Z_* \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'_* \arrow[r, "i'"] & Y'_* \arrow[r, "j'"] & Z'_* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

είναι ακριβές (στις γραμμές), τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{r+1}(Z_*) \arrow[r, "\bar{d}_{r+1}"] \arrow[d, "\bar{h}_{r+1}"] & H_r(X_*) \arrow[r, "\bar{i}_r"] \arrow[d, "\bar{f}_r"] & H_r(Y_*) \arrow[r, "\bar{j}_r"] \arrow[d, "\bar{g}_r"] & H_r(Z_*) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{h}_r"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{r+1}(Z'_*) \arrow[r, "\bar{d}'_{r+1}"] & H_r(X'_*) \arrow[r, "\bar{i}'_r"] & H_r(Y'_*) \arrow[r, "\bar{j}'_r"] & H_r(Z'_*) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Καθώς $g_r i_r = i'_r f_r$ και $j'_r g_r = h_r j_r$ θα έχουμε ότι $\bar{g}_r\bar{i}_r = \bar{i}'_r\bar{f}_r$ και $\bar{j}'_r\bar{g}_r = \bar{h}_r\bar{j}_r$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\bar{d}'_r\bar{h}_r = \bar{f}_{r-1}\bar{d}_r$.
Ας είναι $\bar{d}_r\big(z_r + d_{r+1}(Z_{r+1})\big) = x_{r-1} + d_r(X_r)$. Τότε $h_r(z_r) = h_r j_r(y_r = j'_r g_r(y_r)$ για κάποιο $y_r \in Y_r$, άρα

$$\bar{d}'_r\bar{h}_r\big(z_r) + d_{r+1}(Z_{r+1})\big) = \bar{d}'_r\big(h_r(z_r) + d'_{r+1}(Z_{r+1})\big) \quad = f_{r-1}\big(x_{r-1} + d'_r(X_r)\big)$$

διότι $d'_r g_r(y_r) = g_{r-1}d_r(y_r) = g_{r-1}i_{r-1}(x_{r-1}) = i'_{r-1}f_{r-1}(x_{r-1})$ και

$$\bar{f}_{r-1}\bar{d}_r\big(z_r + d_{r+1}(Z_{r+1})\big) = \bar{f}_{r-1}\big(x_{r-1} + d_r(X_r)\big) \quad = f_{r-1}\big(x_{r-1}\big) + d'_r(X'_r)$$

Άρα από τις (;;) και (;;) έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 2.7.8. Ο $H_*(-,-)$ είναι παράδειγμα αριστερού απορρέοντος συναρτητή, ονομαστικά ο αριστερός απορρέων συναρτητής από το τανυστικό γινόμενο. Συγκεκριμένα, ορίζεται ο αριστερά απορρέων συναρτητής ενός δεξιά ακριβούς συναρτητή μεταξύ δύο αβελιανών κατηγοριών, θεωρόντας ότι η αρχική κατηγορία έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα. Δηλαδή για κάθε αντικείμενο A στην κατηγορία υπάρχει ένας επιμορφισμός $P \to A$ με το P να ικανοποιεί την ίδια καθολική ιδιότητα όπως αυτή εκφράστηκε για ένα προβολικό πρότυπο. Το ¨αριστερό' κομμάτι του συμβολισμού προέρχεται από το ότι όταν εφαρμόζουμε τον δεξιό ακριβή συναρτητή σε μια σύντομη ακριβή ακολουθία ελπίζουμε να την επεκτείνουμε σε μακρά ακριβή ακολουθία προς τα αριστερά. Αξιωματικοποιώντας τις ιδιότητες του $H_*(-,-)$ που έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα, μπορεί να δειχθεί ότι ο αριστερά απορρέων συναρτητής είναι καθολικός ως προς το να επεκτείνει σύντομες ακριβείς ακολουθίες σε μακριές ακριβείς ακολουθίες προς τα αριστερά. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να αλλάξουν οι ρόλοι των προτύπων και ο συναρτητής να παραμένει ο ίδιος.

2.8 Ομοτοπία

Ορισμός 2.8.1. *Ας είναι $f, g : X_* \rightrightarrows X'_*$ μορφισμοί συμπλόκων από R-ομομορφισμούς. Ορίζουμε τον μορφισμό $f+g : X_* \to X'_*$ ως $(f+g)_r = f_r + g_r$. Επίσης έχουμε $(\overline{f+g})_r = \bar{f}_r + \bar{g}_r$.*
Λέμε ότι οι μορφισμοί f, g είναι ***ομοτοπικοί*** *αν-ν υπάρχει μια οικογένεια R-ομομορφισμών $\{D_r : X_r \to X'_{r+1}\}_{r\in\mathbb{Z}}$, οι οποίοι καλούνται* ***διασπώμενες ομοτοπίες****, έτσι ώστε*

$$f_r - g_r = d'_{r+1}D_r + D_{r-1}d_r.$$

Οι εμπλεκόμενοι R-ομομορφισμοί φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots & X_{r-1} \arrow[l] \arrow[d, shift right, "f_{r-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{r-1}"] \arrow[dr, "D_{r-1}"] & X_r \arrow[l, "d_r"'] \arrow[d, shift right, "f_r"'] \arrow[d, shift left, "g_r"] \arrow[dr, "D_r"] & X_{r+1} \arrow[l, "d_{r+1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{r+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{r+1}"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & X'_{r-1} \arrow[l] & X'_r \arrow[l, "d'_r"'] & X'_{r+1} \arrow[l, "d'_{r+1}"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Πρόταση 2.8.2. *Αν $f, g : X_* \rightrightarrows X'_*$ ομοτοπικοί μορφισμοί συμπλόκων, τότε $\bar{f} = \bar{g}$.*

Απόδειξη. Ας είναι $x_r + d_{r+1}(X_{r+1}) \in H_r(X_*)$. Τότε
$(\overline{f-g})_r\big(x_r + d_{r+1}(X_{r+1})\big) = (f_r - g_r)(x_r + d'_{r+1}(X'_{r+1}) =$
$d'_{r+1}D_r(x_r) + D_{r-1}d_r(x_r) + d'_{r+1}(X'_{r+1})$
$\xlongequal{x_r \text{ κύκλος}} d'_{r+1}D_r(x_r) + d'_{r+1}(X'_{r+1}) \quad \xRightarrow{D_r(x_r)\in X'_{r+1}} (\overline{f-g})_r\big(x_r + d_{r+1}(X_{r+1})\big) =$
$d'_{r+1}(X'_{r+1})$. Άρα τελικά $\bar{f} = \bar{g}$. □

Θεώρημα 2.8.3. *Αν ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{X_*} : X_* \to X_*$ είναι ομοτοπικός με τον τετριμμένο (δηλ. $1_{X_r} = d_{r+1}D_r + D_{r-1}d_r$, για κάθε r), τότε $H_r(X_*) = 0$, για κάθε r.*

Απόδειξη. Αν το x_r είναι ένας r-κύκλος, επειδή

$$x_r = d_{r+1}D_r(x_r) + D_{r-1}d_r(x_r) = d_{r+1}D_r(x_r),$$

θα είναι και ένα r-σύνορο. Άρα κάθε r- κύκλος είναι r-σύνορο και έτσι $B_r = C_r$, για κάθε r. □

Στην ειδική περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}$ και X_r ελεύθερα $\mathbb{Z}$-πρότυπα, ισχύει και το αντίστροφο. Μάλιστα μπορούμε να το γενικεύσουμε :

Πρόταση 2.8.4. *Εάν το X_* είναι ένα άκυκλο (δηλ. $H_r(X_*) = 0$ για κάθε r) σύμπλοκο ομομορφισμών ελεύθερων αβελιανών ομάδων, τότε, για κάθε r, υπάρχουν ομομορφισμοί $D_r : X_r \to X_{r+1}$, τέτοιοι ώστε*

$$1_{X_r} = d_rD_{r+1} + D_{r-1}d_r\,.$$

Απόδειξη. Το $d_r(X_r)$ είναι ελεύθερη αβελιανή ως υποομάδα της ελεύθερης αβελιανής ομάδας X_{r-1}. Ας είναι $\{d_r(x_r^i)\}_{i\in I}$ μια βάση του $d_r(X_r)$. Ορίζουμε τον ομομορφισμό $S_{r-1} : d(X_r) \to X_r$ ως

$$S_{r-1}\big(d_r(x_r^i)\big) = x_r^i\,,$$

για κάθε $i \in I$. Αν θεωρήσουμε $d_r(x_r) \in d_r(X_r)$, θα έχουμε $d_r(x_r) = \sum z_i d_r(x_r^i)$ όπου z_i ακέραιοι και

$$d_rS_{r-1}\big(d_r(x_r)\big) = \sum_i z_i d_rS_{r-1}\big(d_r(x_r^i)\big) = \sum_i z_i d_r(x_r^i) = d_r(x_r)\,.$$

Άρα για κάθε $x_r \in X_r$, έχουμε $x_r - S_{r-1}(d_r(x_r)) \in d_{r+1}(X_{r+1})$ καθώς $d_r\big(x_r - S_{r-1}(d_r(x_r))\big) = 0$ και $H_r(X_*) = 0$. Άρα $S_r(x_r - S_{r-1}d_r(x_r)) \in X_{r+1}$. Ορίζουμε τώρα $D_r : X_r \to X_{r+1}$ ως

$$D_r(x_r) = S_r\big(x_r - S_{r-1}d_r(x_r)\big)\,.$$

Έτσι έχουμε :

$$d_{r+1}D_r(x_r) = x_r - S_{r-1}d_r(x_r) \tag{2.1}$$

και

$$D_{r-1}d_r(x_r) = S_{r-1}\big(d_r(x_r) - S_{r-2}d_{r-1}d_r(x_r)\big) = S_{r-1}d_r(x_r)$$

Άρα από τις (2.1) και (2.8) έχουμε ότι

$$(d_{r+1}D_r + D_{r-1}d_r)(x_r) = x_r = 1_{X_r}(x_r)$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Tate Συνομολογια Πεπερασμενων Ομαδων

Έστω G ομάδα. Ο δακτύλιος ομάδα $\mathbb{Z}[G]$ αποτελείται από τυπικά αθροίσματα $\sum_{\sigma\in G} a_\sigma \sigma$ με συντελεστές $a_\sigma \in \mathbb{Z}$ ώστε μόνο πεπρερασμένο πλήθος από αυτούς να είναι μη-μηδενικοί. Ο πολλαπλασιασμός ορίζεται από $\mathbb{Z}$-γραμμικές επεκτάσεις της πράξης της ομάδας. Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[G]$ είναι αντιμεταθετικός αν και μόνο αν είναι η G. Σαν μία αβελιανή ομάδα ο $\mathbb{Z}[G]$ είναι ένα ελεύθερο $\mathbb{Z}$-πρότυπο με βάση την G.

Η έννοια ενός G-προτύπου είναι ισοδύναμη με αυτήν ενός $\mathbb{Z}[G]$-προτύπου. Για να ορισθεί πολλαπλασιαμός με στοιχείο του $\mathbb{Z}[G]$, θα πρέπει να ορισθεί μια δράση της G και αυτή η δράση σε ένα G-πρότυπο επεκτείνεται $\mathbb{Z}$ γραμμικά, διότι κάθε G-πρότυπο είναι και $\mathbb{Z}$-πρότυπο. Η πολλαπλασιαστική μονάδα 1 του δακτυλίου $\mathbb{Z}[G]$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της G. Το προσθετικό ουδέτερο 0 είναι το κενό άθροισμα το οποίο δρα στο $a \in A$ στέλνοντας το στοιχείο a στο ουδέτερο στοιχείο του A.

Για κάθε $n \geq 0$ μπορούμε να θεωρούμε τον $\mathbb{Z}[G^n]$ σαν ένα G-πρότυπο με τη G να δρα διαγώνια από τα αριστερά

$$\sigma \cdot (\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = (\sigma\sigma_1, \cdots, \sigma\sigma_n).$$

Τότε έχουμε $\mathbb{Z}[G^0] = \mathbb{Z}$ με τετριμμένη G δράση.

Υπενθυμίζουμε ότι το $\mathbb{Z}[G]$ είναι ένα ελεύθερο $\mathbb{Z}$-πρότυπο με βάση την G και για $n \geq 0$ έχουμε

$$\mathbb{Z}[G^{n+1}] \cong \bigoplus_{(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\in G^n} \mathbb{Z}[G](1, \sigma_1, \cdots, \sigma_n).$$

3.1 Δακτύλιοι Ομάδας

Ορισμός 3.1.1. *Αν η ομάδα G είναι πεπερασμένη αντί για $\mathbb{Z}[G]$ θα γράφουμε Γ. Ας είναι Γ το σύνολο όλων των τυπικών αθροισμάτων $\alpha = \sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma$, όπου $n_\sigma \in \mathbb{Z}$. Θα λέμε ότι δυο τέτοια τυπικά αθροίσματα $\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma$ και $\sum_{\tau \in G} m_\tau \tau$ είναι* ***ίσα***, *αν-ν, η ισότητα $\sigma = \tau$ επάγει την $n_\sigma = m_\tau$.*
Ορίζουμε την πρόσθεση στο Γ ως

$$\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma + \sum_{\sigma \in G} n'_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in G} (n_\sigma + n'_\sigma)\sigma$$

και τον πολλαπλασιασμό στο Γ ως

$$\Big(\sum_{\rho \in G} \ell_\rho \rho\Big)\Big(\sum_{\sigma \in G} m_\sigma \sigma\Big) = \sum_{\tau \in G} n_\tau \tau\,,$$

όπου $n_\tau = \sum_{\rho \in G} \ell_\rho \cdot m_{\rho^{-1}\tau}$.
Το Γ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις είναι ένας ελεύθερος δακτύλιος και καλείται ***δακτύλιος ομάδας*** *της G.*

Η απεικόνιση $\theta : G \to \Gamma$ που ορίζεται ως $\theta\sigma = 1\sigma$ είναι ένας μονομορφισμός από την G στον Γ (η θ είναι 1-1 και ισχύει $\theta(\sigma\tau) = \theta(\sigma)\,\theta(\tau)$). Επιπλέον η θ ικανοποιεί την εξής καθολική ιδιότητα: Αν $f : G \to R$ είναι τυχόν ομομορφισμός από την ομάδα G στον μοναδιαίο δακτύλιο R, έτσι ώστε $f(1) = 1$ και $f(\sigma\tau) = f(\sigma)\,f(\tau)$, τότε υπάρχει ένας μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $\bar{f} : \Gamma \to R$, τέτοιος ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "f"'] & & \Gamma \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Η $\bar{f}$ ορίζεται ως

$$\bar{f}\big(\textstyle\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma\big) = \displaystyle\sum_{\sigma \in G} n_\sigma f(\sigma)\,.$$

Ορισμός 3.1.2. *1. Έστω G ομάδα. Ένα G-**πρότυπο** είναι μία αβελιανή ομάδα A εφοδιασμένη με μια G-**δράση** συμβατή με τη δομή ομάδας της: $g(a+b) = ga + gb$ για όλα τα $g \in G$ και $a, b \in A$. Άρα και η τάξη του ga ισούται με την τάξη του a.*

2. Ένα τετριμμένο G -πρότυπο είναι μία αβελιανή ομάδα με δράση $ga = a$ για όλα τα $g \in G$ και $a \in A$. Άρα κάθε αβελιανή ομάδα μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα τετριμμένο G -πρότυπο.

3. Ένας μορφισμός $f : A \to B$ μεταξύ G-προτύπων είναι G μορφισμός, αν είναι μορφισμός αβελιανών ομάδων και $f(ga) = gf(a)$.

4. Οι πυρήνες, οι εικόνες, τα πηλίκα και τα ευθέα αθροίσματα των G-προτύπων είναι επίσης G-πρότυπα.

Οποιαδήποτε G-πρότυπα A και B είναι επίσης και $\mathbb{Z}$-πρότυπα.

Ορισμός 3.1.3. *Έστω A ένα G-πρότυπο. Τα G-αναλλοίωτα στοιχεία δημιουργούν ένα G-πρότυπο*

$$A^G = \{a \in A : ga = a, \forall g \in G\}$$

και είναι το μεγαλύτερο τετριμένο G-υποπρότυπο του A.

Ορισμός 3.1.4. *Ας είναι A μια αβελιανή ομάδα. Λέμε ότι η A είναι ένα* ***G-πρότυπο****, αν-ν η G δρα στην A, δηλαδή ορίζεται μια απεικόνιση (σύνθεση) $\kappa : G \times A \to A$, (χάριν συντομίας, αντί του $\kappa(\sigma, a)$ γράφουμε σa), για την οποία ισχύουν:(*)*

1. $1a = a\,, \quad a \in A\,.$

2. $\sigma(a_1 + a_2) = \sigma a_1 + \sigma a_2\,, \quad \sigma \in G, a_1, a_2 \in A\,.$

3. $(\sigma\tau)a = \sigma(\tau a), \quad \sigma, \tau \in G, a \in A\,.$

Λέμε ότι η κ είναι μια ***δράση*** *της G στην A.*

Στην περίπτωση που η A είναι ένα G-πρότυπο, ορίζουμε την δράση του Γ στο A ως

$$\Big(\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma\Big) a = \sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma a\,.$$

Αυτή η δράση εφοδιάζει το A με μια δομή Γ-προτύπου.

Παράδειγμα 3.1.5. Ας είναι K ένα πεπερασμένο σώμα και G η ομάδα των αυτομορφισμών του K. Τότε η G δρα στην προσθετική ομάδα K^+ του K.

3.1.1 Η απεικόνιση ίχνους, trace

Στα παρακάτω θα γράφουμε $U \leq G$ (αντίστ. $U \trianglelefteq G$) αν η U είναι υποομάδα (αντίστ. κανονική υποομάδα) της ομάδας G.

Ας είναι $U \leq G$. Ένα G-πρότυπο A είναι, επίσης, ένα U-πρότυπο όπου η δράση του U (ή $\mathbb{Z}U$) δίνεται μέσω της σύνθεσης

$$U \times A \xrightarrow{i \times 1_A} G \times A \xrightarrow{\kappa} A \ ,$$

όπου $i : U \to G$ είναι ο εγκλεισμός της U στην G και κ η δράση της G στην A. Ορίζουμε

$$A^U = \{a \in A \,:\, (\forall\, \sigma \in U)\ \sigma a = a\}\,.$$

Το A^U είναι αβελιανή ομάδα. Εν γένει το A^U δεν είναι G-πρότυπο, εν τούτοις, για $U \trianglelefteq G$, υπάρχει μια δράση $\kappa' : G \times A^U \to A^U$ της G στην A^U, που ορίζεται ως $\kappa'(\tau, a) = \kappa(\tau, a) = \tau a$.
Για να δείξουμε ότι $\kappa'(\tau, a) \in A^U$, για κάθε $a \in A$, θεωρούμε $\sigma \in U$. Τότε

$$\sigma\big(\kappa'(\tau, a)\big) = \sigma(\tau a) = (\sigma\tau)\, a = (\tau\sigma_1)\, a = \tau\, a = \kappa'(\tau, a)\,.$$

Ορίζουμε την απεικόνιση $\bar{\kappa} : (G/U) \times A^U \to A^U$ με $\bar{\kappa}(\tau U, a) = \tau a$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (i)-(iii) του Ορισμού 3.1.2. Συνεπώς, αν $U \trianglelefteq G$, τότε το A^U είναι ένα G/U-πρότυπο.

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $a \in A$, το $\sum_{\sigma \in G} \sigma a$ είναι στοιχείο του A^G, καθώς, αν $\tau \in G$, τότε

$$\tau\Big(\sum_{\sigma \in G} \sigma a\Big) = \sum_{\sigma \in G} (\tau\sigma) a\,.$$

Ακόμα, καθώς το σ παίρνει τιμές στο G, το $\tau\sigma$ παίρνει τιμές σ' ολόκληρο το G, συνεπώς το δεύτερο άθροισμα της παραπάνω ισότητας ισούται με $\sum_{\sigma \in G} \sigma a$.

Ορισμός 3.1.6. *Ορίζουμε την απεικόνιση $S : A \to A^G$ ως*

$$Sa = \sum_{\sigma \in G} \sigma a\,.$$

Η S καλείται ***απεικόνιση ίχνους (trase map)****.*

Συνήθως χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $tr(a) = \sum_{\sigma \in G} \sigma a$.

Αν $U \leq G$, επεκτείνουμε την προηγούμενη απεικόνιση σε

$$S_{U,G} : A^U \to A^G$$

ως εξής: Αν $G =_{i\in I} \sigma_i U$ (ξένη ένωση), όπου $\sigma_i U$ είναι ένα αριστερό σύμπλοκο (coset) της G, ορίζουμε
$$S_{U,G}a = \sum_{i\in I} \sigma_i a\,.$$
Η $S_{U,G}$ είναι καλά ορισμένη αφού αν $G =_{i\in I} \sigma_i u_i U$, τότε
$$S_{U,G}a = \sum_{i\in I} \sigma_i u_i a = \sum_{i\in I} \sigma_i a\,.$$
Επίσης, $S_{U,G}a \in A^G$ για κάθε $a \in A^U$, καθώς αν $\tau \in G$, επειδή $G = \sum_{i\in I} \sigma_i U$, έχουμε ότι $G = \tau G = \sum_{i\in I} \tau\sigma_i U$. Έτσι
$$S_{U,G}a = \sum_{i\in I} \tau\sigma_i a = \tau S_{U,G}a\,.$$
Η $S_{U,G}$ καλείται το **ίχνος από την** U **στην** G. Σημειώνουμε ότι $S = S_{1,G}$. Τέλος, αν $U \le V \le G$, $G = \sum_{i\in I} \sigma_i V$, $V = \sum_{k\in K} \tau_k U$ (και οι δυο ξένες ενώσεις), τότε επειδή $G =_{i\in I} \sigma_i \tau_k U$, έχουμε ότι
$$S_{U,G}a = \sum_{i,k} \sigma_i \tau_k a = \sum_{i\in I} \sigma_i \Big(\sum_{k\in K} \tau_k a \Big) = S_{V,G}\, S_{U,V}\, a\,.$$
Συνεπώς για $U \le V \le G$, ισχύει
$$S_{U,G} = S_{V,G}\, S_{U,V}\,.$$

Ο τελεστής $Hom_R(\bullet, A)$ δεν είναι δεξιά ακριβής όπως δείχνει το παράδειγμα
$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$
$$0 \leftarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \leftarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \leftarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \leftarrow 0,$$
$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow 0.$$

Θα συμβολίζουμε την $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B)$ με $\mathsf{Hom}(A,B)$ και την $\mathsf{Hom}_{\Gamma}(A,B)$ με $\mathsf{Hom}_G(A,B)$.
Στην $\mathsf{Hom}(A,B)$ ορίζουμε μια δομή G-προτύπου ως εξής: Ελλείψει καθιερωμένου συμβολισμού, συμβολίζουμε την (αριστερή) δράση του $\sigma \in G$ στο $f \in \mathsf{Hom}(A,B)$ με f^σ και ορίζουμε
$$f^\sigma(a) = \sigma f(\sigma^{-1}a)\,.$$
Οι συνθήκες (i)-(iii) του ορισμού 3.1.2 ικανοποιούνται:(*)

1. $f^1 = f$.
2. $(f+g)^\sigma = \sigma(f+g)\sigma^{-1} = \sigma f \sigma^{-1} + \sigma g \sigma^{-1} = f^\sigma + g^\sigma$.
3. $(f^\tau)^\sigma = \sigma(\tau f \tau^{-1})\sigma^{-1} = \sigma\tau f(\sigma\tau)^{-1} = f^{\sigma\tau}$.

Συνεπώς το $\mathsf{Hom}(A,B)$ είναι ένα G-πρότυπο.

Αν $f \in (\mathsf{Hom}(A,B))^G$, τότε $\sigma f \sigma^{-1} = f$, για κάθε $\sigma \in G$, δηλαδή $\sigma f(a) = f(\sigma a)$. Έτσι

$$\sum_{\sigma\in G} n_\sigma \sigma f(a) = f\big(\textstyle\sum_{\sigma\in G} n_\sigma \sigma a\big)$$

και η f είναι ένας G-ομομορφισμός.
Αντιστρόφως, αν $f \in \mathsf{Hom}_G(A,B)$, τότε η G δρα τετριμμένα στην f. Άρα

$$(\mathsf{Hom}(A,B))^G = \mathsf{Hom}_G(A,B)\,.$$

Ομοίως, για A και B G-πρότυπα έχουμε $(\mathsf{Hom}(A,B))^U = \mathsf{Hom}_U(A,B)$, για κάθε $U \leq G$. Για $G =_{i\in I} \sigma_i U$ και $f \in \mathsf{Hom}_U(A,B)$ η απεικόνιση

$$S_{U,G} : \mathsf{Hom}_U(A,B) \to \mathsf{Hom}_G(A,B)$$

ορίζεται ως

$$S_{U,G} f = \sum_{i\in I} f^{\sigma_i} = \sum_{i\in I} \sigma_i f \sigma_i^{-1}\,.$$

Επιπλέον, αν $g \in \mathsf{Hom}_G(B,C)$, τότε η απεικόνιση $gf : A \to C$ είναι ένας U-ομομορφισμός. Έτσι

$$S_{U,G}\, gf = \sum_{i\in I} \sigma_i g \sigma_i^{-1} \sigma_i f \sigma_i^{-1} = g \sum_{i\in I} f^{\sigma_i} = g\, S_{U,G} f\,.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι αν $h : D \to A$ είναι ένας G-ομομορφισμός, τότε $S_{U,G} fh = (S_{U,G} f)\, h$. Ιδιαίτερα, αν η τάξη της ομάδας G είναι n και $f \in \mathsf{Hom}_G(A,B)$, τότε $Sf = nf$.

Έστω A ένα G-πρότυπο. Θεωρώντας το $\mathbb{Z}$ σαν ένα G-πρότυπο με τετριμμένη δράση, δηλαδή $\sigma z = z$, για κάθε $z \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε τις απεικονίσεις $\varphi : \mathsf{Hom}(\mathbb{Z}, A) \to A$ και $\psi : A \to \mathsf{Hom}(\mathbb{Z}, A)$ με αντίστοιχους τύπους $\varphi(f) = f(1)$ και $(\psi(a))(1) = a$. Οι φ και ψ είναι G-ομομορφισμοί, αφού

$$\varphi(f^\sigma) = f^\sigma(1) = \sigma f(\sigma^{-1} 1) = \sigma f(1) = \sigma\varphi(f)$$

και
$$(\psi(\sigma a))(1) = \sigma a = \sigma(\psi(a))(1)\,.$$
Επιπλέον, $\big((\psi\varphi)f\big)(1) = \big(\psi(\varphi(f)\big)(1) = \varphi(f) = f(1)$ και
$$(\varphi\psi)(a) = (\varphi(\psi(a)) = (\psi(a))(1) = a\,.$$
Συνεπώς μπορούμε να ταυτίσουμε το $\mathsf{Hom}(\mathbb{Z}, A)$ με το A μέσω του G-ισομορφισμού φ. Ο περιορισμός $\varphi\big|_{\mathsf{Hom}_G(\mathbb{Z},A)} : \mathsf{Hom}_G(\mathbb{Z}, A) \to A^G$ είναι, επίσης, ένας ισομορφισμός. Για να δείξουμε ότι το πεδίο τιμών του $\varphi\big|_{\mathsf{Hom}_G(\mathbb{Z},A)}$ είναι το A^G αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, αν $f \in \mathsf{Hom}_G(\mathbb{Z}, A)$ τότε
$$\sigma\varphi\big|_{\mathsf{Hom}_G(\mathbb{Z},A)}(f) = f^\sigma(1) = f(1) = \varphi\big|_{\mathsf{Hom}_G(\mathbb{Z},A)}(f)\,.$$

3.2 G-κανονικά (regular) πρότυπα

Σε αυτήν την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε την εξής στοιχειώδη κατασκευή: Αν X είναι ένα G-ελεύθερο πρότυπο με βάση $\{x_k\}_{k\in K}$, $U \leq G$ και $G =_{i\in I} U\sigma_i$, τότε το $\{\sigma_i x_k\}_{i\in I,k\in K}$ είναι μια U-βάση του X θεωρώντας το ως ένα U-ελεύθερο πρότυπο.

Ορισμός 3.2.1. *Ένα G-πρότυπο A καλείται G-**κανονικό πρότυπο**, αν-ν, το A περιέχει ένα $\mathbb{Z}$-πρότυπο B τέτοιο ώστε $A = \sum_{\sigma\in G} \sigma B$. Εδώ το άθροισμα είναι ευθύ.*

Αν $U \leq G$ και το A είναι G-κανονικό πρότυπο, τότε είναι και U-κανονικό. Στην πραγματικότητα, αν $G =_{k\in K} U\sigma_k$ και $A = \sum_{\sigma\in G} \sigma B$ για κάποιο $\mathbb{Z}$-πρότυπο B, τότε $A = \sum_{\sigma\in G} \sigma B_1$, όπου $B_1 = \sum_{k\in K} \sigma_k B$.

Ένα G-ελεύθερο πρότυπο A είναι G-κανονικό αφού, αν $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μια G-βάση του A, τότε $A = \sum_{\sigma\in G} \sigma B$, όπου $B = \sum_{i\in I} \mathbb{Z} x_i$.

Πρόταση 3.2.2. *Ας είναι $A = \sum_{\sigma\in G} \sigma B$ ένα G-κανονικό πρότυπο. Τότε υπάρχει $\pi \in \mathsf{Hom}(A, A)$ τέτοιος ώστε $1_A = S(\pi)$.*

Απόδειξη. Ας είναι $\pi : A \longrightarrow A$ η σύνθεση $A \xrightarrow{p_1} 1B \xrightarrow{i_1} B$, όπου p_1 είναι η προβολή από το ευθύ άθροισμα $\sum_{\sigma\in G} \sigma B$ στον όρο $1B$ και i_1 ο εγκλεισμός από τον όρο $1B$ στο $\sum_{\sigma\in G} \sigma B$. Έτσι αν $a = \sum_{\sigma\in G} \sigma b_\sigma \in A$, τότε $\pi a = b_1 \in A$. Για κάθε $\tau \in G$ ισχύει
$$\pi^\tau a = \tau\pi(\tau^{-1}a) = \tau\pi\big(\textstyle\sum_{\sigma\in G}\tau^{-1}\sigma b_\sigma\big) = \tau b_\tau\,.$$

Επομένως, $S_\pi(a) = \sum_{\tau\in G} \pi^\tau a = \sum_{\tau\in G} \tau b_\tau = a$. Άρα $S(\pi) = 1_A$. $\square$

Πρόταση 3.2.3. *Αν το A είναι ένα G-κανονικό πρότυπο και το C είναι ένα G-πρότυπο, τότε τα $\mathsf{Hom}(A, C)$ και $A \otimes C$ είναι G-κανονικά πρότυπα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $\pi : A \to A$, όπως στην πρόταση 3.2.2 και το $B_1 = \mathsf{Hom}(A, C) \circ \pi \leq \mathsf{Hom}(A, C)$. Τότε $\mathsf{Hom}(A, C) = \sum_{\sigma\in G} \sigma B_1$, αφού αν $f \in \mathsf{Hom}(A, C)$, τότε

$$f = f1_A \overset{(3.2.2)}{=\!=} fS(\pi) = \sum_{\sigma\in G} f\pi^\sigma = \sum_{\sigma\in G} (g_\sigma)^\sigma \pi^\sigma ,$$

όπου $g_\sigma \in \mathsf{Hom}(A, C)$, αφού η σ είναι ένας αυτομορφισμός στην $\mathsf{Hom}(A, C)$. Επιπλέον το $\sum_{\sigma\in G} \sigma B_1$ είναι ευθύ, διότι η αναπαράσταση $f = \sum_{\sigma\in G} (g_\sigma)^\sigma \pi^\sigma$ είναι μοναδική.
Για να δείξουμε ότι το $A\otimes C$ είναι G-κανονικό, παρατηρούμε ότι αν $A = \sum_{\sigma\in G} \sigma B$, τότε

$$A \otimes C = \Big(\sum_{\sigma\in G} \sigma B\Big) \otimes C = \sum_{\sigma\in G} (\sigma \otimes \sigma)(B \otimes C) ,$$

αφού $\sigma C = C$. Επιπλέον, από την Πρόταση 2.2.2, προκύπτει ότι το $\sum_{\sigma\in G} \sigma \otimes \sigma(B \otimes C)$ είναι ευθύ. $\square$

3.3 Πλήρεις Αναλύσεις (complete resolutions)

Ορισμός 3.3.1. *Ας είναι G μια πεπερασμένη ομάδα. Συσχετίζουμε την G με ένα διάγραμμα της μορφής*

$$\begin{tikzcd}
\cdots & X_{-2} \arrow[l, "\partial_{-2}"'] & X_{-1} \arrow[l, "\partial_{-1}"'] & & X_0 \arrow[ll, "\partial_0"'] \arrow[dl, "\varepsilon"] & X_1 \arrow[l, "\partial_1"'] & \cdots \arrow[l, "\partial_2"'] \\
& & & \mathbb{Z} \arrow[ul, "\mu"] \arrow[dl] & & & \\
& & 0 & & 0 \arrow[ul] & &
\end{tikzcd}$$

(∗)

όπου,(*)

1. *η γραμμή είναι μια ακυκλική ακολουθία ομομορφισμών πεπερασμένα παραγόμενων G-ελεύθερων προτύπων.*

2. $\partial_0 = \mu\varepsilon$.

3. *Η ακολουθία* $X_{-2} \xleftarrow{\partial_{-1}} X_{-1} \xleftarrow{\mu} \mathbb{Z} \longleftarrow 0$ *είναι ακριβής.*

4. *Η ακολουθία*
   $0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} X_0 \xleftarrow{\partial_1} X_1$ *είναι ακριβής.*

*Η ε καλείται **επαύξηση (augmentation)** και η μ καλείται **συνεπαύξηση (coaugmentation)**. Η $(*)$ καλείται **πλήρης διάλυση της** G και συμβολίζεται με X_*.*

Τα πρότυπα X_i είναι $\mathbb{Z}$-ελεύθερα καθώς είναι και G-ελεύθερα. Έτσι από την ακυκλικότητα της $(*)$ και την πρόταση 2.8.4 προκύπτει ότι υπάρχει οικογένεια $\{D_r : X_r \to X_{r+1}\}_{r\in\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z}$-ομομορφισμών, τέτοια ώστε $1_{X_r} = \partial_r D_{r+1} + D_{r-1}\partial_r$, για κάθε $r \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 3.3.2. Έστω ότι η G είναι μια κυκλική ομάδα τάξης n παραγόμενη από το σ και $\Gamma = \mathbb{Z}G$ ο δακτύλιος ομάδας της G. Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \Gamma \arrow[l] & \Gamma \arrow[l, "\sigma-1"'] & & \Gamma \arrow[ll, "S"'] \arrow[dl, "\varepsilon"] & \Gamma \arrow[l, "\sigma-1"'] & \cdots \arrow[l, "S"'] \\
 & & & \mathbb{Z} \arrow[ul, "\mu"] \arrow[dl] & & & \\
 & & 0 & & 0 \arrow[ul] & &
\end{tikzcd}$$

των G-ομομορφισμών, όπου

$$\partial_k = \begin{cases} \sigma - 1\,, & k \text{ περιττός} S = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i\,, \\ k \text{ άρτιος} & \end{cases} ,\varepsilon(\sigma^i) \qquad = 1\,, \mu(1) = S\,,$$

είναι μια πλήρης διάλυση της κυκλικής ομάδας G. Θα το αποδείξουμε στα παρακάτω 6 βήματα.(*)

1. $\mathsf{Ker}\,\mu = 0$.

2. η ε είναι επί.

3. $S = \mu\varepsilon$, αφού $\mu\varepsilon(\sigma^i) = \mu(1) = S(\sigma^i)$.

4. $$(\sigma - 1)S = (\sigma - 1)\sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i = \sum_{i=0}^{n-1}\sigma^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i = 0\,.$$

   Ομοίως προκύπτει $S(\sigma - 1) = 0$.

5. Έστω ότι $\sum_{i=0}^{n-1} m_i\sigma^i \in \Gamma$ και $(\sigma - 1)\sum_{i=0}^{n-1} m_i\sigma^i = 0$. Τότε

   $$(\sigma - 1)\sum_{i=0}^{n-1} m_i\sigma^i = \sum_{i=0}^{n-1}(m_{i-1} - m_i)\sigma^i = 0\,.$$

   Έτσι $m_i = m_{i-1} = m$, επομένως $\sum_{i=0}^{n-1} m_i\sigma^i = S(m)$.

6. Έστω ότι $S\big(\sum_i m_i\sigma^i\big) = 0$, τότε από την (3) έχουμε ότι

   $$S\big(\textstyle\sum_i m_i\sigma^i\big) = \mu\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} m_i = 0\,.$$

   Επομένως, λόγω της (1), έχουμε $\sum_{i=0}^{n-1} m_i = 0$. Άρα
   $\sum_{i=0}^{n-1} m_i\sigma^i = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(\sigma^i - 1) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(\sigma - 1)(\sigma^{i-1} + \sigma^{i-2} + \ldots + 1) \quad\Rightarrow$
   $\sum_{i=0}^{n-1} m_i\sigma^i = (\sigma - 1)\sum_{i=0}^{n-1} m_i(\sigma^{i-1} + \sigma^{i-2} + \ldots + 1)$.

Δεδομένης, όπως στον ορισμό 3.3.1, της πλήρους διάλυσης $(*)$ της G και δεδομένου G-προτύπου A θεωρούμε το συναλυσιδωτό σύμπλεγμα $\mathbb{Z}$-ομο-μορφισμών

$$\cdots \longrightarrow A^{-2} \xrightarrow{\delta^{-2}} A^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} A^0 \xrightarrow{\delta^0} A^1 \longrightarrow \cdots\,, \qquad (**)$$

όπου $A^r = \mathsf{Hom}_G(X_r, A)$ και $\delta^r = \mathsf{Hom}_G(\partial_{r+1}, 1_A)$. Υπενθυμίζουμε ότι, αν $t \in \mathsf{Hom}_G(X_r, A)$, τότε $\delta^r t = \mathsf{Hom}_G(\partial_{r+1}, 1_A)t = 1_A t\partial_{r+1}$ και το $\delta^r t$ καλείται συνσύνορο του t. Η $(**)$ είναι ένα συναλυσιδωτό σύμπλεγμα καθώς

$$\delta^{r+1}\delta^r = \mathsf{Hom}_G(\partial_{r+2}, 1_A)\,\mathsf{Hom}_G(\partial_{r+1}, 1_A) = \mathsf{Hom}_G(\partial_{r+1}\partial_{r+2}, 1_A) = 0\,.$$

Ορισμός 3.3.3. *Οι συνομολογικές ομάδες του συναλυσιδωτού συμπλέγματος $(**)$ καλούνται* ***οι ομάδες συνομολογίας της πεπερασμένης ομάδας G με συντελεστές από το G-πρότυπο*** *A και συμβολίζονται με $H^r(G, A)$. Η ομάδα $H^r(G, A)$ καλείται, επίσης, η* ***r-οστή Tate ομάδα*** *της G με συντελεστές από το A.*

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω κατασκευή των $H^r(G,A)$ εξαρτάται από

- την ύπαρξη των πλήρων αναλύσεων της G και
- την επιλογή μιας πλήρους διάλυσης της G

Θα δείξουμε παρακάτω ότι οι πλήρεις αναλύσεις της G υπάρχουν και ότι οι $H^r(G,A)$ είναι ανεξάρτητες της επιλογής της πλήρους διάλυσης της G.

3.4 Η εξάρτηση των $H^r(G,A)$ από το G- πρότυπο A

Ας είναι $f : A \to B$ ένας G-ομομορφισμός και έστω ότι δίνεται μια πλήρης διάλυση X_* της G (όπως στον ορισμό 3.3.1). Τότε η απεικόνιση $\mathsf{Hom}_G(1_{X_r}, f) : \mathsf{Hom}_G(X_r, A) \to \mathsf{Hom}_G(X_r, B)$ που ορίζεται ως

$$\mathsf{Hom}_G(1_{X_r}, f)t = ft$$

είναι ένας $\mathbb{Z}$-ομομορφισμός.
Μια άμεση συνέπεια αυτού, είναι η μεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{r-1} \arrow[r, "\delta^{r-1}"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_{r-1}}, f)"] & A^r \arrow[r, "\delta^r"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_r}, f)"] & A^{r+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_{r+1}}, f)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{r-1} \arrow[r, "\delta^{r-1}"] & B^r \arrow[r, "\delta^r"] & B^{r+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

όπου $B^r = \mathsf{Hom}_G(X_r, B)$. Έτσι ο $\mathsf{Hom}_G(1_{X_*}, f)$ είναι ένας μορφισμός συναλυσιδωτών συμπλεγμάτων. Επιπλέον, από τον ορισμό 2.7.4, ο μορφισμός $\mathsf{Hom}_G(1_{X_*}, f)$ εισάγει τους $\mathbb{Z}$-ομομορφισμούς $(\overline{1,f})^r : H^r(G,A) \to H^r(G,B)$, για κάθε $r \in \mathbb{Z}$, όπου η εικόνα κάτω από τον $(\overline{1,f})^r$ της κλάσης συνκύκλου που περιέχει το t είναι η κλάση συνκύκλου που περιέχει το $\mathsf{Hom}_G(1_{X_r}, f)t = ft$.

Λήμμα 3.4.1. *Έστω ένας G-μορφισμός $f : A \to B$ μεταξύ G-προτύπων. Επάγεται ένας ομομορφισμός ομάδων $f^n : C^n(G,A) \to C^n(G,B)$ $(n \geq 0)$ ο οποίος ορίζεται ως $\alpha \mapsto f \cdot \alpha$ και αντιμετατίθεται με τις συνσυνοριακές απεικονίσεις. Συγκεκριμένα, η f^n απεικονίζει συνκύκλους σε συνκύκλους και συνσύνορα σε συνσύνορα, οπότε επάγεται ο ομομορφισμός ομάδων*

$$f^n : H^n(G,A) \to H^n(G,B).$$

Παρατήρηση 3.4.2. 1. Το προηγούμενο λήμμα 3.4.1 υπονοεί ότι έχουμε μια οικογένεια συναρτητών $H^n(G,\bullet)$ από την κατηγορία των G-προτύπων στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων ($id \cdot f = f$ και $(f \cdot g\alpha = f \cdot (g \cdot \alpha))$) και έναν συναρτητή από την κατηγορία των G-προτύπων στην κατηγορία των συναλυσιδωτών συμπλόκων.

2. Έστω ότι έχουμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία από G-πρότυπα

$$0 \to A \to C \to 0$$

τότε επάγεται ένας ακριβής συναρτητής από την κατηγορία των G-προτύπων στην κατηγορία των συναλυσιδωτών συμπλόκων.

Ορισμός 3.4.3. *Μία οικογένεια συναρτητών F^n από την κατηγορία των G-προτύπων στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων η οποία συσχετίζει σε κάθε ακριβή ακολουθία από G-πρότυπα μία μακρά ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων ώστε αντιμεταθετικά διαγράμματα από σύντομες ακριβεία ακολουθίες να δίνουν αντιμεταθετικά διαγράμματα από μακριές ακριβείς ακοπουθίες καλείται ένας* ***δ-συναρτητής****. Ένας δ-συναρτητής καλείται* ***συνομολογιακός****, αν ο συνδετικός ομομορφισμός στη μακρά ακριβή ακολουθία είναι μορφής*

$$\delta^n : F^n(G,C) \to F^{n+1}(G,A).$$

Αν αντίθετα έχουμε $\delta^n : F^{n+1}(G,C) \to F^n(G,A)$, τότε ο δ-συναρτητής καλείται ***ομολογιακός****.*

Παρατήρηση 3.4.4. Η οικογένεια των συναρτητών $H^n(G,\bullet)$ είναι ένας συνομολογιακός δ-συναρτητής. Ουσιαστικά είναι ο καθολικός συνομολογιακός δ-συναρτητής.

Ορισμός 3.4.5. *Μία κατηγορία η οποία περιέχει πεπερασμένα συνγινόμενα (όπως ευθέα αθροίσματα) όπου κάθε σύνολο μορφισμών μεταξύ αντικειμένων της έχει τη δομή μίας αβελιανής ομάδας της οποίας η πρόσθεση είναι επιμεριστική με τη σύνθεση καλείται* ***προσθετική κατηγορία*** *(additive category). Ένας συναρτητής F μεταξύ προσθετικών κατηγοριών είναι ένας* ***προσθετικός συναρτητής****, αν απεικονίζει μηδενικά αντικείμενα σε μηδενικά αντικείμενα και ικανοποιεί*

$$F(X \oplus Y) \cong F(X) \oplus F(Y)$$

όπου ο ισομορφισμός αντιμετατίθεται με το φυσικό εγκλεισμό και προβολές του ευθέως γινομένου .

Πόρισμα 3.4.6. *Έστωσαν A και B δύο G-πρότυπα, τότε*

$$H^n(G, A \oplus B) \cong H^n(G, A) \oplus H^n(G, B)$$

για κάθε $n \geq 0$ και ο ισομορφισμός αντιμετατίθεται με απεικονίσεις ενέσεων, προβολών και ευθέων αθροισμάτων.

Ας είναι

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ j\ } C \longrightarrow 0 \qquad (***)$$

μια ακριβής ακολουθία G-ομομορφισμών. Εφαρμόζοντας τον $\mathsf{Hom}_G(X_*, -)$ σε αυτήν την ακολουθία έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A^{r-1} \arrow[r, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_{r-1}}{,}i)"] \arrow[d, "\delta^{r-1}"] & B^{r-1} \arrow[r, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_{r-1}}{,}j)"] \arrow[d, "\delta^{r-1}"] & C^{r-1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta^{r-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{r} \arrow[r, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_{r}}{,}i)"] \arrow[d, "\delta^{r}"] & B^{r} \arrow[r, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_{r}}{,}j)"] \arrow[d, "\delta^{r}"] & C^{r} \arrow[r] \arrow[d, "\delta^{r}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{r+1} \arrow[r, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_{r+1}}{,}i)"] \arrow[d] & B^{r+1} \arrow[r, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_{r+1}}{,}j)"] \arrow[d] & C^{r+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

όπου οι στήλες είναι συναλυσιδωτά συμπλέγματα και οι γραμμές είναι ακριβείς αφού τα X_r είναι G-ελεύθερα πρότυπα για κάθε r.

Από το θεώρημα 2.7.6 έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow H^{r-1}(G,A) \longrightarrow H^{r-1}(G,B) \longrightarrow H^{r-1}(G,C) \longrightarrow H^r(G,A) \longrightarrow \cdots$$

Ας είναι $f : A \to B$ ένας G-ομομορφισμός τέτοιος ώστε $f = S(g)$ για κάποιο $g \in \mathsf{Hom}(A,B)$, όπου S η απεικόνιση ίχνους. Έστω ότι δίνεται μια πλήρης διάλυση X_* της G. Τότε το διάγραμμα των $\mathbb{Z}$-ομομορφισμών

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{r-1} \arrow[r, "\delta^{r-1}"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_{r-1}},f)"] & A^r \arrow[r, "\delta^r"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_r},f)"] & A^{r+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_{r+1}},f)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{r-1} \arrow[r, "\delta^{r-1}"] & B^r \arrow[r, "\delta^r"] & B^{r+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, όπου $A^r = \mathsf{Hom}_G(X_r, A)$ και $B^r = \mathsf{Hom}_G(X_r, B)$.
Έστω t ένας r-συνκύκλος στο A_r, δηλαδή $t \in \mathsf{Hom}_G(X_r, A)$ τέτοιο ώστε $\delta^r t = t\partial_{r+1} = 0$. Αν δούμε την X_* σαν ένα ακυκλικό σύμπλεγμα ομομορφισμών $\mathbb{Z}$-ελεύθερων προτύπων, από τον ορισμό 3.3.1 έχουμε ότι

$$gt = gt1_{X_r} = gt(D_{r-1}\partial_r + \partial_{r+1}D_r) = gtD_{r-1}\partial_r\,.$$

Εφαρμόζοντας την απεικόνιση ίχνους, από την μια έχουμε ότι

$$S(gt) = {}^{1}(Sg)t = ft = \mathsf{Hom}_G(1_{X_r}, f)t$$

και από την άλλη ότι

$$S(gtD_{r-1}\partial_r) = {}^{2}\big(S(gtD_{r-1})\big)\partial_r = \delta^{r-1}S(gtD_{r-1})\,.$$

Δείξαμε συνεπώς την

Πρόταση 3.4.7. *Αν $f : A \to B$ είναι ένας G-ομομορφισμός τέτοιος ώστε $f = S(g)$, για κάποιο $g \in \mathsf{Hom}(A,B)$, τότε ο επαγόμενος $\mathbb{Z}$-ομομορφισμός $(\overline{1,f})^r : H^r(G,A) \to H^r(G,B)$ είναι ο τετριμμένος.*

Ειδικά αν το A είναι G-κανονικό, τότε από την πρόταση 3.2.2 έχουμε ότι $1_A = S(\pi)$, για κάποιο $\pi \in \mathsf{Hom}(A,A)$. Επομένως ο ομομορφισμός $(\overline{1,1_A})^r : H^r(G,A) \to H^r(G,A)$ είναι ταυτόχρονα και ο μηδενικός ομομορφισμός και ο ταυτοτικός ομομορφισμός. Άρα

Πρόταση 3.4.8. *Αν το A είναι ένα G-κανονικό πρότυπο, τότε $H^r(G,A) = 0$, για κάθε r.*

[1] αφού ο t είναι G-ομομορφισμός.
[2] αφού ο ∂_r είναι G-ομομορφισμός.

Έστω A ένα G-πρότυπο. Αν η τάξη της G είναι n, τότε ο ομομορφισμός $n1_A : A \to A$ με $n1_A(a) = na$ είναι το ίχνος του 1_A, αφού

$$S(1_A) = \sum_{\sigma \in G} \sigma 1_A \sigma^{-1} = \sum_{\sigma \in G} (\sigma\sigma^{-1}) 1_A = n1_A\,.$$

Επομένως, από την πρόταση 3.4.7, ο $\overline{(1, n1_A)}^r : H^r(G,A) \to H^r(G,A)$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός. Επιπλέον, από τον ορισμό 2.8.1, προκύπτουν

$$\overline{(1, n1_A)^r} = \overline{(1, 1_A)^r} + \overline{(1, 1_A)^r} + \ldots + \overline{(1, 1_A)^r} \quad = n\overline{(1, 1_A)^r} = 1_{H^r(G,A)}\,.$$

Έτσι αποδείχθηκε η επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 3.4.9. *Η τάξη κάθε στοιχείου της $H^r(G,A)$, για κάθε r, είναι ένας διαιρέτης της τάξης της G.*

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που το A είναι πεπερασμένα παραγόμενο, έστω από τα $a_1, a_2, \ldots, a_t$ πάνω από το $\Gamma = \mathbb{Z}G$. Ας είναι X_* η πλήρης διάλυση της G και $x_1, x_2, \ldots, x_s$ μια βάση του X_r πάνω από το Γ. Για $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$, θεωρούμε τον G-ομομορφισμό $f_{i,k} : X_r \to A$ ο οποίος στέλνει το x_i στο a_k και τα υπόλοιπα x_j στο 0. Προσθέτοντας G-πολλαπλάσια τέτοιων ομομορφισμών $f_{i,k}$, όπου το άθροισμα είναι πάνω από το k, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν ομομορφισμό f_i ο οποίος στέλνει το x_i σε δεδομένο $a \in A$ και τα υπόλοιπα x_j στο 0. Από την πρόταση **;;**, κάθε G-ομομορφισμός $f : X_r \to A$ είναι της μορφής $\sum_i f_i$. Επομένως αν το A είναι πεπερασμένα παραγόμενο G-πρότυπο, τότε και το $A^r = \mathsf{Hom}_G(X_r, A)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Άμεσο συμπέρασμα των παραπάνω είναι ότι η υποομάδα των r-συνκύκλων είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Άρα και η $H^r(G,A)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη.
Επιπλέον, από την πρόταση 3.4.9 έχουμε ότι κάθε στοιχείο της $H^r(G,A)$ έχει πεπερασμένη τάξη. Άρα αποδείχθηκε η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.4.10. *Για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο G-πρότυπο A και για κάθε $r \in \mathbb{Z}$, η ομάδα $H^r(G,A)$ είναι πεπερασμένη.*

Ειδικά, καθώς το G-πρότυπο $\mathbb{Z}$ παράγεται από το 1 πάνω από το $G(\mathbb{Z})$ (η δράση της G πάνω στο $\mathbb{Z}$ είναι τετριμμένη), η $H^r(G,\mathbb{Z})$ είναι πεπερασμένη.

Παράδειγμα 3.4.11. Ας είναι K μια πεπερασμένη κανονική διαχωρίσιμη επέκταση του σώματος k και G η ομάδα Galois της K πάνω από το k. Η G δρα πάνω στο K, ενώ η δράση της πάνω στο k είναι τετριμμένη. Θεωρούμε την προσθετική ομάδα K^+ του K ως ένα G-πρότυπο -συμπιέζοντας την πολλαπλασιαστική δομή

του K- θέλοντας να υπολογίσουμε την $H^r(G, K^+)$.
Για $\alpha \in K$ ορίζουμε τον $\mathbb{Z}$-ομομορφισμό $f_\alpha : K^+ \to K^+$ ως $f_\alpha(\xi) = \alpha\xi$. Θεωρώντας το $\mathsf{Hom}(K^+, K^+)$ ως ένα G-πρότυπο, για $\sigma \in G$, ισχύει

$$f_\alpha^\sigma(\xi) = \sigma(f_\alpha(\sigma^{-1}\xi)) = \sigma(\alpha \cdot \sigma^{-1}\xi) = \sigma\alpha \cdot \xi\,.$$

Συνεπώς $f_\alpha^\sigma = f_{\sigma\alpha}$. Αφού $f_\alpha + f_\beta = f_{\alpha+\beta}$, έχουμε ότι

$$S(f_\alpha) = \sum_{\sigma \in G} f_\alpha^\sigma = f_{S(\alpha)}\,.$$

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $\alpha \in K$ τέτοιο ώστε $S(\alpha) = 1 \in K$.
Αν η χαρακτηριστική του K είναι 0, τότε $S\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, όπου n η τάξη της G.
Αν η χαρακτηριστική του K είναι τυχούσα, θα δείξουμε, σε επόμενο κεφάλαιο χρησιμοποιώντας μιαν απόδειξη του Artin, ότι υπάρχει $\beta \in K$ τέτοιο ώστε $S(\beta) = b \neq 0$.[3]
Επειδή $b \in K$ και $S\left(\frac{\beta}{b}\right) = 1$, θέτοντας $\alpha = \frac{\beta}{b}$, έχουμε

$$S(f_\alpha) = f_{S(\alpha)} = f_1 = 1_{K^+}\,.$$

Από την πρόταση **;;** προκύπτει ότι $H^r(G, K^+) = 0$, για κάθε r.

Αν για ένα G-πρότυπο A η απεικόνιση $n1_A : A \to A$ είναι ένας ισομορφισμός, τότε λέμε ότι το A είναι **μοναδικά διαιρέσιμο από τον** n. Σε αυτήν την περίπτωση η απεικόνιση $\frac{1}{n}1_A : A \to A$ είναι η αντίστροφη της $n1_A$. Έτσι

$$1_{H^r(G,A)} = \overline{(1, n1_A)^r} \cdot \overline{(1, \tfrac{1}{n}1_A)^r}\,.$$

Αν $|G| = n$, από την απόδειξη της πρότασης 3.4.7, έχουμε ότι $\overline{(1, n1_A)^r} = 0$. Επομένως έχουμε αποδείξει την

Πρόταση 3.4.12. *Αν το G-πρότυπο A είναι μοναδικά διαιρέσιμο από την τάξη της G, τότε $H^r(G, A) = 0$, για κάθε r.*

[3] Αυτό μπορεί, επίσης, να επαληθευτεί δείχνοντας ότι $K = k(\theta)$ για κάποιο πρωταρχικό στοιχείο $\theta \in K$ και ότι η διακρίνουσα $d_{1,\theta,\ldots,\theta^{n-1}} \neq 0$. Επιπλέον, αυτό ισχύει, αν-ν, υπάρχει κάποιο $\beta \in K$ τέτοιο ώστε $S(\beta) \neq 0$.

Παράδειγμα 3.4.13. Ας είναι K ένα σώμα, του οποίου η χαρακτηριστική δεν διαιρεί την τάξη της ομάδας G, και V ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το K. Με οποιονδήποτε τρόπο και να δρα η G στο K, αφού το V είναι μοναδικά διαιρέσιμο από την τάξη της G έχουμε ότι $H^r(G,V)=0$, για κάθε r. Έτσι αν η χαρακτηριστική του K είναι 0, για κάθε πεπερασμένη ομάδα G και οποιαδήποτε δράση της G στο K ισχύει ότι $H^r(G,V)=0$.

Παράδειγμα 3.4.14. Έστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών. Θεωρούμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\;i\;} \mathbb{Q} \xrightarrow{\;j\;} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

στην οποία η δράση της G είναι τετριμμένη. Στην αρχή της ενότητας δείξαμε ότι η ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow H^r(G,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^r(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\;\bar{\delta}\;} H^{r+1}(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{r+1}(G,\mathbb{Q}) \longrightarrow \cdots$$

είναι ακριβής. Από το παράδειγμα 6.6εξ:1 έχουμε ότι $H^r(G,\mathbb{Q})=0$, για κάθε r. Άρα $H^r(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^{r+1}(G,\mathbb{Z})$.

3.5 Ύπαρξη των Πλήρων Αναλύσεων

3.5.1 Η Bar-Ραβδοειδής Διάλυση του G-προτύπου $\mathbb{Z}$

Ορισμός 3.5.1. *Ας είναι X_0 το ελεύθερο G-πρότυπο που παράγεται από το σύμβολο $[\,]$. Έτσι το X_0 μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα ελεύθερο $\mathbb{Z}$-πρότυπο ελεύθερα παραγόμενο από τα σύμβολα $\sigma[\,]$, $\sigma \in G$. Ορίζουμε τον G-ομομορφισμό $\varepsilon : X_0 \to \mathbb{Z}$ ως $\varepsilon[\,]=1$.*
Ας είναι X_r το ελεύθερο G-πρότυπο ελεύθερα παραγόμενο από τα σύμβολα $[\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r]$, όπου $\sigma_i \in G$. Έτσι το X_r μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα ελεύθερο $\mathbb{Z}$-πρότυπο ελεύθερα παραγόμενο από τα σύμβολα $\sigma[\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r]$, όπου $\sigma,\sigma_i \in G$.
*Ορίζουμε τους G-ομομορφισμούς $\varepsilon_r^i : X_r \to X_{r-1}$, $i=0,1,\ldots,r$, τους οποίους καλούμε **έδρες (faces)**, ως*

$\varepsilon_r^0[\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r]=\sigma_1[\sigma_2,\ldots,\sigma_r]\,,\varepsilon_r^i[\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r]=$
$[\sigma_1,\ldots,\sigma_i\,\sigma_{i+1},\ldots\sigma_r]\,,\ 1\le i<r, \varepsilon_r^r[\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r]=[\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-1}]\,,$

και τον G-ομομορφισμό ∂_r που ορίζεται ως

$$\partial_r=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\varepsilon_r^i\,.$$

Ορίζουμε τους $\mathbb{Z}$-ομομορφισμούς: $E : \mathbb{Z} \to X_0$ ως $E(1) = [\,]$ και
$D_r : X_r \to X_{r+1}$ ως $D_r\big(\sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]\big) = [\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]$.
Θεωρώντας το διάγραμμα

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \underset{E}{\overset{\varepsilon}{\leftrightarrows}} X_0 \underset{D_0}{\overset{\partial_1}{\leftrightarrows}} X_1 \underset{D_1}{\overset{\partial_2}{\leftrightarrows}} \cdots \tag{3.1}$$

ως διάγραμμα $\mathbb{Z}$-ομομορφισμών, παρατηρούμε ότι

$$\varepsilon E(1) = 1 E\varepsilon + \partial_1 D_0 \qquad = 1_{X_0} \tag{3.2}$$

αφού

$$(E\varepsilon)\sigma[\,] = E(1) = [\,]\,, \quad (\varepsilon_1^0 D_0)\sigma[\,] = \sigma[\,]\,, \quad (\varepsilon_1^1 D_0)\sigma[\,] = [\,]\,.$$

$$\partial_{r+1} D_r + D_{r-1}\partial_r = 1_{X_r} \tag{3.3}$$

αφού

$$\partial_{r+1} D_r + D_{r-1}\partial_r = \varepsilon_{r+1}^0 D_r + \sum_{i=0}^{r} \big((-1)^{i+1}\varepsilon_{r+1}^{i+1} D_r + (-1)^i D_{r-1}\varepsilon_{r+1}^i\big)$$

και

$$\varepsilon_{r+1}^0 D_r \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] = \varepsilon_{r+1}^0[\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] \qquad = \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]\,,$$

όπου $\varepsilon_{r+1}^{i+1} D_r = D_{r-1}\varepsilon_{r+1}^i$, για $i = 0, 1, \ldots, r$.
Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι

- Για $i = 0$, ισχύει

  $$\varepsilon_{r+1}^1 D_r \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] = [\sigma\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] \quad = D_{r-1}\varepsilon_{r+1}^0 \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]\,.$$

- Για $0 < i < r$, ισχύει

  $$\varepsilon_{r+1}^{i+1} D_r \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] = [\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_i\sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_r] \quad = D_{r-1}\varepsilon_r^i \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]\,.$$

- Για $i = r$, ισχύει

  $$\varepsilon_{r+1}^{r+1} D_r \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] = [\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{r-1}] \quad = D_{r-1}\varepsilon_r^r \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]\,.$$

Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\ \varepsilon\ } X_0 \xleftarrow{\ \partial_1\ } X_1 \xleftarrow{\ \partial_2\ } \cdots \tag{3.4}$$

είναι ένα σύμπλεγμα G-ομομορφισμών. Θα αποδειχθεί παρακάτω στα (i)-(iii). (*)

1. Από την (3.2) ισχύει $\varepsilon = \varepsilon 1_{X_0} = \varepsilon E \varepsilon + \varepsilon \partial_1 D_0$. Επειδή $\varepsilon E = 1_{\mathbb{Z}}$, έπεται ότι $\varepsilon \partial_1 D_0 = 0$. Αφού η εικόνα της D_0 περιέχει όλους τους G-γεννήτορες του X_1, έπεται ότι $\varepsilon \partial_1 = 0$, για όλους τους G-γεννήτορες του X_1. Επομένως $\varepsilon \partial_1 = 0$.

2. Πολλαπλασιάζουμε την ταυτότητα (3.2) από δεξιά με ∂_1. Από το (i) έχουμε ότι $\varepsilon \partial_1 = 0$. Επομένως
$$\partial_1 = \partial_1 D_0 \partial_1 \tag{3.5}$$
Από την $1_{X_1} = D_0 \partial_1 + \partial_2 D_1$, προκύπτει $\partial_1 = \partial_1 D_0 \partial_1 + \partial_1 \partial_2 D_1$. Λόγω της (3.5), από την τελευταία ισότητα προκύπτει $\partial_1 \partial_2 D_1 = 0$. Αφού η εικόνα της D_1 περιέχει όλους τους G-γεννήτορες του X_2, έπεται ότι $\partial_1 \partial_2 = 0$ για όλους τους G-γεννήτορες του X_2. Άρα $\partial_1 \partial_2 = 0$.

3. Με επαγωγή υποθέτουμε ότι $\partial_{r-1} \partial_r = 0$. Πολλαπλασιάζοντας την $1_{X_{r-1}} = D_{r-2} \partial_{r-1} + \partial_r D_{r-1}$ από δεξιά με ∂_r προκύπτει
$$\partial_r = \partial_r D_{r-1} \partial_r \tag{3.6}$$
Πολλαπλασιάζοντας την $1_{X_r} = \partial_{r+1} D_r + D_{r-1} \partial_r$ από δεξιά με ∂_r και αντικαθιστώντας από την (3.6) προκύπτει $\partial_{r+1} D_r \partial_r = 0$. Αφού η εικόνα της D_r περιέχει όλους τους G-γεννήτορες του X_{r+1}, έπεται ότι $\partial_r \partial_{r+1} = 0$ για όλους τους G-γεννήτορες του X_r.

Τελικά έχουμε αποδείξει ότι η ακολουθία (3.4) είναι ένα σύμπλεγμα G-ομομορφισμών. Επιπλέον, αν το θεωρήσουμε ως ένα σύμπλεγμα $\mathbb{Z}$-ομομορφισμών, από τις (;;), (3.2), (3.3), προκύπτει ότι ο ταυτοτικός μορφισμός του συμπλέγματος είναι ομοτοπικός με τον μηδενικό.
Επομένως, αν θεωρήσουμε την ακολουθία (3.4) ως ένα σύμπλεγμα $\mathbb{Z}$-ομομορφισμών, από το θεώρημα 2.8.3, αυτό είναι ακυκλικό. Το ίδιο σύμπλεγμα είναι ακυκλικό και ως σύμπλεγμα G-ομομορφισμών. Το ακυκλικό σύμπλεγμα (3.4) καλείται η **Bar διάλυση** του G-προτύπου $\mathbb{Z}$.

Στα παρακάτω θεωρούμε ότι η ακολουθία
$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} X_0 \xleftarrow{\partial_1} X_1 \xleftarrow{\partial_2} \cdots \tag{3.7}$$
είναι ένα ακυκλικό σύμπλεγμα ομομορφισμών G-ελεύθερων προτύπων, όπου η δράση της G στο $\mathbb{Z}$ είναι τετριμμένη, (δηλαδή $\sigma z = z$ για κάθε $\sigma \in G$, $z \in \mathbb{Z}$). Θα δείξουμε ότι η (3.7) μπορεί να επεκταθεί σε μια πλήρη διάλυση της G. Μαζί με τα παραπάνω συμπεράσματα, αυτό αποτελεί μια απόδειξη για την ύπαρξη των πλήρων αναλύσεων της G.

Αν θεωρήσουμε την ακολουθία (3.7) ως μια ακριβή ακολουθία ομομορφισμών $\mathbb{Z}$-ελεύθερων προτύπων, από την πρόταση 2.8.4, προκύπτει ότι υπάρχουν $\mathbb{Z}$-ομομορφισμοί

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{E} X_0 \xrightarrow{D_0} X_1 \xrightarrow{D_1} X_2 \longrightarrow \cdots$$

τέτοιο ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

$$\varepsilon E = 1_{\mathbb{Z}} E\varepsilon + \partial_1 D_0 \quad = 1_{X_0} \partial_{r+1} D_r + D_{r-1}\partial_r = 1_{X_r}\,, \quad r = 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

Ορίζουμε $X_r^* = \mathsf{Hom}(X_r, \mathbb{Z})$ και $\mathbb{Z}^* = \mathsf{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\cdots \longleftarrow X_2^* \xleftarrow{\partial_2^*} X_1^* \xleftarrow{\partial_1^*} X_0^* \xleftarrow{\varepsilon^*} \mathbb{Z}^* \longleftarrow 0 \tag{3.9}$$

όπου $\varepsilon^* = \mathsf{Hom}(\varepsilon, 1_{\mathbb{Z}})$ και $\partial_r^* = \mathsf{Hom}(\partial_r, 1_{\mathbb{Z}})$.
Στην ενότητα 2.6.2 δείξαμε ότι $\mathsf{Hom}(f+g, 1) = \mathsf{Hom}(f, 1) + \mathsf{Hom}(g, 1)$, $\mathsf{Hom}(fg, 1) = \mathsf{Hom}(f, 1)\ \mathsf{Hom}(g, 1)$ και $\mathsf{Hom}(1, 1) = 1$. Επομένως ισχύουν:

$$E^*\varepsilon^* = 1_{\mathbb{Z}}^*\varepsilon^* E^* + D_0^*\partial_1^* \quad = 1_{X_0}^* D_r^*\partial_{r+1}^* + \partial_r^* D_{r-1}^* = 1_{X_r}^*\,, \quad r = 1, 2, \ldots \tag{3.10}$$

Επιπλέον η (3.9) είναι ένα σύμπλεγμα $\mathbb{Z}$-ομομορφισμών και ισχύουν:

$$\partial_1^*\varepsilon^* = \mathsf{Hom}(\varepsilon\partial_1, 1_{\mathbb{Z}}) = 0\,, \partial_{r+1}^*\partial_r^* \;= \mathsf{Hom}(\partial_r\partial_{r+1}, 1_{\mathbb{Z}}) = 0\,, \quad r = 1, 2, \ldots.$$

Παρατηρούμε ότι τα $\mathbb{Z}$-πρότυπα X_r^* της ακολουθίας (3.9) μπορούν να γίνουν G-πρότυπα. Ισχυριζόμαστε ότι οι ∂_r^* και ε^* είναι G-ομομορφισμοί, καθώς, αν $f \in X_r^* = \mathsf{Hom}(X_r, \mathbb{Z})$, τότε

$$(\partial^*)^\sigma f = \big(\mathsf{Hom}(\partial_{r+1}, 1_{\mathbb{Z}})\big)^\sigma f = \sigma\, \mathsf{Hom}(\partial_{r+1}, 1_{\mathbb{Z}})\sigma^{-1} f = \sigma\sigma^{-1} f \partial_{r+1} = \partial^* f$$

και, ομοίως, αν $z \in \mathbb{Z}^*$, τότε

$$(\varepsilon^*)^\sigma z = \varepsilon^* z\,.$$

Τελικά τα X_r^* είναι G-ελεύθερα και πεπερασμένα παραγόμενα. Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση της πρότασης 3.4.9 όπου το G-πρότυπο A αντικαθίσταται από το τετριμμένο G-πρότυπο $\mathbb{Z}$. Η ακυκλικότητα της (3.9) προκύπτει τώρα από το θεώρημα 2.8.3 αντιστρέφοντας όλα τα βέλη.

Συγκολλούμε τα συμπλέγματα (3.7) και (3.9) στο παρακάτω διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, shift right, "D_1^*"'] & X_1^* \arrow[l, shift right, "\partial_2^*"'] \arrow[r, shift right, "D_0^*"'] & X_0^* \arrow[l, shift right, "\partial_1^*"'] \arrow[rr, dashed, shift right, "D_{-1}"'] \arrow[dr, shift left, "\varepsilon^*"] & & X_0 \arrow[ll, dashed, shift right, "\partial_0"'] \arrow[r, shift right, "D_0"'] \arrow[dl, shift left, "\varepsilon"] & X_1 \arrow[l, shift right, "\partial_1"'] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & \cdots \arrow[l, shift right, "\partial_2"'] \\
& & & \mathbb{Z} \arrow[ul, shift left, "E^*"] \arrow[ur, shift left, "E"] \arrow[dl] & & & \\
& & 0 & & 0 \arrow[ul] & &
\end{tikzcd}
\tag{3.11}
$$

όπου το ∂_0 ορίζεται ως $\partial_0 = \varepsilon^*\varepsilon$ και το D_{-1} ορίζεται ως $D_{-1} = EE^*$. Παρατηρούμε ότι $\partial_1^*\partial_0 = \partial_1^*\varepsilon^*\varepsilon = 0$ και $\partial_0\partial_1 = \varepsilon^*\varepsilon\partial_1 = 0$. Συνεπώς η ακολουθία

$$\cdots \xleftarrow{\partial_2^*} X_1^* \xleftarrow{\partial_1^*} X_0^* \xleftarrow{\partial_0} X_0 \xleftarrow{\partial_1} X_1 \xleftarrow{\partial_2} \ldots$$

είναι ένα σύμπλεγμα G-ομομορφισμών. Το σύμπλεγμα είναι ακριβές αφού

$$D_{-1}\partial_0 + \partial_1 D_0 = 1_{X_0} D_0^*\partial_1^* + \partial_0 D_{-1} \qquad = 1_{X_0}^* \tag{3.12}$$

Οι υπολογισμοί για τις δυο τελευταίες ταυτότητες είναι

$D_{-1}\partial_0 + \partial_1 D_0 = EE^*\varepsilon^*\varepsilon + \partial_1 D_0 = E\varepsilon + \partial_1 D_0 = 1_{X_0}\,, D_0^*\partial_1^* + \partial_0 D_{-1} = D_0^*\partial_1^* + \varepsilon^*\varepsilon EE^* = D_0^*\partial_1^* + \varepsilon^* E^* = 1_{X_0}^*\,.$

3.6 Η Μοναδικότητα των Ομάδων Συνομολογίας

3.6.1 Εναλλακτές διάστασης

Γ είναι ο δακτύλιος ομάδας της G. Ας είναι $i : I \to \Gamma$ ο πυρήνας της επαύξησης $\varepsilon : \Gamma \to \mathbb{Z}$. Τότε $\sum_{\sigma\in G} m_\sigma \sigma \in I$, αν-ν, $\sum_{\sigma\in G} m_\sigma = 0$. Έτσι, αν $\sum_{\sigma\in G} m_\sigma\sigma \in I$, τότε $\sum_{\sigma\in G} m_\sigma\sigma = \sum_{\sigma\in G,\sigma\neq 1} m_\sigma(\sigma - 1)$, δηλαδή το I παράγεται ως ένα $\mathbb{Z}$-πρότυπο από την οικογένεια $\{\sigma - 1\}_{\sigma\in G,\sigma\neq 1}$.
Αν $\sum_{\sigma\in G,\sigma\neq 1} m_\sigma(\sigma - 1) = 0$, τότε

$$\Big(\sum_{\substack{\sigma\in G\\ \sigma\neq 1}} -m_\sigma\Big)1 + \sum_{\substack{\sigma\in G\\ \sigma\neq 1}} m_\sigma\sigma = 0\,.$$

Επομένως η $\{\sigma - 1\}_{\sigma\in G, \sigma\neq 1}$ είναι μια $\mathbb{Z}$-βάση του I. Ας είναι $\mu : \mathbb{Z} \to \Gamma$ ο G-ομομορφισμός που ορίζεται ως

$$\mu(1) = S = \sum_{\sigma\in G} \sigma$$

όπου η δράση της G στο $\mathbb{Z}$ είναι τετριμμένη. Ας είναι $J = \Gamma/\mu(\mathbb{Z}) = \Gamma/\mathbb{Z}\cdot S$. Τότε έχουμε τις ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{3.13}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \Gamma \xrightarrow{j} J \longrightarrow 0 \tag{3.14}$$

Αν θεωρήσουμε τα I, $\mathbb{Z}$ και Γ ως $\mathbb{Z}$-πρότυπα, τότε τα iI και $\mu\mathbb{Z}$ είναι τα ευθέα αθροίσματα του Γ. Στην πραγματικότητα, αν $\sum_{\sigma\in G} m_\sigma\sigma \in \Gamma$, τότε

$$\sum_{\sigma\in G} m_\sigma\sigma = \sum_{\sigma\in G} m_\sigma(\sigma-1) + \Big(\sum_{\sigma\in G} m_\sigma\Big)1$$

και

$$\sum_{\sigma\in G} m_\sigma\sigma = m_1 S + \sum_{\sigma\in G}(m_\sigma - m_1)\sigma\,.$$

Επιπλέον, αν $\lambda : \Gamma \to I$ είναι ο $\mathbb{Z}$-ομομορφισμός που ορίζεται ως

$$\lambda\big(\textstyle\sum_{\sigma\in G} m_\sigma\sigma\big) = \displaystyle\sum_{\sigma\in G} m_\sigma(\sigma-1)$$

και $\rho : \Gamma \to \mathbb{Z}$ είναι ο $\mathbb{Z}$-ομομορφισμός που ορίζεται ως

$$\rho\big(\textstyle\sum_{\sigma\in G} m_\sigma\sigma\big) = m_1\,,$$

τότε $\lambda i = 1_I$ και $\rho\mu = 1_{\mathbb{Z}}$.

Ας είναι A τυχόν G-πρότυπο. Θεωρώντας το A ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο, οι ακολουθίες

$$0 \longrightarrow I\otimes A \xrightarrow{i\otimes 1_A} \Gamma\otimes A \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1_A} \mathbb{Z}\otimes A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\otimes A \xrightarrow{\mu\otimes 1_A} \Gamma\otimes A \xrightarrow{j\otimes 1_A} J\otimes A \longrightarrow 0 \tag{3.15}$$

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}(\mathbb{Z}, A) \xrightarrow{\mathsf{Hom}(\varepsilon, 1_A)} \mathsf{Hom}(\Gamma, A) \xrightarrow{\mathsf{Hom}(i, 1_A)} \mathsf{Hom}(I, A) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}(J, A) \xrightarrow{\mathsf{Hom}(j, 1_A)} \mathsf{Hom}(\Gamma, A) \xrightarrow{\mathsf{Hom}(\mu, 1_A)} \mathsf{Hom}(\mathbb{Z}, A) \longrightarrow 0$$

από το θεώρημα 2.6.4, είναι ακριβείς. Παρατηρούμε ότι $\mathbb{Z}\otimes A \cong A$ και $\mathsf{Hom}(\mathbb{Z}, A) \cong A$. Αφού το Γ είναι G-ελεύθερο είναι και G-κανονικό. Επομένως αν M είναι το $\Gamma \otimes A$ ή το $\mathsf{Hom}(\Gamma, A)$, από την πρόταση 3.2.3 προκύπτει ότι, το M είναι G-κανονικό.
Συνεπώς οποιαδήποτε από τις ακριβείς ακολουθίες της (3.15) είναι κάποια από τις παρακάτω ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow A^- \longrightarrow M \longrightarrow A \longrightarrow 0 \tag{3.16}$$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow A^+ \longrightarrow 0 \tag{3.17}$$

όπου A^- είναι το $I \otimes A$ (αντ. $\mathsf{Hom}(J, A)$) και το A^+ είναι το $J \otimes A$ (αντ. $\mathsf{Hom}(I, A)$). Από την ενότητα 3.4 έχουμε τις ακριβείς ακολουθίες

$$0 = H^r(G, M) \longrightarrow H^r(G, A) \longrightarrow H^{r+1}(G, A^-) \longrightarrow H^{r+1}(G, M) = 0$$

και

$$0 = H^{r-1}(G, M) \longrightarrow H^{r-1}(G, A^+) \longrightarrow H^r(G, A) \longrightarrow H^r(G, M) = 0$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$H^{r-1}(G, A^+) \cong H^r(G, A)$$

και

$$H^r(G, A) \cong H^{r+1}(G, A^-)\,.$$

Αυτοί οι ισομορφισμοί καλούνται **εναλλακτές διάστασης** (**dimension shifters**). Η διάσταση της ομάδας συνομολογίας αυξάνεται όταν η ομάδα συντελεστής A αντικαθίσταται από το $I \otimes A$ ή το $\mathsf{Hom}(J, A)$ και μειώνεται η ομάδα συντελεστής A αντικαθίσταται από το $J \otimes A$ ή το $\mathsf{Hom}(I, A)$.

3.6.2 Η Μοναδικότητα της $H^0(G, A)$

Σε αυτήν την ενότητα θα δείξουμε ότι $H^0(G, A) \cong A^G/S(A)$ και, συνεπώς, η $H^0(G, A)$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής της πλήρους διάλυσης της G. Ας είναι

$$\begin{tikzcd}
\cdots & X_{-2} \arrow[l, "\partial_{-2}"'] & X_{-1} \arrow[l, "\partial_{-1}"'] & & X_0 \arrow[ll, "\partial_0"'] \arrow[dl, "\varepsilon"] & X_1 \arrow[l, "\partial_1"'] & \cdots \arrow[l, "\partial_2"'] \\
& & & \mathbb{Z} \arrow[ul, "\mu"] \arrow[dl] & & & \\
& & 0 & & 0 \arrow[ul] & &
\end{tikzcd}$$

μια πλήρης διάλυση της G. Αν $x \in X_0$, τότε $\partial_0 x = \mu\varepsilon(x) = \varepsilon(x) \cdot \mu(1)$, αφού ο $\varepsilon(x)$ είναι ακέραιος. Γράφουμε $\mu(1) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i y_i$, όπου $\gamma_i \in \Gamma$ και $\{y_i\}_{i=1}^{r}$ είναι μια G-βάση του X_{-1}. Παρατηρούμε ότι $\sigma\gamma_i = \gamma_i$, αφού $\sigma\mu(1) = \mu(\sigma 1) = \mu(1)$. Έτσι, αν $\gamma_i = \sum_{\tau \in G} c_{\tau,i}\tau$, τότε οι ακέραιοι $c_{\tau,i}$ είναι ίσοι για κάθε $\tau \in G$ και, συνεπώς, $\gamma_i = c_i S$, για κάποιον ακέραιο c_i. Επομένως $\mu(1) = S \cdot y$, όπου

$$y = \sum_{i=1}^{r} c_i y_i \tag{3.18}$$

Ισχυριζόμαστε ότι οι c_i είναι σχετικώς πρώτοι. Αν d είναι ο Μ.Κ.Δ. τους, τότε $y = d \cdot y'$ και $0 = \partial_{-1}\mu(1) = d \cdot \partial_{-1}(S \cdot y')$, δηλαδή το $S \cdot y'$ βρίσκεται στην εικόνα του μ. Συνεπώς $S \cdot y' = \gamma\mu(1) = \gamma \cdot d \cdot S \cdot y'$ για κάποιο $\gamma \in \Gamma$. Από όπου προκύπτει ότι $d = 1$ και οι $c_1, c_2, \ldots, c_r$ είναι σχετικώς πρώτοι.
Ας είναι ακέραιοι $e_1, e_2, \ldots, e_r$, τέτοιοι ώστε

$$e_1 c_1 + e_2 c_2 + \ldots + e_r c_r = 1 \tag{3.19}$$

Ας είναι A ένα G-πρότυπο. Για τυχόν $\alpha \in A$ ορίζουμε την -1-συναλυσίδα $f_\alpha \in \mathsf{Hom}_G(X_{-1}, A)$ ως $f_\alpha(y_i) = e_i\alpha$. Τότε, λόγω των (3.18) και (3.19), έχουμε $f_\alpha(y) = \alpha$. Αντιστρόφως, κάθε -1-συναλυσίδα $f \in \mathsf{Hom}_G(X_{-1}, A)$ αντιστοιχεί στο στοιχείο $f(y) \in A$. Έτσι υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των -1-συναλυσίδων και των στοιχείων του G-προτύπου A.
Ποια είναι τα 0-συνσύνορα; Αν $x \in X_0$ και $f_\alpha \in \mathsf{Hom}_G(X_{-1}, A)$, τότε

$$(\delta_{-1} f)(x) = f_\alpha(\partial_0 x) = f_\alpha(\varepsilon(x) S \cdot y) = \varepsilon(x) S \cdot \alpha\,.$$

Συμπεραίνουμε ότι τα 0-συνσύνορα είναι οι G-ομομορφισμοί $\big\{\varepsilon(-)\cdot S\alpha\big\}_{\alpha\in A}$. Επίσης, ποιοι είναι οι 0-συνκύκλοι; Ας είναι f ένας 0-συνκύκλος, δηλαδή ισχύει $\delta_0 f = f\partial_1 = 0$. Τότε ο f πρέπει να μηδενίζεται σε κάθε $\partial_1 x_1$, για $x_1 \in X_1$. Επομένως, αν $\varepsilon(x) = 0$ θα πρέπει $f(x) = 0$. Επιλέγουμε ένα $x_0 \in X_0$ τέτοιο ώστε $\varepsilon(x_0) = 1$ (αυτό είναι εφικτό αφού ο ε είναι επί). Έχουμε $\varepsilon\big(x-\varepsilon(x)x_0\big) = 0$ και, επομένως, $f\big(x-\varepsilon(x)x_0\big) = 0$, δηλαδή $f(x) = \varepsilon(x)\cdot\beta$, όπου $\beta = f(x_0) \in A$. Αντιστρόφως, κάθε 0-συναλυσίδα f που ορίζεται ως $f(x) = \varepsilon(x)\cdot\beta$, όπου β πάγιο στοιχείο του A, είναι ένας 0-συνκύκλος, διότι

$$(\delta_0 f)(x_1) = f(\partial_1 x_1) = \varepsilon\partial_1 x_1 \cdot \beta = 0\,.$$

Αφού $\beta = \varepsilon(x_0)\beta = \varepsilon(\sigma x_0)\beta = \sigma\cdot 1\beta = \sigma\beta$, έχουμε $\beta \in A^G$. Συμπεραίνουμε ότι οι 0-συνκύκλοι είναι οι G-ομομορφισμοί $\big\{\varepsilon(-)\cdot\beta\big\}_{\beta\in A^G}$. Αφού $\varepsilon(-)S(A) \cong S(A)$ και $\varepsilon(-)A^G \cong A^G$, έχουμε δείξει ότι

$$H^0(G,A) \cong A^G/S(A)\,.$$

3.6.3 Η Μοναδικότητα των $H^r(G,A)$

Ας είναι X_*, Y_* πλήρεις αναλύσεις της ομάδας G, και $H^r_{X_*}(G,A)$, $H^r_{Y_*}(G,A)$ οι αντίστοιχες ομάδες συνομολογίας. Στην προηγούμενη ενότητα δείξαμε ότι $H^0_{X_*}(G,A) = H^0_{Y_*}(G,A)$.

- *περίπτωση $r \geq 0$:* Θεωρούμε την ακριβή ακολουθία (3.17)

  $$0 \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow A^+ \longrightarrow 0\,,$$

  όπου M είναι ένα G-κανονικό πρότυπο. Τότε, από την εναλλαγή διάστασης, έχουμε ότι $H^r_{X_*}(G,A^+) \cong H^{r+1}_{X_*}(G,A)$ και $H^r_{Y_*}(G,A^+) \cong H^{r+1}_{Y_*}(G,A)$. Επαγωγικά προκύπτει ότι $H^r_{X_*}(G,A) \cong H^r_{Y_*}(G,A)$, για κάθε $r \geq 0$.

- *περίπτωση $r \leq 0$:* Θεωρούμε την ακριβή ακολουθία (3.16)

  $$0 \longrightarrow A^- \longrightarrow M \longrightarrow A \longrightarrow 0\,.$$

  Όπως στην 1η περίπτωση, χρησιμοποιώντας την εναλλαγή διάστασης και επαγωγή, προκύπτει $H^r_{X_*}(G,A) \cong H^r_{Y_*}(G,A)$, για κάθε $r \leq 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται υπολογιστικές μέθοδοι και ερμηνείες. Στις τελευταίες ενότητες παρουσιάζονται θεωρήματα που αφορούν τις κυκλικές ομάδες.

4.1 Ο υπολογισμός της $H^{-1}(G, A)$[1]

Ας είναι A ένα G-πρότυπο. Από την προηγούμενη ενότητα έχουμε τον ισομορφισμό εναλλαγής διάστασης $H^r(G, A) \cong H^{r+1}(G, I \otimes A)$. Συγκεκριμένα

$$H^{-1}(G, A) \cong H^0(G, I \otimes A) \cong (I \otimes A)^G / S(I \otimes A)\,.$$

Με σκοπό να έχουμε μια άλλη ερμηνεία (intepretation) της $H^{-1}(G, A)$, θεωρούμε, κατά αρχήν, την $(\Gamma \otimes A)^G$. Ένας γεννήτορας της $\Gamma \otimes A$ είναι ο $\big(\sum_{\sigma \in G} m_\sigma \sigma\big) \otimes a = \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes m_\sigma a$. Καθώς

$$\Gamma \otimes A = \Big(\sum_{\sigma \in G} \mathbb{Z}_\sigma\Big) \otimes A = \sum_{\sigma \in G} \mathbb{Z}_\sigma \otimes A \cong \sum_{\sigma \in G} A_\sigma\,,$$

όπου $\mathbb{Z}_\sigma = \mathbb{Z}$ και $A_\sigma = A$ για κάθε $\sigma \in G$, ένα στοιχείο ρ του $\Gamma \otimes A$ μπορεί να παρασταθεί μοναδικά ως

$$\rho = \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes \alpha_\sigma \tag{4.1}$$

όπου $\alpha_\sigma \in A$.
Αν $\sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes \alpha_\sigma \in (I \otimes A)^G$, τότε $\sum_{\sigma \in G} \tau\sigma \otimes \tau\alpha_\sigma = \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes \alpha_\sigma$, για κάθε

[1] Ένας συντομότερος υπολογισμός της $H^{-1}(G, A)$ γίνεται σε επόμενη ενότητα με την χρήση της κανονικοποιημένης τυπικής πλήρους ανάλυσης της G.

$\tau \in G$. Αντικαθιστώντας, στο αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας, το σ με $\tau^{-1}\sigma$ έχουμε

$$\sum_{\sigma\in G} \sigma \otimes \tau\alpha_{\tau^{-1}\sigma} = \sum_{\sigma\in G} \sigma \otimes \alpha_\sigma. \tag{4.2}$$

Από τις (4.1) και (4.2) προκύπτει

$$\tau\alpha_{\tau^{-1}\sigma} = \alpha_\sigma. \tag{4.3}$$

Συγκεκριμένα, αν $\tau = \sigma$ από την (4.3) προκύπτει

$$\tau\alpha_1 = \alpha_\tau \tag{4.4}$$

για κάθε $\tau \in G$. Επομένως αν $\sum_{\sigma\in G} \sigma \otimes \alpha_\sigma \in (I \otimes A)^G$, τότε $\tau\alpha_1 = \alpha_\tau$, για κάθε $\tau \in G$.
Αντιστρόφως, έστω $\sum_{\sigma\in G} \sigma \otimes \alpha_\sigma \in I \otimes A$ που πληρεί την (4.4). Τότε

$$\tau \sum_{\sigma\in G} \sigma \otimes \alpha_\sigma = \sum_{\sigma\in G} \tau\sigma \otimes \tau\alpha_\sigma = \sum_{\sigma\in G} \tau\sigma \otimes \tau\sigma\alpha_1 = \sum_{\sigma\in G} \sigma \otimes \alpha_\sigma\,.$$

Συνεπώς $\sum_{\sigma\in G} \sigma \otimes \alpha_\sigma \in I \otimes A$, τέτοιο ώστε να πληρεί την (4.4), τότε και μόνο τότε, αν $\sum_{\sigma\in G} \sigma \otimes \alpha_\sigma \in (I \otimes A)^G$. Γνωρίζουμε ότι το $I \otimes A$ είναι ένα υποσύνολο του $\Gamma \otimes A$. Επομένως $\sum_{\sigma\in G} \sigma \otimes \alpha_\sigma \in (I \otimes A)^G$, αν-ν, ισχύει

$$0 = (\varepsilon \otimes 1_A) \sum_{\sigma\in G} \sigma \otimes \alpha_\sigma = \sum_{\sigma\in G} 1 \otimes \alpha_\sigma = \sum_{\sigma\in G} \alpha_\sigma = \sum_{\sigma\in G} \sigma\alpha_1 = S\alpha_1\,.$$

Έστω το σύνολο $A_S = \{\alpha \in A \;:\; S(\alpha) = 0\}$. Τότε

$$(I \otimes A)^G \cong A_S. \tag{4.5}$$

Παρακάτω δίνουμε μια παρόμοια ερμηνεία του $S(I \otimes A)$. Παρατηρούμε ότι το $I \otimes A$ είναι $\mathbb{Z}$-παραγόμενο από τα στοιχεία $(\sigma - 1) \otimes \alpha$, όπου $\alpha \in A, \sigma \in G$. Επιπλέον ισχύει

$$S((\sigma - 1) \otimes \alpha) = \sum_{\sigma\in G} \tau\sigma \otimes \tau\alpha - \sum_{\sigma\in G} \tau \otimes \tau\alpha. \tag{4.6}$$

Αντικαθιστώντας το τ με $\tau\sigma^{-1}$ στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της ισότητας (4.6) παίρνουμε

$$S((\sigma - 1) \otimes \alpha) = S(1 \otimes (\sigma^{-1}\alpha - \alpha)) \in (I \otimes A)^G. \tag{4.7}$$

Επομένως ένα στοιχείο $S\big(\sum_{\sigma\in G} (\sigma - 1) \otimes \alpha_\sigma\big)$ του $S(I \otimes A)$ αντιστοιχεί, λόγω του ισομορφισμού (4.5), στο στοιχείο $\sum_{\sigma\in G} \sigma^{-1}\alpha_\sigma - \alpha_\sigma = \sum_{\sigma\in G} (\sigma^{-1} - 1)\alpha_\sigma$ του IA. Αυτό μαζί με την (4.5) δίνει

$$H^{-1}(G, A) \cong A_S/(IA)\,.$$

4.2 Τυπικές πλήρεις αναλύσεις

Η πλήρης ανάλυση

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & X_{-2} \arrow[l, "\partial_{-2}"'] & X_{-1} \arrow[l, "\partial_{-1}"'] & & X_0 \arrow[ll, "\partial_0"'] \arrow[dl, "\varepsilon"] & X_1 \arrow[l, "\partial_1"'] & \cdots \arrow[l, "\partial_2"'] \\
& & & \mathbb{Z} \arrow[ul, "\mu"] \arrow[dl] & & & \\
& & 0 & & 0 \arrow[ul] & &
\end{tikzcd}
$$

που προκύπτει από την Ραβδοειδή (Bar) ανάλυση ενός G-προτύπου $\mathbb{Z}$, με την μέθοδο που δίνεται στην αντίστοιχη ενότητα, καλείται **η τυπική πλήρης ανάλυση της** G.

Υπενθυμίζουμε ότι το $X_0 = \mathbb{Z}G$ είναι ο δακτύλιος ομάδας του G και X_r, $r = 1, 2, \ldots,$ είναι τα ελεύθερα G-πρότυπα ελεύθερα παραγόμενα πάνω από το $\mathbb{Z}G$ από τα σύμβολα $[\sigma_1, \ldots, \sigma_r]$, $\sigma_i \in G$. Επίσης

$$\partial_r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \varepsilon_r^i \tag{4.8}$$

όπου ε_r^i είναι οι αντίστοιχοι ομομορφισμοί έδρας. Αναλυτικά $\partial_r[\sigma_1, \ldots, \sigma_r] = \sigma_1[\sigma_2, \ldots, \sigma_r] + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^i[\sigma_1, \ldots, \sigma_i\sigma_{i+1} \ldots \sigma_r] + (-1)^r[\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}]$.

Επίσης υπενθυμίζουμε ότι $X_{-r} = \mathsf{Hom}(X_{-r+1}, \mathbb{Z})$ και $\partial_{-r} = \mathsf{Hom}(\partial_r, 1_{\mathbb{Z}})$. Τέλος ο G-ομομορφισμός (επαύξηση) $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ ορίζεται ως $\varepsilon[\,] = 1$ και η συνεπαύξηση $\mu : \mathbb{Z} \to X_{-1}$ ως $\mu = \mathsf{Hom}(\varepsilon, 1_{\mathbb{Z}})$, όπου έχουμε ταυτίσει το $\mathbb{Z}$ με το $\mathsf{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Τώρα θα εξετάσουμε εκτενέστερα τα X_{-1} και μ. Ο G-ομομορφισμός

$$\mu = \mathsf{Hom}(\varepsilon, 1_{\mathbb{Z}}) : \mathsf{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathsf{Hom}(X_0, \mathbb{Z})$$

καθορίζεται πλήρως από την τιμή του στο 1. Έχουμε

$$\mu 1 = 1_{\mathbb{Z}} \cdot 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon\,.$$

Παρακάτω θα εκφράσουμε τον ε με όρους μιας $\mathbb{Z}$-βάσης του X_{-1}. Μια τέτοια βάση είναι η δυαδική της βάσης $\{\sigma[\,]\}_{\sigma\in G}$ του X_0. Συγκεκριμένα οι $\mathbb{Z}$-ομο-μορφισμοί $\langle\,\rangle^\tau : X_0 \to \mathbb{Z}$ που ορίζονται ως

$$\langle\,\rangle^\tau \sigma[\,] = \tau\langle\,\rangle\tau^{-1}\sigma[\,] = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } \tau = \sigma \\ 0\,, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

αποτελούν μια $\mathbb{Z}$-βάση του X_{-1}. Ισχυριζόμαστε ότι $\varepsilon = \sum_{\tau\in G}\langle\,\rangle^\tau$, αφού στην βάση $\{\sigma[\,]\}_{\sigma\in G}$ του X_0 ισχύει

$$\varepsilon\big(\sigma[\,]\big) = 1\,,$$

για κάθε $\sigma \in G$, και

$$\Big(\sum_{\tau\in G}\langle\,\rangle^\tau\Big)\big(\sigma[\,]\big) = 1\,,$$

για κάθε $\sigma \in G$. Συνεπώς $\mu(1,\ ) = S\langle\,\rangle$. Περαιτέρω σημειώνουμε ότι το μοναδικό στοιχείο $\langle\,\rangle$ είναι μια G-βάση του X_{-1}.
Παρομοίως ορίζουμε τους $\mathbb{Z}$-ομομορφισμούς $\langle\rho\rangle^\sigma : X_1 \to \mathbb{Z}$ ως

$$\langle\rho\rangle^\sigma\big(\tau[\upsilon]\big) = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } \tau = \sigma \\ 0\,, & \text{αλλιώς} \end{cases}\,.$$

Τότε η $\{\langle\rho\rangle^\sigma\}_{\rho,\sigma\in G}$ είναι μια $\mathbb{Z}$-βάση του X_{-2}.

Ο G-ομομορφισμός $\partial_{-1} : X_{-1} \to X_{-2}$ καθορίζεται πλήρως από την τιμή του στην G-βάση $\langle\,\rangle$ του X_{-1}. Αφού $\partial_{-1}\langle\,\rangle = \langle\,\rangle\partial_1 \in \mathsf{Hom}(X_1,\mathbb{Z})$, ο $\partial_{-1}\langle\,\rangle$ μπορεί να γραφεί με όρους της $\mathbb{Z}$-βάσης $\{\langle\rho\rangle^\sigma\}_{\rho,\sigma\in G}$ του X_{-2}. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\partial_{-1}\langle\,\rangle = \sum_{\rho\in G}\big(\langle\rho\rangle^{\rho^{-1}} - \langle\rho\rangle\big). \tag{4.9}$$

Στην πραγματικότητα ισχύει

$$\big(\partial_{-1}\langle\,\rangle\big)\big(\tau[\upsilon]\big) = \big(\langle\,\rangle\partial_1\big)\big(\tau[\upsilon]\big) = \langle\,\rangle\tau\upsilon[\,] - \langle\,\rangle\tau[\,]\,.$$

Συνεπώς

$$\big(\partial_{-1}\langle\,\rangle\big)\big(\tau[\upsilon]\big) = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } \tau\upsilon = 1 \text{ και } \tau \neq 1 \\ 0\,, & \text{αν } \tau\upsilon = 1 \text{ και } \tau = 1 \\ -1\,, & \text{αν } \tau\upsilon \neq 1 \text{ και } \tau = 1 \\ 0\,, & \text{αν } \tau\upsilon \neq 1 \text{ και } \tau \neq 1 \end{cases}\,,$$

ενώ

$$\sum_{\rho\in G}\big(\langle\rho\rangle^{\rho^{-1}}-\langle\rho\rangle\big)\big(\tau[\upsilon]\big)=\begin{cases}1\,, & \text{αν } \tau\upsilon=1 \text{ και } \tau\neq 1\\ 0\,, & \text{αν } \tau\upsilon=1 \text{ και } \tau=1\\ -1\,, & \text{αν } \tau\upsilon\neq 1 \text{ και } \tau=1\\ 0\,, & \text{αν } \tau\upsilon\neq 1 \text{ και } \tau\neq 1\end{cases}.$$

Τέλος, για $r \geq 1$, ορίζουμε τον $\mathbb{Z}$-ομομορφισμό $\langle\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r\rangle^\sigma : X_r \to \mathbb{Z}$ ως

$$\big(\langle\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_r\rangle^\sigma\big)\big(\tau[\upsilon_1,\upsilon_2,\ldots,\upsilon_r]\big)=\begin{cases}1\,, & \text{αν } \rho_i=\upsilon_i \text{ και } \sigma=\tau\\ 0\,, & \text{αλλιώς}\end{cases}.$$

Τότε η $\{\langle\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r\rangle^\sigma\}_{\rho_i\in G,\sigma\in G}$ είναι μια $\mathbb{Z}$-βάση του X_{-r-1}.

Ορίζουμε τους G-ομομορφισμούς $\varepsilon_i^r : X_{-r} \to X_{-r-1}$, οι οποίοι ονομάζονται **συνέδρες** ως

$$\begin{cases}\varepsilon_0^r\langle\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{r-1}\rangle=\sum_{\rho\in G}\langle\rho,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{r-1}\rangle^{\rho^{-1}}\,,\\ \text{για } i=0\,,\varepsilon_i^r\langle\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{r-1}\rangle=\sum_{\rho\in G}\langle\rho_1,\ldots,\rho_i\rho^{-1},\rho,\rho_{i+1},\ldots,\rho_{r-1}\rangle\,,\\ \text{για } 0<i<r\,,\varepsilon_r^r\langle\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{r-1}\rangle=\sum_{\rho\in G}\langle\rho,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{r-1},\rho\rangle\,, \qquad \text{για } i=r\,.\end{cases}$$

Τότε, με τρόπο ανάλογο της απόδειξης της (4.9), μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\partial_{-r}=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\varepsilon_i^r. \tag{4.10}$$

4.3 Ο υπολογισμός της $H^1(G, A)$

Χρησιμοποιώντας την τυπική πλήρη ανάλυση της G, ένας 1-συνκύκλος είναι ένας G-ομομορφισμός $f : X_1 \to A$, τέτοιος ώστε

$$\delta^1 f[\upsilon_1,\upsilon_2]=f\partial_1[\upsilon_1,\upsilon_2]=\upsilon_1 f[\upsilon_2]-f[\upsilon_1\upsilon_2]+f[\upsilon_1]=0\,.$$

Συγκεκριμένα, ένας 1-συνκύκλος f περιορισμένος στην G-βάση $\{[\rho]\}_{\rho\in G}$ του X_1 μπορεί να ιδωθεί ως μια απεικόνιση $f : G \to A$ από την G στο G-πρότυπο A, τέτοια ώστε

$$f(\upsilon_1\upsilon_2)=f(\upsilon_1)+\upsilon_1 f(\upsilon_2)\,.$$

Τέτοιες απεικονίσεις ονομάζονται **διασταυρούμενοι (crossed) ομομορφισμοί**.

Ένα 1-συνσύνορο είναι ένας G-ομομορφισμός $\delta_0 g : X_1 \to A$, όπου ο $g : X_0 \to A$ είναι μια 0-συναλυσίδα. Έτσι ένα 1-συνσύνορο περιορισμένο στην G-βάση $\{[\rho]\}_{\rho\in G}$ του X_1 μπορεί να ιδωθεί ως μια απεικόνιση $\delta_0 g : G \to A$ που ορίζεται ως

$$(\delta_0 g)(\upsilon) = g\partial_1[\upsilon] = \upsilon g[\,] - g[\,]\,.$$

Τέτοιες απεικονίσεις $\pi : G \to A$ που ορίζονται ως $\pi(\upsilon) = \upsilon a - a$, για κάποιο $a \in G$, ονομάζονται **κύριοι ομομορφισμοί**. Επομένως $H^1(G, A) \cong$ (διασταυρούμενοι ομομορφισμοί)/(κύριοι ομομορφισμοί) . Έτσι, στην ειδική περίπτωση που η δράση της G στην A είναι τετριμμένη, έχουμε ότι

$$H^1(G, A) \cong \mathcal{G}(G, A) \tag{4.11}$$

όπου $\mathcal{G}(G, A)$ είναι το σύνολο των ομομορφισμών από την ομάδα G στην ομάδα A. Τέλος, σημειώνουμε ότι η δομή αβελιανής ομάδας της $H^1(G, A)$ αντιστοιχεί, κάτω από τον ισομορφισμό (4.11), στην δομή αβελιανής ομάδας της $\mathcal{G}(G, A)$ που εισάγεται από την δομή $\mathbb{Z}$-προτύπου της A.

4.4 Η κανονικοποιημένη τυπική πλήρης ανάλυση της G

Αν στην κατασκευή της Ραβδοειδή (Bar) ανάλυσης του G-προτύπου $\mathbb{Z}$ διαγράψουμε τα στοιχεία $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\}$ από την G-βάση του X_r, οποτεδήποτε ισχύει $\sigma_i = 1$, για κάποιο $i = 1, 2, \ldots, r$, και αλλάξουμε τις έδρες και τις ομοτοπίες διάσπασης με τον τρόπο που γίνεται στα (1), (2) και (3) παρακάτω, η προκύπτουσα ακολουθία καλείται **η κανονικοποιημένη Ραβδοειδή (Bar) ανάλυση** του G-προτύπου $\mathbb{Z}$. Οι αλλαγές στις έδρες και στις ομοτοπίες διάσπασης είναι οι εξής:

1. Η επαύξηση $\varepsilon : X_0 \to \mathbb{Z}$ και ο $\mathbb{Z}$-ομομορφισμός $E : \mathbb{Z} \to X_0$ παραμένουν αναλλοίωτοι, αφού το X_0 παραμένει αναλλοίωτο. Δηλαδή ισχύουν $\varepsilon[\,] = 1$ και $E(1) = [\,]$.

2. $\varepsilon_r^0[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] = \sigma_1[\sigma_2, \ldots, \sigma_r]$.Για $i = 1, 2 \ldots, r-1$,

$$\varepsilon_r^i[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] = \begin{cases} [\sigma_1, \ldots, \sigma_i\sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_r]\,, & \text{αν } \sigma_i\sigma_{i+1} \neq 10\,, \\ \text{αν } \sigma_i\sigma_{i+1} = 1 \end{cases} .$$

$\varepsilon_r^r[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] = [\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{r-1}]$.

3. $D_r\big(\sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]\big) = \begin{cases} [\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] & \text{αν } \sigma \neq 10\,, \\ \text{αν } \sigma = 1 \end{cases}.$

Η απόδειξη ότι η κανονικοποιημένη Ραβδοειδή (Bar) ανάλυση είναι ένα ακυκλικό σύμπλεγμα είναι η ίδια με την αντίστοιχη απόδειξη για την Ραβδοειδή (Bar) ανάλυση στην ενότητα 3.5.1 με τις προφανείς μικρές αλλαγές στις λεπτομέρειες. Η πλήρης ανάλυση της G που προκύπτει από την κανονικοποιημένη Ραβδοειδή (Bar) ανάλυση του G-προτύπου $\mathbb{Z}$ με την μέθοδο που περιγράφεται στην ενότητα 3.5.1 καλείται **η κανονικοποιημένη τυπική πλήρης ανάλυση** της G.

Σημαντική παρατήρηση: Στην πράξη όταν εργαζόμαστε με την κανονικοποιημένη περίπτωση διευκολυνόμαστε από την χρήση των τύπων της τυπικής πλήρους ανάλυσης με την παραδοχή ότι το $[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]$ είναι ουσιαστικά μηδέν, οποτεδήποτε ισχύει $\sigma_i = 1$, για κάποιο $i = 1, 2, \ldots, r$. Αυτό είναι ισοδύναμο με την χρήση των τύπων που δόθηκαν παραπάνω στα (1), (2) και (3).

4.5 Επεκτάσεις

4.5.1 Συμβατές επεκτάσεις

Ας είναι A μια αβελιανή ομάδα και G μια ομάδα. Μια επέκταση

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } E \xrightarrow{\ j\ } G \longrightarrow 1 \tag{4.12}$$

ομομορφισμών ομάδων καλείται μια **επέκταση** της A από την G.

Τα βασικά παραδείγματα επεκτάσεων στη θεωρία ομάδων δίνονται από το ημιευθές γινόμενο, βλέπε κεφάλαιο 9.

Παρακάτω θα γράφουμε πολλαπλασιαστικά τις πράξεις στην G και στην E και προσθετικά στην A. Μια επέκταση της A από την G εφοδιάζει κανονικά την A με μια δομή G-προτύπου. Στην πραγματικότητα, ας είναι $\rho : G \to E$ μια απεικόνιση από το G, ως σύνολο, στο E, ως σύνολο, τέτοια ώστε $\rho(1) = 1$ και $j\rho = 1_G$. Έστω ότι A είναι η ομάδα των αυτομορφισμών της A. Αν $e \in E$, τότε το $e(ia)e^{-1}$ δεν ισούται, εν γένει, με ia. Εντούτοις ισχύει $j(e(ia)e^{-1}) = 1$. Επομένως υπάρχει ένα στοιχείο -ας το συμβολίσουμε ea- του A, τέτοιο ώστε

$$i(ea) = e(ia)e^{-1}\,.$$

Αυτό παρέχει έναν ομομορφισμό $\theta : E \to A$. Παρατηρούμε ότι η σύνθεση $A \xrightarrow{\ i\ } E \xrightarrow{\ \theta\ } A$ είναι η τετριμμένη απεικόνιση αφού η A είναι αβελιανή, δηλαδή ισχύει $\theta(ia) = 1_A$, για κάθε $a \in A$. Έτσι η θ εισάγει έναν ομομορφισμό $\varphi : G \to A$ που ορίζεται ως

$$i\big(\varphi(\sigma)a\big) = \rho(\sigma)\,(ia)\,\rho(\sigma)^{-1}. \tag{4.13}$$

Αν γράψουμε $\varphi(\sigma)a = \sigma a$, τότε η (4.13) δίνει μια δομή G-προτύπου στην A, δηλαδή

$$\begin{aligned} 1a &= a, \\ \sigma(a_1 + a_2) &= \sigma a_1 + \sigma a_2, \\ \sigma(\tau a) &= (\sigma\tau)a\,. \end{aligned}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι αυτή η δράση της G στην A είναι ανεξάρτητη της απεικόνισης ρ. Έστω $\rho' : G \to E$ μια άλλη απεικόνιση τέτοια ώστε να ισχύουν $\rho'(1) = 1$ και $j\rho' = 1_G$. Τότε $\rho'(\sigma) = \rho(\sigma)ia'$, για κάποιο $a' \in A$. Επομένως

$$\rho'(\sigma)\,(ia)\,\rho'(\sigma)^{-1} = \rho(\sigma)\,(ia)\,\rho(\sigma)^{-1}$$

αφού η A είναι αβελιανή.

Ας είναι A ένα G-πρότυπο. Λέμε ότι η επέκταση

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

είναι **συμβατή** με την δομή G-προτύπου της A, αν η δομή G-προτύπου που προκύπτει από την επέκταση συμπίπτει με την δομή G-προτύπου της A.

Ορίζουμε μια σχέση μεταξύ των συμβατών επεκτάσεων της A από την G ως εξής: Για δοσμένες συμβατές επεκτάσεις

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & E_1 \arrow[dd, dashed, "\alpha"'] \arrow[dr] & & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \arrow[r] & 1 \\ & & E_2 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

λέμε ότι η πάνω επέκταση σχετίζεται με την κάτω επέκταση, αν υπάρχει ένας ομομορφισμός $\alpha : E_1 \to E_2$, τέτοιος ώστε το συμπληρωμένο διάγραμμα να είναι μεταθετικό. Μπορεί να δειχθεί με το Πέντε Λήμμα, ότι ο α είναι ισομορφισμός. Συνεπώς αυτή η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας. Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}(G, A)$ τις κλάσεις ισοδυναμίας των συμβατών επεκτάσεων της A από την G modoulo αυτήν την σχέση.

4.5.2 Ο υπολογισμός της $H^2(G,A)$

Σε αυτήν την ενότητα X_* είναι η κανονικοποιημένη τυπική πλήρης ανάλυση της G και A είναι ένα G-πρότυπο.

Ας είναι $A \times G = \{(a,\sigma) \;:\; a \in A,\ \sigma \in G\}$ και f ένας κανονικοποιημένος 2-συνκύκλος, δηλαδή $f : X_2 \to A$ είναι ένας G-ομομορφισμός τέτοιος ώστε

$$(\delta_2 f)[\rho,\sigma,\tau] = \rho f[\sigma,\tau] - f[\rho\sigma,\tau] + f[\rho,\sigma\tau] - f[\rho,\sigma] = 0^2 \tag{4.14}$$

Ένας κανονικοποιημένος 2-συνκύκλος καλείται ένα **σύνολο πηλίκο**.

Ορίζουμε στο $A \times G$ μια πολλαπλασιαστική δομή ως

$$(a,\sigma)(b,\tau) = \big(a + \sigma b + f[\sigma,\tau], \sigma\tau\big) \tag{4.15}$$

Θα συμβολίζουμε το $A \times G$ εφοδιασμένο με αυτήν την πολλαπλασιαστική δομή με $A \times_f G$. Ισχυριζόμαστε ότι το $A \times_f G$ είναι ομάδα. Πράγματι

1. το $(0,1)$ είναι αριστερό ταυτοτικό στοιχείο:
$$(0,1)(b,\tau) = \big(b + f[1,\tau], \tau\big) = \big(b + f(0), \tau\big) = (b+0,\tau) = (b,\tau)\,.$$

2. Το $(0,1)$ είναι δεξιό ταυτοτικό στοιχείο:
$$(a,\sigma)(0,1) = \big(a + f[\sigma,1], \sigma\tau\big) = \big(a + f(0), \sigma\tau\big) = (a+0,\sigma) = (a,\sigma)\,.$$

3. Προσεταιριστικότητα:
$$\big((a,\rho)(b,\sigma)\big)(c,\tau) = \big(a + \rho b + f[\rho,\sigma] + \rho\sigma c + f[\rho\sigma,\tau], \rho\sigma\tau\big) \tag{4.16}$$
και
$$(a,\rho)\big((b,\sigma)(c,\tau)\big) = \big(a + \rho b + \rho\sigma c + \rho f[\sigma,\tau] + f[\rho\sigma,\tau], \rho\sigma\tau\big). \tag{4.17}$$
Τα δεξιά μέλη των (4.16) και (4.17) είναι ίσα λόγω της (4.14).

4. Ύπαρξη αντιστρόφων: Το $\big(-\rho^{-1}a - f[\rho^{-1},\rho], \rho^{-1}\big)$ είναι το αριστερό αντίστροφο του (a,ρ). Για να είναι, επίσης, δεξιό αντίστροφο πρέπει να ισχύει
$$\rho f[\rho^{-1},\rho] = f[\rho,\rho^{-1}]\,.$$
Αυτή η ισότητα προκύπτει από την (4.14), αν σε αυτήν αντικατασταθούν τα ρ,σ,τ από τα ρ,ρ^{-1},ρ, αντίστοιχα.

[2] Θεωρείται ότι $[v_1,v_2] = 0$ οποτεδήποτε $v_1 = 1$ ή $v_2 = 0$.

Ορίζουμε τον ομομορφισμό ομάδων $i : A \to A \times G$ ως

$$ia = (a, 1)$$

και τον $j : A \times G \to G$ ως

$$j(a, \rho) = \rho\,.$$

Τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } A \times_f G \xrightarrow{\ j\ } G \longrightarrow 1 \tag{4.18}$$

είναι ακριβής. Επιπλέον η (4.18) είναι μια συμβατή επέκταση της A από την G. Διότι, αν $\rho : G \to A \times_f G$ ορισμένη ως $\rho\sigma = (0, \sigma)$, τότε $\rho 1 = (0, 1)$, $j\rho = 1_G$ και

$$(0, \sigma)(a, 1)(0, \sigma)^{-1} = (0, \sigma)(a, 1)\big(-f[\sigma^{-1}, \sigma], \sigma^{-1}\big) = (\sigma a, 1)\,,$$

αφού

$$\delta f[\sigma, \sigma^{-1}, \sigma] = \sigma f[\sigma^{-1}, \sigma] - f[\sigma, \sigma^{-1}] = i(\sigma a)\,.$$

Συνοψίζοντας, έχουμε κατασκευάσει μια απεικόνιση Φ από το σύνολο των κανονικοποιημένων 2-συνκύκλων στο $\mathcal{E}(G, A)$, η οποία αντιστοιχίζει τον 2-συνκύκλο f στο στοιχείο της $\mathcal{E}(G, A)$ που αντιπροσωπεύεται από την επέκταση

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \times_f G \longrightarrow G \longrightarrow 1\ . \tag{4.19}$$

Ισχυριζόμαστε ότι η Φ επάγει μια απεικόνιση

$$\bar{\Phi} : H^2(G, A) \longrightarrow \mathcal{E}(G, A)\,.$$

Στην πραγματικότητα η Φ αντιστοιχεί τον κανονικοποιημένο 2-συνκύκλο $f + \delta_1 g$ την επέκταση

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \times_{f+\delta_1 g} G \longrightarrow G \longrightarrow 1\ . \tag{4.20}$$

Οι επεκτάσεις (4.18) και (4.20) ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, αφού η απεικόνιση $\alpha : A \times_f G \to A \times_{f+\delta_1 g} G$ που ορίζεται ως

$$\alpha(a, \sigma) = (a - g[\sigma], \sigma)$$

είναι, εξ ορισμού, ομομορφισμός.

έον το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & A \times_f G \arrow[dd, "\alpha"] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \arrow[r] & 1 \\
 & & A \times_{f+\delta_1 g} G \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, αφού η g είναι μια κανονικοποιημένη 1-συναλυσίδα.

Ακολούθως ισχυριζόμαστε ότι η $\bar{\Phi}$ είναι μονομορφισμός. Υποθέτουμε ότι οι κανονικοποιημένοι 2-συνκύκλοι f και f' απεικονίζονται από την Φ σε ισοδύναμες επεκτάσεις, δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & A \times_f G \arrow[dd, "\alpha"] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \arrow[r] & 1 \\
 & & A \times_{f'} G \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Στα παρακάτω θα διακρίνουμε τα στοιχεία του $A \times_f G$ από τα στοιχεία του $A \times_{f'} G$ βάζοντας τους δείκτες f και f' αντίστοιχα. Π.χ. $(a,\sigma)_f \in A \times_f G$.Αφού $j = j'a$ και $ai = i'$ έχουμε $\alpha(0,\sigma)_f = (g[\sigma],\sigma)_{f'}$, όπου $g[1] = 0$, δηλαδή η g είναι μια κανονικοποιημένη 1-συναλυσίδα και ισχύει

$$\alpha\big((0,\sigma)_f \cdot (0,\tau)_f\big) = (g[\sigma],\sigma)_{f'} \cdot (g[\tau],\tau)_{f'} \quad = \big(g[\sigma] + \sigma g[\tau] + f'[\sigma,\tau], \sigma\tau\big)\,.$$

Αλλά

$$\alpha\big((0,\sigma)_f \cdot (0,\tau)_f\big) = \alpha\big((f[\sigma,\tau],\sigma\tau)_f\big) = \big(f[\sigma,\tau] + g[\sigma\tau], \sigma\tau\big)_{f'}\,.$$

Επομένως

$$f[\sigma,\tau] = \sigma g[\tau] - g[\sigma,\tau] + g[\sigma] + f'[\sigma,\tau] = (\delta_1 g + f')[\sigma,\tau]\,.$$

Τέλος ισχυριζόμαστε ότι η $\bar{\Phi}$ είναι επιμορφισμός. Ας είναι

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, shift left, "j"] & G \arrow[l, shift left, dashed, "\rho"] \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

μια επέκταση συμβατή με την δράση της G επί της A. Κατασκευάζουμε την απεικόνιση $\rho : E \to G$ τέτοια ώστε $\rho[1] = 1$ και $j\rho = 1_G$.

Τότε $\rho(\sigma)\rho(\tau) \cdot \big(\rho(\sigma\tau)^{-1}\big) \in iA$. Ας είναι $f[\sigma,\tau] \in A$ τέτοιο ώστε

$$\rho(\sigma)\rho(\tau) = if[\sigma,\tau] \cdot \rho(\sigma\tau) \tag{4.21}$$

Η f είναι μια απεικόνιση $f : G \times G \to A$ και, επομένως, είναι μια 2-συναλυσίδα (είναι μια απεικόνιση από τους G-γεννήτορες της X_2 στην A). Η f είναι μια κανονικοποιημένη 2-συναλυσίδα αφού $\rho(1) = 1$ και ο i είναι μονομορφισμός. Η f είναι ένας 2-συνκύκλος, αφού κάθε στοιχείο του E μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο στην μορφή $ia \cdot \rho(\sigma)$. Επιπλέον

$$\big[(ia_1 \cdot \rho\sigma_1)(ia_2 \cdot \rho\sigma_2)\big](ia_3 \cdot \rho\sigma_3) \overset{(4.13)}{=\!=}$$
$$\big[ia_1 \cdot i(\sigma_1 a_2) \cdot \rho\sigma_1 \cdot \rho\sigma_2\big](ia_3 \cdot \rho\sigma_3) \overset{(4.21)}{=\!=} \big[i\big(a_1 + \sigma_1 a_2 + f[\sigma_1,\sigma_2]\big) \cdot \rho(\sigma_1\sigma_2)\big](ia_3 \cdot \rho\sigma_3) \overset{(4.21)}{=\!=} i\big(a_1 + \sigma_1 a_2 + f[\sigma_1,\sigma_2] + \sigma_1\sigma_2 \cdot a_3 + f[\sigma_1\sigma_2,\sigma_3]\big) \cdot \rho(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)\,.$$

Ομοίως

$$(ia_1 \cdot \rho\sigma_1)\big[(ia_2 \cdot \rho\sigma_2)(ia_3 \cdot \rho\sigma_3)\big] =$$
$$i\big(a_1 + \sigma_1 a_2 + \sigma_1\sigma_2 \cdot a_3 + \sigma_1 f[\sigma_2,\sigma_3] + f[\sigma_1,\sigma_2\sigma_3]\big) \cdot \rho(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)\,.$$

Έτσι, από την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης στο E, έχουμε

$$\sigma_1 f[\sigma_2,\sigma_3] + f[\sigma_1,\sigma_2\sigma_3] = f[\sigma_1,\sigma_2] + f[\sigma_1\sigma_2,\sigma_3]\,,$$

δηλαδή η είναι ένας 2-συνκύκλος.

Συνοψίζοντας, έχουμε δείξει την

Πρόταση 4.5.1. *Υπάρχει ένας ισομορφισμός*

$$\bar{\Phi} : H^2(G,A) \longrightarrow \mathcal{E}(G,A)\,,$$

όπου $\mathcal{E}(G,A)$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας εκείνων των επεκτάσεων της A από την G, οι οποίες είναι συμβατές με την δεδομένη πράξη της G επί της A.

Συμπερασματικά σημειώνουμε ότι ο ισομορφισμός $\bar{\Phi}$ εφοδιάζει την $\mathcal{E}(G,A)$ με την δομή της αβελιανής ομάδας $H^2(G,A)$. Το μηδενικό στοιχείο της αντιστοιχεί στο μηδενικό στοιχείο του συνόλου πηλίκο. Για αυτό είναι μια επέκταση

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \times_0 G \longrightarrow G \longrightarrow 1 \ .$$

Έτσι η σύνθεση στο $A \times_0 G$ γίνεται ως

$$(a,\sigma)(b,\tau) = \big(a+b,\sigma\tau\big)\,.$$

Το $A \times_0 G$ καλείται το **ευθύ γινόμενο** των A και G.

4.6 Το αρνητικό συναλυσιδωτό σύμπλεγμα

4.6.1 Το τυπικό συναλυσιδωτό σύμπλεγμα

Ας είναι A ένα G-πρότυπο. Έστω $A^r = \mathsf{Hom}_G(X_r, A)$, όπου X_* είναι η τυπική πλήρης ανάλυση της G, και $\delta^r = \mathsf{Hom}_G(\partial_{r+1}, 1_A)$. Τότε, όπως δείχθηκε στην ενότητα 3.3, το

$$\cdots \longrightarrow A^{r-1} \xrightarrow{\delta^{r-1}} A^r \xrightarrow{\delta^r} A^{r+1} \longrightarrow \cdots,$$

είναι ένα συναλυσιδωτό σύμπλεγμα του οποίου οι ομάδες συνομολογίας είναι οι ομάδες $\mathsf{Hom}_G(X_r, A)$. Θα εξετάσουμε το αρνητικό κομμάτι αυτού του συναλυσιδωτού συμπλέγματος, ελπίζοντας ότι θα υπολογίσουμε κάποιες ομάδες συνομολογίας αρνητικής διάστασης.

Για $a \in A$ και $r \geq 0$ θεωρούμε την απεικόνιση $a * \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] : X_{-r-1} \to A$ που ορίζεται ως

$$\big(a * \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]\big)\langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r\rangle = \sum_{\rho \in G} \langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r\rangle^{\tau} \rho\sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] \cdot \rho a$$

Ο $a * \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]$ είναι προφανώς ένας $\mathbb{Z}$-ομομορφισμός. Για να δείξουμε ότι είναι και ένας G-ομομορφισμός θεωρούμε $\tau \in G$ και τότε

$$\tau\langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r\rangle\tau^{-1} = \langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r\rangle^{\tau^{-1}},$$

αφού το $\mathbb{Z}$ είναι ένα τετριμμένο G-πρότυπο.
Επομένως

$$\begin{aligned}
&a * \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]\langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r\rangle^{\tau} \\
&= \textstyle\sum_{\rho \in G}\langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r\rangle\tau^{-1}\rho\sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]\rho a \\
&= \textstyle\sum_{\rho \in G}\langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r\rangle\rho\sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]\tau\rho a \\
&= \tau\big(a * \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]\big)\langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r\rangle,
\end{aligned}$$

αφού το $\langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r\rangle\rho[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]$ είναι ένας ακέραιος. Έπεται ότι

1. ο $a * \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]$ είναι μια $(-r-1)$-συναλυσίδα.
2. $(a_1 + a_2) * \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] = a_1 * \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] + a_2 * \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]$.
3. $a * \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] = \sigma^{-1}a * [\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r]$.

   Η τελευταία ταυτότητα προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned}&\big(a*\sigma[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]\big)\langle\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_r\rangle\\&=\textstyle\sum_{\rho\in G}\langle\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_r\rangle\rho\sigma[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]\rho a\\&=\textstyle\sum_{\rho\in G}\langle\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_r\rangle\rho[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]\rho(\sigma^{-1}a)\\&=\big(\sigma^{-1}a*[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]\big)\langle\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_r\rangle\,.\end{aligned}$$

4. Τέλος επεκτείνουμε την ταυτότητα (;;) στην

$$a*\sum_{i=1}^{n}\tau_i[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]=\sum_{i=1}^{n}a*\tau_i[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]\,.$$

Εξετάζουμε τώρα τα στοιχεία της $A^{-r-1}=\mathsf{Hom}_G(X_{-r-1},A)$. Γνωρίζουμε ότι η $\big\{[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]\big\}_{\sigma_i\in G}$ είναι μια G-βάση του X_r και ότι η $\big\{\langle\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r\rangle\big\}_{\sigma_i\in G}$ είναι η δυαδική G-βάση του X_{-r-1}, δηλαδή

$$\langle\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r\rangle\rho[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_r]=\begin{cases}1\,, & \text{αν } \sigma_i=\rho_i \text{ και } \rho=1\\ 0\,, & \text{αλλιώς}\end{cases}\,.$$

Έτσι

$$\big(a*\sigma[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]\big)\langle\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_r\rangle=\begin{cases}a\,, & \text{αν } \sigma_i=\rho_i\\ 0\,, & \text{αλλιώς}\end{cases}\,.$$

Επομένως ο G-ομομορφισμός $\sum_{\sigma_{i_1}\in G}a_i*[\sigma_{i_1},\sigma_{i_2},\dots,\sigma_{i_r}]$ στέλνει το $\langle\sigma_{k_1},\sigma_{k_2},\dots,\sigma_{k_r}\rangle$ στο a_k και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της G-βάσης του X_{-r-1} στο μηδέν.

Συνοψίζοντας έχουμε

Πρόταση 4.6.1. *Κάθε στοιχείο της* $\mathsf{Hom}_G(X_{-r-1},A)$ *μπορεί να γραφεί στην μορφή*

$$\sum_{\sigma_{i_j}\in G}a_i*[\sigma_{i_1},\sigma_{i_2},\dots,\sigma_{i_r}]\,.$$

Ακολούθως θα εκφράσουμε τα αρνητικά συνσύνορα $\delta^{-r-1}:A^{-r-1}\to A^{-r}$ συναρτήσει των θετικών συνόρων $\partial_r:X_r\to X_{r-1}$. Για $r>0$ ο

$$\varepsilon^{*,i}_{-r-1}:\mathsf{Hom}_G(X_{-r-1},A)\longrightarrow\mathsf{Hom}_G(X_{-r},A)$$

ορίζεται ως

$$\varepsilon^{*,i}_{-r-1}=\mathsf{Hom}_G(\varepsilon^r_i,1_A)\,,$$

όπου ε^r_i είναι η i-στή συνέδρα που ορίσθηκε στην ενότητα 4.2. Τότε

$\varepsilon^{*,i}_{-r-1}\big(a*[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]\big)=\big(a*[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]\big)\varepsilon^r_i\langle\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{r-1}\rangle=$
$\sum_{\tau\in G}\varepsilon^r_i\langle\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{r-1}\rangle\tau[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]\tau a=$

$\sum_{\tau\in G}\langle\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{r-1}\rangle\varepsilon_r^i\,\tau[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]\tau a =$
[3] $\big(a*\varepsilon_r^i[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]\big)\langle\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{r-1}\rangle\,.$

Αφού για $r=1,2,\dots$

$$=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\varepsilon_{-r-1}^{*,i}\,,$$

έχουμε δείξει ότι

$$\delta^{-r-1}\big(a*[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r]\big)=a*\partial_r[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r] \tag{4.22}$$

Στην περίπτωση $r=0$ έχουμε

$$\delta^{-1}\big(a*[\,]\big)=\mathsf{Hom}_G(\partial_0,1_A)=a*[\,]\partial_0\,.$$

Επομένως

$$\delta^{-1}\big(a*[\,]\big)[\,]=(a*[\,])\partial_0[\,]=(a*[\,])\langle\,\rangle^S=\sum_{\rho\in G}\langle\,\rangle^S\rho[\,]\rho a=Sa.$$

4.6.2 Ακόμα ένας υπολογισμός της $H^{-1}(G,A)$

Λόγω της (4.6.1), οι (-1)-συνκύκλοι είναι όλα τα στοιχεία $a*[\,]$ της $\mathsf{Hom}_G(X_{-1},A)$ για τα οποία ισχύει

$$\delta^{-1}\big(a*[\,]\big)=Sa=0\,.$$

Έτσι η ομάδα των (-1)-συνκύκλων είναι ισόμορφη με την ομάδα $A_S=\{a\in A\ :\ Sa=0\}$. Τα (-1)-συνύνορα είναι τα στοιχεία $\delta^{-2}\sum_{\sigma\in G}a_\sigma*[\sigma]\in\mathsf{Hom}_G(X_{-1},A)$. Αφού

$$\delta^{-2}\sum_{\sigma\in G}a_\sigma*[\sigma]=\sum_{\sigma\in G}a_\sigma*\partial_1[\sigma]=\sum_{\sigma\in G}(\sigma^{-1}a_\sigma-a_\sigma)*[\,]\,,$$

η ομάδα των των (-1)-συνκύκλων είναι ισόμορφη με την ομάδα IA, όπου I είναι ο πυρήνας της επαύξησης ε. Συμπεραίνουμε ότι $H^{-1}(G,A)\cong A_S/(IA)$.

4.6.3 Ο υπολογισμός της $H^{-2}(G,A)$ (τετριμμένη δράση)

Δεν είμαστε σε θέση να δώσουμε μια εύλογη ερμηνεία της $H^{-2}(G,A)$ στην περίπτωση που η δράση της G στην A είναι τυχούσα. Εντούτοις όταν αυτή η

[3] όπου ε_r^i είναι η r-στή έδρα που ορίσθηκε στην ενότητα 3.5.1.

δράση είναι τετριμμένη δείχνουμε ότι $H^{-2}(G,A) \cong A \otimes G/G'$, όπου G' είναι η υποομάδα μεταθέτης της G. Στα παρακάτω χρησιμοποιούμε την κανονικοποιημένη τυπική πλήρη ανάλυση της G. Κάθε (-2)-συναλυσίδα $\sum_{\sigma\in G} a_\sigma * [\sigma]$ είναι ένας συνκύκλος αφού το συνσύνορό του, $\sum_{\sigma\in G}(\sigma^{-1}a_\sigma - a_\sigma) * [\,]$, είναι μηδέν λόγω της τετριμμένης δράσης.

Ένα (-2)-συνσύνορο είναι ένα άθροισμα στοιχείων της μορφής

$$\delta^{-3}\big(a * [\sigma,\tau]\big) = a * [\tau] - a * [\sigma\tau] + a * [\sigma]\,.$$

Αφού

$$a * [\sigma\tau] = a * [\sigma] + a * [\tau] + \big(- a * [\tau] + a * [\sigma\tau] - a * [\sigma]\big)\,,$$

έχουμε ότι

$$a * [\sigma\tau] \cong a * [\sigma] + a * [\tau] \text{ modulo συνσύνορα} \tag{4.23}$$

και

$a * [\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}] \cong a * [\sigma] + a * [\tau] - a * [\sigma] - a * [\tau] =$ 0 modulo συνσύνορα

αφού χρησιμοποιούμε την κανονικοποιημένη τυπική πλήρη ανάλυση της G.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\theta : A \otimes G/G' \to H^{-2}(G,A)$ που ορίζεται ως

$$\theta(a,\sigma G') = a * [\sigma] + \text{συνσύνορα}\,.$$

Η θ είναι καλά ορισμένη λόγω της (4.6.3). Η θ είναι γραμμική στο $\sigma G'$ λόγω της (4.23) και γραμμική στο a λόγω της 4.6.1 (ii). Ισχυριζόμαστε ότι η $H^{-2}(G,A)$ αναπαριστά την $A \otimes G/G'$. Στην πραγματικότητα η εικόνα της θ παράγει την $H^{-2}(G,A)$. Επιπλέον δεδομένης μιας διγραμμικής απεικόνισης $f : A \otimes G/G' \to B$, όπου το B είναι ένα G-πρότυπο, υπάρχει ένας $\mathbb{Z}$-ομομορφισμός $\bar{f} : H^{-2}(G,A) \to B$ που ορίζεται ως

$$\bar{f}\big(\textstyle\sum_{\sigma\in G}\big(a * [\sigma] + \text{συνσύνορα}\big)\big) = \displaystyle\sum_{\sigma\in G} f(a_\sigma, \sigma G')\,.$$

Η $\bar{f}$ είναι καλά ορισμένη αφού

$\bar{f}\big(a * [\tau] - a * [\sigma\tau] + a * [\sigma] + \text{συνσύνορα}\big) =$
$f(a,\tau G') + f(a,\sigma\tau G') + f(a,\sigma G') = f(a,\tau(\sigma\tau)^{-1}\sigma G') = 0\,,$

αφού η f είναι διγραμμική. Επιπλέον το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \otimes G/G' \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "f"'] & & H^{-2}(G,A) \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Δηλαδή ισχύει

$$\bar{f}\theta(a_{,}\tau G') = \bar{f}(a * [\sigma] + \text{συνσύνορο}) = f(a_{,}\tau G')\,.$$

Επομένως $H^{-2}(G,A) \cong A \otimes G/G'$. Ειδικά όταν το A είναι το τετριμμένο G-πρότυπο $\mathbb{Z}$ έχουμε

$$H^{-2}(G,\mathbb{Z}) \cong G/G'\,.$$

4.6.4 Ακόμα ένας υπολογισμός της $H^{-2}(G,\mathbb{Z})$

Ο ισομορφισμός

$$H^{-2}(G,\mathbb{Z}) \cong G/G' \tag{4.24}$$

μπορεί να προκύψει άμεσα από το $H^{-1}(G,I)$ και την εναλλαγή διάστασης, όπου I είναι ο πυρήνας της επαύξησης $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$. Η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

της ενότητας 3.6.1 δίνει την ισομορφία

$$H^{-2}(G,\mathbb{Z}) \cong H^{-1}(G,I)\,,$$

αφού το $\mathbb{Z}G$ είναι G-κανονικό. Από την ενότητα 4.1 ή την ενότητα 4.6.1 έχουμε

$$H^{-2}(G,\mathbb{Z}) \cong I_S/I^2\,.$$

Ο ισομορφισμός (4.24) προκύπτει από τον ισομορφισμό των ομάδων

$$I/(I^2)' \cong G/G'. \tag{4.25}$$

Για να αποδείξουμε αυτόν τον ισομορφισμό, καταρχήν, παρατηρούμε ότι το I είναι μια αβελιανή ομάδα γραμμένη προσθετικά. Ορίζουμε την απεικόνιση $\Phi : G \to I/I^2$ ως

$$\Phi\sigma = (\sigma - 1) + I^2\,.$$

Η Φ είναι ένας ομομορφισμός αφού

$$\Phi\sigma\tau = (\sigma\tau - 1) + I^2 \quad = (\sigma - 1) + (\tau - 1) + (\sigma - 1)(\tau - 1) + I^2 = (\sigma - 1) + (\tau - 1) + I^2 \,.$$

Επειδή η I/I^2 είναι αβελιανή, ο Φ επάγει τον ομομορφισμό $\bar{\Phi} : G/G' \to I/I^2$ που ορίζεται ως

$$\bar{\Phi}(\sigma G') = (\sigma - 1) + I^2 \,.$$

Ακολούθως ορίζουμε την απεικόνιση $\Psi : I \to G/G'$ ως

$$\Psi(\sigma - 1) = \sigma G' \,.$$

Η Ψ είναι ομομορφισμός επειδή τα στοιχεία $\sigma - 1$ αποτελούν μια $\mathbb{Z}$-βάση του I. Επειδή

$\Psi(\sigma - 1)(\tau - 1) = \Psi\big((\sigma\tau - 1) - (\sigma - 1) - (\tau - 1)\big) = \sigma\tau G' \cdot \sigma^{-1}G' \cdot \tau^{-1}G' = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}G' = G'$,

ο Ψ επάγει τον ομομορφισμό $\bar{\Psi} : I/I^2 \to G/G'$. Τώρα προκύπτει με τετριμμένο τρόπο από τους ορισμούς ότι $\bar{\Phi}\bar{\Psi} = 1_{I/I^2}$ και $\bar{\Psi}\bar{\Phi} = 1_{G/G'}$.

4.7 Κυκλικές ομάδες

4.7.1 Συνομολογία των κυκλικών ομάδων

Στο παράδειγμα 3.3.2 είδαμε ότι αν η G είναι μια κυκλική ομάδα τάξης n παραγόμενη από το σ, τότε το

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \mathbb{Z}G \arrow[l, "S"'] & \mathbb{Z}G \arrow[l, "\sigma-1"'] & & \mathbb{Z}G \arrow[ll, "S"'] \arrow[dl, "\varepsilon"] & \mathbb{Z}G \arrow[l, "\sigma-1"'] & \cdots \arrow[l, "S"'] \\
 & & & \mathbb{Z} \arrow[ul, "\mu"] \arrow[dl] & & & \\
 & & 0 & & 0 \arrow[ul] & &
\end{tikzcd}$$

όπου $\varepsilon(\sigma^i) = 1$ και $\mu(1) = S$, είναι μια πλήρης ανάλυση της G. Επειδή αυτό το σύμπλεγμα είναι περιοδικό με περίοδο 2, για κάθε G-πρότυπο A έχουμε

$$H^{2r}(G, A) \cong A^G/SA \qquad \text{για } r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \,,$$

$$H^{2r+1}(G,A) \cong A_S/IA \qquad \text{για } r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ,$$

από τα αποτελέσματα των ενοτήτων 3.6.2 και 4.1.

4.8 Τετριμμένη δράση

Σε αυτήν την ενότητα υπολογίζουμε τις ομάδες ομολογίας στην περίπτωση που η δράση της G στην A είναι τετριμμένη, δηλαδή $\sigma a = a$, για κάθε $\sigma \in G$ και $a \in A$. Στα παρακάτω το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$, το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$, το $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ και το A θεωρούνται ως G-πρότυπα στα οποία η δράση της G είναι τετριμμένη. Ισχύουν

$$H^{-2}(G,A) \cong G/G' \otimes A \tag{4.26}$$

όπου το G' είναι η επαγομένη ομάδα της. Επομένως

$$H^{-2}(G,\mathbb{Z}) \cong G/G' \tag{4.27}$$

οπότε έχουμε

$$H^{-3}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong G/G' \tag{4.28}$$

Επειδή η δράση της G στην A είναι τετριμμένη, ισχύει $IA = 0$, όπου I είναι ο πυρήνας της απεικόνισης επαύξησης $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$. Επιπλέον το $A_S = \{a \in A : Sa = 0\}$ είναι ο πυρήνας του ομομορφισμού $n \cdot 1_A : A \to A$, όπου $n = |G|$. Έτσι, από την ενότητα 4.1 έχουμε

$$H^{-1}(G,\mathbb{Z}) = 0 \tag{4.29}$$

ενώ από το παράδειγμα 3.4.14 έχουμε

$$H^{-2}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0 \tag{4.30}$$

Ο υπολογισμός της $H^0(G,A)$ στην ενότητα 3.5.1 δίνει

$$H^0(G,A) \cong A/nA \tag{4.31}$$

όπου $n = |G|$. Έτσι

$$H^0(G,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \tag{4.32}$$

και από το παράδειγμα 3.4.14 έχουμε

$$H^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, H^1(G, A) \cong \mathcal{G}(G, A), \tag{4.33}$$

όπου είναι η ομάδα των ομομορφισμών από την ομάδα G στην αβελιανή ομάδα A. Ειδικά

$$H^1(G, \mathbb{Z}) = 0 \tag{4.34}$$

αφού η G είναι πεπερασμένη. Επομένως

$$H^0(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0 \tag{4.35}$$

Επιπλέον

$$H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathcal{G}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \widehat{G} \tag{4.36}$$

όπου $\widehat{G}$ είναι η ομάδα των χαρακτήρων της G. Επομένως

$$H^2(G, \mathbb{Z}) \cong \widehat{G}. \tag{4.37}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Το Θεωρημα των Chevalley και Artin-Tate

5.0.1 Το πηλίκο του Herbrand

Το πηλίκο του Herbrand χρησιμοποιείται συχνά στη θεωρία class field. Λόγω του ότι σχετίζεται με διάστασης 2 και 1 συνομολογιακών ομάδων εμφανίζεται σε πολλές εφαρμογές.

Ας υποθέσουμε ότι A είναι μια αβελιανή ομάδα. Έστω f ένας ενδομορφισμός στην A, συμβολίζουμε $A_f = \ker f$ και $A^f = Imf$.

Έστωσαν A μια αβελιανή ομάδα και B μία υποομάδα της. Έστω f ένας ομομορφισμός από την A σε κάποια άλλη ομάδα. Περιορίζοντας την f στην B έχουμε τους αντίστοιχους συμβολισμούς $B_f = \ker\left(f_{|B}\right)$ και $B^f = Imf_{|B}$. Συμβολικά λαμβάνουμε το επόμενο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & A_f/B_f & \to & A/B & \to & A^f/B^f & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & A_f & \to & A & \to & A^f & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & B_f & \to & B & \to & B^f & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η πρώτη γραμμή είναι καλά ορισμένη και ότι είναι ακριβής. Το προηγούμενο διάγραμμα έχει τις γραμμές και στήλες ακριβείς. Λαμβάνουμε λοιπόν την επόμενη ισότητα όταν οι δύο από τους τρεις αριθμούς είναι πεπερασμένοι.

$$[A:B]=[A_f:B_f]\left[A^f:B^f\right].$$

Ας υποθέσουμε ότι οι f και g είναι ενδομορφισμοί της A ώστε

$$f\circ g=g\circ f=0.$$

Τότε $A^g\subset A_f$ και $A^f\subset A^g$, οπότε ορίζεται το **πηλίκο του Herbrand** θεωρώντας ότι το κλάσμα ορίζεται

$$Q_{f,g}(A)=Q(A)=\frac{[A_f:A^g]}{[A_g:A^f]}.$$

Ας σημειώσουμε ότι αν $f(B), g(B)\subset B$, τότε υπάρχουν μοναδικοί επαγόμενοι ομομορφισμοί

$$\overline{f},\overline{g}:A/B\to A/B$$

οι οποίοι ικανοποιούν $\overline{f}(x+B)=f(x)+B$ και $\overline{g}(x+B)=g(x)+B$. Θα έχουμε λοιπόν $\overline{f}\circ\overline{g}=\overline{g}\circ\overline{f}=0$ και μπορούμε να ορίσουμε επίσης το επόμενο πηλίκο του Herbrand

$$Q_{f,g}(A/B)=Q(A/B)=\frac{\left[(A/B)_{\overline{f}}:(A/B)^{\overline{g}}\right]}{\left[(A/B)_{\overline{g}}:(A/B)^{\overline{f}}\right]}.$$

Παρατήρηση 5.0.1.

$$Q_{0,f}(A)=\frac{[A:f(A)]}{[Kerf]}.$$

Οι βασικές ιδιότητες του πηλίκου του Herbrand απορέουν από το ότι είναι η **πολλαπλασιαστική χαρακτηριστική** Euler-Poincare του πολυπλόκου

$$A\underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}}A$$

Παρατήρηση 5.0.2. Ας είναι $\zeta_n=e^{\frac{i2\pi}{n}}$ μια πρωταρχική ρίζα της μονάδας. Γνωρίζουμε ότι η ομάδα Galois της επέκτασης $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ πάνω από το $\mathbb{Q}$ είναι κυκλική τάξης n. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε μια κυκλική ομάδα G τάξης n να αποτελείται από ρίζες του x^n-1 με το γινόμενο, $G=<\zeta_n>$.

Έστωσαν A ένα G-πρότυπο, $f=1-\zeta_n$ και $g=1+\zeta_n+\cdots+\zeta_n^{n-1}$, τότε έχουμε $A_f=A^G$, $A^f=<1-\zeta_n>A$, $A_g=A_S$, και $A^g=SA$. Εδώ S συμβολίζει το ίχνος. Γνωρίζουμε ότι

$$A_f/A^g\cong H^0(G,A)\cong H^2(G,A),$$

$$A_g/A^f \cong H^{-1}(G,A) \cong H^1(G,A).$$

Σ' αυτήν την περίπτωση το πηλίκο του Herbrand συμβολίζεται με

$$Q_{2/1}(G,A).$$

Η επόμενη πρόταση είναι προφανής.

Λήμμα 5.0.3. *Έστωσαν G μια κυκλική ομάδα τάξης πρώτου p και A ένα πεπερασμένα γεννόμενο τετριμμένο G-πρότυπο, τότε*

$$Q_{2/1}(G,A) = Q_{0,p}(A).$$

Θα μελετήσουμε το επόμενο διάγραμμα το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στη συνομολογία κυκλικών ομάδων

$$\begin{tikzcd}
 & A_f/A^g \arrow[r, "\mathcal{D}_1"'] & (A/B)_{\overline{f}}/(A/B)^{\overline{g}} \arrow[dr, "\delta"] & \\
B_f/B^g \arrow[ur, "\mathcal{D}_2"] & & & B_g/B^f \arrow[dl, "\mathcal{D}'_2"] \\
 & (A/B)_{\overline{g}}/(A/B)^{\overline{f}} \arrow[ul, "\delta'"] & A_g/A^f \arrow[l, "\mathcal{D}'_1"] &
\end{tikzcd}$$

Οι ορισμοί των ομομορφισμών D_2 και D_1 είναι προφανείς, ενώ οι ορισμοί για τους δ και δ' δεν είναι. Αμέσως θα εξηγήσουμε τους ορισμούς.

- Για τη σύνδεση $B_f \hookrightarrow A_f \twoheadrightarrow A_f/A^g$ η σχέση $B^g \subset A^g$ δίνει ότι η απεικόνιση $D_2 : B_f/B^g \to A_f/A^g$ η οποία ορίζεται από $D_2\left(x + B^g\right) = x + A^g$ είναι καλά ορισμένη. Η D'_2 ορίζεται ανάλογα.

- Η εικόνα της σύνθεσης $A_f \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/B$ περιέχεται στην $(A/B)_f$, οπότε έχουμε έναν καλά ορισμένο ομομορφισμό $\pi : A_f \to (A/B)_f$ ο οποίος δίνεται από $\pi\left(x\right) = x + B$. Η εικόνα της A^g ως προς π περιέχεται στην $(A/B)^g$, οπότε η απεικόνιση $D_1 : A_f/A^g \to \frac{(A/B)_f}{(A/B)^g}$ η οποία δίνεται από $D_1\left(x + A^g\right) = (x+B) + (A/B)^{\overline{g}}$ είναι καλά ορισμένη. Και η D'_1 ορίζεται ανάλογα.

- Για να ορίσουμε τη δ, πρώτα ορίζουμε τον ομομορφισμό
$$\rho : (A/B)_{\overline{f}} \to B_g/B^f$$
ο οποίος δίνεται από $x + B \mapsto f\,(x) + B^f$. Θα σχολιάσουμε τον προηγούμενο ορισμό και θα δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένος. Η ομάδα $(A/B)_{\overline{f}}$ αποτελείται από όλα τα σύμπλοκα $x + B$ για τα οποία ο αναπαραστάτης x ικανοποιεί $f\,(x) \in B$. Επειδή $Imf \subset \ker g$, έχουμε ότι το $x + B$ είναι ένα στοιχείο της $(A/B)_{\overline{f}}$, οπότε έχουμε ότι $f\,(x) \in B_g$.

  Άρα η ρ απεικονίζει την $(A/B)_{\overline{f}}$ στην υποομάδα που θέλουμε. Για να δείξουμε ότι αυτή είναι καλά ορισμένη, υποθέτουμε ότι $x + B$ και $y + B$ είναι στοιχεία της $(A/B)_{\overline{f}}$ με $x + B = y + B$. Τότε $x - y \in B$, οπότε $f\,(x - y) \in B^f$. Άρα $\rho\,(x + B) = \rho\,(y + B)$.

Με την ρ να είναι καλά ορισμένη παρατηρούμε ότι η (A/B) περιέχεται στον πυρήνα της ρ. Κάθε στοιχείο της (A/B) μπορεί να γραφεί σαν $g(x) + B$ για κάποιο $x \in A$ και γνωρίζουμε ότι $f(g(x)) = 0$. Άρα $\rho\,(g\,(x) + B) = 0 + B^f$. Λαμβάνουμε λοιπόν μια καλά ορισμένη απεικόνιση

$$\delta : \frac{(A/B)_{\overline{f}}}{(A/B)^{\overline{g}}} \to \frac{B_g}{B^f}$$

$$(x + B) + (A/B)^{\overline{g}} \mapsto f\,(x) + B^f.$$

Πρόταση 5.0.4. *Το προηγούμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό.*

Απόδειξη. 1. Θα δείξουμε ότι $\ker D_1 = ImD_2$.

Ένα στοιχείο της ImD_2 είναι μορφής $x + A^g$ για κάποιο $x \in B_f$. Τότε $D_1\,(x + A^g) = (x + B) + (A/B)^{\overline{g}}$ το οποίο είναι μηδέν διότι $x \in B$. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι για $x \in A_f$ το $(x + A^g) \in \ker D_1$. Τότε $x + B \in (A/B)^{\overline{g}}$, οπότε υπάρχει μοναδικό $y \in A$ για το οποίο $x + B = g\,(y) + B$. Τότε λοιπόν υπάρχει $b \in B$ για το οποίο $x - g\,(y) = b$. Άρα $x + A^g = x - g\,(y) + A^g = b + A^g$, με $b + A^g \in ImD_2$. Η αντίστοιχη σχέση $\ker D_1' = ImD_2'$ αποδεικνύεται ανάλογα.

2. Θα δείξουμε ότι $\ker\delta = ImD_1$.

Ένα στοιχείο της ImD_1 είναι $(x + B) + (A/B)^{\overline{g}}$ με $x \in A_f$. Αν εφαρμόσουμε την δ θα πάρουμε $f\,(x) + B^f$ το οποίο είναι μηδέν διότι $f\,(x) = 0$. Αντίστροφα, έστω $z = (x + B) + (A/B)^{\overline{g}} \in \ker\delta$, όπου $x + B \in (A/B)_{\overline{f}}$. Τότε $f\,(x) + B^f = 0 + B^f$, οπότε υπάρχει $b \in B$ ώστε $f\,(x) = f\,(b)$. Τότε $x + B = x = b + B$ και

$(x+B)+(A/B)^{\overline{g}}=(x-b+B)+(A/B)^{\overline{g}}$ με $x-b\in A_f$. Άρα $z\in ImD_1$. Η ισότητα $\ker\delta'=ImD_1'$ αποδεικνύεται ανάλογα.

3. Θα δείξουμε ότι $\ker D_2'=Im\delta$.

Έστω $(x+B)+(A/B)^{\overline{g}}$ να είναι στοιχείο της $\frac{(A/B)_{\overline{f}}}{(A/B)^{\overline{g}}}$. Αν εφαρμόσουμε τη δ θα πάρουμε $f(x)+B^f$ και εφαρμόζοντας D_2' παίρνουμε $f(x)+A^f$ το οποίο είναι μηδέν. Αντίστροφα, έστω $x\in B_g$ και $x+B^f\in\ker D_2'$. Τότε $x\in A^f$, οπότε υπάρχει $y\in A$ με $x=f(y)$. Επειδή $x\in B$, τότε $(y+B)\in(A/B)_f$ με

$$\delta\left((y+B)+(A/B)^{\overline{g}}\right)=f(y)+B^f=x+B^f.$$

Άρα έχουμε ότι $\left(x+B^f\right)\in D_2$. Η ισότητα $\ker D_2=Im\delta'$ αποδεικνύεται ανάλογα. □

Παρατήρηση 5.0.5. Έστω $C=A/B$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι αν δύο από τα τρία πηλίκα του Herbrand $Q(A)$, $Q(B)$ και $Q(C)$ είναι πεπερασμένα, τότε είναι και το τρίτο. Ας υποθέσουμε ότι τα $Q(A)$, $Q(B)$ ορίζονται. Τέσσερες από τις έξι ομάδες του διαγράμματος είναι πεπερασμένες. Η εικόνα ImD_1 είναι πεπερασμένη και αν θεωρήσουμε την ομάδα $\frac{(A/B)_{\overline{f}}}{(A/B)^{\overline{g}}}$ μόντουλο την εικόνα, το πηλίκο που προκύπτει είναι ισόμορφο με την υποομάδα B_g/B^f λόγω ακρίβειας, και κατα συνέπεια πεπερασμένη. Άρα η $\frac{(A/B)_{\overline{f}}}{(A/B)^{\overline{g}}}$ είναι πεπερασμένη και το ίδιο ισχύει και για την $\frac{(A/B)_{\overline{f}}}{(A/B)^{\overline{g}}}$.

Έχουμε λοιπόν το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 5.0.6. *Υποθέτοντας ότι τα πηλίκα ορίζονται, έχουμε*

$$Q(A)=Q(B)\,Q(A/B).$$

Απόδειξη. Το πηλίκο στον τύπο που ζητάμε ισούται με τον πληθικό αριθμό της εικόνας της απεικόνισης που προηγείται στο διάγραμμα πολλαπλασιασμένη με τον πληθικό αριθμό της εικόνας της απεικόνισης που ακολουθεί. Παραδείγματος χάριν η A_f/A^g μόντουλο $\ker D_1$ είναι ισόμορφη με την ImD_1. Άρα

$$|A_f/A^g|=|\ker D_1|\cdot|ImD_1|=|ImD_2|\cdot|ImD_1|.$$

Οπότε,

$$Q(B)\,Q(A/C)=\frac{|B_f/B^g|}{|B_g/B^f|}\cdot\frac{|\frac{(A/B)_{\overline{f}}}{(A/B)^{\overline{g}}}|}{|\frac{(A/B)_{\overline{g}}}{(A/B)^{\overline{f}}}|}=\frac{|Im\delta'|\cdot|ImD_2|}{|Im\delta|\cdot|ImD_2'|}\cdot\frac{|ImD_1|\cdot|Im\delta|}{|ImD_1'|\cdot|Im\delta'|}=$$

$$\frac{|ImD_2|\cdot|ImD_1|}{|ImD_2'|\cdot|ImD_1'|}=\frac{|A_f/A^g|}{|A_g/A^f|}=Q\left(A\right).$$

□

Λήμμα 5.0.7. *Αν η A είναι πεπερασμένη, τότε* $Q\left(A\right)=1$.

Απόδειξη. Έχουμε λοιπόν $A/A_g\equiv A^g$ και $A/A_f\equiv A^f$, οπότε

$$|A^g|\cdot|A_g|=|A|=|A^f|\cdot|A_f|.$$

□

Θεώρημα 5.0.8. *Ας υποθέσουμε ότι οι f και g είναι ενδομορφισμοί της πεπερασμένα παραγόμενης αβελιανής ομάδας A ώστε $f\circ g=g\circ f$. Τότε*

$$Q_{0,fg}=Q_{0,f}Q_{0,g}.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $A\cong A_1\oplus\cdots\oplus A_k\oplus A_{k+1}\oplus\cdots\oplus A_{k+l}$ με $A_i=<a_i>\cong\mathbb{Z}$ για $1\leq i\leq k$ και $A_{k+t}=<a_{k+t}>\cong\mathbb{Z}/p_{k+t}^{m_{k+t}}\mathbb{Z}$ για $1\leq t\leq l$.

Έστω $f:A\to A$ ένας ενδομορφισμός ομάδων, τότε ο f μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν $(k+l)\times(k+l)$ πίνακα $M=(f_{i,j})$. Εδώ οι $f_{i,j}:A_i\to A_j$ είναι ομομορφισμοί ομάδων.

1. Αν $A_i\cong\mathbb{Z}/p_i^{m_i}\mathbb{Z}$ και $A_j\cong\mathbb{Z}$, τότε $f_{i,j}=0$.

2. Αν $A_i\cong\mathbb{Z}$ και $A_j\cong\mathbb{Z}$, τότε ο ομομορφισμός $f_{i,j}$ είναι 1-1 αν και μόνο αν $f_{i,j}(a_i)=a_{i,j}\in\mathbb{Z}^*$.

3. Αν $A_i\cong\mathbb{Z}$ και $A_j\cong\mathbb{Z}/p_j^{m_j}\mathbb{Z}$, τότε $f_{i,j}(a_i)=a_{i,j}modp_j^{m_j}$ και το πηλίκο του Herbrand δεν ορίζεται διότι $\mid kerf_{i,j}\mid=\infty$.

4. Αν $A_i\cong\mathbb{Z}/p_i^{m_i}\mathbb{Z}$ και $A_j\cong\mathbb{Z}/p_j^{m_j}\mathbb{Z}$, τότε $f_{i,j}(a_i)=a_{i,j}modp_j^{m_j}$ και $o(a_{i,j})\setminus gcd(p_i^{m_i},p_j^{m_j})$. Εδώ $o(a_{i,j})$ συμβολίζει την τάξη του στοιχείου.

   Έστω λοιπόν $f_{i,j}:\mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p^{m_j}\mathbb{Z}$, τότε $o(a_{i,j})\setminus p^{min(m_i,m_j}$. Οπότε έχουμε $Imf_{i,j}=a_{i,j}\mathbb{Z}/p_j^{m_j}\mathbb{Z}$ και $o(kerf_{i,j})=p^{(m_i-m_j})o(a_{i,j})$.

Ο πίνακας M της f γίνεται

$$\left(\begin{array}{cc} M'_{k\times k} & 0\\ 0 & M"_{l\times l}\end{array}\right).$$

Αρκεί λοιπόν να μελετήσουμε την πρόταση για $A \cong A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$ με $A_i =< a_i >\cong \mathbb{Z}$ και $A \cong A_{k+1} \oplus \cdots \oplus A_{k+l}$ με $A_{k+t} =< a_{k+t} >\cong \mathbb{Z}/p_{k+t}^{m_{k+t}}\mathbb{Z}$ για $1 \leq t \leq l$.

Η περίπτωση $A_{k+t} =< a_{k+t} >\cong \mathbb{Z}/p_{k+t}^{m_{k+t}}\mathbb{Z}$ ακολουθεί από το λήμμα 5.0.7.

Θα μελετήσουμε την περίπτωση $A \cong A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$ με $A_i =< a_i >\cong \mathbb{Z}$. Ας είναι $\pi_i : A \to A_i$ η προβολή στην αντίστοιχη συντεταγμένη. Η ισόμορφη εικόνα της $\pi_i f$ γεννάται από το

$$a_{i,1}a_1 + \cdots + a_{i,l}a_l.$$

Δηλαδή

$$Im\pi_i f =< gcd(a_{i,1}, \cdots, a_{i,l})a_i > .$$

Αν $a_{i,j} = 0$ για κάποιο j, τότε $\mid kerf_{i,j} \mid= \infty$ και το πηλίκο δεν ορίζεται. Διαφορετικά έχουμε

$$\mid A : Imf \mid= \prod_1^l \mid A_i : Im\pi_i f \mid= \prod_1^l gcd(a_{i,1}, \cdots, a_{i,l})$$

και

$$Q_{0,f} = \prod_1^l gcd(a_{i,1}, \cdots, a_{i,l}).$$

Θα προχωρήσουμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος. Έστωσαν f και g είναι ενδομορφισμοί της πεπρασμένα παραγόμενης αβελιανής ομάδας $A \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ ώστε $f \circ g = g \circ f$. Αν M_f είναι ο πίνακας της f και M_g της g, τότε

$$M_f M_g = M_g M_f = M_{fg} = (\sum f_{i,t}g_{t,j}) = (\sum g_{i,t}f_{t,j}).$$

$$Q_{0,fg} = \prod_1^l gcd(\sum f_{i,t}g_{t,1}, \cdots, \sum f_{i,t}g_{t,l}) =$$

$$\prod_1^l gcd(\sum g_{i,t}f_{t,1}, \cdots, \sum g_{i,t}f_{t,l}).$$

Η προηγούμενη σχέση μας δίνει

$$\prod_1^l gcd(\sum f_{i,t}g_{t,1}, \cdots, \sum f_{i,t}g_{t,l}) =$$

$$\prod_1^l gcd(\sum f_{i,1}, \cdots, \sum f_{i,l}) \ \prod_1^l gcd(\sum g_{i,1}, \cdots, \sum g_{i,l}).$$

Καταλήγουμε στην πρόταση του Θεωρήματος

$$Q_{0,fg} = Q_{0,f}Q_{0,g}.$$

□

5.0.2 Το Θεώρημα των Chevalley και Artin-Tate

Ο Chevalley στο [7] απέδειξε το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 5.0.9. *Έστω G μια κυκλική ομάδα τάξης πρώτου p. A είναι ένα πεπερασμένα γεννόμενο G-πρότυπο. Αν n (αντίστοιχα m) είναι η βαθμίδα (rank) του A (αντίστοιχα A^G) σαν ένα $\mathbb{Z}$-πρότυπο, τότε*

$$Q_{2/1}(G, A) = \frac{p^{pm-n}}{p-1}.$$

Επειδή η $H^r(G, A)$ είναι πεπερασμένη για κάθε πεπερασμένη ομάδα G και πεπερασμένα γεννόμενο A G-πρότυπο, το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι αποτέλεσμα της γενίκευσης των Artin-Tate στο [4].

Θεώρημα 5.0.10. *Έστω G μια κυκλική ομάδα τάξης πρώτου p. A είναι ένα πεπερασμένα γεννόμενο G-πρότυπο ώστε να ορίζεται το $Q_{0,p}(A)$. Τότε τα $Q_{0,p}(A^G)$ και $Q_{2/1}(G, A)$ ορίζονται επίσης και δίνονται από*

$$(Q_{2/1}(G, A))^{(p-1)} = \frac{Q_{0,p}(A^G)^p}{Q_{0,p}(A)}.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από το Λήμμα 5.0.3 ότι $Q_{0,p}(A^G) = Q_{2/1}(G, A^G)$. Έστω ζ_p ένας γεννήτορας της G και ας θεωρήσουμε την ακριβή ακολουθία των G-ομομορφισμών

$$0 \to A^G = A_{1-\zeta_p} \xrightarrow{i} A \xrightarrow{1-\zeta_p} A^{1-\zeta_p} \to 0.$$

Εδώ η i είναι ο εγκλεισμός και $(1 - \zeta_p)(a) = a - \zeta_p a$. Επειδή το $A^{1-\zeta_p}$ αποτελεί ταυτόχρονα υποπρότυπο και πρότυπο πηλίκο, έχουμε από την πρόταση 5.0.5 ότι το $Q_{0,p}(A^{1-\zeta_p})$ ορίζεται αφού από την υπόθεση έχουμε ότι και το $Q_{0,p}(A)$ ορίζεται. Αφού λοιπόν και τα δύο αυτά πρότυπα ορίζονται και το $Q_{0,p}(A^G)$ ορίζεται επίσης. Έχουμε λοιπόν

$$Q_{2/1}(G, A) = Q_{(2/1)}(G, A^G)Q_{2/1}(G, A^{1-\zeta_p}),$$

$$Q_{0,p}(A) = Q_{0,p}(A^G)Q_{0,p}(A^{1-\zeta_p}).$$

Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες εξισώσεις στη ζητούμενη εξίσωση του θεωρήματος, αρκεί να αποδείξουμε ότι το $Q_{2/1}(G, A^{1-\zeta_p})$ ορίζεται και ικανοποιεί την επόμενη ισότητα

$$Q_{2/1}(G, A^{1-\zeta_p})^{p-1} = \frac{1}{Q_{0,p}(A^{1-\zeta_p})}.$$

Χρησιμοποιούμε την παρατήρηση 5.0.2. Από το Λήμμα 8.0.9 και το Πόρισμα 8.0.10 έχουμε ότι ο ενδομορφισμός $S : A \to A$ εξουδετερώνει το πρότυπο $A^{1-\zeta_p}$ ($S(A^{1-\zeta_p})$), οπότε το πρότυπο $A^{1-\zeta_p}$ αντιμετωπίζεται σαν ένα πρότυπο πάνω από τον δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]/(x^{p-1} + \cdots + x + 1)$ (βλέπε Λήμμα 8.0.9). Απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι

$$Q_{0,p}(A^{1-\zeta_p}) = (Q_{0,\zeta_p}(A^{1-\zeta_p}))^{p-1}.$$

Αλλά αυτό έπεται από το Θεώρημα 5.0.8 και το Πόρισμα 8.0.10. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Σχεσεις με Υποομαδες & Ομαδες Πηλικα

6.1 Επαγόμενοι ομομορφισμοί

6.1.1 Επαγόμενοι μορφισμοί των πλήρων αναλύσεων

Ας είναι $\lambda : G' \to G$ ένας ομομορφισμός πεπερασμένων ομάδων. Αν A είναι ένα G-πρότυπο, αυτό μπορεί να ιδωθεί και ως ένα G'-πρότυπο μέσω της

$$\sigma' a = (\lambda \sigma') a \,.$$

Έστω X_* (αντίστ. X'_*) η πλήρης ανάλυση της G (αντίστ. της G'). Θεωρώντας την X_* ως ένα σύμπλεγμα G'-προτύπων μέσω του ομομορφισμού $\lambda : G' \to G$, θέλουμε να βρούμε έναν αλυσιδωτό μορφισμό $\Lambda_* : X'_* \to X_*$, τέτοιον ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots & X'_{-2} \arrow[l, "\partial'_{-2}"'] \arrow[dd, "\Lambda_{-2}"'] & X'_{-1} \arrow[l, "\partial'_{-1}"'] \arrow[dd, "\Lambda_{-1}"'] & & X'_0 \arrow[ll, "\partial'_0"'] \arrow[dl, "\varepsilon'"] \arrow[dd, "\Lambda_0"] & X'_1 \arrow[l, "\partial'_1"'] \arrow[dd, "\Lambda_1"] & \cdots \arrow[l, "\partial'_2"'] \\
& & & \mathbb{Z} \arrow[ul, "\mu'"] \arrow[dl, "\varepsilon"] & & & \\
\cdots & X_{-2} \arrow[l, "\partial_{-2}"'] & X_{-1} \arrow[l, "\partial_1"'] & & X_0 \arrow[ll, "\partial_0"'] \arrow[ul, "\mu"'] & X_1 \arrow[l, "\partial_1"'] & \cdots \arrow[l, "\partial_2"']
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

να είναι μεταθετικό. Για να κατασκευάσουμε τον Λ_0 παρατηρούμε ότι στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & X_0' \arrow[d, "\varepsilon'"] & \\ 0 & \mathbb{Z} \arrow[l] & X_0 \arrow[l, "\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

η γραμμή είναι ακριβής και το X_0 είναι G'-ελεύθερο, άρα G'-προβολικό. Επομένως υπάρχει ένας G'-ομομορφισμός $\Lambda_0 : X_0' \to X_0$, τέτοιος ώστε

$$\varepsilon\Lambda_0 = \varepsilon' .$$

Σημειώνουμε ότι ο Λ_0 δεν είναι μοναδικός. Για να κατασκευάσουμε τον Λ_1 παρατηρούμε ότι $\varepsilon(\Lambda_0\partial_1') = 0$. Έτσι, λόγω της ακρίβειας της κάτω γραμμής στο διάγραμμα (6.1) στο X_0, η εικόνα του X_1' μέσω του $\Lambda_0\partial_1'$ περιέχεται στην εικόνα του ∂_1. Επομένως, έχουμε πάλι ότι στο

$$\begin{tikzcd} & X_1' \arrow[d] & \\ 0 & \mathsf{Im}\,\partial_1 \arrow[l] & X_1 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

η γραμμή είναι ακριβής και το X_1' G'-προβολικό. Επομένως υπάρχει ένας G'-ομομορφισμός $\Lambda_1 : X_1' \to X_1$, τέτοιος ώστε

$$\partial_1\Lambda_1 = \Lambda_0\partial_1' .$$

Παρομοίως κατασκευάζουμε $\Lambda_2, \Lambda_3, \ldots$, τέτοιους ώστε

$$\partial_r\Lambda_r = \Lambda_{r-1}\partial_r' , \qquad r = 1, 2, \ldots .$$

Για να κατασκευάσουμε τους Λ_r για $r < 0$, το X_r, για $r < 0$, θα πρέπει να είναι G'-ελεύθερο (Το X_r είναι G-ελεύθερο αλλά όχι και G'-ελεύθερο εκτός αν ο λ είναι μονομορφισμός, αφού αν $\ell \in \mathsf{Ker}\,\lambda$ με $\ell \neq 1$, τότε, για κάθε $\xi \in X_r$ με $\xi \neq 0$, έχουμε $(\ell - 1)\xi = 0$). Στο εξής, σε αυτήν την ενότητα, θεωρούμε ότι ο λ είναι μονομορφισμός. Επομένως το X_r είναι ένα G'-ελεύθερο πρότυπο για κάθε ακέραιο r. Από την ενότητα 3.2 το X_r είναι G'-κανονικό, συνεπώς υπάρχει ένας $\mathbb{Z}$-ομομορφισμός $\pi_r \in \mathsf{Hom}(X_r, X_r)$ τέτοιος ώστε $S'(\pi_r) = 1_{X_r}$. Ορίζουμε

$$\Lambda_{r-1} = S'(\pi_{r-1}\partial_r\Lambda_r D'_{r-1}) ,$$

όπου οι $\mathbb{Z}$-ομομορφισμοί D_r υπάρχουν από την πρόταση 2.8.4. Υποθέτουμε ότι $\partial_{r+1}\Lambda_{r+1} = \Lambda_r\partial'_{r+1}$. τότε

$\Lambda_{r-1}\partial'_r = {}^1S'(\pi_{r-1}\partial_r\Lambda_r D'_{r-1}\partial'_r) = S'(\pi_{r-1}\partial_r\Lambda_r) - S'(\pi_{r-1}\partial_r\Lambda_r\partial'_{r+1}D'_r) = S'(\pi_{r-1}\partial_r\Lambda_r) - S'(\pi_{r-1}\partial_r\partial_{r+1}\Lambda_r D'_r) = {}^2S'(\pi_{r-1})\partial_r\Lambda_r = \partial_r\Lambda_r\,.$

Επειδή $\partial_1\Lambda_1 = \Lambda_0\partial'_1$, επαγωγικά έχουμε

$$\partial_r\Lambda_r = \Lambda_{r-1}\partial'_r\,, \qquad r < 0\,.$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της μεταθετικότητας στο διάγραμμα (6.1) πρέπει να δείξουμε ότι $\Lambda_{-1}\mu' = \mu$. Αυτό έπεται από τις ισότητες $\partial_0\Lambda_0 = \Lambda_{-1}\partial'_0$, $\varepsilon\Lambda_0 = \varepsilon'$, $\mu'\varepsilon' = \partial'_0$, $\mu\varepsilon = \partial_0$ και το ότι ο ε' είναι επιμορφισμός.

Ο αλυσιδωτός μορφισμός $\Lambda_* : X'_* \to X_*$ δεν είναι μοναδικός. Ας είναι $\Lambda_*, \Lambda'_* : X'_* \to X_*$ δυο αλυσιδωτοί μορφισμοί επαγόμενοι από τον μορφισμό $\lambda : G' \to G$. Έστω

$$M_* = \Lambda_* - \Lambda'_*\,.$$

Τότε

$$M_r\partial'_{r+1} = \partial_{r+1}M_{r+1} \tag{6.2}$$

και

$$\varepsilon M_0 = 0. \tag{6.3}$$

Ισχυριζόμαστε ότι ο $M_* : X'_* \to X_*$ είναι μηδέν ομοτοπικός. Αφού αν θεωρήσουμε το

$$\begin{array}{ccccc} & & X'_0 & & \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle M_0} & & \\ \mathbb{Z} & \xleftarrow{\varepsilon} & X_0 & \xleftarrow{\partial_1} & X_1 \end{array} \tag{6.4}$$

αυτό, λόγω της (6.3), δίνει

$$\begin{array}{ccccc} & & X'_0 & & \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle M_0} & & \\ 0 & \longleftarrow & \operatorname{Im}\partial_1 & \xleftarrow{\partial_1} & X_1 \end{array}$$

[1]αφού ο ∂'_r είναι G'-ομομορφισμός.
[2]αφού ο $\partial_r\Lambda_r$ είναι G'-ομομορφισμός.

όπου η γραμμή είναι ακριβής. Επειδή το X'_0 είναι G'-ελεύθερο, υπάρχει $\Delta_0 : X'_0 \to X_1$ τέτοιος ώστε

$$\partial_1\Delta_0 = M_0 \tag{6.5}$$

Ακολούθως θεωρούμε το

$$\begin{tikzcd} & X'_1 \arrow[d, "M_1-\Delta_0\partial'_1"] & \\ X_0 & X_1 \arrow[l, "\partial_1"'] & X_2. \arrow[l, "\partial_2"'] \end{tikzcd}$$

Αφού $\partial_1(M_1 - \Delta_0\partial'_1) = \partial_1 M_1 - M_0\partial'_1 \overset{(6.5)}{=\!=} 0$, έχουμε

$$\begin{tikzcd} & X'_1 \arrow[d, "M_1-\Delta_0\partial'_1"] & \\ 0 & \mathsf{Im}\,\partial_2 \arrow[l] & X_2 \arrow[l, "\partial_2"'] \end{tikzcd}$$

όπου η γραμμή είναι ακριβής. Επειδή το X'_1 είναι G'-ελεύθερο, υπάρχει $\Delta_1 : X'_1 \to X_2$ τέτοιος ώστε

$$\partial_2\Delta_1 = M_1 - \Delta_0\partial'_1\,.$$

Έστω ότι με αυτόν τον τρόπο ορίσθηκαν οι $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_r$ και ότι

$$\partial_{r+1}\Delta_r + \Delta_{r-1}\partial'_r = M_r\,.$$

Αφού $\partial_{r+1}(M_{r+1} - \Delta_r\partial'_{r+1}) = \partial_{r+1}M_{r+1} - M_r\partial'_{r+1} + \Delta_{r-1}\partial'_r\partial'_{r+1} = 0$, έχουμε

$$\begin{tikzcd} & X'_{r+1} \arrow[d, "M_{r+1}-\Delta_r\partial'_{r+1}"] & \\ 0 & \mathsf{Im}\,\partial_{r+2} \arrow[l] & X_{r+2} \arrow[l, "\partial_{r+2}"'] \end{tikzcd}$$

όπου η γραμμή είναι ακριβής και το X'_{r+1} είναι G'-ελεύθερο. Άρα υπάρχει ένας G'-ομομορφισμός $\Delta_{r+1} : X'_{r+1} \to X_{r+2}$ τέτοιος ώστε

$$\partial_{r+2}\Delta_r = M_1 - \Delta_r\partial'_{r+1}\,.$$

Επομένως ο M_r, για $r > 1$, είναι μηδέν ομοτοπικός. Ορίζοντας $\Delta_{-1} = 0$, τότε και ο M_0 είναι μηδέν ομοτοπικός.Ορίζουμε $\Delta_{r-2} : X'_{r-2} \to X_{r-1}$, $r \leq 0$, ως

$$\Delta_{r-2} = S'\big(\pi_{r-1}(M_{r-1} - \partial_r \Delta_{r-1})D'_{r-2}\big)\,.$$

Τότε

$$\Delta_{-2}\partial'_{-1} = S'(\pi_{-1}M_{-1}D'_{-2}\partial'_{-1}) = S'\big(\pi_{-1}M_{-1}(1_{X_{-1}} - \partial'_0\Delta_{-1})\big) =$$
$$S'(\pi_{-1})M_{-1} - S'(\pi_{-1}\partial_0 M_0 D_{-1}) = M_{-1} - S'(\pi_{-1}\partial_0\partial_1\Delta_0 D_{-1}) = M_{-1}$$

και

$$\Delta_{r-2}\partial'_{r-1} = S'\big(\pi_{r-1}(M_{r-1} - \partial_r\Delta_{r-1})D'_{r-2}\partial'_{r-1}\big) =$$
$$S'\big(\pi_{r-1}(M_{r-1} - \partial_r\Delta_{r-1})\big) - S'\big(\pi_{r-1}(M_{r-1} - \partial_r\Delta_{r-1})\partial'_r D'_{r-1}\big) =$$
$$S'\big(\pi_{r-1}(M_{r-1} - \partial_r\Delta_{r-1})\big) - S'\big(\pi_{r-1}(\partial_r M_r D'_{r-1} - \partial_r\Delta_{r-1}\partial'_r D'_{r-1})\big) = {}^3S'(\pi_{r-1})(M_{r-1} -$$
$$\partial_r\Delta_{r-1}) = M_{r-1} - \partial_r\Delta_{r-1}\,.$$

Επομένως ο M_* είναι μηδέν ομοτοπικός. Αυτό επάγει ότι, δυο οποιοιδήποτε αλυσιδωτοί μορφισμοί $\Lambda_*, \Lambda'_* : X_* \to X'_*$, που επάγονται από τον $\lambda : G \to G'$, είναι ομοτοπικοί.

6.1.2 Επαγόμενοι ομομορφισμοί των ομάδων συνομολογίας

Σε αυτήν την ενότητα θεωρούμε αντικείμενα (G, A) όπου G είναι μια πεπερασμένη ομάδα και A είναι ένα G-πρότυπο. Λέμε ότι η απεικόνιση

$$(\lambda, f) : (G.A) \to (G', A')$$

είναι ένας μορφισμός από το αντικείμενο (G, A) στο αντικείμενο (G', A'), αν ο $\lambda : G \to G'$ είναι μονομορφισμός και ο $f : A \to A'$ είναι ομομορφισμός G-προτύπων. (Είναι προφανές ότι θεωρούμε την G'-δομή προτύπου του λ με την έννοια ότι $f\big(\lambda(g')a\big) = g'f(a)$.)

Ας είναι A_i G_i-πρότυπα, $i = 1, 2, 3$. Αν οι $\lambda_j : G_{j+1} \to G_j$, $j = 1, 2$, είναι μονομορφισμοί και οι $f_j : A_j \to A_{j+1}$, $j = 1, 2$, είναι G_{j+1}-ομομορφισμοί, ορίζουμε την σύνθεση μορφισμών

$$(\lambda_1, f_1)(\lambda_2, f_2) = (\lambda_1\lambda_2, f_1 f_2)\,.$$

Τότε $(1_G, 1_A) = 1_{(G,A)}$. (Τα αντικείμενα (G, A) και οι μορφισμοί (λ, f) που περιγράφηκαν παραπάνω αποτελούν μια κατηγορία.)

[3] αφού ο Δ_{r-1} είναι G'-ομομορφισμός.

Κατασκευάζουμε τον ομομορφισμό

$$(\lambda, f)^*_r : H^r(G, A) \to H^r(G', A')$$

ως εξής: Αν είναι t μια r-συναλυσίδα, $t \in \mathsf{Hom}_G(X_r, A)$, ορίζουμε

$$(\lambda, f)_r(t) = ft\Lambda_r \in \mathsf{Hom}_{G'}(X'_r, A')\,.$$

Αυτό είναι εφικτό επειδή ένας G-ομομορφισμός είναι και G'-ομομορφισμός, δηλαδή

$$t(g'x) = t(\lambda g' \cdot x) = (\lambda g')(tx) = g' \cdot t(x)\,.$$

Όταν ο t είναι ένας r-συνκύκλος, τότε $t\partial_{r+1} = 0$. Έτσι

$$ft\Lambda_r\partial'_{r+1} = ft\partial_{r+1}\Lambda_{r+1} = 0\,.$$

Επομένως η εικόνα ενός r-συνκύκλου μέσω του $(\lambda, f)'_r$ είναι ένας r-συνκύκλος. Αν ο t είναι ένα r-συνσύνορο, τότε $t = s\partial_r$, όπου $s \in \mathsf{Hom}_G(X_{r-1}, A)$. Έτσι

$$(\lambda, f)'_r(t) = fs\partial_r\Lambda_r = fs\Lambda_{r-1}\partial'_r\,.$$

Επομένως ο $(\lambda, f)'_r$ μεταφέρει συνσύνορα σε συνσύνορα. Συνεπώς ο (λ, f) εισάγει έναν ομομορφισμό

$$(\lambda, f)^*_r : H^r(G, A) \to H^r(G', A')\,.$$

Προς το παρόν ο $(\lambda, f)^*_r$ εξαρτάται από τον λ και τις πλήρεις αναλύσεις X_* και X'_* των G και G', αντίστοιχα, ενώ, από τα παραπάνω προκύπτει ότι είναι ανεξάρτητος του μορφισμού $\Lambda_* : X_* \to X'_*$. Για να δείξουμε την ανεξαρτησία του $(\lambda, f)^*_r$ από τις X_* και X'_*, κατ΄ αρχήν παρατηρούμε ότι ο μορφισμός σύνθεση

$$(G, A) \xrightarrow{(\lambda, f)} (G', A') \xrightarrow{(\lambda', f')} (G'', A'')$$

επάγει τον ομομορφισμό σύνθεση

$$(\lambda', f')^*_{(X'_*, X''_*)} \cdot (\lambda, f)^*_{(X_*, X'_*)} = (\lambda\lambda', f'f)^*_{(X_*, X''_*)}. \tag{6.6}$$

Στην πραγματικότητα ο μονομορφισμός $\lambda\lambda'$ επάγει τον αλυσιδωτό μορφισμό $\Lambda_*\Lambda'_* : X''_* \to X_*$, αφού

1. $\varepsilon\Lambda_0\Lambda'_0 = \varepsilon'\Lambda'_0 = \varepsilon''$,
2. $\Lambda_r\Lambda'_r\partial''_{r+1} = \Lambda_r\partial'_{r+1}\Lambda'_{r+1} = \partial_{r+1}\Lambda_{r+1}\Lambda'_{r+1}$.

Έτσι και τα δυο μέλη της (6.6) μεταφέρουν την κλάση ενός r-συνκύκλου t στην κλάση του $f'ft\Lambda_r\Lambda'_r$. Επιπλέον, ακόμα κι αν $G = G'$, $A = A'$, $\lambda = 1_G$ και $f = 1_A$, είναι δυνατόν να έχουμε διαφορετικές αναλύσεις X_* και X'_* της G. Αν συμβολίσουμε το $(1,1)^*_{(X_*,X'_*)}$ με $1_{X_*,X'_*}$ και το $(1,1)^*_{(X'_*,X_*)}$ με $1_{X'_*,X_*}$, τότε, από την (6.6), έχουμε

$$1_{X_*,X'_*} \cdot 1_{X'_*,X_*} = 1_{X'_*,X'_*}$$

και

$$1_{X'_*,X_*} \cdot 1_{X_*,X'_*} = 1_{X_*,X_*}\,.$$

Επειδή για το $1_{X_*,X_*}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα $\Lambda_* = 1_*$ (από την 6.1.1), συμπεραίνουμε ότι το $1_{X_*,X_*}$ είναι η ταυτότητα. Επομένως αν συμβολίσουμε με $(G,A)_{X_*}$ το αλυσιδωτό σύμπλεγμα με συντελεστές από το G-πρότυπο A, που προκύπτει από την πλήρη ανάλυση X_* της G (βλέπε ενότητα 3.3 (**)), το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
(G,A)_{X_*} & \xrightarrow{(\lambda,f)'} & (G',A')_{X'_*} \\
{\scriptstyle 1_{X_*,\bar{X}_*}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1_{X'_*,\bar{X}'_*}} \\
(G,A)_{\bar{X}_*} & \xrightarrow{(\lambda,f)} & (G',A')_{\bar{X}'_*}
\end{array}$$

είναι μεταθετικό ως προς ομοτοπία, από την ενότητα 6.1.1. Συνεπώς το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
H^r_{X_*}(G,A) & \xrightarrow{(\lambda,f)^*_r} & H^r_{X'_*}(G',A') \\
{\scriptstyle 1^*_{X_*,\bar{X}_*}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1^*_{X'_*,\bar{X}'_*}} \\
H^r_{\bar{X}_*}(G,A) & \xrightarrow{(\lambda,f)^*_r} & H^r_{\bar{X}'_*}(G',A')
\end{array}$$

είναι μεταθετικό. Έτσι ο $(\lambda,f)^*_r$ είναι ανεξάρτητος από τις πλήρεις αναλύσεις X_* και X'_* των G και G', αντίστοιχα. (Στην πραγματικότητα δείξαμε ότι η αντιστοίχιση του $H^r(G,A)$ στο ζεύγος (G,A) είναι ένας συναρτητής από την κατηγορία με αντικείμενα τα (G,A) και μορφισμούς τους (λ,f), στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων.)

Έστω, όπως παραπάνω, $\lambda : G \to G'$ ένας μονομορφισμός και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα όπου η επάνω γραμμή είναι μια ακριβής ακολουθία G-προτύπων, η κάτω γραμμή είναι μια ακριβής ακολουθία G'-προτύπων και f, g, h είναι G'-ομομορφισμοί. Ας είναι X_* η πλήρης ανάλυση της G και X'_* η πλήρης ανάλυση της G'. Τότε το διάγραμμα των μορφισμών των αλυσιδωτών συμπλεγμάτων

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_G(X_*, A) \arrow[r, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_*}, i)"] \arrow[d, "(\Lambda_*, f)'"] & \mathsf{Hom}_G(X_*, B) \arrow[r, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_*}, j)"] \arrow[d, "(\Lambda_*, g)'"] & \mathsf{Hom}_G(X_*, C) \arrow[r] \arrow[d, "(\Lambda_*, h)'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{G'}(X'_*, A') \arrow[r, "\mathsf{Hom}_{G'}(1_{X'_*}, i)"] & \mathsf{Hom}_{G'}(X'_*, B') \arrow[r, "\mathsf{Hom}_{G'}(1_{X'_*}, j)"] & \mathsf{Hom}_{G'}(X'_*, C') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό από αναζήτηση διαγράμματος. Επιπλέον, οι γραμμές είναι ακριβείς, από την παρατήρηση 2.6.7. Από το θεώρημα 2.7.7 έχουμε ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^r(G, B) \arrow[r] \arrow[d, "(\lambda, g)^*_r"] & H^r(G, C) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "(\lambda, h)^*_r"] & H^{r+1}(G, A) \arrow[r] \arrow[d, "(\lambda, f)^*_{r+1}"] & H^{r+1}(G, B) \arrow[r] \arrow[d, "(\lambda, g)^*_{r+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^r(G', B') \arrow[r] & H^r(G', C') \arrow[r, "\delta'^*"] & H^{r+1}(G', A') \arrow[r] & H^{r+1}(G', B') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

6.1.3 Οι απεικονίσεις περιορισμού (restriction) & μεταφοράς (transfer)

Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και $\lambda : U \to G$ ο εγκλεισμός στην G της υποομάδας U της G. Ας είναι A ένα G-πρότυπο, τότε το A είναι, επίσης, και ένα U-πρότυπο.
Ο μορφισμός $(\lambda, 1_A)^*_r$, που ορίσθηκε στην προηγούμενη ενότητα, συμβολίζεται ως $res^r_{G,U} : H^r(G, A) \to H^r(U, A)$ (ή απλώς $res^r_{G,U}$) και καλείται **απεικόνιση περιορισμού** από την U στην G.

Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και $\lambda : U \to G$ ο εγκλεισμός στην G της υποομάδας U της G. Έστω X_* (αντίστ. X'_*) η πλήρης ανάλυση της G (αντίστ. της U). Στην ενότητα 6.1.1 είδαμε ότι ο λ εισάγει έναν αλυσιδωτό μορφισμό $\Lambda_* : X'_* \to X_*$. Παρομοίως κατασκευάζουμε έναν μορφισμό $M_* : X_* \to X'_*$ συμπλεγμάτων U-προτύπων, τέτοιον ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots & X_{-1} \arrow[l, "\partial_{-1}"'] \arrow[dd, "M_{-1}"'] & & X_0 \arrow[ll, "\partial_0"'] \arrow[dl, "\varepsilon"] \arrow[dd, "M_0"] & \cdots \arrow[l, "\partial_1"'] \\
 & & \mathbb{Z} \arrow[ul, "\mu"] \arrow[dl, "\mu'"] & & \\
\cdots & X'_{-1} \arrow[l, "\partial'_{-1}"'] & & X'_0 \arrow[ll, "\partial'_0"'] \arrow[ul, "\varepsilon'"'] & \cdots \arrow[l, "\partial'_1"']
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Αν το A είναι ένα G-πρότυπο (συνεπώς είναι και ένα U-πρότυπο), ορίζουμε τον συναλυσιδωτό **μορφισμό μεταφοράς**

$$V_* : \mathsf{Hom}_U(X'_*, A) \to \mathsf{Hom}_G(X_*, A)$$

ως

$$V_r(t) = S_{U.G}(tM_r) = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i t M_r \sigma_i^{-1} ,$$

όπου $G =_{i=1}^{s} \sigma_i U$.

Σημειώνουμε ότι

$$\delta^r(V_r(t)) = S_{U.G}(tM_r\partial_{r+1}) \quad = S_{U.G}(t\partial'_{r+1}M_{r+1}) = S_{U.G}({\delta'}^r(t) \cdot M_{r+1}) \quad = V_{r+1}({\delta'}^r(t)) .$$

Έτσι ο V απεικονίζει συνσύνορα σε συνσύνορα και συνκύκλους σε συνκύκλους. Επομένως ο V_* εισάγει τον ομομορφισμό

$$V^r_{U,G} : H^r(U, A) \to H^r(G, A)$$

έτσι ώστε

$$V^r_{U,G}\big(t_t + \delta' \, \mathsf{Hom}_U(X'_{r+1}, A)\big) = V_r(t) + \delta \, \mathsf{Hom}_G(X_{r-1}, A) .$$

Σημειώνουμε ότι αν $X'_* = X_*$ και $M_* = 1_{*,U}$, όπου $1_{*,U}$ είναι ο ταυτοτικός μορφισμός του συμπλέγματος X_*, ιδωμένου ως μια πλήρη ανάλυση της U, τότε

$$V_r(t) = S_{U.G}(t) = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i t \sigma_i^{-1}\,,$$

όπου $G =_{i=1}^{s} \sigma_i U$.

Θεώρημα 6.1.1. *Ας είναι $\lambda : G' \to G$ ένας μονομορφισμός, A (αντιστ. A') ένα G-πρότυπο (αντιστ. ένα G'-πρότυπο). Έστω $f : A \to A'$ ένας G'-ομομορφισμός και $U \leq G$, $U' \leq G'$. Αν ισχύουν*

1. $\lambda(U') = U\,,$
2. $\lambda(G')U = U\lambda(G') = G\,,$
3. $[G' : U'] = [G : U]\,,$

τότε το διάγραμμα

$$\begin{CD} H^r(U,A) @>{(\lambda,f)^*}>> H^r(U',A') \\ @V{V^r_{U,G}}VV @VV{V^r_{U',G'}}V \\ H^r(G,A) @>{(\lambda,f)^*}>> H^r(G',A') \end{CD} \tag{6.7}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Έστω $c' = U'\bar{c}\,'$ ένα αριστερό σύμπλοκο (coset) της U' στην G'. Έστω $G' =_{c'} U'\bar{c}\,'$. Τότε $\lambda(G') = \bigcup_{c'} \lambda U' \cdot \lambda\bar{c}\,'$. Από τις (i) και (ii) έχουμε

$$G =_{c'} U \cdot \lambda\bar{c}\,'$$

και, λόγω της (iii), αυτή είναι μια ξένη ένωση. Για να δείξουμε ότι το διάγραμμα (6.7) είναι μεταθετικό, παρατηρούμε ότι, αφ' ενός ισχύει

$$(\lambda, f)^* V_r(t) = \sum_{c'} \bar{c}\,' f t \Lambda_r \bar{c}\,'^{-1} = S_{U',G'}(f t \Lambda_r)\,,$$

αφού $f\lambda(\sigma') = \sigma' \cdot f$ και $\lambda(\bar{c}\,')^{-1} = \Lambda_r(\bar{c}\,')^{-1}$, αφ' ετέρου ισχύει

$$V'_r(\lambda, f)^*(t) = V'_r(f t \Lambda_r) = S_{U',G'}(f t \Lambda_r)\,.$$

□

Πρόταση 6.1.2. *Αν $U \leq G$ και η*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

είναι μια ακριβής ακολουθία G-προτύπων, (επομένως και U-προτύπων), το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} H^r(U,C) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "V^r_{U,G}"'] & H^{r+1}(U,A) \arrow[d, "V^{r+1}_{U,G}"'] \\ H^r(G,C) \arrow[r, "\delta^*"] & H^{r+1}(G,A) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Έστω X_* μια πλήρης ανάλυση της G, η οποία μπορεί να ιδωθεί και ως πλήρης ανάλυση της U. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_U(X_*,A) \arrow[r, "\mathsf{Hom}_U(1_{X_*},i)"] \arrow[d, "V_r"] & \mathsf{Hom}_U(X_*,B) \arrow[r, "\mathsf{Hom}_U(1_{X_*},j)"] \arrow[d, "V_r"] & \mathsf{Hom}_U(X_*,C) \arrow[r] \arrow[d, "V_r"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_G(X_*,A) \arrow[r, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_*},i)"] & \mathsf{Hom}_G(X_*,B) \arrow[r, "\mathsf{Hom}_G(1_{X_*},j)"] & \mathsf{Hom}_G(X_*,C) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{6.8}$$

όπου οι γραμμές είναι ακριβείς σε κάθε βαθμό. Το διάγραμμα (6.8) είναι μεταθετικό αφού

$$V_r \, \mathsf{Hom}_U(1_{X_r}, i)t = S_{U,G}(it) = iS_{U,G}(t) = \mathsf{Hom}_G(1_{X_r}, i)V_r t$$

και, παρομοίως, το δεξί τετράγωνο είναι μεταθετικό.
Από το θεώρημα 2.7.7 προκύπτει ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^r(U,B) \arrow[r] \arrow[d, "V^r_{U,G}"] & H^r(U,C) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "V^r_{U,G}"] & H^{r+1}(U,A) \arrow[r] \arrow[d, "V^{r+1}_{U,G}"] & H^{r+1}(U,B) \arrow[r] \arrow[d, "V^{r+1}_{U,G}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H^r(G,B) \arrow[r] & H^r(G,C) \arrow[r, "\delta^*"] & H^{r+1}(G,A) \arrow[r] & H^{r+1}(G,B) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. □

Ας είναι A, B G-πρότυπα, $U \leq A$, και $f : A \to B$ ένας U-ομομορφισμός. Θεωρούμε τον ομομορφισμό

$$V^r_{U,G} \cdot f^* = res^r_{G,U} ,$$

όπου $f^* : H^r(U, A) \to H^r(U, B)$ είναι ο ομομορφισμός που επάγεται από τον f. Έστω X_* μια πλήρης ανάλυση της G (συνεπώς, και μια πλήρης ανάλυση της U). Έστω $t \in \mathsf{Hom}_G(X_r, A)$ ένας συνκύκλος που αναπαριστά τον $\bar{t} \in H^r(G, A)$. Τότε ο t, ιδωμένος ως U-ομομορφισμός, είναι ένας συνκύκλος που αναπαριστά τον $res_{G,U}\bar{t}$. Έτσι ο ft αναπαριστά τον $f^* \cdot res_{G,U}\bar{t} \in H^r(U, B)$ και ο $S_{U,G}(ft)$ αναπαριστά τον $V^r_{U,G} \cdot f^* \cdot res_{G,U}\bar{t} \in H^r(G, B)$. Αφού οι ft, $S_{U,G}(ft)$ είναι G-ομομορφισμοί συμπεραίνουμε ότι

$$V^r_{U,G} \cdot f^* \cdot res_{G,U} = \big(S_{U,G}(f)\big)^r : H^r(G, A) \to H^r(G, B) \tag{6.9}$$

όπου $\big(S_{U,G}(f)\big)^r$ είναι ο $\mathbb{Z}$-ομομορφισμός που επάγεται από τον G-ομομορφισμό $S_{U,G}(f) : \mathsf{Hom}_G(X_r, A) \to \mathsf{Hom}_G(X_r, B)$.

Παρατήρηση 6.1.3. Μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση της (6.9) προκύπτει όταν $f = 1_A$. Τότε

$$V^r_{U,G} \cdot 1^*_A \cdot res_{G,U} = \Big(\sum_i \sigma_i 1_A \sigma_i^{-1}\Big)^* = \big([G : U]\big)^* ,$$

όπου $[G : U]$ είναι ο δείκτης της U στην G. Έτσι ο $V_{U,G} \cdot res_{G,U}$ είναι πολλαπλασιασμός μέσω του δείκτης της U στην G.

6.2 Sylow υποομάδες

Έστω G μια ομάδα τάξης n. Για τυχόντα πρώτο αριθμό p γράφουμε

$$n = p^{\upsilon_p} m_p ,$$

έτσι ώστε ο p και ο m_p να είναι σχετικώς πρώτοι. Οι υποομάδες τάξης p^{υ_p} καλούνται **p-Sylow υποομάδες** της G.

Ας είναι A ένα G-πρότυπο και το σύνολο

$$H^r(G, A)_p = \big\{x \in H^r(G, A) \ : \ \mathsf{Ord}(x) = p^k, \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{N}\big\} .$$

Το $H^r(G, A)_p$ καλείται **p-πρωτεύουσα συνιστώσα του** $H^r(G, A)$. Ισχύει

$$H^r(G, A) = \sum_{p|n} H^r(G, A)_p .$$

Πρόταση 6.2.1. *Ας είναι* $\mathsf{inj}_p : H^r(G,A)_p \to H^r(G,A)$ *ο εγκλεισμός του p-οστού όρου του αθροίσματος στο ευθύ άθροισμα και* $\mathsf{proj}_p : H^r(G,A) \to H^r(G,A)_p$ *η προβολή επί του p-οστού όρου του αθροίσματος* $H^r(G,A)_p$. *Αν* G_p *είναι μια p-Sylow υποομάδα της* G, *τότε*

1. *Η ακολουθία*

$$0 \longrightarrow H^r(G,A)_p \xrightarrow{res^r_{G,G_p}\cdot \mathsf{inj}_p} H^r(G_p,A)$$

είναι ακριβής.

2. *Η ακολουθία*

$$H^r(G_p,A) \xrightarrow{\mathsf{proj}_p \cdot V^r_{G_p,G}} H^r(G,A)_p \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

3. $H^r(G_p,A) \cong \mathsf{Im}(res^r_{G,G_p}) \oplus \mathsf{Ker}(V^r_{G_p,G})$.

Απόδειξη. Έστω ότι η τάξη της G ισούται με $n = p^{\upsilon_p} m_p$, όπου $(m_p,p)=1$. Τότε υπάρχουν ακέραιοι m'_p και s, τέτοιοι ώστε

$$m_p m'_p + p^{\upsilon_p} s = 1. \tag{6.10}$$

Έστω $\bar{t} \in H^r(G,A)_p$, τότε

$$\bar{t} = m_p m'_p \bar{t} = V^r_{G_p,G} m'_p res^r_{G,G_p} \bar{t}\,.$$

Επομένως ο res_{G,G_p}, όταν περιορισθεί στο $H^r(G,A)_p$, είναι μονομορφισμός και ο $V_{G_p,G}$, όταν ακολουθείται από τον proj_p, είναι επιμορφισμός. Αυτό αποδεικνύει τις (i) και (ii).
Για την απόδειξη της (iii) θεωρούμε $\beta \in H^r(G_p,A)$ και γράφουμε

$$\beta = m'_p res^r_{G,G_p} V^r_{G_p,G}\beta + \big(\beta - m'_p res^r_{G,G_p} V^r_{G_p,G}\beta\big). \tag{6.11}$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους βρίσκεται στην $\mathsf{Im}(res^r_{G,G_p})$. Εφαρμόζοντας την $V^r_{G_p,G}$ στο δεύτερο μέλος του δεξιού μέλους, από την (6.10) και την (ii), έχουμε $sp^{\upsilon_p} V^r_{G_p,G}\beta = 0$. Επιπλέον, αν $(p,q)=1$, από την παρατήρηση 6.1.3, έχουμε ότι η res^r_{G,G_p} απεικονίζει το $H^r(G,A)_q$ στο μηδέν. Επομένως

$$H^r(G_p,A) \cong \mathsf{Im}(res^r_{G,G_p}) + \mathsf{Ker}(V^r_{G_p,G})\,.$$

Για να αποδείξουμε ότι αυτό είναι ευθύ άθροισμα, υποθέτουμε ότι $\beta = res^r_{G,G_p}\alpha$ και $V^r_{G_p,G}\beta = 0$. Τότε, από την παρατήρηση 6.1.3, έχουμε ότι $V^r_{G_p,G} res^r_{G,G_p}\alpha = m_p\alpha = 0$. Αφού $\alpha \in H^r(G,A)_p$ και $(m_p,p) = 1$, έχουμε $\alpha = 0$ και, συνεπώς, $\beta = 0$. □

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει το

1. Αν η ομάδα G είναι τάξης n και G_p είναι μια p-Sylow υποομάδα της, τότε η απεικόνιση $\sum_{p|n} res^r_{G,G_p} : H^r(G,A) = \sum_{p|n} H^r(G,A)_p \longrightarrow \sum_{p|n} H^r(G_p,A)$ είναι μονομορφισμός. Επιπλέον, η εικόνα της είναι ευθύ άθροισμα.
2. Αν η $H^r(G_p,A)$ είναι πεπερασμένη για κάθε $p \mid n$, τότε η $H^r(G,A)$ είναι πεπερασμένη.
3. Αν η $H^r(G_p,A) = 0$ για κάθε $p \mid n$, τότε η $H^r(G,A) = 0$.

6.3 Γενίκευση των G-κανονικών προτύπων

Πρόταση 6.3.1. *Έστω $U \le G$, $G = \bigcup_\sigma U\sigma$, όπου επιλέγουμε $\sigma = 1$ για το σύμπλοκο U. Υποθέτουμε ότι το A είναι ένα G-πρότυπο κα το $B \subset A$ είναι ένα U-υποπρότυπο τέτοιο ώστε $A = \sum \sigma B$. Τότε*

$$H^r(G,A) \cong H^r(U,B) \tag{6.12}$$

Απόδειξη. Ας είναι $\mathsf{proj}_1 : A \to B$ η προβολή του A επί του όρου $1 \cdot B$ του αθροίσματος. Αν $\alpha \in A$, $\alpha = \sum \sigma b_\sigma$, τότε $\mathsf{proj}_1 \alpha = b_1$. Για $\tau \in U$ έχουμε $\mathsf{proj}_1 \tau\alpha = \tau b_1 = \tau \,\mathsf{proj}_1 \alpha$. Επομένως ο proj_1 είναι ένας U-ομομορφισμός. Έστω $i : B \to A$ ο U-εγκλεισμός. Τότε ο $i \cdot \mathsf{proj}_1 : A \to A$ είναι U-ομομορφισμός. Από την (6.9) έχουμε

$$V^r_{U,G} \cdot (i \cdot \mathsf{proj}_1)^* \cdot res_{G,U} = \big(S_{U,G}(i \cdot \mathsf{proj}_1)\big)^r$$

και

$$\big(S_{U,G}(i \cdot \mathsf{proj}_1)\big)^r \big(\textstyle\sum_\sigma \sigma b_\sigma\big) = \displaystyle\sum_\tau \tau (i \cdot \mathsf{proj}_1) \sum_\sigma \tau^{-1}\sigma b_\sigma \qquad = \sum_\tau \tau b_\tau \,.$$

Επομένως $S_{U,G}(i \cdot \mathsf{proj}_1) = 1_A$ και έτσι

$$V^r_{U,G} \cdot i^* \cdot \mathsf{proj}_1^* \cdot res_{G,U} = 1_{H^r(G,A)} \,.$$

Ακολούθως, αν ο $t \in \mathsf{Hom}_U(X_r, B)$ είναι ένας συνκύκλος, τότε $it \in \mathsf{Hom}_U(X_r, A)$, $S_{U,G}(it) \in \mathsf{Hom}_G(X_r, A)$ και $\mathsf{proj}_1 S_{U,G}(it) \in \mathsf{Hom}_U(X_r, B)$. Επειδή

$$\mathsf{proj}_1 S_{U,G}(it) = \mathsf{proj}_1 S_{U,G}\big(\sum \sigma it \sigma^{-1}\big) = it\,,$$

έχουμε ότι

$$\mathsf{proj}_1^* \, res^r_{G,U} V^r_{U,G} i^* = 1_{H^r(U,B)}\,.$$

Επομένως οι

$$V^r_{U,G} i^* : H^r(U,B) \to H^r(G,A)$$

και

$$\mathsf{proj}_1^* \, res^r_{G,U} : H^r(G,A) \to H^r(U,B)$$

είναι ο ένας αντίστροφος του άλλου. □

Παρατήρηση 6.3.2. Στην παραπάνω πρόταση αν $U = \{1\}$, τότε το B είναι ένα $\mathbb{Z}$-πρότυπο και, έτσι, το A είναι G-κανονικό. Άρα $H^r(G,A) = 0$. (βλέπε πρόταση 3.4.8). Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση της (6.12).

6.4 Η απεικόνιση εμφύσησης

Σε αυτήν την ενότητα μελετάμε ιδιότητες των κανονικών υποομάδων της G. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν ισχύουν για ομάδες συνομολογίας θετικής διάστασης.

Ας είναι $U \trianglelefteq G$. Τότε το

$$A^U = \{a \in A \ : \ (\forall\, \sigma \in G)\ \sigma a = a\}$$

είναι ένα G/U-πρότυπο με $(\sigma_i U)a = \sigma_i a$. Αυτή η δράση της G/U στην A^U είναι καλά ορισμένη, αφού, αν $\sigma_i v U = \sigma_i U$, τότε $(\sigma_i v U)a = \sigma_i v a = \sigma_i a$. Για να επιβεβαιώσουμε ότι $(\sigma_i U)a \in A^U$, παρατηρούμε ότι

$$v(\sigma_i U)a = v\sigma_i a = \sigma_i v' a = \sigma_i a\,.$$

Έστωσαν $i : A^U \to A$ ο G-ομομορφισμός εγκλεισμός και $\lambda : G \to G/U$ ο κανονικός επιμορφισμός. Τότε η απεικόνιση

$$(\lambda, i)^*_r : H^r(G/U, A^U) \to H^r(G,A)\,,$$

όπως ορίστηκε στην ενότητα 6.1.2 είναι καλά ορισμένη για $r \geq 1$. Η $(\lambda, i)^*$ καλείται **απεικόνιση εμφύσησης** και συμβολίζεται με $inf^r_{G/U,G}$.

Στην παρακάτω πρόταση 6.4.4 θα δείξουμε ότι, υπό κατάλληλες υποθέσεις, η ακολουθία

$$0 \longrightarrow H^r(G/U, A^U) \xrightarrow{\text{inf}} H^r(G, A) \xrightarrow{res} H^r(U, A)$$

είναι ακριβής. Εδώ θα δείξουμε μέρος αυτού του ισχυρισμού, συγκεκριμένα ότι

$$res^r_{G,U} inf^r_{G/U,G} = 0 \tag{6.13}$$

Έστω $\lambda : G \to G/U$ ο κανονικός επιμορφισμός. Θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d, "1_{\mathbb{Z}}"'] & X_0 \arrow[l] \arrow[d, "\Lambda_0"'] & X_1 \arrow[l] \arrow[d, "\Lambda_1"] & \cdots \arrow[l] \\
0 & \mathbb{Z} \arrow[l] & \bar{X}_0 \arrow[l] & \bar{X}_1 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{6.14}$$

όπου η πάνω γραμμή (αντίστ. η κάτω γραμμή) είναι η κανονικοποιημένη bar ανάλυση του τετριμμένου G-προτύπου (αντίστ. του G/U-προτύπου) $\mathbb{Z}$ και ισχύει

$$\Lambda_r \sigma[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r] = \lambda\sigma[\lambda\sigma_1, \lambda\sigma_2, \ldots, \lambda\sigma_r] = \sigma U[\sigma_1 U, \sigma_2 U, \ldots, \sigma_r U]\,.$$

Τότε, από «κυνήγι διαγράμματος» προκύπτει ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{G/U}(\bar{X}_r, A^U) \arrow[r, "(\lambda_r, i)'"] \arrow[d, "(1_{\bar{X}_r}, 1_{A^U})'"] & \mathsf{Hom}_G(X_r, A) \arrow[d, "(1_{X_r}, 1_A)'"] \\
\mathsf{Hom}_{U/U}(\bar{X}_r, A^U) \arrow[r, "(\lambda_r, i)'"] & \mathsf{Hom}_U(X_r, A)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Επομένως το διάγραμμα των επαγομένων ομομορφισμών

$$\begin{tikzcd}
H^r(G/U, A^U) \arrow[r, "inf^r_{G/U,G}"] \arrow[d, "res^r_{G/U,U/U}"] & H^r(G, A) \arrow[d, "res^r_{G,U}"] \\
H^r(U/U, A^U) \arrow[r, "inf^r_{U/U,U}"] & H^r(U, A)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Επειδή $H^r(U/U, A^U) = 0$ έχουμε ότι ισχύει η (6.13).

Πρόταση 6.4.1. *Η ακολουθία*

$$0 \longrightarrow H^1(G/U, A^U) \xrightarrow{\inf^1_{G/U,G}} H^1(G, A) \xrightarrow{res^1_{G,U}} H^1(U, A)$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το διάγραμμα (6.14). Έστω $\bar{t} \in H^1(G/U, A^U)$, τέτοιο ώστε $\inf^1_{G/U,G}\bar{t} = 0$. Έστω $t \in \mathsf{Hom}_{G/U}(\bar{X}_1, A^U)$ ένας συνκύκλος που αναπαριστά το $\bar{t}$. Τότε ο $(\lambda_1, i)'t \in \mathsf{Hom}_G(X_1, A)$ είναι ένας κύριος ομομορφισμός (βλέπε ενότητα 4.3), δηλαδή ισχύει

$$\big((\lambda_1, i)'t\big)[\sigma] = it[\sigma U] = \sigma a - a\,.$$

για κάποιο $a \in A$. Ισχυριζόμαστε ότι $a \in A^U$, αφού, αν $\sigma \in U$, τότε $\sigma a - a = it[\sigma U] = 0$. Επομένως

$$it[\sigma U] = \sigma a - a = i(\sigma U a - a)\,.$$

Επειδή ο i είναι μονομορφισμός, έπεται ότι

$$t[\sigma U] = \sigma U a - a\,,$$

όταν ο t είναι ένα συνσύνορο. Για να δείξουμε την ακρίβεια στην $H^1(G, A)$, θεωρούμε $\bar{t} \in H^1(G, A)$, τέτοιο ώστε $res^1_{G,U}\bar{t} = 0$. Έστω $t \in \mathsf{Hom}_G(X_1, A)$ ένας συνκύκλος που αναπαριστά το $\bar{t}$. Τότε $t[\upsilon] = \upsilon a - a$, για $\upsilon \in U, a \in A$. Ο συνκύκλος $s \in \mathsf{Hom}_G(X_1, A)$ που ορίζεται ως $s[\sigma] = t[\sigma] - (\sigma a - a)$, επίσης αναπαριστά το $\bar{t}$ αλλά έχει το πλεονέκτημα ότι $s[\upsilon] = 0$ για $\upsilon \in U$. Αφού ο s είναι ένας συνκύκλος, έχουμε ότι

$$(\delta s)[\sigma, \tau] = \sigma s[\tau] - s[\sigma\tau] + s[\sigma] = 0. \tag{6.15}$$

Επιλέγοντας $\sigma = \upsilon$ στην (6.15) έχουμε

$$s[\sigma\upsilon] = s[\sigma]\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι το s είναι μια συνάρτηση βήματος (η τιμή του s είναι σταθερή σε κάθε αντιπρόσωπο ενός συμπλόκου σU .)Επιλέγοντας $\tau = \upsilon$ στην (6.15) και επειδή $U \trianglelefteq G$, έχουμε

$$\upsilon s[\tau] = s[\upsilon\tau] = s[\tau\upsilon_1] = s[\tau]\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι $s[\tau] \in A^U$. Συνεπώς το s εισάγει μια συναλυσίδα $s' \in \mathsf{Hom}_{G/U}(\bar{X}_1, A^U)$ που ορίζεται ως

$$s'[\sigma U] = s[\sigma]\,.$$

Αφού $s[\sigma] = t[\sigma]$ modulo συνσύνορα, έχουμε αποδείξει την ακρίβεια στην $H^1(G, A)$. $\square$

Πρόταση 6.4.2. *Ας είναι*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ j\ } C \longrightarrow 0$$

μια ακριβής ακολουθία G-ομομορφισμών. Αν $H^1(G, A) = 0$, τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A^G \xrightarrow{i|_{A^G}} B^G \xrightarrow{j|_{B^G}} C^G \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Τετριμμένα η ακολουθία είναι δεξιά ακριβής. Θα δείξουμε ότι η $j|_{B^G}$ επί επί. Έστω $c \in C^G$, τότε $c = jb$ για κάποιο $b \in B$. Άρα $\sigma b - b = ia_\sigma$, για κάποιο $a_\sigma \in A$, το οποίο εξαρτάται από το σ. Αφού $a_1 = 0$, το a_σ είναι μια 1-συναλυσίδα. Επιπλέον, αφού

$$i(\sigma a_\tau - a_{\sigma\tau} + a_\sigma) = \sigma(\tau b - b) - (\sigma\tau b - b) + \sigma b - b = 0,$$

το a_σ είναι ένας 1-συνκύκλος. Αφού $H^1(G, A) = 0$, υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε $a_\sigma = \sigma\alpha - \alpha$ (δηλαδή το a_σ είναι ένα 1-συνσύνορο). Συνεπώς $ia_\sigma = i(\sigma\alpha - \alpha) = \sigma b - b$. Άρα $\sigma(b - i\alpha) - (b - i\alpha) = 0$ και, επομένως, $b - i\alpha \in B^G$ και $j(b - i\alpha) = c$. $\square$

Πρόταση 6.4.3. *Αν το B είναι G-κανονικό, τότε το B^U είναι G/U-κανονικό.*

Απόδειξη. Έστω $B = \sum_{\sigma\in G} \sigma D$ (ευθύ). Έστω $b \in B^G \subseteq B$, τότε $b = \sum_{\sigma\in G} \sigma d_\sigma$. Αφού $\upsilon^{-1} b = b$ για $\upsilon \in U$, έχουμε ότι

$$\sum_{\sigma\in G} \sigma d_\sigma = \sum_{\sigma\in G} \upsilon^{-1}\sigma d_\sigma = \sum_{\sigma\in G} \sigma d_{\upsilon\sigma}\,.$$

Συνεπώς $\upsilon^{-1} b = b$, αν-ν, $d_\sigma = d_{\upsilon\sigma}$. Επομένως

$$b = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i S_{\{1\},U}(d_{\sigma_i})$$

(μοναδικά), όπου $G =_{i=1}^{s} \sigma_i U$. Άρα

$$B^U = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i S_{\{1\},U}(D)\,,$$

όπου $S_{\{1\},U}(D)$ είναι το $\mathbb{Z}$-πρότυπο που παράγεται από τα ίχνη των στοιχείων του D. □

Πρόταση 6.4.4. *Ας είναι U μια κανονική υποομάδα της G. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $\upsilon = 1, 2, \ldots, r-1$, ισχύει*

$$H^{\upsilon}(U, A) = 0. \tag{6.16}$$

Τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow H^r(G/U, A^U) \xrightarrow{\inf} H^r(G, A) \xrightarrow{res} H^r(U, A) \tag{6.17}$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο r. Από την πρόταση 6.4.1 η ακολουθία είναι ακριβής για $r = 1$. Για $r > 1$ υποθέτουμε ότι η ακολουθία (6.17) είναι ακριβής για κάθε διάσταση $< r$. Τότε από την πρόταση 6.4.2 και την (;;) μπορούμε να κατασκευάσουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^U & \longrightarrow & B^U & \longrightarrow & C^U & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{6.18}$$

όπου οι κάθετες απεικονίσεις είναι οι εγκλεισμοί και το B είναι G-κανονικό (βλέπε παρατήρηση που αφορά την (;;)). Επομένως, από την πρόταση 6.4.3, το B^U είναι G/U-κανονικό. Άρα, για κάθε ν, έχουμε

$$0 = H^{\nu-1}(G, C) \longrightarrow H^{\nu-1}(G, C) \xrightarrow[\sim]{\delta^*} H^{\nu}(G, A) \longrightarrow H^{\nu}(G, B) = 0\,.$$

Παρομοίως

$$H^{\nu-1}(U, C) \xrightarrow[\sim]{\delta^*} H^{\nu}(G, A)$$

και

$$H^{\nu-1}(G/U, C^U) \xrightarrow[\sim]{\delta^*} H^{\nu}(G/U, A^U)\,.$$

Από την (6.18), την πρόταση 6.1.2 καιμε αναζήτηση διαγράμματος, παρόμοιο με αυτό της ενότητας 6.1.2, έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
H^{r-1}(U,C) \arrow[r, "\delta^*"] & H^r(U,A) \\
H^{r-1}(G,C) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[u, "res"] & H^r(G,A) \arrow[u, "res"] \\
H^{r-1}(G/U,C^U) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[u, "inf"] & H^r(G/U,A^U) \arrow[u, "inf"] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

όπου η αριστερή στήλη είναι ακριβής από την επαγωγική υπόθεση. Άρα και η δεξιά στήλη είναι ακριβής. □

Παρατήρηση 6.4.5. Μπορεί να δειχθεί ότι το G/U δρα επί των ομάδων $H^r(U,A)$. Οι Hochschild και Serre (Θεώρ. 2, σελ. 129, [13]) έδειξαν, χρησιμοποιώντας φασματικές ακολουθίες, ότι με δεδομένη την (6.16), η (6.17) μπορεί να επεκταθεί σε μια ακριβή ακολουθία

$$0 \to H^r(G/U,A^U) \to H^r(G,A) \to H^r(U,A)^{G/U} \to H^{r+1}(G/U,A^U) \to \cdots$$

6.5 Συνομολογιακά τετριμμένο

Ας είναι G μια πεπερασμένη ομάδα. Το G-πρότυπο A καλείται **συνομολογιακά τετριμμένο**, αν για κάθε υποομάδα U της G και κάθε ακέραιο r ισχύει $H^r(U,A) = 0$.

Θεώρημα 6.5.1. ***(Nakayama-Tate)*** *Ισχύει $H^\nu(U,A) = 0$, για δυο οποιουσδήποτε διαδοχικούς ακεραίους ν και κάθε υποομάδα U της G, τότε και μόνο τότε, αν το A είναι συνομολογιακά τετριμμένο.*

Σημείωση: Το κριτήριο του Nakayama για το συνομολογιακά τετριμμένο βρίσκεται στο [17]. Για άλλα κριτήρια που αφορούν το συνομολογιακά τετριμμένο βλέπε D.S. Rim [20].

Παρακάτω θα δείξουμε, αρχικά, κάποια αποτελέσματα από που προκύπτουν από τις παραπάνω προτάσεις και, ακολούθως, χρησιμοποιώντας τα μαζί με τους εναλλακτές διάστασης, θα αποδείξουμε το θεώρημα Nakayama-Tate για το συνομολογιακά τετριμμένο.

Πρόταση 6.5.2. *Ας είναι U μια κανονική υποομάδα της G και A ένα G-πρότυπο. Τότε υπάρχει μια ακριβής ακολουθία*

$$0 \longleftarrow H^0(G/U, A^U) \xleftarrow{\ \varphi\ } H^0(G,A) \xleftarrow{\ \psi\ } H^0(U,A)\ . \tag{6.19}$$

Απόδειξη. Από την ενότητα 3.5.1 αρκεί να δείξουμε την ύπαρξη μιας ακριβούς ακολουθίας

$$0 \longleftarrow A^G/S_{U,G}(A^U) \xleftarrow{\ \varphi\ } A^G/S_G(A) \xleftarrow{\ \psi\ } A^U/S_U(A)\ . \tag{6.20}$$

Ορίζουμε την φ ως

$$\varphi(a+S_G(A)) = a + S_{U,G}(A^U)\,,$$

για $a \in A^G$. Αυτή είναι καλά ορισμένη και επί αφού

$$S_G(A) = S_{U,G}S_U(A) \subseteq S_{U,G}(A^U)\,.$$

Ορίζουμε την ψ ως

$$\psi(a+S_U(A)) = S_{U,G}(a) + S_G(A)\,.$$

Αυτή είναι καλά ορισμένη αφού, αν $a + S_U(a') + S_U(A)$ είναι μια άλλη αναπαράσταση του συμπλόκου $a + S_U(A)$, τότε

$$\psi\big(a + S_U(a') + S_U(A)\big) = S_{U,G}(a) + S_{U,G}S_G(a') + S_G(A) =$$
$$S_{U,G}(a) + S_G(a') + S_G(A) = S_{U,G}(a) + S_G(A)\,.$$

Η (6.20) είναι ένα σύμπλεγμα αφού

$$\varphi\psi(a+S_U(A)) = S_{U,G}(a) + S_{U,G}(A^U) = S_{U,G}(A^U)\,.$$

Επίσης, η (6.20) είναι ακριβής στην $A^G/S_G(A)$, αφού, αν $\varphi(a + S_G(A)) = S_{U,G}(A^U)$, τότε $a = S_{U,G}(a')$, για κάποιο $a' \in A^U$. Παρατηρούμε ότι $a' + S_U(A) \in A^U/S_U(A)$. Επιπλέον

$$\psi(a' + S_U(A)) = S_{U,G}(a') + S_G(A) = a + +S_G(A)\,.$$

Έτσι η (6.20) είναι ακριβής. □

Πρόταση 6.5.3. *Έστω G μια p-ομάδα, για κάποιον πρώτο p. Ισχύουν:*

1. *Αν $H^0(U, A) = H^1(U, A)$, για κάθε $U \leq G$, τότε $H^2(U, A) = 0$, για κάθε $U \leq G$.*

2. *Αν $H^1(U, A) = H^2(U, A) = 0$, για κάθε $U \leq G$, τότε $H^0(U, A) = 0$, για κάθε $U \leq G$.*

Απόδειξη. Υπάρχει $U \trianglelefteq G$, τέτοια ώστε η G/U να είναι κυκλική με τάξη ένα πρώτο αριθμό. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 & H^0(G/U, A^U) \arrow[l] \arrow[d, "\sim"] & H^0(G, A) \arrow[l, "\varphi"'] & H^0(U, A) \arrow[l, "\psi"'] \\ 0 \arrow[r] & H^2(G/U, A^U) \arrow[r] & H^2(G, A) \arrow[r] & H^2(U, A) \end{tikzcd} \tag{6.21}$$

όπου η πάνω γραμμή είναι η ακριβής ακολουθία (6.19), η κάτω γραμμή είναι η ακριβής ακολουθία (6.17) και η κάθετη απεικόνιση είναι ένας ισομορφισμός λόγω της περιοδικότητας της ομάδας συνομολογίας της κυκλικής ομάδας G/U (βλέπε ενότητα 4.7.1).
Με επαγωγή στην τάξη της ομάδας G. Για $|G| = 1$ οι (i) και (ii) ικανοποιούνται. Υποθέτουμε ότι οι (i) και (ii) αληθεύουν για όλες τις ομάδες με τάξη μικρότερη της $|G|$.
Για την (i): Από υπόθεση έχουμε ότι $H^0(U, A) = H^2(U, A) = 0$. Τότε από το διάγραμμα (6.21) έχουμε

$$H^0(G, A) \cong H^0(G/U, A^U) \cong H^2(G/U, A^U) \cong H^2(G, A) .$$

Αφού από την υπόθεση ισχύει $H^0(G, A) = 0$, έχουμε ότι $H^2(G, A) = 0$.
Για την (ii): Από υπόθεση έχουμε ότι $H^0(U, A) = H^2(U, A) = 0$. Αφού, σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει $H^2(G, A) = 0$, από το διάγραμμα (6.21) έχουμε ότι

$$0 = H^2(G, A) \cong H^2(G/U, A^U) \cong H^0(G/U, A^U) \cong H^0(G, A) .$$

□

Πρόταση 6.5.4. *Η πρόταση 6.5.3 ισχύει για οποιαδήποτε πεπερασμένη ομάδα G.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $|G|$ δεν είναι μια δύναμη ενός πρώτου p, για κάθε $p \mid |G|$. Θεωρούμε G_p μια p-Sylow υποομάδα της G. Τότε $|G_p| < |G|$ και από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $H^0(G_p, A) = H^2(G_p, A) = 0$. Αν $H^i(G, A)_p$, $i = 0, 2$, είναι ο p-στός πρωταρχικός όρος της $H^i(G, A)$, $i = 0, 2$, τότε η ακολουθία

$$H^i(G_p, A) \xrightarrow{\mathsf{proj}_p \cdot V^i_{G_p,G}} H^i(G, A)_p \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής (πρόταση **;;**). Επομένως $H^i(G, A)_p = 0$, $i = 0, 2$. Άρα $H^0(G, A) = H^2(G, A) = 0$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος Nakayama-Tate. Μέσω επαναλαμβανόμενης χρήσης των εναλλακτών διάστασης υπάρχει ένα G-πρότυπο C τέτοιο ώστε

$$H^n(U, C) \cong H^{n+r}(U, A) \tag{6.22}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και κάθε υποομάδα $U \leq G$. Συγκεκριμένα για $n = 0, 1$, έχουμε $H^0(U, C) \cong H^r(U, A)$ και $H^1(U, C) \cong H^{r+1}(U, A)$. Έτσι από την (i) της προηγούμενης πρότασης, έχουμε $H^2(U, C) = 0$ για κάθε $U \leq G$. Αυτό, λόγω της (6.22), επάγει ότι

$$H^{r+2}(U, A) = 0$$

για κάθε $U \leq G$. Επαναλαμβάνοντας αυτό το επιχείρημα και χρησιμοποιώντας ότι $H^{r+1}(U, A) = H^{r+2}(U, A) = 0$ έχουμε $H^{r+3}(U, A) = 0$. Συνεπώς, επαγωγικά, έχουμε ότι $H^s(U, A) = 0$, για κάθε $U \leq G$, αν $s \geq r$.
Με παρόμοια επιχειρηματολογία, χρησιμοποιώντας την (ii) της προηγούμενης πρότασης, έχουμε ότι $H^s(U, A) = 0$, για κάθε $U \leq G$ και $s \leq r + 1$. □

6.6 Συνομολογιακή ισοδυναμία

Ας είναι $f : A \to B$ ένας G-ομομορφισμός. Αν για κάθε $U \leq G$ και κάθε $r \in \mathbb{Z}$ ο $f^* : H^r(U, A) \to H^r(U, B)$ είναι ένας ισομορφισμός, τότε η f καλείται **συνομολογιακή ισοδυναμία**. Επίσης, θα λέμε ότι τα A και B είναι **συνομολογιακά ισοδύναμα κάτω από την** f.

Πρόταση 6.6.1. *Ας είναι $f : A \to B$ ένας G-ομομορφισμός. Τότε υπάρχουν ένα G-πρότυπο C και ομομορφισμοί δ^*, g^*, έτσι ώστε, για κάθε $U \leq G$, η ακολουθία*

$$\cdots \xrightarrow{\delta^*} H^{r-1}(U, A) \xrightarrow{f^*} H^{r-1}(U, B) \xrightarrow{g^*} H^{r-1}(U, C) \xrightarrow{\delta^*} H^r(U, A) \xrightarrow{f^*} \cdots$$

να είναι ακριβής.

Απόδειξη. Έστω $\bar{A}$ ένα G-κανονικό τέτοιο ώστε να υπάρχει ένας μονομορφισμός $i : A \to \bar{A}$ (βλέπε (;;)). Έστω $(f, i) : A \to B \oplus \bar{A}$ είναι ο G-ομομορφισμός για τον οποίο ισχύουν $\mathsf{proj}_B(f, i) = f$ και $\mathsf{proj}_{\bar{A}}(f, i) = i$. Αφού ο i είναι μονομορφισμός, έπεται ότι και ο (f, i) είναι μονομορφισμός. Έστω $C = B \oplus \bar{A}/(f, i)A$. Τότε στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \bar{A} \arrow[d, "\mathsf{inj}_{\bar{A}}"] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "{(f,i)}"] \arrow[dr, "f"] & B \oplus \bar{A} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mathsf{proj}_B"] & C \arrow[r] & 0 \\
 & & B \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

η γραμμή και η στήλη είναι ακριβείς, όπου j είναι ο κανονικός επιμορφισμός. Αφού το $\bar{A}$ είναι G-κανονικό, έχουμε ότι

$$\begin{tikzcd}
 & & H^r(U, \bar{A}) = 0 \arrow[d] & & \\
\cdots \arrow[r, "\delta^*"] & H^r(U, A) \arrow[r, "{(f,i)^*}"] \arrow[dr, "f^*"] & H^r(U, B \oplus \bar{A}) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\mathsf{proj}_B^*"] & H^r(U, C) \arrow[r] & \cdots \\
 & & H^r(U, B) \arrow[d, "\delta^*"] & & \\
 & & H^{r+1}(U, \bar{A}) = 0 & &
\end{tikzcd}$$

Για $g^* = j^*(\mathsf{proj}_B^*)^{-1}$ προκύπτει η ζητούμενη ακριβής ακολουθία. $\square$

Θεώρημα 6.6.2. ***(Κριτήριο του Tate)*** *Ας είναι $f : A \to B$ ένας G-ομομορφισμός. Τότε ο f είναι μια συνομολογιακή ισοδυναμία, αν-ν, για κάθε*

$U \leq G$, ισχύουν:

1. *Ο $f^*_{r-1} : H^{r-1}(U, A) \to H^{r-1}(U, B)$ είναι επιμορφισμός.*

2. *Ο $f^*_r : H^r(U, A) \to H^r(U, B)$ είναι ισομορφισμός.*

3. *Ο $f^*_{r+1} : H^{r+1}(U, A) \to H^{r+1}(U, B)$ είναι μονομορφισμός.*

Απόδειξη. Αν ο f είναι μια συνομολογιακή ισοδυναμία, προφανώς, ισχύουν οι (i) – (iii). Αντιστρόφως, αν θεωρήσουμε την ακριβή ακολουθία της πρότασης 6.6.1, τότε από την (i) προκύπτει ότι $g^*_{r-1} = 0$ και από την (ii) προκύπτει ότι $\delta^*_{r-1} = 0$. Επομένως $H^{r-1}(U, C) = 0$. Παρόμοια, από την (ii) προκύπτει ότι $g^*_r = 0$ και από την (iii) προκύπτει ότι $\delta^*_r = 0$. Επομένως $H^r(U, C) = 0$.
Ο μηδενισμός των $H^{r-1}(U, C)$ και $H^r(U, C)$ για κάθε $U \leq G$, από το θεώρημα Nakayama-Tate, επάγει ότι $H^s(U, C) = 0$, για κάθε $s \in \mathbb{Z}$ και κάθε $U \leq G$. Επομένως ο f^*_s είναι ένας ισομορφισμός για κάθε s και κάθε U. □

Πρόταση 6.6.3. *Ας είναι A ένα G-πρότυπο. Αν ισχύουν*

1. *$H^{-1}(U, A) = 0$, για κάθε $U \leq G$,*

2. *η $H^0(U, A)$ είναι κυκλική με τάξη την τάξη της U, για κάθε $U \leq G$,*

τότε υπάρχει ένας ομομορφισμός $f : \mathbb{Z} \to A$, ο οποίος είναι μια συνομολογιακή ισοδυναμία.

Απόδειξη. Έστω $n = |G|$, $m = |U|$, $n = dm$. Αν α είναι ένας γεννήτορας της $H^0(G, A)$, τότε, από την 6.1.3, ισχύει $V_{GU,GG,U}\alpha = d\alpha$. Έτσι το $V_{GU,GG,U}\alpha$ έχει τάξη m. Επομένως το $_{G,U}\alpha$ έχει τάξη τουλάχιστον τάξη m. Αλλά αφού η $H^0(U, A)$ έχει τάξη m το $_{G,U}\alpha$ παράγει την $H^0(U, A)$. Έτσι η $_{G,U}$ απεικονίζει έναν γεννήτορα της $H^0(G, A)$ σε έναν γεννήτορα της $H^0(U, A)$ για κάθε $U \leq G$. Έστω $\kappa^A_{0,U} : A^U \to H^0(U, A) \overset{\varphi}{\cong} A^U / S_U A$ είναι ο κανονικός επιμορφισμός που ακολουθείται από την φ. Τότε στο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
H^0(G, A) \arrow[r, "{G,U}"] & H^0(U, A) \\
A^G \arrow[u, "\kappa^A_{0,G}"] \arrow[r, hook] & A^U \arrow[u, "\kappa^A_{0,U}"']
\end{tikzcd}$$

υπάρχει $a \in A^G$, τέτοιο ώστε $\kappa_{0,U}^{A}(a) = \alpha$. Επιπλέον οι εικόνες του a, κάτω από τις διάφορες απεικονίσεις $\kappa_{0,U}^{A}$ απεικονίζει το a στις διάφορες ομάδες συνομολογίας $H^0(U, A)$. Θεωρούμε το $\mathbb{Z}$ ως ένα G-πρότυπο και θεωρώντας την απεικόνιση $f : \mathbb{Z} \to A$ που ορίζεται ως $f(1) = a$, αυτή είναι ένας G-ομομορφισμός. Επιπλέον είναι μια συνομολογιακή ισοδυναμία, αφού

1. ο $f_{-1}^{*} : H^{-1}(U, \mathbb{Z}) \to H^{-1}(U, A)$ είναι επιμορφισμός, επειδή $H^{-1}(U, A) = 0$,

2. στο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa_{0,U}^{\mathbb{Z}}"] & A^U \arrow[d, "\kappa_{0,U}^{A}"] \\
\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = H^0(U, \mathbb{Z}) \arrow[r, "f_0^*"] & H^0(U, A)
\end{tikzcd}$$

   οι ομάδες $H^0(U, \mathbb{Z})$ και $H^0(U, A)$ είναι κυκλικές τάξης m. Επιπλέον, το $\kappa_{0,U}^{\mathbb{Z}}(1)$ είναι ένας γεννήτορας της $H^0(U, \mathbb{Z})$ και το $f_0^* \kappa_{0,U}^{\mathbb{Z}}(1) = \kappa_{0,U}^{A} f(1) = \kappa_{0,U}^{A} a = \alpha_U$ είναι ένας γεννήτορας της $H^0(U, A)$. Επομένως ο f_0^* απεικονίζει γεννήτορες σε γεννήτορες. Αφού οι δυο ομάδες $H^0(U, \mathbb{Z})$ και $H^0(U, A)$ είναι της ίδιας τάξης m, έπεται ότι ο f_0^* είναι ισομορφισμός,

3. $H^1(U, \mathbb{Z}) = \mathsf{Hom}(U, \mathbb{Z}) = 0$, επειδή η δράση της $\mathbb{Z}$ στο U είναι τετριμμένη και ο μόνος ομομορφισμός από μια πεπερασμένη ομάδα στο $\mathbb{Z}$ είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός. Επομένως ο $f_1^* : H^1(U, \mathbb{Z}) \to H^1(U, A)$ είναι ένας μονομορφισμός.

□

Θεώρημα 6.6.4. *([22]) Ας είναι A ένα G-πρότυπο τέτοιο ώστε, για κάθε $U \leq G$, $H^1(U, A) = 0$ και η $H^2(U, A)$ είναι κυκλική τάξης $|U|$. Τότε, για κάθε r και κάθε $U \leq G$, ισχύει*

$$H^r(U, A) \cong H^{r-2}(U, \mathbb{Z}) \tag{6.23}$$

Απόδειξη. Κατασκευάζουμε μια ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow C \longrightarrow 0\,,$$

όπου το $\bar{A}$ είναι G-κανονικό. Τότε $H^{r-1}(U,C) \cong H^r(U,A)$, για κάθε $U \leq G$. Επαναλαμβάνουμε κατασκευάζοντας την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \bar{C} \longrightarrow D \longrightarrow 0\,,$$

όπου το $\bar{C}$ είναι G-κανονικό. Τότε $H^{r-2}(U,D) \cong H^r(U,A)$, για κάθε $U \leq G$. Συγκεκριμένα $H^{-1}(U,D) = 0$ και η $H^0(U,D) \cong H^2(U,D)$ είναι κυκλική τάξης $|U|$, για κάθε $U \leq G$. Άρα, από την πρόταση 6.6.3, έπεται ότι

$$H^{r-2}(U,\mathbb{Z}) \cong H^{r-2}(U,D) \cong H^r(U,A)\,.$$

□

Παρατήρηση: Για μια γενίκευση του ισομορφισμού (6.23) βλέπε [18] και [19], θεώρημα 14, σελ. 156.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Χωροι Hurewicz, Eilenberg-MacLane

Η ομολογιακή άλγεβρα αναπτύχθηκε μέσω της αλγεβρικής τοπολογίας. Η μελέτη των αλυσιδωτών πολυπλόκων τοπολογικών χώρων γενικεύτηκε αλγεβρικά προς τη μελέτη προβολικών διαλύσεων. Επίσης η ομολογιακή άλγεβρα σχετίζεται άμεσα με την ομολογιακή μελέτη ομάδων. Ο Hurewicz (1935) μελετώντας ασφαιρικούς χώρους παρατήρησε την επίδραση των πρωταρχικών ομάδων σ΄ αυτούς. Ένας χώρος καλείται ασφαιρικός, αν όλες οι ομοτοπικές ομάδες είναι τετριμμένες εκτός από την πρώτη. Οι ομολογιακές ομάδες αυτών των χώρων X καθορίζονται από την $\pi_1(X)$.

Ο Hopf (1945) και ο Freudenthal (1946) μελέτησαν και καθόρισαν αυτήν την σχέση. Ο Hopf εισήγαγε τον τύπο για τη δεύτερη ομολογία της πρωταρχικής ομάδες και γενικεύοντας όρισε τις ανώτερες ομολογιακές ομάδες μιας ομάδας. Η συγκεκριμένη ομάδα είναι η πρωταρχική ομάδα ενός ασφαιρικού χώρου.

Το ίδιο χρονικό διάστημα ανεξάρτητα οι Eilenberg και MacLane μελέτησαν και εισήγαγαν τη συνομολογία μιας ομάδας. Παράλληλα και ανεξάρτητα ο Eckmann μελέτησε το ίδιο πρόβλημα. Ιστορικά θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η δεύτερη ομολογιακή ομάδα είχε εισαχθεί και χρησιμοποιηθεί από τον Schur (1904) για τη μελέτη αναπαραστάσεων ομάδων.

Οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν από τους Hopf, Freudenthal και Eckmann είναι ως επί το πλείστον τοπολογικές. Η καθαρά αλγεβρική αντιμετώπιση της συνολογίας ομάδων εισήχθη κυρίως από τους Cartan, Eilenberg και MacLane.

Σ΄ αυτήν την ενότητα θα ανεφερθούμε σε χώρους **Hurewicz, Eilenberg-MacLane** ώστε να συνδέσουμε τη συνομολογία κυκλικών ομάδων και τοπολογικών χώρων οι οποίοι έχουν αντίστοιχα ισόμορφη συνομολογία. Ακολουθούμε το σύγγραμμα του Whitehead, [25].

Γνωρίζουμε ότι η αντιποδική απεικόνιση στην S^n, με τύπο $u \longmapsto -u$, ορίζει μια δράση της ομάδας $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ και ο χώρος τροχιών της δράσης είναι ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n \cong S^n/\sim$. Δηλαδή έχουμε μια καλυπτική απεικόνιση $p_n : S^n \to \mathbb{R}P^n$. Επειδή η S^n για $n \geq 2$ είναι απλά συνεκτική, έχουμε από τη θεωρία των καλυπτικών χώρων ότι $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Για την S^1 γνωρίζουμε ότι $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ και $\pi_n(S^1) \cong 0$ για $n \geq 2$. Η S^1 αποτελεί το βασικό παράδειγμα χώρου Eilenberg-MacLane τύπου $K(\mathbb{Z}, 1)$. Δηλαδή όλες οι ομοτοπικές ομάδες της είναι τετριμμένες εκτός από την πρώτη ομάδα $\pi_1(K(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Δεν ισχύει το ίδιο για τις S^n με $n > 1$. Αυτό άλλωστε είναι και το βασικό πρόβλημα της αλγεβρικής τοπολογίας. Δηλαδή ο υπολογισμός των ομάδων $\pi_k(S^n)$. Ως γνωστόν η λύση αυτού του προβλήματος θα έδινε πληροφορίες, μεταξύ άλλων, για το πως συνδέονται οι πολλαπλότητες μεταξύ τους.

Ένα ανάλογο ερώτημα είναι αν άλλες πεπερασμένες ομάδες G δρουν ελεύθερα στην S^n όπως η $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Τότε θα είχαμε πάλι μια καλυπτική απεικόνιση $S^n \to S^n/G$. Αποδεικνύεται ότι για $n = 2m$ μόνο η $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ δρα ελεύθερα στην S^n, ενώ για $n = 2m + 1$ υπάρχουν και άλλες δράσεις (Milnor).

Ας δούμε τώρα τη γεωμετρική ερμηνεία της συνομολογίας ομάδων. Έστω X ένας τ.χ. και $Aut(X)$ η ομάδα των ομοιομορφισμών του X στον εαυτό του. Μία ομάδα G δρα στον X εάν υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\mu : G \to Aut(X)$. Ισοδύναμα λέμε ότι σε κάθε $g \in G$ και κάθε $x \in X$ δίνεται ένα μοναδικό σημείο $gx = \mu(g)(x)$ ώστε η gx να είναι συνεχής στο x για κάθε $x \in X$ και

$$(g_1g_2)(x) = g_1(g_2x), 1x = x.$$

Ένα ανοικτό σύνολο $U \in X$ καλείται **κύριο** (proper) κάτω από τη δράση της G , αν $gU \cap U = \emptyset$ για $g \neq 1$. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι η G δρα **κυρίως ασυνεχώς** στον X, αν κάθε σημείο του X περιέχεται σε κάποιο κύριο ανοικτό σύνολο, ώστε τα κύρια σύνολα να παρέχουν μια βάση για την τοπολογία του X. Στην περίπτωση που η G δρα κυρίως ασυνεχώς δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $\mu(g)$ με $g \neq 1$ ο οποίος να έχει σταθερό σημείο.

Ας υποθέσουμε ότι μια ομάδα G δρα κυρίως ασυνεχώς στον X. Ο χώρος πηλίκο X/G είναι ο χώρος του οποίου τα σημεία είναι οι τροχιές των σημείων του $x \in X$ κάτω από τη δράση της G. Η φυσική προβολή ορίζεται ως $p : X \to X/G$ με $px_1 = px_2$ αν και μόνο αν υπάρχει $g \in G$ με $x_1 = gx_2$. Το σύνολο X/G εφοδιάζεται με την τοπολογία πηλίκο ώστε η p να είναι συνεχής. Μια βάση για αυτήν την τοπολογία αποτελείται από τα pU με U κύριο ανοικτό στον X ως προς G. Τα ανοικτά σύνολα pU καλούνται επίσης κύρια στον X/G.

Το σύνολο $p^{-1}(p(U))$ αποτελείται από ξένη ένωση ανοικτών υποσυνόλων V_i ώστε ο περιορισμός $p|_{V_i}$ είναι ομοιομορφισμός $V_i \cong pU$.

Προφανώς ο X είναι καλυπτικός χώρος του X/G και $\pi_1(X/G) \cong G$. Αν επιπλέον ο X/G είναι aspherical δηλαδή όλες οι ανώτερες ομοτοπικές ομάδες είναι τετριμμένες, τότε η συνομολογία του είναι ισόμορφη με την συνομολογία της G.

Θα αναφερθούμε επιγραμματικά στην περίπτωση $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ η οποία συνδέεται με τη μελέτη μας. Θεωρούμε την S^{2k-1} σαν τη μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{C}^k \cong \mathbb{R}^{2k}$. Η δράση δίνεται από $u \longmapsto e^{(2\pi i/m)}u$, όπου $e^{(2\pi i/m)}$ είναι μια πρωταρχική ρίζα m της μονάδας και είναι ελεύθερη. Ο χώρος τροχιών S^{2k-1}/G καλείται **φακοειδής χώρος** τύπου $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Από τη θεωρία των καλυπτικών απεικονίσεων έχουμε ότι $\pi_1(S^{2k-1}/G) \cong G$, αλλά ο χώρος S^{2k-1}/G δεν είναι χώρος Eilenberg-MacLane τύπου $K(G,1)$.

Ορίζουμε τον άπειρο πραγματικό χώρο $\mathbb{R}^\infty$ σαν το ευθύ όριο των $\mathbb{R}^n$. Συγκεκριμένα, είναι το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών οι οποίες τελικά είναι μηδενικές

$$(x_1, x_2, \cdots)$$

ώστε να υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $x_n = 0$ για $n > k$. Αντίστοιχα ορίζεται ο άπειρος μιγαδικός χώρος $\mathbb{C}^\infty$ σαν το ευθύ όριο των $\mathbb{C}^n$. Γνωρίζουμε ότι ο $\mathbb{C}^n$ είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^{2n}$, το ίδιο ισχύει και μεταξύ του $\mathbb{C}^\infty$ και $\mathbb{R}^\infty$. Η διαφορά είναι ότι ο $\mathbb{C}^\infty$ έχει τη δομή μιγαδικού διανυσματικού χώρου.

Έχοντας ορίσει τον $\mathbb{R}^\infty$ μπορούμε να ορίσουμε την άπειρη σφαίρα S^∞ σαν τα στοιχεία του $\mathbb{R}^\infty$ με μήκος 1. Χρησιμοποιώντας το επόμενο αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \to & \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{2n+1} & \to & C^{n+1} \end{array}$$

μπορούμε να θεωρήσουμε την S^∞ σαν υπόχωρο του $\mathbb{C}^\infty$.

Θα δείξουμε ότι η S^∞ είναι συστελλόμενη (contractible), οπότε $\pi_n(S^\infty) \cong 0$.

Πρόταση 7.0.1. $S^\infty \simeq \{*\}$.

Απόδειξη. Θα ορίζουμε λοιπόν ομοτοπία μεταξύ της ταυτοτικής απεικόνισης στην S^∞ και μιας σταθερής. Έστω $f_t : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ με τύπο

$$f_t(x_1, x_2, \cdots) = (1-t)(x_1, x_2, \cdots) + t(0, x_1, x_2, \cdots).$$

Η f_t απεικονίζει μη-μηδενικά διανύσματα σε μη-μηδενικά για $t \in [0,1]$. Η f_0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση και $f_1(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$. Άρα έχουμε

$$1_{\mathbb{R}^\infty} \simeq f_1$$

και το πηλίκο $f_t/(\| f_t \|)$ δίνει μια ομοτοπία στην S^∞ μεταξύ της ταυτοτικής και της $h : (x_1, x_2, \cdots) \longmapsto (0, x_1, x_2, \cdots)$. Ας ορίσουμε τώρα την $g_t : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ με τύπο

$$g_t(x_1, x_2, \cdots) = (1-t)(0, x_1, x_2, \cdots) + t(1, 0, , \cdots),$$

τότε η $g_t/(\| g_t \|) : S^\infty \to S^\infty$ δίνει μια ομοτοπία μεταξύ της h και της σταθερής. $\square$

Τώρα αν θεωρήσουμε την S^∞ σαν τη μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{C}^\infty$, η καλυπτική απεικόνιση $S^\infty \to S^\infty/G$ μαζί με τη συσταλτότητα της S^∞ μας δίνουν ότι $\pi_1(S^\infty/G) \cong G$ και $\pi_*(S^\infty/G) = 0$ για $* \neq 1$. Δηλαδή ο τοπολογικός χώρος S^∞/G είναι ένας χώρος Eilenberg-MacLane τύπου $K(G,1)$. Αυτό το αποτέλεσμα είναι απόρεια του ότι η καλυπτική απεικόνιση $S^\infty \to S^\infty/G$ είναι ίνωση του Serre οπότε έχουμε μακρά ακριβή ακολουθία στην ομοτοπία [25].

Αμέσως θα δώσουμε τον ορισμό ενός χώρου Eilenberg-MacLane τύπου $K(G,n)$.

Ορισμός 7.0.2. *Για G ομάδα και n θετικό φυσικό, ένας τροχιακά συνεκτικός χώρος X καλείται χώρος Eilenberg-MacLane τύπου $K(G,n)$ αν ισχύει*

$$\pi_*(X) = \begin{cases} G, & * = n \\ 0, & * \neq n \end{cases} .$$

Για $n = 1$ οι χώροι αυτοί μελετήθηκαν πρώτα από τον Hurewicz και η μελέτη επεκτάθηκε απο τους Eilenberg και MacLane, [25].

Καταλήγουμε στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 7.0.3. *Αν η $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ δρα στον ΓG τετριμμένα, τότε*

$$H^n(G,G) \cong H^n(K(G,n),G).$$

Θεώρημα 7.0.4. *Έστωσαν $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ και A ένα G-πρότυπο, τότε*

$$H^n(G,A) = \begin{cases} A^G/SA, & n = 2,4,\cdots \\ A_S/IA, & n = 1,3,\cdots \end{cases} .$$

Πόρισμα 7.0.5. *Αν η $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ δρα στην αβελιανή ομάδα A τετριμμένα, τότε*

$$H^n(G, A) = \begin{cases} A/mA, \ n = 2, 4, \cdots \\ T, \ n = 1, 3, \cdots \\ A, \ n = 0 \end{cases}.$$

Εδώ T είναι το υποπρότυπο στρέψης της A.

Πόρισμα 7.0.6. *Αν η $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ δρα στον $\mathbb{Z}$ τετριμμένα, τότε*

$$H^n(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} G, \ n = 2, 4, \cdots \\ 0, \ n = 1, 3, \cdots \\ \mathbb{Z}, \ n = 0 \end{cases}.$$

Πόρισμα 7.0.7. *Αν η $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ δρα στον ΓG τετριμμένα, τότε*

$$H^n(G, G) = \begin{cases} G, \ n \neq 0 \\ \mathbb{Z}, \ n = 0 \end{cases}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Αλγεβρικοι ακεραιοι

Σ' αυτήν την ενότητα θα υπενθυμίσουμε γνωστά αποτελέσματα από την αλγεβρική θεωρία αριθμών. Ακολουθούμε τα συγγράμματα [21] και [11] .

Υποθέτουμε ότι το L είναι μία διαχωρίσιμη επέκταση του πολυωνύμου $x^m - 1$ πάνω από το $\mathbb{Q}$. Επειδή το πολυώνυμο $x^m - 1$ έχει m διακεκριμένες ρίζες ($(x^m - 1)' = mx^{m-1}$), η επέκταση αυτή είναι Galois. Το σύνολο R των ριζών του $x^m - 1$ στο L δημιουργεί μια αβελιανή ομάδα με τον πολλαπλασιασμό.

Λήμμα 8.0.1. *Η αβελιανή ομάδα R είναι μια κυκλική ομάδα τάξης m.*

Απόδειξη. Έστω $e(R)$ ο ελάχιστος φυσικός ώστε $r^{e(R)} = 1$ για κάθε $r \in R$. Τότε $e(R) \leq \mid R \mid$, αλλά και $\mid R \mid \leq e(R)$ αφού η R περιέχει τις ρίζες του $x^m - 1$. Άρα $e(R) = \mid R \mid$ και η R είναι κυκλική. □

Ορισμός 8.0.2. *Ένα στοιχείο της R καλείται πρωταρχική m- ρίζα της μονάδας, αν είναι γεννήτορας της R. Με $\zeta_m = e^{\frac{i2\pi}{m}}$ συμβολίζουμε μια τέτοια ρίζα.*

Έχουμε ότι $\zeta_m^k = 1$ αν και μόνο αν $k \equiv 0 mod m$. Τώρα έχουμε ότι $L = \mathbb{Q}(\zeta_m)$.

Ας είναι $\zeta_n = e^{\frac{i2\pi}{n}}$ μια πρωταρχική ρίζα της μονάδας. Γνωρίζουμε ότι η ομάδα Galois της επέκτασης $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ πάνω από το $\mathbb{Q}$ είναι κυκλική τάξης n. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε μια κυκλική ομάδα G τάξης n να αποτελείται από ρίζες του $x^n - 1$ με το γινόμενο, $G = < \zeta_n >$.

Ορισμός 8.0.3. *Για $m \geq 1$ ορίζουμε το m-στό κυκλοτομικό πολυώνυμο Φ_m να είναι το πολυώνυμο*

$$\Phi_m = \prod_u (x - u)$$

όπου το γινόμενο λαμβάνεται ως προς όλες τις πρωταρχικές m-οστές ρίζες της μονάδας.

Λήμμα 8.0.4. *Ένα στοιχείο $a \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$ είναι ρίζα του $x^m - 1$ αν και μόνο αν είναι μια πρωταρχική d-οστή ρίζα της μονάδας για κάποιο d το οποίο διαιρεί το m.*

Έχουμε λοιπόν $x^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_d$.

Παράδειγμα 8.0.5. $\Phi_1 = x-1$, $\Phi_2 = x+1$, $\Phi_3 = (x-\zeta_3)(x-\zeta_3^2) = x^2+x+1$, $\Phi_4 = (x-i)(x+i) = x^2+1$ και $x^4 - 1 = \Phi_1\Phi_2\Phi_4$.

Το επόμενο Θεώρημα αποδεικνύεται με τη βοήθεια του επομένου λήμματος.

Θεώρημα 8.0.6. $\zeta_m \in \mathbb{Z}[x]$.

Λήμμα 8.0.7.

1. *Έστω $L : K$ μια επέκταση σωμάτων και $q(x) \in L[x]$. Αν υπάρχουν μη-μηδενικά πολυώνυμα $f(x)$, $g(x) \in K[x]$ ώστε $f = qg$, τότε $q(x) \in K[x]$.*

2. *Έστωσαν R μια ακέραια περιοχή και Q το σώμα ρητών παραστάσεών της. Αν $q(x) \in Q[x]$ και υπάρχουν μονικά πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ με $f = qg$, τότε $q(x) \in R[x]$.*

Απόδειξη.

1. Η απόδειξη στηρίζεται στον αλγόριθμο της διαίρεσης. Έστω

$$q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m,$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n,$$

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{m+n} x^{m+n}$$

με a_m, b_n, $c_{m+n} \neq 0$ και $c_{m+n} = a_m b_n \in K$.

Υποθέτουμε ότι έχουμε αποδείξει ότι $a_i \in K$ για $i > j$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$a_j b_n + a_{j+1} b_{n-1} + \cdots + a_m b_{n+j-m} = c_{n+j}.$$

Τότε $a_j \in K$ και η επαγωγή συνεχίζεται.

2. Εδώ έχουμε ότι $b_m = 1$ και η απόδειξη δίνεται με επαγωγή όπως στο προηγούμενο ερώτημα.

□

Γνωρίζουμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός είναι ακέραιος πάνω από το $\mathbb{Z}$ εάν είναι ρίζα ενός μονικού πολυωνύμου $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Ένας τέτοιος αριθμός καλείται αλγεβρικός ακέραιος και όλοι οι αλγεβρικοί ακέραιοι σε ένα σώμα L το οποίο είναι πεπερασμένη επέκταση πάνω από το Q δημιουργεί έναν δακτύλιο.

Παραδείγματος χάριν η πρωταρχική ρίζα ζ_m είναι αλγεβρικός ακέραιος διότι αποτελεί ρίζα του $x^m - 1$.

Όλα τα στοιχεία του $\mathbb{Z}[x]$ είναι αλγεβρικοί ακέραιοι της κυκλοτομικής επέκτασης $\mathbb{Q}(\zeta_m)$. Αναφέρουμε το επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα της αλγεβρικής θεωρίας αριθμών.

Θεώρημα 8.0.8. *Όλοι οι αλγεβρικοί ακέραιοι του $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ είναι στοιχεία του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\zeta_m]$. Δηλαδή ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\zeta_m]$ είναι ακέραια κλειστός.([21])*

Στη μελέτη μας θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 8.0.9. *Έστω $m = p^r$ για p πρώτο φυσικό. Το γινόμενο $\prod_u(x - u)$ πάνω από όλες τις πρωταρχικές m-οστές ρίζες της μονάδας ισούται με p.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $m = p$, τότε $\Phi_p(x) = (x^p - 1)/(x - 1)$ το p-οστό κυκλοτομικό πολυώνυμο. Τότε $\Phi_p(1) = p$ και οι ρίζες του $\Phi_p(x)$ είναι οι πρωταρχικές p-οστές ρίζες της μονάδας. Άρα

$$p = \Phi_p(1) = \prod_u (1 - u).$$

Έστω τώρα ότι $m = p^r$ με $r > 1$. Μεταξύ των m-οστών ριζών της μονάδας, οι πρωταρχικές ρίζες είναι αυτές για τις οποίες ισχύει ότι

$$\zeta_m^{\frac{m}{p}} - 1 \neq 0.$$

Αν αντικαταστήσουμε τώρα τη μεταβλητή x με $\zeta_m^{\frac{m}{p}}$ στο $\Phi_p(x)$, θα λάβουμε ένα μονικό πολυώνυμο ως προς ζ_m:

$$g(\zeta_m) = \Phi_p(\zeta_m) = \zeta_m^{\frac{m(p-1)}{p}} + \cdots + \zeta_m^{\frac{m}{p}} + 1.$$

Οι ρίζες του $g(\zeta_m)$ είναι όλες οι πρωταρχικές m-οστές ρίζες της μονάδας. Έχουμε λοιπόν ότι

$$p = g(1) = \prod_u (1 - u).$$

□

Πόρισμα 8.0.10. *Ισχύει ότι $p = (1 - \zeta_p)^{p-1}\varepsilon$ με ε μια μονάδα στο σώμα των p-οστών ριζών της μονάδας.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο έχουμε ότι $p = \prod_u(1 - u) = \prod_1^{p-1}(1 - \zeta_p^k)$ και $1 - \zeta_p^k = (1 - \zeta_p)\varepsilon_k$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΓΙΝΟΜΕΝΑ

9.1 Ημιευθές γινόμενο

Αν η E είναι το εσωτερικό γινόμενο δυο υποομάδων της, τότε καθορίζεται πλήρως από τις υποομάδες A και G. Αν υποθέσουμε ότι μόνο μια από αυτές είναι κανονική, η A, τότε η E δεν καθορίζεται πλήρως όπως θα δούμε αμέσως. Ουσιαστικά αναφερόμαστε στο ημιευθές γινόμενο. Για λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [14] .

Ορισμός 9.1.1. *Η ομάδα E καλείται ημιευθύ γινόμενο των υποομάδων της A και G εάν*

$$A \trianglelefteq E,\ E = AG \text{ και } A \cap G = \{1\}.$$

Παρατήρηση 9.1.2. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των αυτομορφισμών μιας ομάδας A αποτελεί ομάδα με τη σύνθεση και συμβολίζεται $Aut\,(A)$. Κάθε στοιχείο a της A ορίζει έναν αυτομορφισμό ως προς συζυγία

$$\tau_a : A \to Aut\,(A)$$

με τύπο $\tau_a\,(b) = aba^{-1}$.

Αυτού του είδους οι αυτομορφισμοί καλούνται εσωτερικοί και συμβολίζονται με $Inn\,(A)$. Διαφορετικά καλούνται εξωτερικοί και συμβολίζονται με $Out\,(A)$. Ισχύει ότι

$$Inn\,(A) \trianglelefteq Aut\,(A)\,.$$

Ορίζεται λοιπόν ένας ομομορφισμός

$$\phi : A \to Aut\,(A)$$

με τύπο $\phi\,(a)\,(b) = aba^{-1}$.

Ο πυρήνας του ϕ είναι το κέντρο της A, $\ker(\phi) = Z(A)$. Άρα $A/Z(A) \cong Inn(A)$. Αν βέβαια η A είναι αβελιανή, τότε $A = Z(A)$ και κάθε μη-τετριμμένος αυτομορφισμός είναι εξωτερικός.

Παράδειγμα 9.1.3. Έστω $E = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Η E μπορεί να θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος διάστασης δύο πάνω από το σώμα $\mathbb{Z}_2$ με την πρόσθεση. Άρα $Aut(E) \cong GL(2, \mathbb{Z}_2)$. Η $GL(2, \mathbb{Z}_2)$ έχει τάξη 6. Επίσης γνωρίζουμε ότι υπάρχουν μόνο δυο μη-ισόμορφες ομάδες τάξης 6. Μια αβελιανή η $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ και η Σ_3. Τελικά $Aut(E) \cong \Sigma_3$. Εύκολα δείχνουμε ότι $Aut(\Sigma_3) \cong \Sigma_3$

Πρόταση 9.1.4. *Έστω E το ημιευθύ γινόμενο των A και G, τότε*

1. *Η απεικόνιση $\phi : G \to Aut(A)$ με τύπο $\phi(g)(a) = gag^{-1}$ για κάθε $a \in A$ και $g \in G$ είναι ομομορφισμός.*

2. *Κάθε στοιχείο της E έχει μοναδική αναπαράσταση.*

3. *Το γινόμενο δίνεται από $(ag)(bh) = (a\phi(g)(b)\,gh)$.*

Αν E ομάδα και A, G υποομάδες ώστε $E = AG$ με μοναδική αναπαράσταση, τότε υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $\phi : E \to A \times G$. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν αυτή η απεικόνιση γίνεται ομομορφισμός με κάποια δομή ομάδας στο καρτεσιανό γινόμενο $A \times G$. Στην περίπτωση που οι υποομάδες είναι τυχαίες, τότε το ερώτημα είναι πολύ γενικό. Αν όμως υποθέσουμε ότι η μία είναι κανονική, τότε μπορεί να υπάρξει μέθοδος αντιμετώπισης. Ουσιαστικά ζητάμε έναν τρόπο ώστε το γινόμενο ga να γράφεται $a'g'$ με a και a' στοιχεία της A και g και g' στοιχεία της G. Προφανώς η περίπτωση $ga = ag$ δίνει το ευθύ γινόμενο. Διαφορετικά έχουμε μια δράση των στοιχείων της G στα στοιχεία της A. Με απλά λόγια έναν ομομορφισμό $\phi : G \to Aut(A)$ και το ga γίνεται $\phi(g)(a)\,g$.

Ας εφαρμόσουμε το προηγούμενο στην Σ_3.

Παράδειγμα 9.1.5. Έστω $E = \Sigma_3 = \left\{1, f, f^2, g, fg, f^2g\right\}$. Η υποομάδα $A \cong \mathbb{Z}_3$ και οι αυτομορφισμοί της A αποτελούνται από τον τετριμμένο και αυτόν που απεικονίζει το f στο f^2. Δηλαδή είναι ισόμορφοι με την $Aut(A) \cong \mathbb{Z}_2$. Εδώ $G = \mathbb{Z}_2$

Ας πάρουμε πρώτα την απεικόνιση φ να είναι η ταυτοτική και ας δούμε πως διαμορφώνεται το γινόμενο για $\phi = 1$.

$$\left(f^i, g^j\right)\left(f^s, g^t\right) = \left(f^i f^s, g^j g^t\right) = \left(f^{i+s}, g^{j+t}\right).$$

Δηλαδή όταν η ϕ είναι η ταυτοτική, τότε το γινόμενο ταυτίζεται με το γινόμενο του εξωτερικού γινομένου των A και G. Άρα η ομάδα είναι η

$$E \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3.$$

Ας πάρουμε τώρα την περίπτωση $\phi(g)(f) = gfg^{-1}$ και ας μελετήσουμε το γινόμενο. Έχουμε λοιπόν

$$(f,g)(f,g) = \left(f\phi(g)(f), g^2\right) = \left(f^i, g^j\right)\left(f^s, g^t\right) = \left(ff^2, 1\right) = (1,1),$$
$$(f,g)\left(f^2,g\right) = \left(f\phi(g)(f^2), g^2\right) = \left(f^2, 1\right),$$
$$\left(f^2,g\right)(f,g) = \left(f^2\phi(g)(f), g^2\right) = \left(f^2f^2, 1\right) = (f,1),$$
$$(f,1)(f,g) = \left(f\phi(1)(f), g^2\right) = \left(f^2, 1\right).$$

Δεν είναι τίποτα περισσότερο από το γινόμενο της Σ_3. Άλλωστε υπάρχουν μόνο δυο ομάδες τάξης 6, όπως γνωρίζουμε.

Ορισμός 9.1.6. *Έστω A και G ομάδες μαζί με έναν ομομορφισμό $\phi : G \to Aut(A)$. Στο σύνολο $A \times G$ ορίζουμε μια πράξη ως εξής*

$$(a,g)(b,h) = (a\phi(g)(b), gh)$$

Θεώρημα 9.1.7. *Το προηγούμενο σύνολο $A \times G$ με την προηγούμενη πράξη αποτελεί ομάδα και συμβολίζεται με*

$$A \times_\phi G.$$

Το ημιευθές γινόμενο είναι μέρος ενός σημαντικού προβλήματος της θεωρίας ομάδων:

Έστωσαν A και G ομάδες. Υπάρχει ομάδα E ώστε $A \trianglelefteq E$ και $G = E/A$; Και αν υπάρχουν τέτοιες ομάδες, πόσες μη-ισοδύναμες υπάρχουν;

Λήμμα 9.1.8. *Έστωσαν $A \trianglelefteq E$ και ο ομομορφισμός $\phi : E \to Aut(A)$. Τότε ο ϕ επάγει ομομορφισμό ως εξής*

$$\phi : E/A \to Aut(A)/Inn(A) \cong Out(A).$$

Εδώ $\pi : Aut(A) \to Out(A)$ είναι η φυσική προβολή.

Θεώρημα 9.1.9. *Έστω ομομορφισμός $\phi : G \to Aut(A)$. Τότε υπάρχει ομάδα $E = A \times_\phi G$ με $A \triangleleft E$ και $G = E/A$.*

Θα μελετήσουμε τώρα κριτήρια ώστε δυο ημιευθέα γινόμενα να είναι ισόμορφα.

Πρόταση 9.1.10. *Έστωσαν $\phi : G \to Aut\,(A)$, $\phi' : G \to Aut\,(A)$ και αντίστοιχα οι ομάδες $E = A \times_{\phi} G$ και $E = A \times_{\phi'} G$ ώστε να υπάρχει $f \in Aut\,(A)$ με*

$$\phi'\,(g) = f\phi\,(g)\,f^{-1}$$

$\forall g \in G$. Τότε η απεικόνιση

$$\psi : A \times_{\phi} G \to A \times_{\phi'} G$$

με τύπο $\psi\,(c,g) = (f\,(c)\,,g)$ για $(c,g) \in A \times_{\phi} G$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Έστωσαν $(c,g) \in A \times_{\phi} G$ και $\psi\,(c,g) = (f\,(c)\,,g)$. Τότε

$$\psi\,(c,g)\,\psi\left(c',g'\right) = (f\,(c)\,,g)\left(f\left(c'\right),g'\right) = \left(f\,(c)\,\phi'\,(g)\,f\left(c'\right),gg'\right) =$$

$$\left(f\,(c)\right)f(\phi\,(g)\,f^{-1}\left(f(c')\right),gg'\right) = \left(f\,(c)\,f(\phi\,(g)\left(c'\right),gg'\right).$$

Αλλά

$$\psi\,(c,g)\,\psi\left(c',g'\right) = \psi\left(c\phi\,(g)\,(c'),gg'\right) = \left(f\,(c)\,f\left(\phi\,(g)\left(c'\right)\right),gg'\right).$$

Ο ψ λοιπόν είναι ομομορφισμός και η απεικόνιση

$$(c,g) \to \left(f^{-1}\,(c)\,,g\right)$$

είναι επίσης ομομορφισμός αντίστροφος του ψ. Άρα είναι ισομορφισμός. $\square$

Πόρισμα 9.1.11. *Αν $\phi = \phi' f$ με $f \in Aut\,(G)$, τότε η απεικόνιση*

$$\psi : A \times_{\phi} G \to A \times_{\phi'} G$$

με τύπο

$$\psi\,(c,g) = (c,f\,(g))$$

είναι ισομορφισμός.

Βιβλιογραφια

[1] **A. Adem**. *Recent develpments in the Cohomology of finite groups.* Notices, AMS, **Vol. 44**, 7, 1997, 806-812.

[2] **A. Adem, S. Milgram**. *Cohomology of finite groups.* Springer - Verlag, **Vol. 309**, 1995.

[3] **E. Artin**. *Galois Theory.* Notre Dame Mathematical Lectures, 1942.

[4] **E. Artin, J. Tate**. *Class Field Theory.* Benjamin, New York, 1967.

[5] **A. Babakhanian**. *Cohomology of finite groups.* Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, **Vol. 17**, 1999.

[6] **H. Cartan, S. Eilenberg**. *Homological Algebra.* Princeton University Press, 1956.

[7] **C. Chevalley**. *Class Field Theory.* Nagoya University, 1954.

[8] **C. Curtis, I. Reiner**. *Representation Theory of Finite groups and Associative Algebras.* Interschience Publishers, 1962.

[9] **S. Eilenberg, S. MacLane**. *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton University Press, 1952.

[10] **S. Eilenberg, N. Steenrod**. *Cohomology Theory in Abstract Groups I.* Annals Math. **48**, 1947, 51-78.

[11] **D. J. H. Garling**. *A course in Galois Theory.* Cambridge University Press, 1995.

[12] **A. Hatcher**. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[13] **G. Hochschild, J-P Serre**. *Cohomology of Group Extentions.* Trans. Am. Math. Soc. **74**, 1955, 110-134.

[14] **N. Kechagias**. http://users.uoi.gr/nkechag/GroupsNotesLONG3.pdf.

[15] **S. Lang**. *Rapport sur la Cohologie des Groups.* Benjamin, New York, 1966.

[16] **J. P. May**. *Notes on Tor and Ext.* http://www.math.uchicago.edu/may/MISC/TorExt.pdf

[17] **T. Nakayama**. *On Modules of Trivial Cohomology over a Finite Group I.* Illinois J. **1**, 1957, 36-43.

[18] **T. Nakayama**. *Cohomology of class field theory and tensor product modules I.* Ann. Math. **65**, 1957, 225-267.

[19] **J-P Serre**. *Corps Locaux.* Herman, Paris, 1962.

[20] **D. Rim**. *Modules over finite groups.* Ann. Math., 59, 1959, 700-712.

[21] **P. Stevenhagen**. *Number rings.* Leiden University, 2017.

[22] **J. Tate**. *The Higher Dimensional Cohomology Groups of Class Field Theory.* Annals Math. **56**, 1952, 294-297.

[23] **J. W. Vick**. *Homology Theory.* Springer-Verlag, 1991.

[24] **C. Weibel**. *An introduction to homological algebra.* Cambridge University press, 1994.

[25] **J. W. Whitehead**. *Elements of Homotopy Theory.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1978.