Μαθηματική επιθεώρηση, 46, 1998.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ (ΣΥΝ-)ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

ΝΩΝΤΑΣ ΚΕΧΑΓΙΑΣ
Αύγουστος 1996

0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός αυτής της παρουσίασης είναι να δώσει μια "γλαφυρή" και θεμελιώδη εισαγωγή στον κλάδο της Αλγεβρικής Τοπολογίας. Θα συζητήσουμε για τα κύρια προβλήματα της περιοχής καθώς και για τις μοντέρνες τάσεις που επικρατούν την τελευταία δεκαετία. Με τη λέξη "γλαφυρή" εννοούμε ότι θα αποφύγουμε αποδείξεις και τεχνικές λεπτομέριες και θα περιγράψουμε περισσότερο παρά θα αποδείξουμε ώστε ο αναγνώστης να μην χάσει την ουσία του θέματος. Στο τέλος παραθέτουμε εκτενή βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη.

Ζητούμε συγγνώμη απο τους ειδικούς για την ορολογία η οποία μάλλον δεν είναι η καλύτερη δυνατή. Ευχόμαστε, αρχής γεννομένης αυτής της προσπάθειας, να καθιερωθεί η ορολογία και στη γλώσσα μας. Τέλος ευχαριστούμε το σεμινάριο της Άλγεβρας και Γεωμετρίας του Μαθηματικού τμήματος του Παν/μίου Αθηνών κατά το οποίο παρουσιάσαμε το θέμα και αυτού απόρροια είναι αυτές οι σημειώσεις.

1. ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Η έννοια της συνέχειας είναι πρωταρχικά συνδεδεμένη με τη ζωή του ανθρώπου επειδή τα φαινόμενα που εξελίσσονται γύρω μας αξιώνουμε να λαμβάνουν χώρα σε συνεχή χρόνο. Ο χώρος μας, όπως τον βιώνουμε, αποτελείται απο το χρόνο και τη θέση. Είναι αυτονόητο ότι ο ιδιαίτερα σημαντικός χώρος μας, αποτελεί ειδική περίπτωση χώρου με ιδιότητες ασθενέστερες του δικού μας αλλά όχι διαφορετικές ως προς την έννοια της συνέχειας.

Η Γενική Τοπολογία είναι το μέρος των Μαθηματικών το οποίο μελετά και γενικεύει τις προηγούμενες έννοιες. Προφανώς δεν είναι απαραίτητη η μελέτη κάθε χώρου ξεχωριστά αφού κάποιοι από αυτούς θα έχουν κοινές ιδιότητες ως σύνολα και ως προς τη συνέχεια. Αυτοί οι χώροι καλούνται *ομοιομορφικοί* (υπάρχει μια ένα προς ένα και επί συνεχής ώστε και η αντίστροφη να είναι συνεχής απεικόνιση) και η μελέτη επικεντρώνεται στο να αποφαινόμαστε πότε δυο χώροι είναι ή δεν είναι ομοιομορφικοί μεταξύ τους.

Τα προβλήματα αυτά απαιτούν διαφορετική αντιμετώπιση, δηλαδή διαφορετικές τεχνικές. Στο πρώτο πρέπει να κατασκευάσουμε ομοιομορφισμό ενώ στο δεύτερο πρέπει να βρούμε κάποια τοπολογική ιδιότητα την οποία να έχει μόνο ο ένας από τους δυο. Παραδείγματος χάριν, το επίπεδο από τον τρισδιάστατο χώρο. Αυτοί οι δυο έχουν τις ίδιες ιδιότητες διαχωρισιμότητας (ιδιότητες τις οποίες μελετά η γενική τοπολογιά) αλλά δεν είναι ομοιομορφικοί. Οι επιπλέον ιδιότητες και τεχνικές αυτές μελετούνται από την Αλγεβρική Τοπολογία.

Η κύρια ιδέα σαυτή την περιοχή είναι η μετατροπή του τοπολογικού προβλήματος σε αλγεβρικό και η επίλυση του με αλγεβρικά εργαλεία. Δηλαδή από την κατηγορία των τοπολογικών χώρων $\mathfrak{T}$ με κάποιο τρόπο (ένα συναρτητή F ο οποίος ικανοποιεί συγκεκριμένα αξιώματα) περνάμε σε μια αλγεβρική κατηγορία (ομάδων, προτύπων, δακτυλίων) A και οι συνεχείς απεικονίσεις γίνονται αντίστοιχοι ομομορφισμοί [48]. Είναι προφανές ότι όσο περισσότερες ιδιότητες διαχωρίζει ο συναρτητής τόσο περισσότερες πληροφορίες θα μας δώσει. Αυτό όμως εξαρτάται κατά ένα μεγάλο βαθμό από τις ιδιότητες του τοπολογικού χώρου όπου εφαρμόζεται και από την κατασκευή του. Θα περιμένουμε λοιπόν η κατηγορία των τοπολογικών χώρων να χωρίζεται σε υποκατηγορίες (κατηγορίες όπου τα αντικείμενα είναι χώροι με κάποιες κοινές ιδιότητες) και ο συναρτητής που εφαρμόζεται να αναγνωρίζει αυτές τις ιδιότητες οσο το δυνατόν περισσότερο. Αυτοί οι συναρτητές καλούνται γενικευμένες θεωρίες (συν-)ομολογίας. Το σύνηθες παράδειγμα είναι η συνήθης ομολογία και συνομολογία.

Η ομολογία παρέχει για κάθε τοπολογικό χώρο X μια οικογένεια αβελιανών ομάδων $H_0(X),\ldots,H_\nu(X),\ldots$ και για κάθε απεικόνιση $f{:}X\to Y$ μια οικογένεια ομομορφισμών $f_\nu{:}H_\nu(X)\to H_\nu(Y)$. Ιδιότητες του χώρου ή της απεικόνισης μπορούν να μελετηθούν μέσω των ομάδων H_ν ή των ομομορφισμών f_ν. Ο υπολογισμός της ομολογίας γίνεται με τα συμπλοκα (complexes). Σε κάθε χώρο X αντιστοιχεί ένα συμπλοκο (complex) K:

$$0 \xleftarrow{\partial_0} K_0 \xleftarrow{\partial_1} K_1 \xleftarrow{\partial_2} K_2 \xleftarrow{\partial_3} \ldots$$

Τα K_ν είναι ελεύθερες αβελιανές ομάδες που γεννούνται από όλα τα ν-διαστατα άπλοκα (simplices) και $\partial\partial=0$.

Η νιοστή ομάδα ομολογίας H_ν του K ορίζεται σαν

$$H_\nu(K):=ker\,\partial_\nu/Im\,\partial_{\nu+1}.$$

Η συνήθης συνομολογία η οποία είναι δακτύλιος (έχει επιπλέον γινόμενο) ορίζεται ως εξής:

Έστω Hom(C,A) το σύνολο των ομομορφισμών μεταξύ δυο αβελιανών ομάδων το οποίο είναι και αυτό αβελιανή. Κάθε

$$\gamma{:}D\to C$$

επάγει τον Hom(C,A)→Hom(D,A). Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε το Hom(-,A) σαν ένα συναρτητή ο οποίος όταν εφαρμόζεται σε αβελιανή ομάδα δίνει επίσης αβελιανή ομάδα. Ας τον εφαρμόσουμε σε ένα συμπλοκο K.

$$Hom(K_0,A) \xrightarrow{\partial_0^*} Hom(K_1,A) \xrightarrow{\partial_1^*} Hom(K_2,A) \xrightarrow{\partial_2^*} \ldots$$

Η ν-οστή συνομολογία του K με συντελεστές στην A ορίζεται σαν

$$H\nu(K,A):=ker\,\partial^*_{\nu+1}/Im\,\partial^*_\nu.$$

Ένα εύλογο ερώτημα το οποίο γεννάται είναι το ακόλουθο.

ΕΡΩΤΗΜΑ. *α) Υπάρχουν άλλες θεωρίες ομολογίας και από τι χαρακτηρίζονται? β) Αν $F(X)=F(Y)$, είναι αληθές ότι X και Y ομοιομορφικοί; Ασθενέστερα, $F(f)=0 \Leftrightarrow f$=τετριμμένη.*

Σκοπός αυτής της παρουσίασης είναι η περιγραφή αυτών των θεωριών καθώς και η ταξινόμηση τους.

Πιό συγκεκριμένα θα μελετήσουμε το εξής πρωταρχικό πρόβλημα της αλγεβρικής τοπολογίας [37, 40].

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Βρείτε μια θεωρία (ένα συναρτητή) $F{:}\Im\to A$ τέτοια ώστε*
α) γιά κάθε X, το $F(X)$ να υπολογίζεται σχέτικα εύκολα και
β) γιά κάθε συνεχή απεικόνιση f, $F(f)=0 \Leftrightarrow f$=τετριμμένη.

2. ΟΜΟΤΟΠΙΑ

"Of course, one has to face the question,
what is a good category of spaces in
which to do homotopy theory?"
J. F. ADAMS

Από ολόκληρη την κατηγορία των τοπολογικών χώρων, θα περιοριστούμε σε εκείνη η οποία περιέχει όλους τους σημαντικούς (πολλαπλότητες, αλγεβρικές varieties πάνω από τους πραγματικούς ή μιγαδικούς) και δεν περιέχει π.χ. τους ρητούς ή το σύνολο του Cantor ή άλλους παθολογικούς χώρους. Διαφορετικά η λύση του προηγούμενου προβλήματος θα ήταν αδύνατη. Η πιό κατάλληλη κατηγορία είναι η κατηγορία των CW-χώρων [45]. Προφανώς η κατηγορία αυτή θα πρέπει να είναι κλειστή ως προς συνήθεις τοπολογικές κατασκευές όπως η *ανάρτηση* ή η *θηλιά* (θα ορισθούν πιο κάτω). Μια ισοδύναμη κατηγορία είναι αυτή των συμπλισιακών συνόλων [26]. Αυτή έχει το πλεονέκτημα της χρήσης συνδυαστικών μεθόδων για υπολογισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται CW-σύμπλοκο αν αποτελείται από υποχώρους*

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \ldots \subset X$$

οι οποίοι καλούνται σκελετοί και ισχύουν τα εξής. Ο X^0 είναι ένα διακριτό σύνολο. Ο X^k είναι το πηλίκο της διακριτής ένωσης του $X^{k-1} \cup_\alpha B^k_\alpha$ το οποίο δίνεται με την ταύτιση των συνόρων $\{S^{k-1}_\alpha\}$ των μοναδιαίων (η ακτίνα δεν παίζει ρόλο) κ-διάστασης σφαιρών $\{B^k_\alpha\}$ (οι οποίες καλούνται κ-κελιά) μέσω απεικονίσεων $f_\alpha : S^{k-1}_\alpha \to X^{k-1}$. Ισοδύναμα, ο X^K είναι η συνίνα (cofibre) της απεικόνισης

$$\bigcup_\alpha S^{k-1}_\alpha \xrightarrow{\bigcup_\alpha f_\alpha} X^{k-1}$$

Η ιδέα της κατασκευής και μελέτης αυτών των χώρων εδόθει απο τον J. H. C. Whitehead και αποτελεί γενίκευση των πολυέδρων. Το πόσο αποτελεσματικό είναι στους υπολογισμούς αυτής της θεωρίας φαίνεται απο το θεώρημα του **Whitehead**. Το πλεονέκτημα των CW-συμπλόκων είναι ότι φιλτράρουν το χώρο σε μικρότερους όπως φαίνεται και από τον ορισμό ώστε είναι δυνατόν να γίνουν υπολογισμοί με χρήση της ομοτοπίας.

Πχ a) S^1: $X^0=\{*\} \subset X^1=B^1 \subset S^1$. Όπου $S^0 \to X^0$.
b) S^n: $X^0=\{*\} \subset X^1=B^n \subset S^n$. Όπου $S^{n-1} \to X^0$.
c) $T^2=S^1 x S^1$: $X^0=\{*\} \subset X^1=S^1 V S^1 \subset T^2$. Όπου $S^0 U S^0 \to X^0$ και $S^1 \to X^1$.

Ένα κατώτερο κελλί του X είναι ένα του οποίου η διάσταση είναι η μικρότερη θετική. Αν αυτή είναι κ και ο X είναι τροχιακά συνεκτικός, ο X θα λέγεται *(κ-1)-συνεκτικός*. Αν ο αριθμός των κελλιών είναι πεπερασμένος σε κάθε διάσταση, ο X θα λέγεται *πεπερασμένου τύπου*. Η διάσταση του X είναι η μεγίστη διάσταση των κελλιών.

Προφανώς ο χώρος μας X θα περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο. Από όλα τα σημεία του, ένα έχει επωμισθεί ιδιαίτερο ρόλο. Το σημείο αυτό δρά σαν μονάδα γιά την ομάδα που δημιουργείται (όπως θα δούμε πιό κάτω) με στοιχεία κάποιες συγκεκριμένες απεικονίσεις. Θα τονίσουμε ότι δεν έχει σημασία ποιό σημείο θεωρούμε, αλλά έχει σημασία να έχουμε θεωρήσει ένα από όλα. Θα γράφουμε (X,x_0).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Η ανάρτηση του X ορίζεται ως εξής:

$$\Sigma X = {}^{XxI}/Xx\{0\} \cup Xx\{1\}$$

Ο προηγούμενος χώρος είναι επίσης CW-σύμπλοκο όταν ο X είναι πεπερασμένου τύπου.
Πχ. $S^n = \Sigma S^{n-1}$.

Είναι φυσικό να αναμένουμε οι στοιχειώδεις πράξεις να ορίζονται με κάποιο τρόπο και μεταξύ τοπολογικών χώρων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3. *Το **Σφηνοειδές άθροισμα (wedge sum)** X V Y μεταξύ X και Y ορίζεται ως ο υπόχωρος* $(X \times y_0) \cup (x_0 \times Y)$ του X x Y.
*Το **Συγκρουσμένο γινόμενο (smash product)** X Λ Y μεταξύ X και Y ορίζεται σαν το πηλίκον του X x Y με το X V Y:*

$$X \wedge Y = X \times Y / X\times\{y_0\} \cup \{x_0\}\times Y.$$

Η κ-αναδιπλωμένη ανάρτηση $\Sigma^{\kappa}X$ του X είναι το ίδιο όπως το γινόμενο $S^{\kappa} \wedge X$.

Η ανάρτηση έχει την εξής ιδιότητα [45]. Υπάρχει φυσική απεικόνιση

$$\Sigma: \Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$$

και με την βοήθεια αυτής ορίζεται η πράξη fVg: $\Sigma X \rightarrow Y$ για $f,g: \Sigma X \rightarrow Y$. Η ανάρτηση Σ είναι ένας συναρτητής και ένας άλλος εξίσου σημαντικός ο οποίος συμπεριφέρεται κατά κάποιο τρόπο αντίστροφα του Σ είναι αυτός των θηλειών Ω ο οποίος μελετήθηκε πρώτα από τον Serre [41].

Έστω $Y^X = \{f: X \rightarrow Y\} \supseteq (Y,y_0)^{(X,x_0)} = \{f: X \rightarrow Y_X / f(x_0) = y_0\}$ [30]. Σημειώνουμε ότι αν ο X είναι συμπαγής χώρος, τότε ο Y^X είναι ομοτοπικά σαν ένα CW-σύμπλοκο, (Milnor).

Ορίζουμε το χώρο τροχιών και θηλιών του X

$$\mathbf{E}X = (X,x_0)^{([0,1],\{0\})} \text{ και } \mathbf{\Omega}X = (X,x_0)^{([0,1],\{0,1\})}.$$

Αν π: EX →X με π(f)=f(1) τότε $\pi^{-1}(xo) = \Omega X$. Δηλαδή, η ΩX →EX→X είναι μία νηματοποίηση (fibration) και αυτή η σύνθεση παίζει σπουδαίο ρόλο στην θεωρία ομοτοπίας διότι επάγει ακριβείς ακολουθίες ομοτοπικών ομάδων όταν εφαρμόζεται ο συναρτητής $[S^v,-]$. Η έννοια της ακρίβειας που υπάρχει στην άλγεβρα μεταφράζεται με τις έννοιες της *επέκτασης (extention)* και *ανύψωσης (lifting)* στην τοπολογία. Οι απεικονίσεις με ιδιότητες ανύψωσης ονομάζονται συνηματοποιήσεις (cofibrations) και επάγονται όταν εφαρμόζεται ο συναρτητής [-,X] (γιά κάποιο χώρο X) και είναι η δυϊκή έννοια των fibrations.

Είναι αναμενόμενο, όπως υπάρχουν ταυτίσεις χώρων ως προς ομοιομορφισμούς, να υπάρχουν ταυτίσεις με απαίτηση μόνο τη συνέχεια. Αφού η συνεχής εικόνα ενός τοπολογικού χώρου είναι μια συνεχής παραμόρφωση (συστολή, διαστολή, μείγμα και των δυο, αλλά όχι απόσχιση), αν μπορεί ο ένας να παραμορφωθεί συνεχώς μέσω του άλλου και ανάποδα, αυτοί θα θεωρούνται ισοδύναμοι, **ομοτοπικά ισοδύναμοι.**

Αυτή η νέα έννοια της **ομοτοπίας** $\simeq$ είναι αυτή που παίζει πρωταρχικό ρόλο στην αλγεβρική τοπολογία και οι συναρτητές που θα μελετήσουμε δεν διαχωρίζουν ομοτοπικά ισοδύναμους χώρους [45]. (Για μια καλή εικονική εποπτεία προτρέπουμε τον αναγνώστη να παρατηρήσει πίνακες του Dali.)

ΟΡΙΣΜΟΣ 4. *α) Έστω f,g:* $(X,x_0) \rightarrow (Y,y_0)$. *Αυτές θα καλούνται ομοτοπικές,* $f \simeq g$, *αν υπάρχει* $H: X\times I \rightarrow Y$ *με* $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$ *και* $H(x_0,t)=y_0$.

β) Αν $f\simeq g$ και μια από τις δυο είναι σταθερή, τότε η άλλη θα λέγεται ομοτοπικά τετριμμένη, διαφορετικά ουσιώδης.

γ) Οι Χ καιΥ θα λέγονται ομοτοπικά ισοδύναμοι, $X\simeq Y$, αν υπάρχουν $f: X\rightarrow Y$ και $g: Y\rightarrow X$ ώστε $fog\simeq 1$ και $gof\simeq 1$.

δ) Αν $X\simeq \{*\}$, ο Χ θα λέγεται συμπτυκτός.

Πχ. α) Έστω f,g από τον X στο πραγματικό επίπεδο, τότε $f\simeq g$ και η ομοτοπία δίνεται απο $H(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x)$.
β) Έστω f,g όπως στο α) και $g(x)=\{(1,0)\}$. Η f είναι ομοτοπικά τετριμμένη.
γ) Το πραγματικό επίπεδο χωρίς ένα σημείο του και ο μοναδιαίος κύκλος είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι.
δ) Το πραγματικό επίπεδο και ο χώρος σημείο είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι.

Έστω οι χώροι X και Y και ένας τρίτος Z τον οποίο χρησιμοποιούμε σαν μέτρο σύγκρισης. Έστω ότι ούτε ο X ούτε ο Y είναι ισοδύναμος με τον Z ως προς τη σχέση της ομοτοπίας. Αν δείξουμε ότι υπάρχει απεικόνιση $f:Z\rightarrow X$ η οποία δεν σχετίζεται με καμιά $g:Z\rightarrow Y$, προφανώς οι X και Y θα είναι διαφορετικοί. Γεννάται το ερώτημα αν μπορούμε να ελλατώσουμε το σύνολο $X^Z=\{f \mid f:Z\rightarrow X\}$ και ποιός είναι ο συσχετισμός μεταξύ των στοιχείων του. Οι f και f' θα σχετίζονται μεταξύ τους αν f(Z) και f'(Z) είναι ομοτοπικοί υπόχωροι του X. Δηλαδή θα πάρουμε το πηλίκον του προηγούμενου συνόλου ως προς ομοτοπία μεταξύ απεικονίσεων $X^Z/\simeq:=[Z,X]$. Ας εφοδιάσουμε το X^Z με την συμπαγή ανοικτή τοπολογία. Έστω $H:[0,1]\rightarrow X^Z$ με $H(0)=f$ και $H(1)=f'$ (δηλαδή μια τροχιά στον X^Z που να συνδέει τις f και f'). Τώρα ο Z θα πρέπει να δίνει στο σύνολο X^Z κάποια δομή η οποία να μπορεί να συγκριθεί με αυτή του X^Z.

Ισχύει ότι αν $Z=\Sigma Y$ ή ο X είναι τοπολογική ομάδα και αντί για το $X^Z/\simeq$ μελετήσουμε το $(X,xo)^{(Z,zo)}/\simeq$ με x_o συγκεκριμένο σημείο του X, το νέο σύνολο αποτελεί ομάδα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5. *Η ν-οστη ομάδα ομοτοπίας ενός τοπολογικού χώρου X ορίζεται ως*
$$\pi_\nu(X)=[S^\nu,X].$$

Η προηγούμενη ομάδα είναι αβελιανή για ν>1, και η πράξη δίνεται ως εξής:
$$S^\nu\rightarrow S^\nu \vee S^\nu \xrightarrow{f\vee g} X$$
Η $\pi_1(X)$ καλειται *ομαδα του Poincare* προς τιμήν του θεμελιωτή της Αλγεβρικής τοπολογίας. Ο χώρος X θα καλείται *απλά συνεκτικός* αν η ομάδα του Poincare είναι τετριμμένη.

Πχ. [47]. $\pi_\nu(S^\nu)=\mathbf{Z}$, $\pi_\kappa(S^\nu)=\{1\}$ για $0<\kappa<\nu$. Η ομάδα $\pi_\kappa(S^\nu)$ ([38]) είναι γνωστή για συγκεκριμένες περιπτώσεις όταν $\kappa>\nu$ και αυτό είναι το κύριο πρόβλημα του κλάδου διότι τότε θα γνωρίζαμε πως σχετίζονται οι πολλαπλότητες μεταξύ τους. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι μέχρι το 1933 υπήρχε η πλάνη ότι $\pi_\kappa(S^\nu)=\{1\}$ για $\kappa>\nu$. Ο Hopf κατασκεύασε μια ουσιώδη απεικόνιση $\eta:S^3\rightarrow S^2$ (Hopf invariant one, $\pi_3(S^2)=\mathbf{Z}=\langle\eta\rangle$) και από τότε η ανάπτυξη της ομοτοπικής θεωρίας είναι ραγδαία [44]. Το επόμενο όνομα το οποίο πιστεύουμε οτι θα πρέπει να αναφερθεί είναι του Serre ο οποίος με τη διδακτορική διατριβή του, όπου μελέτησε τη σχέση των fibrations και των φασματικών ακολουθιών, έδωσε τεράστια ώθηση στον κλάδο.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Το θεώρημα του Whitehead). Έστω $f{:}X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ CW-συμπλόκων. Αν $f_*{:}\pi_*(X) \to \pi_*(Y)$ είναι ένας ισομορφισμός βαθμολογημένων ομάδων, τότε η f είναι ομοτοπική ισοδυναμία. Επίσης, αν $f_*{:}H_*(X) \to H_*(Y)$ είναι ένας ισομορφισμός βαθμολογημένων αβελιανών ομάδων, τότε η f είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

Για τυχαίους χώρους το προηγούμενο είναι λάθος. Επίσης, μόνο ο ισομορφισμός χωρίς την f δεν αρκεί για την κατάληξη του θεωρήματος.

Ας επανέλθουμε πάλι στη σχέση μεταξύ των συναρτητών **Σ** και **Ω**. Υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων [ΣY,X] και [Y,ΩX]. Η αντιστοιχία δίνεται απο f(t,y)=g(y)(t), [45]. Εφαρμογή αυτού είναι ο ισομορφισμός $\pi_\nu(\Omega X)=\pi_{\nu+1}(X)$. Ο προηγούμενος ισομορφισμός εδόθει πρώτα από το fibration του Serre. Επειδή ο χώρος των τροχιών του X, EX, είναι συμπτυχτός απο τη μακριά ακριβή ακολουθία της ομοτοπίας εφαρμοσμένη στο $\Omega X \to EX \to X$ έχουμε ότι $\pi_\nu(\Omega X)=\pi_{\nu+1}(X)$.

Όπως φαίνεται από τους προηγούμενους ορισμούς η ομοτοπία ορίζεται σχετικά εύκολα εν σχέση με την ομολογία αλλά η σχέση δυσκολίας στους υπολογισμούς είναι αντιστρόφως ανάλογη. Η ομολογία όπως θα δούμε πιο κάτω είναι μια προσέγγιση της ομοτοπίας.

3. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ

"During the last decade the methods of algebraic topology have invaded extensively the domain of pure algebra, and initiated a number of internal revolutions."

Cartan-Eilenberg

Μια ουσιώδης ανακάλυψη των Eilenberg και Steenrod είναι η έκφραση αξιωμάτων για ομολογιακούς τελεστές ώστε η συνήθης θεωρία να είναι ένα παράδειγμα. Πριν μελετήσουμε τις γενικευμένες θεωρίες θα αναφερθούμε σε γνωστά αποτελέσματα από τη συνήθη ομολογία.

Για κάθε χώρο X υπάρχει μια βαθμολογημένη αβελιανή ομάδα $H_*(X)$, όπως είδαμε προηγουμένως μια αβελιανή ομάδα $H_\nu(X)$ για κάθε μη αρνητικό ακέραιο ν [16]. (Για αρνητικούς ακέραιους αυτές οι ομάδες δεν ορίζονται αλλά αυτό δεν συμβαίνει στις γενικευμένες θεωρίες.) Για κάθε υπόχωρο A του X ορίζονται οι σχετικές ομάδες ομολογίας $H_*(X,A)$ οι οποίες για θετικούς ακέραιους κάτω από ασθενείς προυποθέσεις δεν είναι τίποτα άλλο από $H_*(X/A)$. Εδώ φυσικά υποθέτουμε ότι οι απεικονίσεις σέβονται τους αναγκαίους περιορισμούς. $f{:}(X,A)\to(Y,B)$ με $f(A)\subset B$ και επάγει ομομορφισμό

$$f_*{:}H_*(X,A)\to H_*(Y,B).$$

Τα αξιώματα των Eilenberg και Steenrod

α) <u>Αξίωμα ομοτοπίας</u>. Ομοτοπικές απεικονίσεις επάγουν τον ίδιο ομομορφισμό $H_*(X,A)\to H_*(Y,B)$.

β) <u>Αξίωμα ακριβείας</u>. Για κάθε ζεύγος (X, A) υπάρχει μια φυσική μακρά ακριβής ακολουθία

$$\ldots\to H_n(A)\xrightarrow{i_*} H_n(X)\xrightarrow{j_*} H_n(X,A)\xrightarrow{\vartheta} H_{n-1}(A)\to\ldots$$

όπου i_* είναι ο επαγόμενος ομομορφισμός απο τον εγκλεισμό $A\subset X$, j_* ο επαγόμενος ομομορφισμός από τη φυσική προβολή και ϑ ο συνδετικός ομομορφισμός.

γ) <u>Αξίωμα εκτομής</u>. Εάν $A\subset B\subset X$ ώστε η κλειστή θήκη του A να περιέχεται στο εσωτερικό του B, τότε υπάρχει ισομορφισμός

$$H_*(X-A,B-A)\xrightarrow{\cong}H_*(X,B)$$

δ) Αξίωμα διάστασης. Όταν ο χώρος X αποτελείται από ένα μόνο σημείο τότε

$$H_i(X)=\begin{cases} Z & i=0 \\ 0 & i\neq 0 \end{cases}$$

Αν απαιτούμε η ομολογία να έχει συντελεστές από κάποια αβελιανή ομάδα G, τα αξιώματα είναι όπως και προηγουμένως εκτός από το αξίωμα της διάστασης όπου οι ακέραιοι αντικαθίστανται με την G.

Υπάρχουν αντίστοιχα αξιώματα για τη συνομολογία τα οποία είναι όπως τα προηγούμενα με τα βέλη κατά τις αντίθετες διευθύνσεις. Εάν η G είναι δακτύλιος R, τότε υπάρχει γινόμενο στην $H^*(X;R)$ για το οποίο ισχύει

$$vu=(-1)^{ij}uv$$

όπου $v\in H^j(X;R)$ και $u\in H^i(X;R)$.

Η ανηγμένη ομολογία $\overline{H_*}(X)$ ορίζεται σαν ο πυρήνας της απεικόνισης $H_*(X)\to H_*(\{x_0\})$ και η ανηγμένη συνομολογία σαν ο συνπυρήνας της $H^*(X)\leftarrow H^*(\{x_0\})$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6. *(G. W. Whitehead [47]) Μια γενικευμένη θεωρία ομολογίας h_* είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής από την κατηγορία των CW-συμπλόκων προς την κατηγορία των βαθμολογημένων αβελιανών ομάδων ο οποίος ικανοποιεί τα πρώτα τρία αξιώματα των Eilenberg-Steenrod. Μια γενικευμένη θεωρία συνομολογίας είναι αντίστοιχα ένας ανταλλοίωτος συναρτητής (αλλάζει τη φορά των βελών όταν εφαρμόζεται σε απεικονίσεις).*

Πριν δώσουμε παραδείγματα τέτοιων θεωριών θα μελετήσουμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα η οποία τις χαρακτηρίζει και τις κατασκευάζει ταυτόχρονα. Επίσης, σκοπός της παρουσίασης αυτής είναι να παρουσιάσει τα κύρια σημεία του κλάδου όπως ήδη έχουμε αναφέρει, θα αποφύγουμε λοιπόν αποδείξεις και τεχνικά σημεία ώστε να μην κουράσουμε τον αναγνώστη με λεπτομέριες. Στην βιβλιογραφία που παρατίθεται, ο αναγνώστης παραπέμπεται σε ανάφορες όπου μπορεί να ανατρέξει σε όλες τις λεπτομέριες.

Η απεικόνιση που συνδέει την ομοτοπία με την ομολογία είναι ο ομομορφισμός του Hurewicz $h:\pi_\nu(X)\to H_\nu(X)$ ([19], [44]) και ο οποίος ορίζεται ως εξής. Είναι γνωστό οτι $H_\nu(S^\nu)\cong\mathbf{Z}$ και έστω g να είναι ο γεννήτορας. Ορίζουμε $h:[f]\to f_*(g)$ όπου $f:S^\nu\to X$. Από το θεώρημα του Hurewicz έχουμε ότι αν $\pi_i(X)=0$ για $i<\nu$ (ο X είναι ν-1 συνεκτικός) τότε ο ομομορφισμός του Hurewicz είναι ισομορφισμός για $i=\nu$ και επιμορφισμός για $i=\nu+1$. (Εδώ θεωρούμε ότι $\nu>1$, για τεχνικούς λόγους.) Είναι γνωστό ότι κάτω από τις προηγούμενες προυποθέσεις η συνομολογία συμπεριφέρεται όπως θα θέλαμε. Δηλαδή ([44]),

$$H^\nu(X,G)\cong \mathrm{Hom}(H_\nu(X),G)$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $\pi_\nu(X)\cong G$, τότε ο αντίστροφος ισομορφισμός του Hurewicz βρίσκεται στην $\mathrm{Hom}(H_\nu(X),G)$ και έστω $i_\nu\in H^\nu(X,G)$ που αντιστοιχεί σαυτόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 [44]. *Υπάρχει μια 1-1 και επί αντίστοιχια*

$$[X,K(G,\nu)]\leftrightarrow H^\nu(X,G)$$

η οποία δίνεται από $[f]\leftrightarrow f_*(i_\nu)$.

Το σύμβολο $K(G,\nu)$ εκφράζει έναν χώρο Eilenberg-MacLane τύπου G-ν, [15]. Δηλαδή ένα W-σύμπλοκο το οποίο έχει μια μόνο μη-τετριμμένη ομοτοπική ομάδα την $\pi_\nu(K(G,\nu))\cong G$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ. α) Βλέπουμε λοιπόν ότι η συνήθης συνομολογία με συντελεστές στην G καθορίζεται από την οικογένεια των χώρων $\{K(G,\nu)| \nu\geq 0\}$.

β) Όπως ήδη έχουμε αναφέρει ισχύει ότι $\pi_i(\Omega(K(G,\nu)))\cong\pi_{1+i}(K(G,\nu))$. Δηλαδή, $\Omega(K(G,\nu)) \simeq K(G,\nu-1)$ ασθενής ομοτοπική ισοδυναμία). Ας εφαρμόσουμε το τελευταίο στην συνομολογία ενός χώρου.

$$H^\nu(X, G)\leftrightarrow[X, \Omega(K(G,1+\nu))]\leftrightarrow[\Sigma X, K(G,1+\nu)]\leftrightarrow H^{1+\nu}(\Sigma X, G)$$

Το τελευταίο είναι ένα γνωστό τοπολογικό αποτέλεσμα το οποίο δείχνει τη σημασία της ανάρτησης.

Ας επανέλθουμε στην οικογένεια $\{K(G,\nu)| \nu\geq 0\}$ η οποία έχει την ιδιότητα $\Omega(K(G,\nu))\simeq K(G,\nu-1)$. Η προηγούμενη οικογένεια είναι ένα παράδειγμα φάσματος.

Τα φάσματα, [2] έχουν συναφείς ιδιότητες με τους χώρους και χρησιμοποιήθηκαν για να αποφευχθούν περιοριστικές εκφράσεις όπως: *αυτό ισχύει όχι κατευθείαν αλλά αφού εφαρμοσθεί η ανάρτηση ορισμένες φορές.* Σημειώνουμε ότι τα φάσματα δεν σχετίζονται με τους διαφορικούς τελεστές της συναρτησιακής ανάλυσης ούτε με τα φάσματα αντιμεταθετικών δακτυλίων της αλγεβρικής γεωμετρίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8. *Ένα φάσμα Φ είναι μια οικογένεια χώρων $\{\Phi_\nu\}$ και απεικονίσεων $\varepsilon_\nu:\Sigma\Phi_\nu\to\Phi_{\nu+1}$. Το φάσμα της ανάρτησης ορίζεται $\Phi_\nu=\Sigma^\nu X$ και κάθε ε_ν είναι η ταυτοτική. Το φάσμα της σφαίρας S^0 είναι το φάσμα ανάρτησης του χώρου S^0 (ο ν-στος χώρος του φάσματος αυτού είναι η μοναδιαία σφαίρα S^ν). Η κ-οστή ανάρτηση $\Sigma^\kappa\Phi$ του Φ ορίζεται ως $(\Sigma^\kappa\Phi)_\nu=\Phi_{\nu+\kappa}$ για κάθε ακέραιο κ.*

Οι ομοτοπικές ομάδες του Φ ορίζονται ως

$$\pi_k(\Phi)=\lim_{\to}\pi_{\nu+k}(\Phi_\nu)$$

(το προηγούμενο όριο είναι ευθύ) και η γενικευμένη ομολογία $\Phi_*(X)$ ορίζεται ως

$$\Phi_k(X)=\lim_{\to}\overline{\Phi}_{\nu+k}(X_\nu)$$

Το $\Phi_{\nu+k}(X_\nu)$ ορίζεται ως

$$\Phi_k(X_\nu)=\lim_{\to}\pi_{\kappa+m}(\Phi_m\wedge X_\nu)$$

Εδώ $\Phi_m\wedge X_\nu$ είναι το (smash) συγκρουσμένο γινόμενο μεταξύ των δυο χώρων Φ_m και X_ν.

Έστω Φ ένα Ω-φάσμα. Η γενικευμένη θεωρία συνομολογίας του Φ δίνεται από

$$\Phi^\nu(X)=[X, \Phi_\nu]$$

Αν X είναι φάσμα τότε $\Phi^\nu(X)=\lim[X_\kappa, \Phi_{\nu+\kappa}]$.

Βλέπουμε ότι στην κατηγορία των φασμάτων δεν χρειάζεται να διαχωρίζουμε μεταξύ ανηγμένης και μη ομολογίας.

Οι ομοτοπικές ομάδες των φασμάτων είναι καλύτερα αντιμετωπίσιμες από αυτές των χώρων. $\pi_\kappa(\Sigma^\nu\Phi)=\pi_{\kappa-\nu}(\Phi)$. Τα περισσότερα αποτελέσματα των χώρων εξακολουθούν να ισχύουν μετά από κάποιες τεχνικές διαδικασίες και στα φάσματα, δηλαδή στις νέες θεωρίες. Έχουμε λοιπόν την ευχέρεια των κλασικών εργαλείων. Φυσικά πριν κάποιος αρχίσει να υπολογίζει τη συγκεκριμένη θεωρία για κάποιο χώρο ή φάσμα, θα πρέπει να γνωρίζει το αποτέλεσμα όταν εφαρμόζεται σε σημείο. Κάποιος θα περίμενε προφανή απάντηση ή σχετικά εύκολους υπολογισμούς. Δυστυχώς αυτό δεν είναι αληθές και τα αποτελέσματα για σημαντικές θεωρίες δόθηκαν μετά από πολλές προσπάθειες (βλέπε θεώρημα 14) ή δεν έχουν δοθεί ακόμα όπως στην ευσταθή ομοτοπία. Το κύριο εργαλείο για τον υπολογισμό αυτών των ομάδων είναι η φασματική ακολουθία των Atiyah-Hirzebruch. Η ανάγκη αυτών των υπολογισμών φαίνεται από το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ. *Εάν h και h' είναι θεωρίες ομολογίας ορισμένες στην κατηγορία των πεπερασμένων CW-χώρων και $\pi{:}h(\{\text{σημείο}\})\to h'(\{\text{σημείο}\})$ είναι ομομορφισμός, τότε υπάρχει μοναδικός φυσικός μεταφορέας $\pi'{:}h\to h'$ ο οποίος επεκτείνει τον π. Εάν ο π είναι ισομορφισμός τότε $h(X,A)\cong h'(X,A)$, για κάθε ζεύγος (A,X).*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. α) Η συνήθης ομολογία και συνομολογία ορίζεται από το φάσμα που δίνεται από χώρους Eilemberg-MacLane όπως είδαμε.
β) Αν Φ είναι το φάσμα της σφαίρας, τότε η θεωρία που ορίζεται είναι της ευσταθούς ομοτοπίας,

$$\pi_*^S(X)=\pi_{n+*}(\Sigma^n X)$$

Οι ευσταθείς ομάδες ομοτοπίας των σφαιρών υπολογίζονται ευκολότερα από τις ασταθείς. Παρόλο οτι υπάρχουν αρκετές τεχνικές για υπολογισμούς, η θεωρία αυτή εξακολουθεί να παραμένει μυστήρια. Αναφέρουμε επιγραμματικά δυο κλασσικά θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 (Serre, 1953 [42]). *Οι ομοτοπικές ομάδες των σφαιρών είναι πεπερασμένες αβελιανές εκτός από τις ακόλουθες περιπτώσεις*

$$\pi_n(S^n)=Z \quad \pi_{4m-1}(S^{2m})=Z\oplus F_m$$

Όπου F_m είναι πεπερασμένη αβελιανή.

Σημειώνουμε ότι η ευσταθής ομοτοπία είναι ένας βαθμολογημένος δακτύλιος [38].

$$fg{:}S^{n+k+l}\xrightarrow{\Sigma^k g}S^{n+k}\xrightarrow{f}S^n$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 (Nishida, 1973 [33]). *Κάθε στοιχείο του $\pi^S{}_k$ για $k>0$ είναι μηδενοδύναμο.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 11 (Cohen-Moore-Neisendorfer, 1979, [12]). *Έστω p πρώτος μεγαλύτερος του 5, τότε η p-συνιστώσα της $\pi_{2i+1+j}(S^{2i+1})$ έχει εκθέτη p^i.*

Η p-συνιστώσα της $\pi^S{}_k$ είναι γνωστή για p=2 και k<60 [24, 25]. Για p πρώτο περιττό όταν $k<2p^3(p-1)$. Με το προηγούμενο θεώρημα βλέπουμε ότι ο δακτύλιος $\pi^S{}_*$ συμπεριφέρεται πολύ άσχημα. Από την άλλη μεριά η σημασία του είναι ουσιώδης. Υπάρχει η εικασία (υπόθεση της γεννησιμότητας) του Freyd (1966) η οποία λέει ότι η ευσταθής ομοτοπική κατηγορία βρίσκεται μέσα στην κατηγορία των προτύπων πάνω από τον δακτύλιο $\pi^S{}_*$.

Οι τεχνικές υπολογισμού ουσιαστικά στηρίζονται στις φασματικές ακολουθίες των Serre, Adams και Adams-Novikov, [38]. Οι περιγραφές των τεχνικών αυτών ξεφεύγουν απο τους σκοπούς αυτής της παρουσίασης.

Συνεχίζουμε με το τρίτο σημαντικό παράδειγμα γενικευμένης θεωρίας.
γ) Η κλασσική μιγαδική K-θεωρία η οποία δίνεται από το Ω-φάσμα

$$K_{2n}=Z\times BU,\quad K_{2n-1}=U,$$

όπου U είναι η άπειρη ορθομοναδιαία ομάδα και BU ο χαρακτηρίζων χώρος του U (classifying space, [22]). Η θεωρία αυτή χρησιμοποιήται στο σημαντικό θεώρημα της μηδενοδυναμίας και σχετίζεται με τη γεωμετρία μιγαδικών αναλυτικών πολλαπλοτήτων. Η αντιμετώπιση των προηγούμενων ομάδων έγινε προσιτή μετά από την σπουδαία δουλειά του Thom το 1950. Δίνουμε πιο κάτω στοιχειώδεις έννοιες από τη γεωμετρική σκοπιά της θεωρίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12. *Έστω M_1 και M_2 δυο n-διάστατες λείες κλειστές πολλαπλότητες και έστω f_i:$M_i \rightarrow X$ συνεχείς απεικονίσεις. Αυτές καλούνται συνοριακές εάν υπάρχει f:$W \rightarrow X$, όπου W είναι λεία πολλαπλότητα της οποίας το σύνορο είναι η διακριτή ένωση των M_1 και M_2 έτσι ώστε ο περιορισμός της f να είναι η f_i. Η f καλείται συνορισμός μεταξύ των f_i.*

Μια πολλαπλότητα καλείται ευσταθώς μιγαδική αν δέχεται γραμμική μιγαδική δομή στο κανονικό της δράγμα (bundle).

ΟΡΙΣΜΟΣ 13. *$MU_n(X)$ είναι η συνορική ομάδα η οποία γεννάται από όλους τους συνορισμούς ώστε οι πολλαπλότητες να είναι ευσταθώς μιγαδικές.*

Εάν ο X αποτελείται από ένα μόνο σημείο τότε η ομάδα MU_* γίνεται βαθμολογιμένος δακτύλιος ο οποίος μελετήθηκε ανεξάρτητα από τους Thom, Milnor και Novikov. Ο δακτύλιος αυτός αποτελείται απο κλάσεις ισοδυναμίας κλειστών μιγαδικών πολλαπλοτήτων τα οποία σχετίζονται με την πολλαπλότητα σημείο. Οι πράξεις δίνονται απο διακριτή ένωση και καρτεσσιανό γινόμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 14 [46, 31, 34]. *Ο μιγαδικός συνοριακός δακτύλιος MU_* είναι ισόμορφος προς τον $Z[x_1, x_2, \ldots]$, όπου $\dim x_i=2i$.*

Αντίστοιχα ορίζεται και η συνσυνορική ομάδα $MU^*(X)$ η οποία είναι βαθμολογιμένη άλγεβρα πάνω από τον MU^*. Η τελευταία είναι σαν τον MU_* μόνο που η βαθμολόγιση είναι ανάποδα. Το επόμενο θεώρημα του Quellin περιγράφει καθαρά αλγεβρικά αυτόν τον δακτύλιο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 15 (Quellin, 1969 [36]). *Έστω L η βαθμολογιμένη πολυωνυμική άλγεβρα $Z[x_1, x_2, \ldots]$ με βαθμό του x_i να είναι -2i. Υπάρχει ένα παγκόσμιο κανονικό δόγμα ομάδας (universal formal group law) το οποίο ορίζεται πάνω από τον L, και ισομορφισμός δακτυλίων μεταξύ MU^* και L ώστε το κανονικό δόγμα ομάδας το οποίο σχετίζεται με το μιγαδικό συνσυνορισμό να είναι παγκόσμιο.*

Από αυτό το θεώρημα αρχίζει μια πολύ ενεργής περιοχή μεταξύ άλγεβρας και τοπολογίας η οποία μελετά την κατηγορία πεπερασμένων CW-συμπλόκων και την κατηγορία των πεπερασμένως παραστομένων βαθμολογημένων L-προτύπων [37]. Υπάρχει μια ισχυρή σύνδεση μεταξύ ευσταθούς ομοτοπίας και αλγεβρικής θεωρίας αριθμών η οποία δίνεται απο τη συνομολογία συγκεκριμένων ομάδων.

Το $\overline{MU}$ είναι ένα Ω-φάσμα και από το θεώρημα περιοδικότητας του Bott ([4]) έχουμε

$$\overline{MU_n} = \lim \Omega^k MU_{n+k} = K_{n+k}$$

Σαυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε μερική απάντηση στο πρόβλημα που εκφράσαμε στην αρχή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 16 (Devinatz-Hopkins-Smith [13]). *Για τη θεωρία MU_* ισχύει:*

Έστω X πεπερασμένο CW-σύμπλοκο και $f{:}\Sigma^{K}X \to X$. Η f είναι ευσταθώς μηδενοδύναμη ανν $(\overline{MU}_{*}(f))^{n}=0$.
Αναφέρουμε ότι μια απεικόνιση είναι ευσταθώς μηδενοδύναμη αν κάποιο πλήθος αναδιπλώσεών της είναι ομοτοπικό με τη σταθερή απεικόνιση.

$$f^{n}{:}\Sigma^{nk}X \xrightarrow{f} \Sigma^{(n-1)k}X \to \ldots \to \Sigma^{k}X \xrightarrow{f} X,\ f^{n} \simeq c.$$

4. Η ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΦΑΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ

Στο τελευταίο μέρος θα αναλύσουμε τη σχέση μεταξύ φασμάτων και γενικευμένων θεωριών.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια γενικευμένη θεωρία συνομολογίας h^{*}. Όπως είδαμε αυτή θα ικανοποιεί τα τρία πρώτα αξιώματα των Eilemberg-Steenrod. Εάν επίσης ικανοποιεί και το αξίωμα του σφηνοειδούς αθροίσματος του Milnor, το οποίο θα περιγράψουμε αμέσως, τότε μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα αναπαράστασης του Brown.

Αξίωμα του σφηνοειδούς αθροίσματος. Εάν ο W είναι ένα σφηνοειδές άθροισμα χώρων $\vee X_i$ τότε

$$h^{*}(W) \cong \Pi h^{*}(X_i)$$

και

$$h_{*}(W) \cong \oplus h_{*}(X_i).$$

Σημειώνουμε ότι όταν το άθροισμα είναι πεπερασμένο τότε το προηγούμενο επάγεται από τα αξιώματα των Eilemberg-Steenrod.

ΘΕΩΡΗΜΑ 17 (Brown [8, 1]). *Εάν η γενικευμένη θεωρία συνομολογίας h^{*} ικανοποιεί τα τρία πρώτα αξιώματα των Eilemberg-Steenrod καθώς και του σφηνοειδούς αθροίσματος τότε υπάρχει ένα φάσμα E έτσι ώστε $h^{*}=E^{*}$, και αντίστοιχα για την ομολογία.*

Από το θεώρημα 1 έχουμε ότι για το προηγούμενο φάσμα ισχύει

$$[X, E_{\nu}] \leftrightarrow [X, \Omega E_{\nu+1}]$$

για κάθε χώρο X. Άρα υπάρχει ασθενής ομοτοπική ισοδυναμία (οι αντίστοιχες ομοτοπικές ομάδες είναι ισόμορφες) $E_{\nu} \simeq \Omega E_{\nu+1}$. Δηλαδή κάθε γενικευμένη συνομολογία δίνει ένα Ω-φάσμα όπως είδαμε και για τη συνήθη.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση ο G. W. Whitehead έδειξε ότι αν ξεκινήσουμε από οποιοδήποτε φάσμα E, μπορούμε να ορίσουμε μια γενικευμένη θεωρία με τον ορισμό 8 [47]. Το ερώτημα που γεννάται τώρα είναι τι σχέση έχουν οι δυο κατευθύνσεις. Εάν δείξουμε ότι αυτές οι κατασκευές είναι ουσιαστικά η μια αντίστροφη της άλλης, τότε τα φάσματα και οι θεωρίες θα είναι ουσιαστικά ισοδύναμα.

Ας ξεκινήσουμε από μια θεωρία και ας κατασκευάσουμε το φάσμα που την αναπαριστά και ας πάρουμε την αντίστοιχη θεώρια, τότε η τελευταία θα είναι ισόμορφη με την αρχική.

Αντίστροφα, ας ξεκινήσουμε με κάποιο φάσμα E, και ας κατασκευάσουμε την αντίστοιχη θεωρία h^{*} και το αντίστοιχο Ω-φάσμα Φ που την αναπαριστά. Τότε το E και Φ έχουν τις ίδιες ομοτοπικές ομάδες και μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει μια ισοδυναμία μεταξύ τους. Κάθε φάσμα μπορεί να αντικατασταθεί με ένα ισοδύναμο Ω-φάσμα και ο ορισμός του δίνεται από

$$\Phi_{\nu}=\lim \Omega^{\kappa} E_{\nu+\kappa}.$$

Άρα $\Phi_0=\Omega^{\infty}E_0$ και ο Ω^{∞} είναι ένας τελεστής από την κατηγορία των φασμάτων στην κατηγορία των χώρων. Η τιμή του συναρτητή Ω^{∞} είναι οι χώροι απείρων θηλιών [3, 11, 6]. Φυσικά θέλουμε ο συναρτητής αυτός να διατηρεί όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες. (Πχ ένας τέτοιος χώρος απείρων θηλιών είναι ένας Hopf-χώρος, δηλαδή έχει γινόμενο [6]. Στο παράδειγμα τρία που είδαμε, στη μιγαδική συνοριακή θεωρία, το γινόμενο αυτό αντιστοιχεί με το Whitney sum των vector-bundles.) Άρα αυτός ο συναρτητής λαμβάνει τιμές σε κάποια κατηγορία με πολύ πλούσια δομή η οποία αντικατοπτρίζει την πλούσια γεωμετρική δομή του χώρου. Σαυτή την περίπτωση η μελέτη των χώρων απείρων θηλιών ισοδυναμεί με τη μελέτη των φασμάτων [11, 27, 30].

Οι αναλλοίωτες ιδιότητες που χαρακτηρίζουν αυτούς τους χώρους είναι οι ομολογιακοί τελεστές των Kudo-Araki [20], Dyer-Lashof [14] και του μεταφορέα [20, 35]. Η θεωρία αυτών των χώρων έχει σκοπό την παροχή πληροφοριών στην τοπολογία για τη θεωρία φασμάτων ή γενικευμένων θεωριών ή για εκείνους τους χώρους οι οποίοι παίζουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία πολλαπλοτήτων.

Οι πιο ενδιαφέρουσες θεωρίες απαιτούμε να δέχονται (συν)-ομολογιακούς τελεστές όπως η άλγεβρα του Steenrod [43] ή όπως στην ομολογία η προηγουμένη άλγεβρα των Dyer και Lashof. Οι τελεστές παρέχουν χρήσιμα εργαλεία για υπολογισμούς και δίνονται απο τον $h^*(h)$ Αυτός ο δακτύλιος είναι η άλγεβρα των ευσταθών τελεστών της θεωρίας h^*. Αν h είναι το φάσμα των Eilemberg-MacLane για την ομάδα $\mathbb{Z}_p$, τότε η άλγεβρα των τελεστών είναι η γνωστή άλγεβρα του Steenrod ενώ στην ομολογία πέρνουμε την δυϊκή της. Οι αντίστοιχες άλγεβρες μελετούνται και για τις άλλες σημαντικές θεωρίες.

Θα κλείσουμε κάνοντας μερικά σχόλια για τις κατηγορίες των φασμάτων. Όπως είναι φυσικό, δημιουργήθηκε η ανάγκη του ορισμού μιας κατηγορίας φασμάτων και της αντίστοιχης ομοτοπικής. Στη βιβλιογραφία παρατίθεται μια μονογραφία του Adams [2] προς την κατεύθυνση αυτή ακολουθόντας ιδέες του Boardman. Παρόλο που αυτή η κατεύθυνση της θεωρίας φαίνεται η καλύτερη, δεν είναι εύχρηστη όταν εφαρμόζεται σε γενικεύσεις δράσεων ομάδων όπως στους τοπολογικούς χώρους. Ο Adams είχε προτείνει την κατηγορία των φασμάτων η οποία αναπτύχθηκε και μελετήθηκε απο τον May. Αυτή η κατηγορία η οποία σχετίζεται με Ω-φάσματα και είναι ιδανική για ευσταθή ομοτοπία ξεπερνά τις τεχνικές δυσκολίες που δημιουργούνται σαυτήν του Boardman χωρίς να χάνει κατασκευές ή αποτελέσματα απο την πλευρά της ομοτοπίας [22].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] J. F. Adams. A variant of E. H. Brown's representability theorem. *Topology*, 10:185-198, 1971.

[2] J. F. Adams. *Stable homotopy and Generalized Homology*. University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[3] J. F. Adams. *Infinite Loop Spaces. Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press, Princeton, 1978.

[4] M. F. Atiyah and R. Bott. On the periodicity theorem for complex vector bundles, *Acta Mathematica*, 112:229-247, 1964.

[5] J. M. Boardman, *Stable homotopy theory*, mimeographed notes, Johns Hopkins, 1969/70.

[6] J. M. Boardman and R. M. Vogt. Homotopy-everything H-spaces, *Bulletin AMS,* 74:1117-1122, 1968.

[7] R. Bott. The stable homotopy of the classical groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* 43:933-935, 1957.

[8] E. H. Brown. Cohomology theories. *Annals of Mathematics,* 75:467-484, 1962.

[9] G. Carlsson. Asurvey of equivariant stable homotopy theory. *Topology*, 31:1-28, 1992.

[10] H. Cartan and S. Eilemberg. *Homological Algebra.* Princeton University Press, Princeton, 1956.

[11] F. R. Cohen, T. J. Lada and J. P. May. *The Homology of Iterated Loop Spaces,* Lecture Notes in Mathematics no. 533, Springer-Verlag, 1976.

[12] F. R. Cohen, J. C. Moore and J. Neisendorfer. The double suspension and exponents of the homotopy groups of spheres. *Annals of Mathematics,* 110:549-565, 1979.

[13] E. Devinatz, M. J. Hopkins, and J. H. Smith. Nilpotence and stable homotopy theory. *Annals of Mathematics,* 128:207-242, 1988.

[14] E. Dyer and R. K. Lashof. Homology of iterated loop spaces, *American Journal of Mathematics*, 84:35-38, 1963.

[15] S. Eilenberg and S. MacLane. On the groups $H(\pi,n)$ I, *Annals of Mathematics,* (2) 58:55-106, 1953.

[16] S. Eilenberg and N. E. Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton University Press, Princeton, 1952.

[17] M. J. Hopkins, N. J. Kuhn, and D. C. Ravenel. Generalized group characters and complex oriented cohomology theories. *Journal of the AMS.*

[18] M. J. Hopkins and J. H. Smith. Nilpotence and stable homotopy theory II. To appear.

[19] W. Hurewicz. Beitrage zur Topologie Deformationen III-IV. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc., Series A,* 32:112-119, 521-528, 1935.

[20] D. S. Kahn and S. B. Priddy. Applications of the transfer to stable homotopy theory, *Bulletin AMS,* 78:981-987, 1972.

[21] T. Kudo and S. Araki. Topology of H_n-spaces and H-squaring operations, *Mem. Fac. Sci. kyusyu Univ. Ser A,* 10:85-120, 1956.

[22] L. G. Lewis, J. P. May and M. Seinberger. *Equivariant Stable Homotopy Theory*. LNM no 1213. Sringer-Verlag.

[23] I. Madsen and R. J. Milgram. *The Classifying Spaces for Surgery and Cobordism of Manifolds*, Princeton University Press, Princeton 1979.

[24] M. E. Mahowald. A new infinite family in ${}_2\pi^S{}_*$. *Topology*, 16:249-256, 1977.

[25] M. E. Mahowald. The image of J in the EHP sequence. *Annals of Mathematics*, 116:65-112, 1982.

[26] J. P. May. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Van Nostrand Mathematical Stydies, no. 11, 1967.

[27] J. P. May. *The Geometry of Iterated Loop Spaces*, LNM no. 271, Springer-Verlag, 1972.

[28] J. P. May. Infinite loop space theory, *Bulletin AMS*, 83:456-494, 1977.

[29] R. J. Milgam. Iterated loop spaces, *Annals of Mathematics*, 84:386-403, 1966.

[30] J. W. Milnor. On spaces having the homotopy type of CW-complex. *Transactions of the American Mathematical Society*, 90:272-280, 1959.

[31] J. W. Milnor. On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, Part I. *American Journal of Mathematics*, 82:505-521, 1960.

[32] J. W. Milnor. On axiomatic homology theory. *Pacific J. Mathematics*, 12:337-341, 1962.

[33] G. Nishida. The nilpotence of elements of the stable homotopy groups of spheres. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 25:707-732, 1973.

[34] S. P. Novikov. Some problems in the topology of manifolds connected with the theory of Thom spaces. *Soviet Mathematics Doklady*, 1:717-720, 1960.

[35] S. B. Priddy. Transfer, symmetric groups, and stadle homotopy theory, *LNM no. 341*:244-255, Springer-Verlag, 1973.

[36] D. G. Quillen. On the formal group laws of oriented and unoriented cobordism theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 75:1293-1298, 1969.

[37] D. C. Ravenel. *Nilpetence and Periodicity in Stable Homotopy Theory*, *Annals of Mathematical Studies*. Princeton University Press, Princeton, 1992.

[38] D. C. Ravenel. *Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres*. Academic Press, New York, 1986.

[39] D. C. Ravenel. Progress report on the telescope conjecture. In N. Ray and G. Walker, editors, *Adams Memorial Symposium on Algebraic Topology Volume 2*, pages 1-21, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[40] G. B. Segal. Categories and cohomology theories, *Topology*, 13:293-312, 1974.

[41] J.-P. Serre. Homologie singuliere des espaces fibres, *Annals of Mathematics*, (2) 54:425-505, 1951.

[42] J.-P. Serre. Groups d'homotopie et classes de groupes abelien. *Annals of Mathematics*, 58:258-294, 1953.

[43] N. E. Steenrod and D. B. A. Epstein. *Cohomology Operations. Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press, Princeton, 1962.

[44] E. H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, New York, 1966.

[45] R. Switzer. *Algebraic Topology - Homotopy and Homology*. Springer-Verlag, New York, 1975.

[46] R. Thom. Quelques proprietes globales des varietes differentiables, *Comment. Math. Helv.*, 28:17-86, 1954.

[47] G. W. Whitehead. Generalized homology theories. *Transactions of the American Mathematical Society*, 102:227-283, 1962.

[48] A. Ζαχαρίου. *Ομολογιακή Άλγεβρα*. Εκδόσεις Παν/μιου Αθηνών, 1976.

E-mail: nkechag@cc.uoi.gr

Μαθηματικό Τμήμα
Παν/μιο Ιωαννίνων
Ιωάννινα