ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

μέχρι

ΤΗΝ ΕΙΚΑΣΙΑ-ΘΕΩΡΗΜΑ

του POINCARE

Επαμεινώντας Κεχαγιάς

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

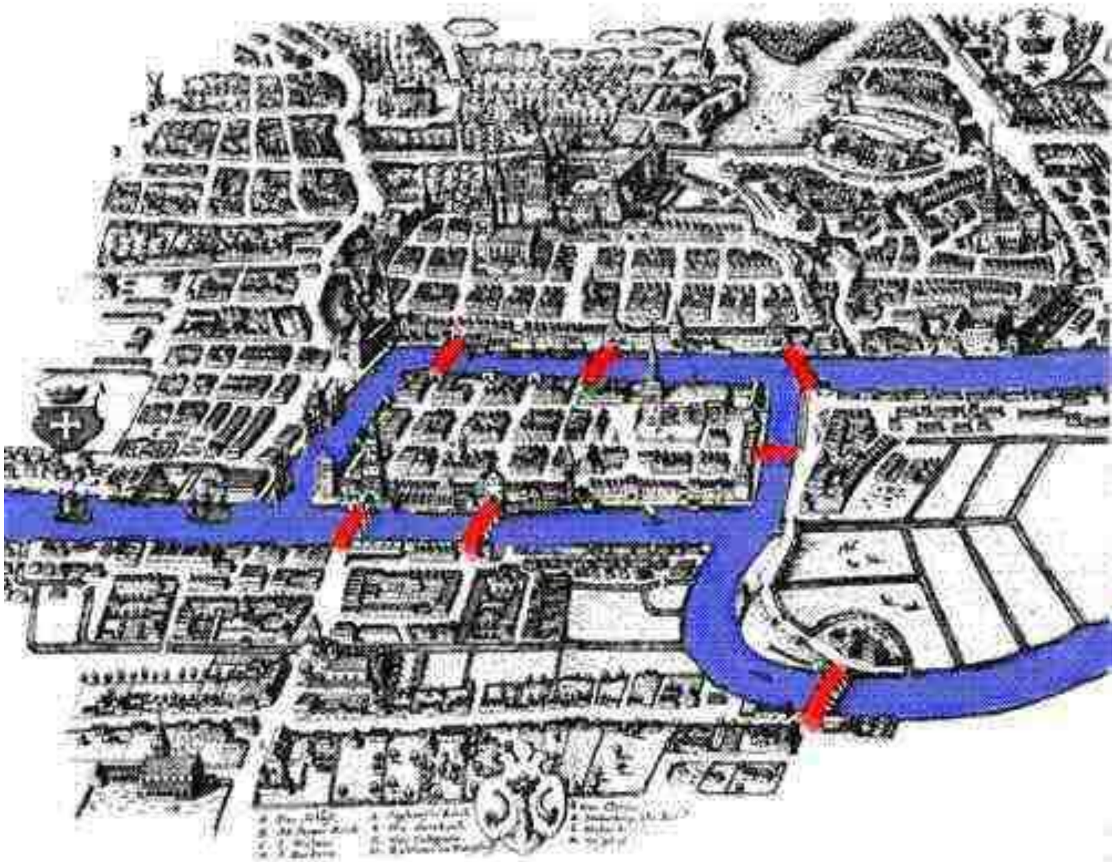
Μέτρηση ή σύγκριση τμημάτων και γωνιών.

Leonhard Euler (1707 - 1783)

Γεννήθηκε στη Βασιλεία (Ελβετία), γιος ενός καλβινιστή πάστορα και σπούδασε Μαθηματικά με τον Johann Bernoulli. Ήδη ως 20ετής ήταν τόσο διαδεδομένη η φήμη του, ώστε εκλήθη στην Ακαδημία της Πετρούπολης, όπου έγινε το 1733 καθηγητής.

Πρώτο βήμα- Το συνοικέσιο

Επτά γέφυρες του Königsberg.



Το περίφημο πρόβλημα:

Ορίστε μια διαδρομή η οποία θα διασχίζει την κάθε γέφυρα μια μόνο φορά ώστε ο περίπατος να μην είναι βαρετός.

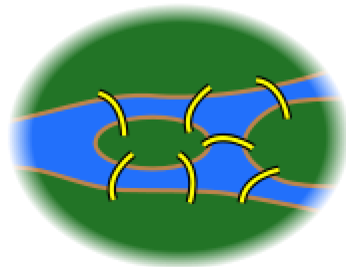
Ο Euler έγραψε:

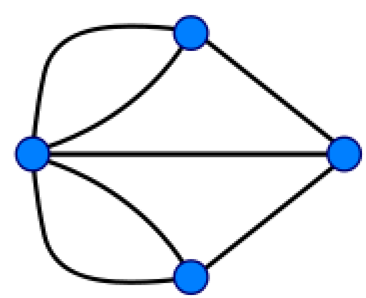
Κανείς μέχρι τώρα δεν έχει αποδείξει ότι το πρόβλημα έχει ή δεν έχει λύση. Είναι πολύ απλό, ωστόσο είναι άξιο προσοχής γιατί ούτε η γεωμετρία ούτε η άλγεβρα ούτε καν η τέχνη της αρίθμησης επαρκούν για την επίλυσή του. Αναρωτιέμαι αν κατατάσσεται στο

“λογισμός θέσης – analysis situs”

του **Leibniz**.

Gottfried Leibniz





Ο Euler έλυσε το πρόβλημα και έθεσε τα θεμέλια για δύο περιοχές των μαθηματικών

την **ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ** και τη **ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΩΝ**.

Απέδειξε ότι η λύση υπάρχει, εάν ο αριθμός των γεφυρών δεν είναι περιττός για καμιά περιοχή ή εάν είναι περιττός για δύο μόνο περιοχές.

ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν έχει σημασία το μήκος των γεφυρών ούτε το μέγεθος ή σχήμα των συνοικιών της πόλης.

Αυτές οι δυο αρχές καθορίζουν το αντικείμενο της τοπολογίας:

Επιτρέπεται η επέκταση ή συμπίεση του αντικειμένου αλλά όχι το κόψιμο ή το κόλλημα.

Δεύτερο βήμα, Γέννηση-Βάπτιση

1750. Γράφει στον **Christian Goldbach,**

Σε ένα πολύεδρο ο αριθμός των κορυφών συν των εδρών μείον των ακμών είναι πάντα 2.

$$K+E=A+2$$

Αυτός ο τύπος ονομάζεται χαρακτηριστική του Euler.

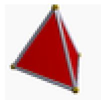
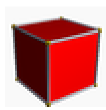
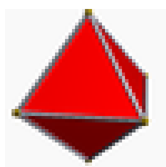
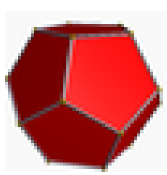
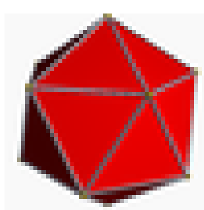
$$\chi=V-E+F=2$$

όπου V, E, και F είναι αντίστοιχα ο αριθμός των κορυφών, ακμών και εδρών του πολυέδρου.

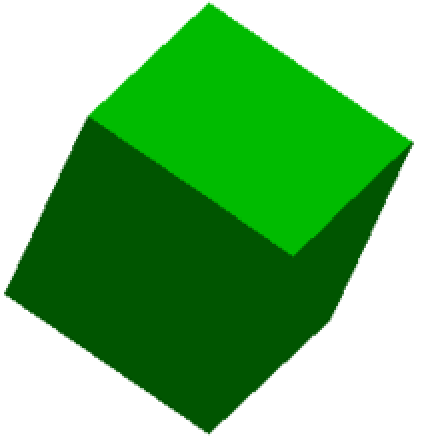
ΠΟΛΥΕΔΡΟ
ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ

Ένα πολύεδρο είναι ένα στερεό στις τρεις διαστάσεις με επίπεδες επιφάνειες και ευθείες ακμές.

Επιφάνεια πολυέδρου είναι το σύνορό του. Δηλαδή η ένωση των εδρών που το περικλείουν.

	Εικόνα	Κορυφές K	Ακμές A	Έδρες E	Euler characteristic: $K - A + E$
Tetrahedron		4	6	4	**2**
Cube		8	12	6	**2**
Octahedron		6	12	8	**2**
Dodecahedron		20	30	12	**2**
Icosahedron		12	30	20	**2**

Dodecahedron

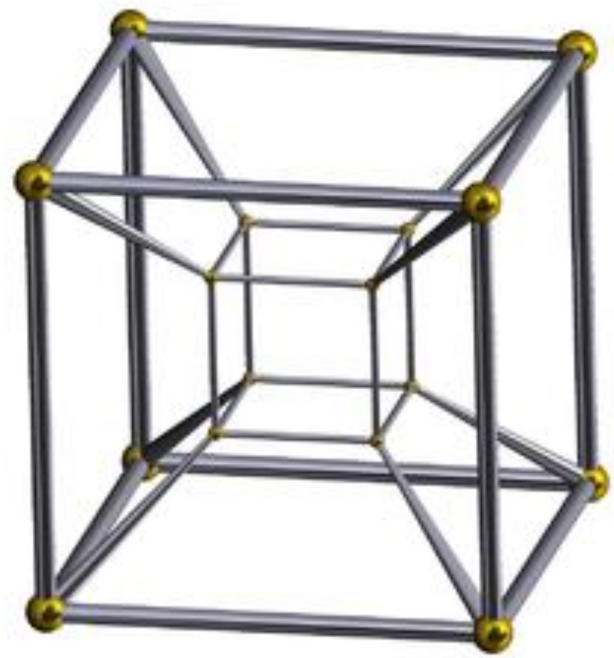


Ο René Descartes τον είχε ήδη ανακαλύψει.

1596 –1650

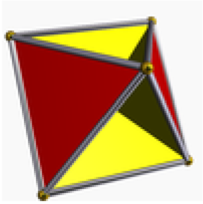
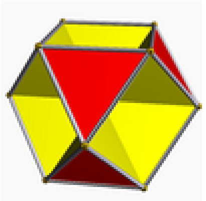
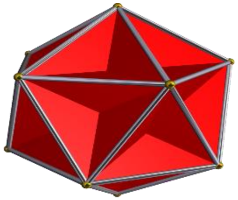
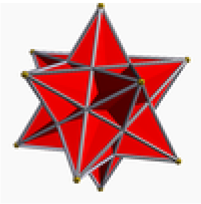
Ο Adrien-Marie Legendre 1752 – 1833 παρατήρησε ότι κάτι δεν πάει καλά με τον τύπο του Euler.

Από το εσωτερικό ενός κύβου αφαιρούμε ένας άλλο κύβο

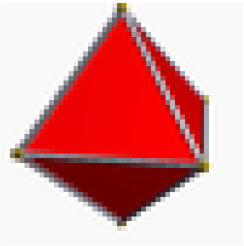


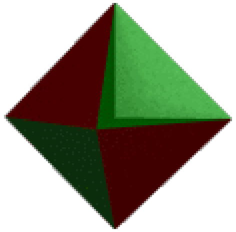
Έχουμε 16 Κορυφές + 12 Έδρες=

24 Ακμές +2+2

Name	Image	Vertices V	Edges E	Faces F	Euler characteristic: $V - E + F$
Tetrahemihexahedron Τετραημιεξάεδρο		6	12	7	**1**
Octahemioctahedron Οκταημιοκτάεδρο		12	24	12	**0**
Great stellated dodecahedron		12	30	12	**-6**
Grear icosahedron		12	30	20	**2**

Tetrahemihexahedron





Έχει τον ίδιο αριθμό κορυφών και ακμών όπως το κανονικό οκτάεδρο. Επίσης μοιράζεται με το οκτάεδρο 4 από τις 8 τριγωνικές έδρες, αλλά έχει 3 επιπλέον τετραγωνικές έδρες οι οποίες περνούν από το κέντρο του.

Δεν είναι προσανατολισμένο. Είναι το μοναδικό κανονικό πολύεδρο με χαρακτηριστική του Euler 1 και είναι προβολικό πολύεδρο.

Το μεγάλο δωδεκάεδρο

Έχει 12 κορυφές και 30 ακμές. Αποτελείται από 12 πεντάγωνα- έδρες (6 ζεύγη από παράλληλα πεντάγωνα).

Φημολογήται ότι ανακαλύφθηκε από τον Louis Poinsot το 1810.

Simon Antoine Jean Lhuilier

Το 2 στον τύπο του Euler πρέπει να αντικατασταθεί με 2 μείον το διπλάσιο του αριθμού των τρυπών – κοιλοτήτων της επιφάνειας.

Οι επιφάνειές μας είναι κλειστές και προσανατολισμένες.

Euler-Poincaré χαρακτηριστική

$$\chi = 2 - 2g$$

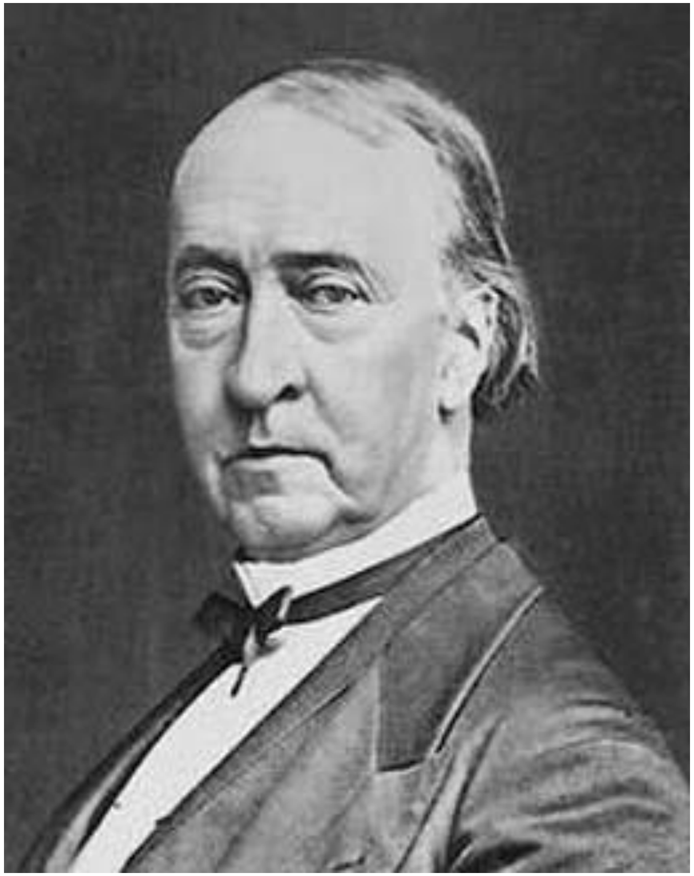
Ο τύπος αυτός μας λέει κάτι πολύ σημαντικό.

Όλα τα σώματα ανεξάρτητα από το σχήμα τους, είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, αλλά διαφέρουν από σώματα που έχουν κοιλότητα. Αυτά που έχουν κοιλότητα είναι ισοδύναμα ανάλογα με τον αριθμό των κοιλοτήτων τους.

Ο τύπος του Lhuilier ταξινομεί τα σώματα, δηλαδή είναι μια αναλλοίωτος.

Τα σώματα μπορούν να πιεσθούν, συμπιεσθούν, επιμηκυνθούν και βραχυνθούν. Η χαρακτηριστική του Euler δεν αλλάζει. Αλλάζει όμως αν εμφανιστούν κοιλότητες ή σήραγγες.

Johann Benedict Listing 1808 - 1882



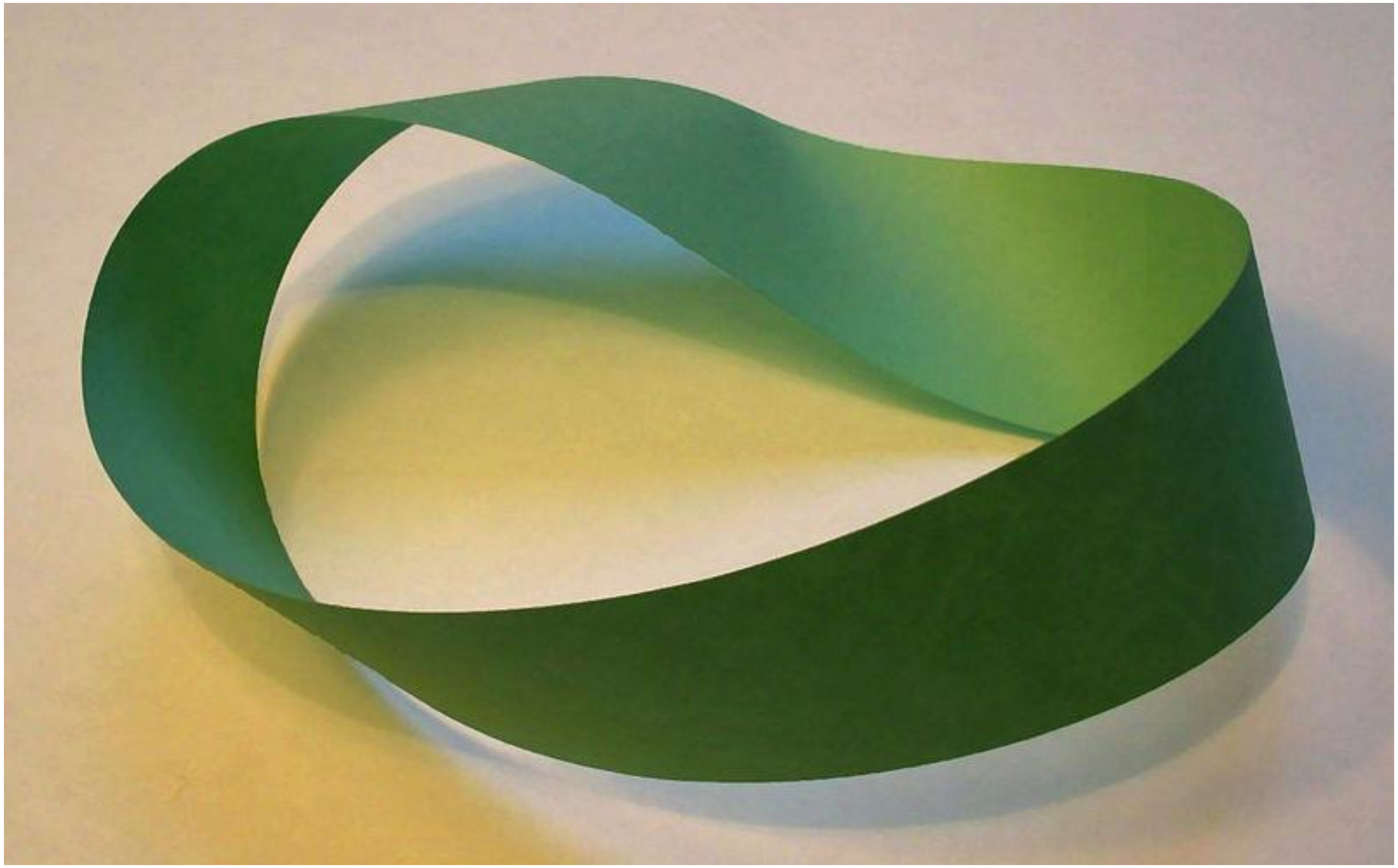
Η νέα γεωμετρία που δεν εξαρτάται από τα μήκη και τις μετρήσεις ονομάστηκε **ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ** από τον μαθητή του Gauss, Johann Benedict Listing.

Carl Friedrich Gauss

1777-1855

Σε δυο εργασίες που έγραψε, τέθηκαν οι βάσεις για τη συμπαγοποίηση κατά Alexandrof και της διαφοράς μεταξύ ομοιομορφισμού και ομοτοπίας. Επίσης όρισε μια επιφάνεια που αργότερα ονομάστηκε ταινία του Mobius.

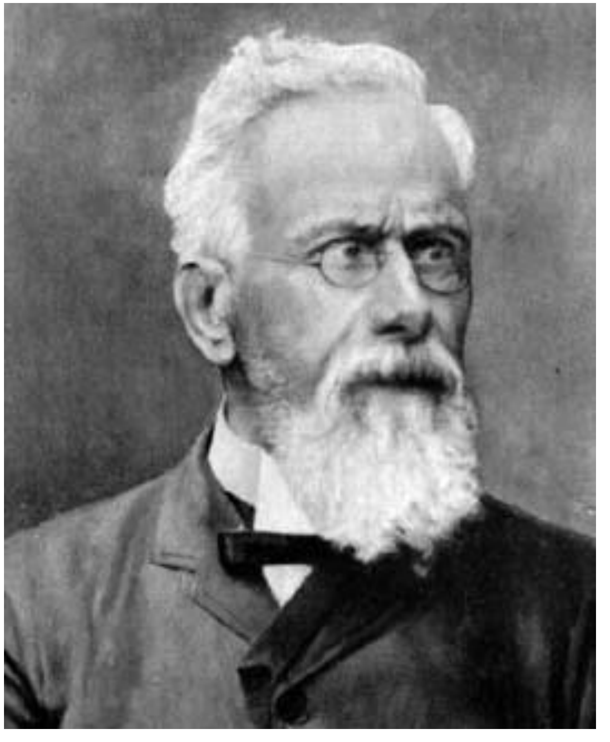
Ταινία του Mobius



[moebius animation 5 - YouTube.mht]

Τρίτο βήμα-Παιδική ηλικία

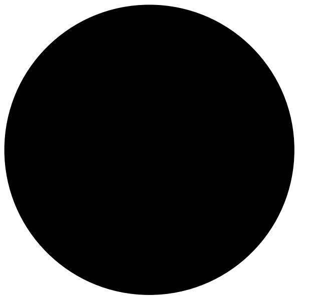
Enrico Betti 1823 - 1892



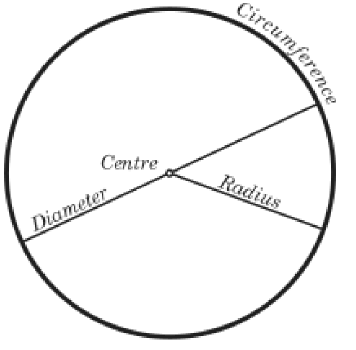
Σε μια εργασία του ο Betti ανέπτυξε τον τρόπο αρίθμησης της συνεκτικότητας. Οι αριθμοί αυτοί ονομάστηκαν αργότερα από τον **Poincaré** αριθμοί του Betti.

Οι αριθμοί αυτοί περιγράφουν πόσες τρύπες ή κοιλότητες έχει το αντικείμενο. Το πλήθος των αριθμών Betti ισούται με τη διάσταση του αντικειμένου συν ένα.

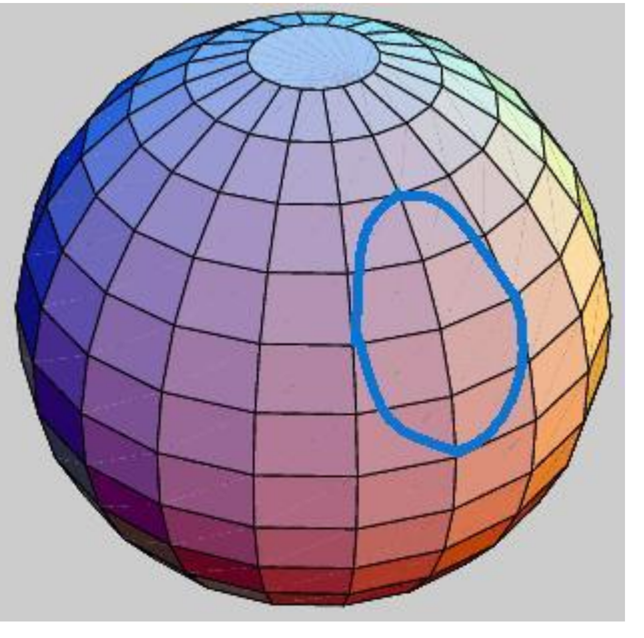
- ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΔΙΣΚΟΣ 1,0,0,



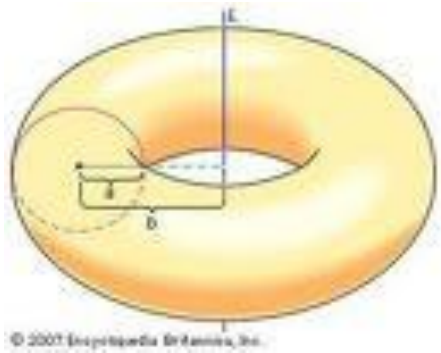
- ΚΥΚΛΟΣ 1,1,0,



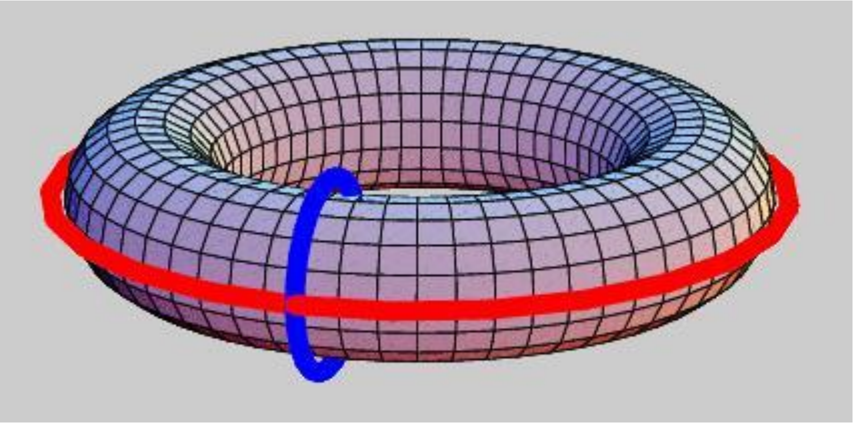
- ΣΦΑΙΡΑ 1,0,1,0,



- ΓΕΜΑΤΗ ΣΑΜΠΡΕΛΑ, 1,1,0,0



- ΣΑΜΠΡΕΛΑ, TORUS, 1,2,1,0,



Jules Henri Poincaré 1854 - 1912

Η συστηματική μελέτη του κλάδου άρχισε γύρω στο 1895 από τον Poincaré. Μελετώντας σύνολα λύσεων διαφορικών εξισώσεων, επιφάνειες και υπερεπιφάνειες σε ανώτερες διαστάσεις, ανάγαγε τα τοπολογικά ερωτήματα σε αλγεβρικά.

Ο μόνος που αναγνώρισε τη σημασία των εργασιών του Poincaré στη συγκεκριμένη περιοχή εκείνη την εποχή ήταν ο

Charles Émile Picard 1856 - 1941

Ο Poincaré ήταν ευγενής, καλότροπος, με υψηλό δείκτη νοημοσύνης, χωρίς υπεροψία, και τρομερή μνήμη. Πάντα έπαιρνε το πρώτο βραβείο στις εξετάσεις. Φοίτησε στην Πολυτεχνική σχολή και αργότερα στη σχολή Μεταλλείων της Γαλλίας. Η σκέψη του ήταν βαθιά, εφεύρισκε νέες ιδέες αλλά υστερούσε στη μαθηματική αυστηρότητα. Ασχολήθηκε με ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα των Θετικών επιστημών. Το πρόβλημα των ουρανίων σωμάτων.

Το έργο του ήταν τεράστιο, όχι μόνο σε αριθμό αλλά και στα γνωστικά αντικείμενα που εκτείνονταν. Ήταν ένας από τους δυο τελευταίους μαθηματικούς, μαζί με τον David Hilbert, οι οποίοι κατανοούσαν πλήρως όλους τους υπάρχοντες κλάδους των μαθηματικών. Ο Poincaré πλησίασε ακόμη και την ανακάλυψη της θεωρίας της σχετικότητας αλλά δεν έδωσε μεγάλο ενδιαφέρον παρότι κατείχε τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία.

Jean Alexandre Eugène Dieudonné 1906 - 1992

έδωσε μια σε βάθος ανάλυση του έργου του Poincaré στην τοπολογία. Έγραψε,

Έτσι τελειώνει αυτή η συναρπαστική και ερεθιστική εργασία η οποία παρά τις αδυναμίες της περιέχει τους σπόρους για τις περισσότερες εξελίξεις των μαθηματικών στη διάρκεια των επόμενων 30 χρόνων.

Poincaré:

It is by logic we prove, it is by intuition that we invent.

... to make geometry ... something other than pure logic is necessary. To describe this "something" we have no word other than intuition.

Στο τέλος του 19 ου αιώνα βασικό πρόβλημα των τοπολόγων ήταν η ταξινόμηση των σωμάτων και χώρων. Η τοπολογική ταξινόμηση γίνεται σύμφωνα με τις αρχές της τοπολογίας, δηλαδή να μπορεί να πάρει το ένα το σχήμα του άλλου με επέκταση ή συμπίεση αλλά όχι με κόψιμο ή κόλλημα.

Αυτό δεν γίνεται εμπειρικά, έπρεπε να βρεθούν τοπολογικά αναλλοίωτες ιδιότητες που θα καθόριζαν την ταξινόμηση. Το ότι οι αριθμοί Betti ήταν τοπολικές αναλλοίωτοι αποδείχτηκε από τον

James Waddell Alexander 1888 - 1971

Οι Veblen, Alexander και Lefschetz αποτελούσαν το κέντρο της τοπολογίας για την Αμερική στο Princeton.

Από το 1940 και μετά η αλγεβρική τοπολογία πήρε τεράστια ανάπτυξη. Η επόμενη δήλωση είναι του Hermann Klaus Hugo Weyl 1885 – 1955.

Ο άγγελος της τοπολογίας μαζί με τον δαίμονα της αφηρημένης άλγεβρας μάχονται για την ψυχή κάθε μεμονωμένου κλάδου των μαθηματικών.

Για την Ευρώπη ήταν η Ζυρίχη με τον Heinz Hopf 1894 – 1971.

Επισημαίνοντας μια παρανόηση στο Θεώρημα δυϊκότητας του Poincaré ταξινόμησε τις συμπαγείς επιφάνειες μαζί με τον Dehn.

Poul Heegaard 1871 - 1948

Σε μια εργασία του ο Poincaré διατύπωσε την εξής εικασία.

Πρώτη εικασία του Poincaré.

Μια τρισδιάστατη κλειστή πολλαπλότητα με την ίδια ομολογία μιας τρισδιάστατης σφαίρας (1,0,0,1,0,0,…) είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα.

Με λόγια

Κάθε τρισδιάστατο αντικείμενο που δεν περιέχει τρύπες και δεν είναι συστρεμμένο, μπορεί να μορφοποιηθεί σε τρισδιάστατη σφαίρα.

- Πίστευε ότι η απόδειξη είναι απλή. Αργότερα άρχισε να αναρωτιέται αν ήταν πράγματι έτσι. Σε τέσσερα χρόνια βρήκε αντιπαράδειγμα, την περίφημη σφαίρα του Poincaré. Δεν υπάρχει άλλο αντιπαράδειγμα μέχρι σήμερα!
- Η σφαίρα του Poincaré έχει εφαρμογές σήμερα στην οπτική και στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

- Σε μια εργασία 66 σελίδων ο Poincaré απέδειξε ότι αυτό το αντικείμενο έχει τους αριθμούς Betti μιας **τρισδιάστατης** σφαίρας. Αλλά οι παραμορφώσεις που έκανε δεν επιτρέπουν στο σώμα να μορφοποιηθεί σε σφαίρα.

Τέταρτο βήμα-Εφηβεία

Κατάλαβε ότι χρειάζεται μια νέα τοπολογικά αναλλοίωτη ιδιότητα η οποία θα είναι απαραίτητη για την ταξινόμηση των σωμάτων. Αυτή είναι η περίφημη **θεμελιώδης ομάδα του Poincaré**.

Τι το επαναστατικό είχε η ιδέα του Poincaré που άφησε ανεξίτηλα τη σφραγίδα του στην περιοχή της Αλγεβρικής Τοπολογίας;

- Μετέτρεψε το πρόβλημα σε αλγεβρικό.

Υπάρχει κατηγορία σωμάτων τα οποία χαρακτηρίζονται από την ομάδα του Poincaré;

- Ο Poincaré πίστευε πως έτσι είναι και διατύπωσε την περίφημη εικασία του.

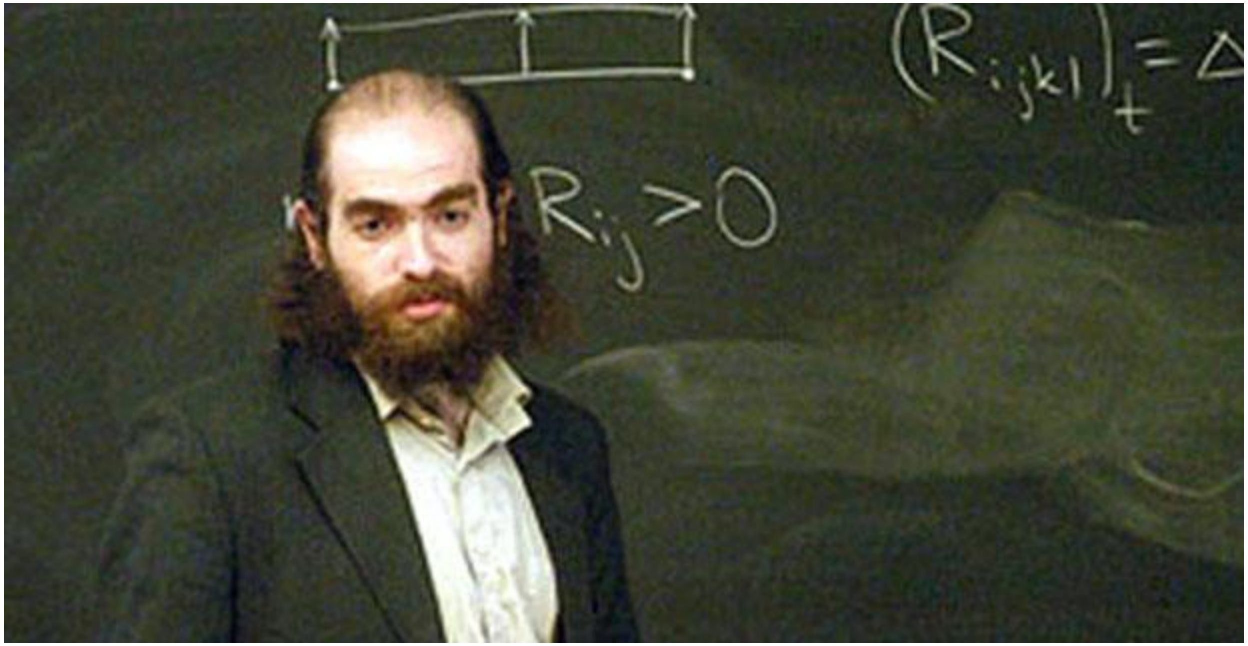
Δεύτερη εικασία του Poincaré.

Μια τρισδιάστατη κλειστή πολλαπλότητα με τετριμμένη ομάδα του Poincaré είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα.

Στην αρχή οι μαθηματικοί προσπαθούσαν να βρουν αντιπαραδείγματα χωρίς επιτυχία. Μετά πείστηκαν ότι ο Poincaré είχε δίκαιο. Από το 1905 και για 100 χρόνια κορυφαίοι μαθηματικοί από όλο τον κόσμο προσπαθούσαν για την απόδειξη της εικασίας του Poincaré.

Προσπαθούσαν και προσπαθούσαν και προσπαθούσαν.

Μέχρι ….



που εμφανίστηκε ο **Grigori Yakovlevich Perelman** **(1966-).**

Fields Metal IMC Madrit 2006 (Δεν το δέχθηκε, ούτε το χρηματικό έπαθλο $1.000.000.)

Και η εικασία του Poincaré έγινε το Θεώρημα Poincaré.

Ο Perelman: εγκάρδιος, ειλικρινής και ιδεαλιστής.

Κάποιες εμπειρίες απο την μαθηματική κοινότητα τον οδήγησαν να παραμείνει σε απόσταση.

Παραιτήθηκε απο το Ινστιτούτο Στέκλοβ της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών στην Αγία Πετρούπολη. Ζει από ένα πενιχρό βοήθημα μαζί με τη μητέρα του.

Παρουσίασε την απόδειξή του στα MIT, Princeton, Columbia, NYU, SUNY. Είχε προσφορές εργασίας από κορυφαία ιδρύματα στις Ηνωμένες Πολιτείες.

Δεν επιζητούσε ούτε τιμές ούτε αναγνώριση.

“Αυτοί που αντιμετωπίζονται σαν εξωγήινοι και απομονώνονται δεν είναι εκείνοι που παραβιάζουν τις ηθικές αρχές, αλλά εκείνοι που προσπαθούν να τις εφαρμόσουν. Ακόμα και εκείνοι, οι έστω και λίγο έντιμοι, ανέχονται αυτούς που δεν είναι.”

Grigori Yakovlevich Perelman

ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

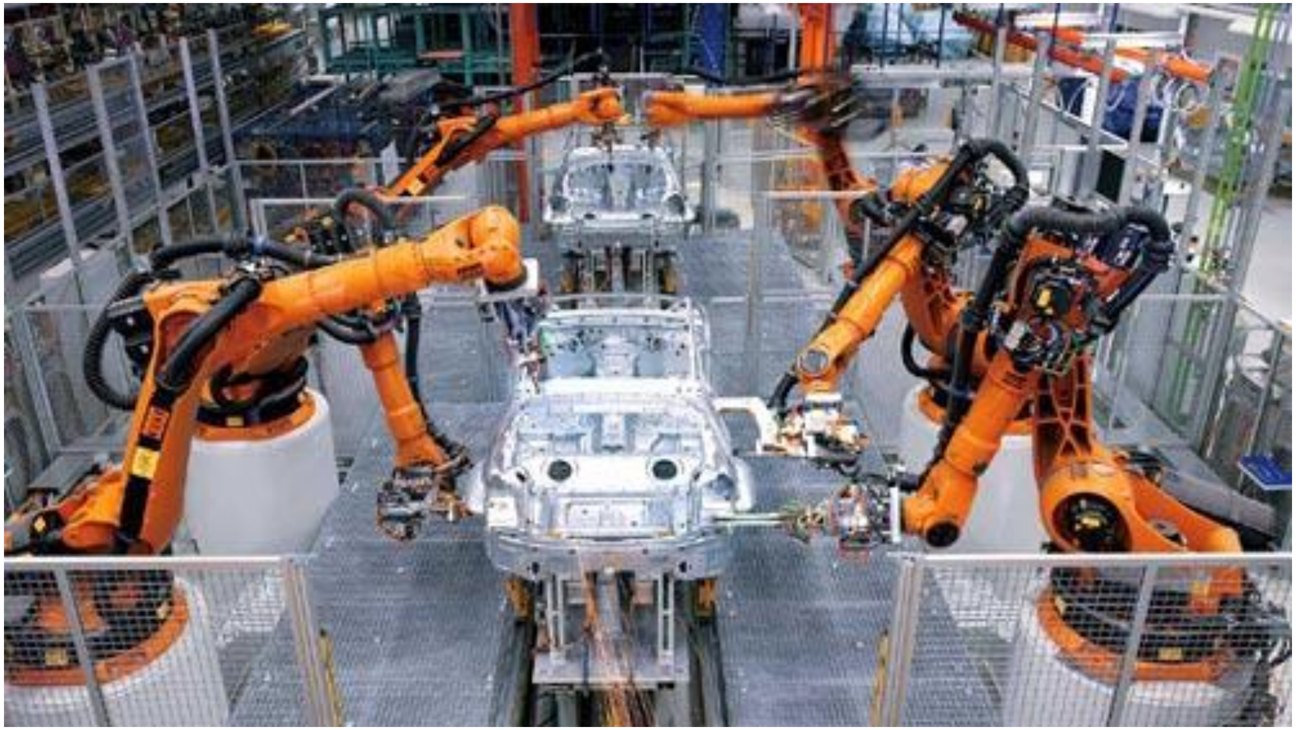
Α) Η συνεισφορά της Τοπολογίας στις κινήσεις των ρομπότ.

Configuration Space

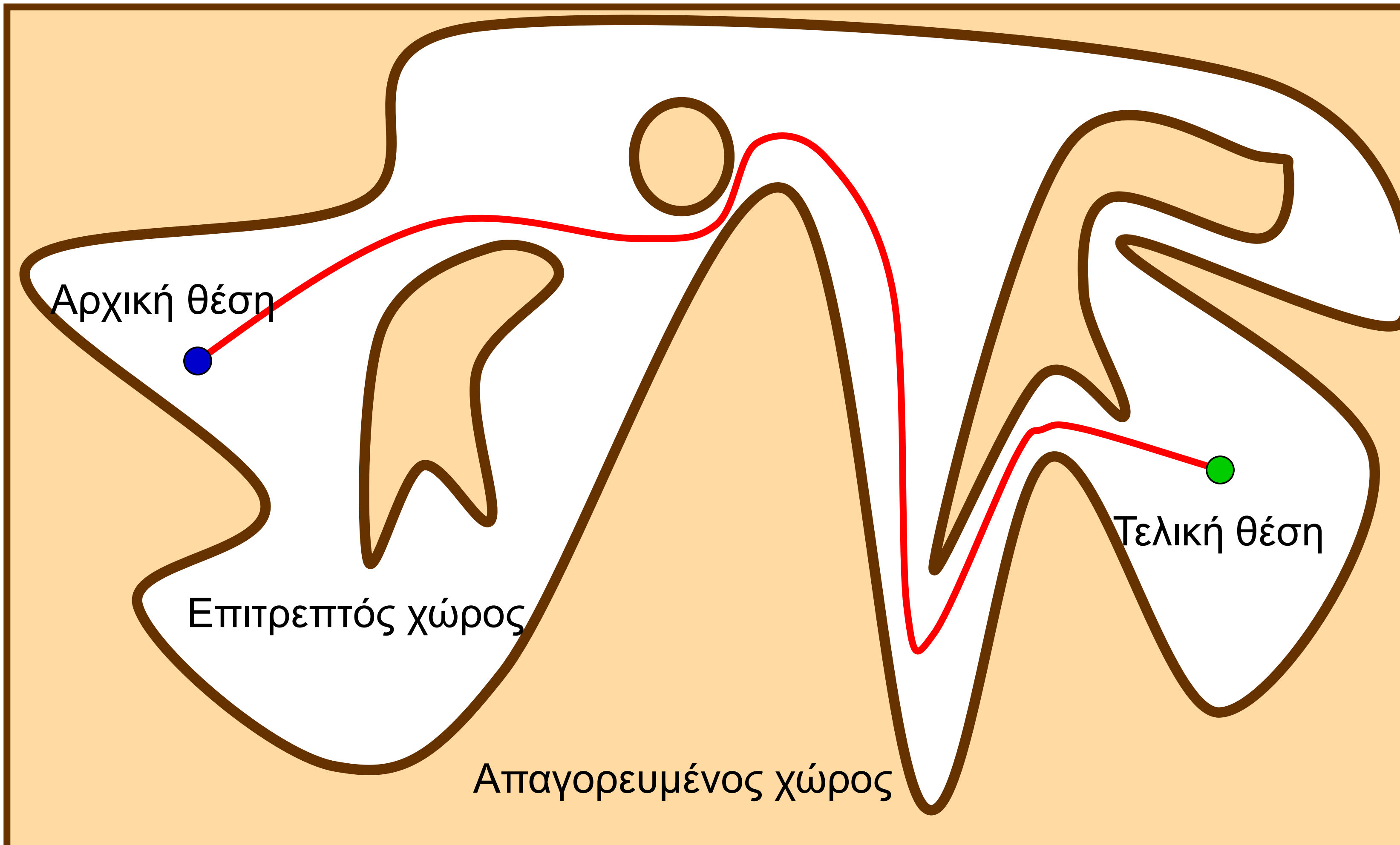
B) Topological Data Analysis

Persistent Homology

Η κίνηση ενός ρομπότ και η συνεισφορά της Αλγεβρικής Τοπολογίας



Ας υποθέσουμε ότι το ρομπότ είναι ένα σημείο. **Χώρος διαμόρφωσης** είναι ο χώρος στον οποίο κινείται.



Βασικές έννοιες

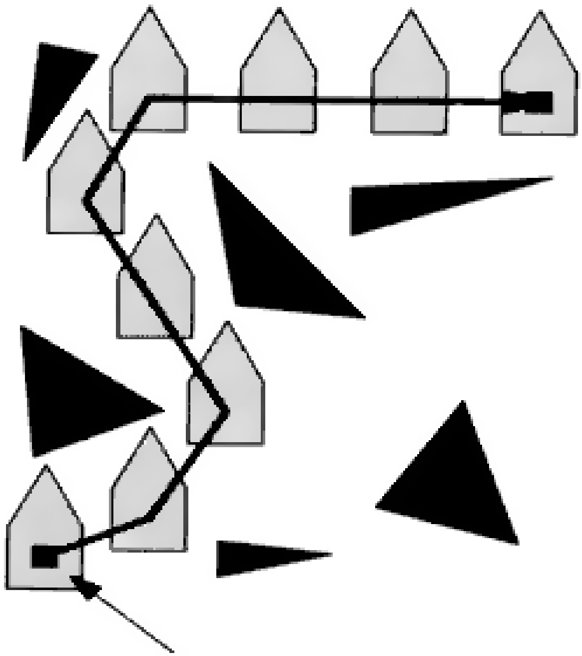
Workspace - Χώρος εργασίας:

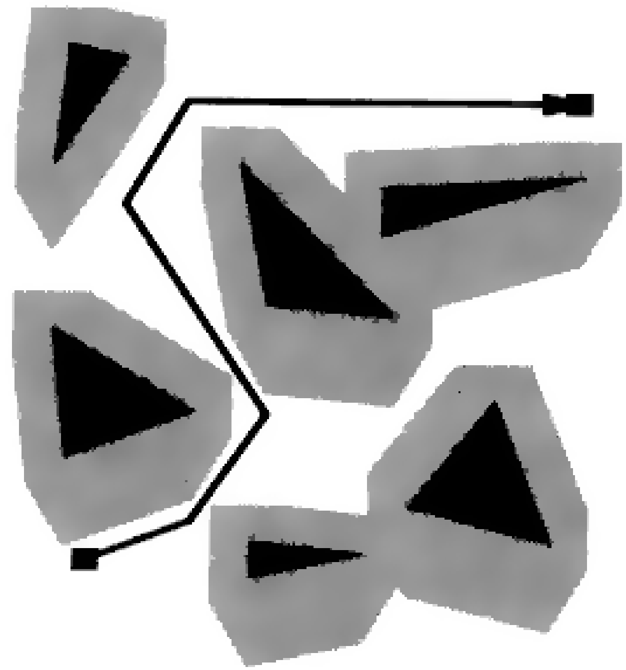
- Ο χώρος μέσα στον οποίο κινείται και εργάζεται ένα ρομπότ.
- Συνήθως στο επίπεδο ή στον χώρο που ζούμε.

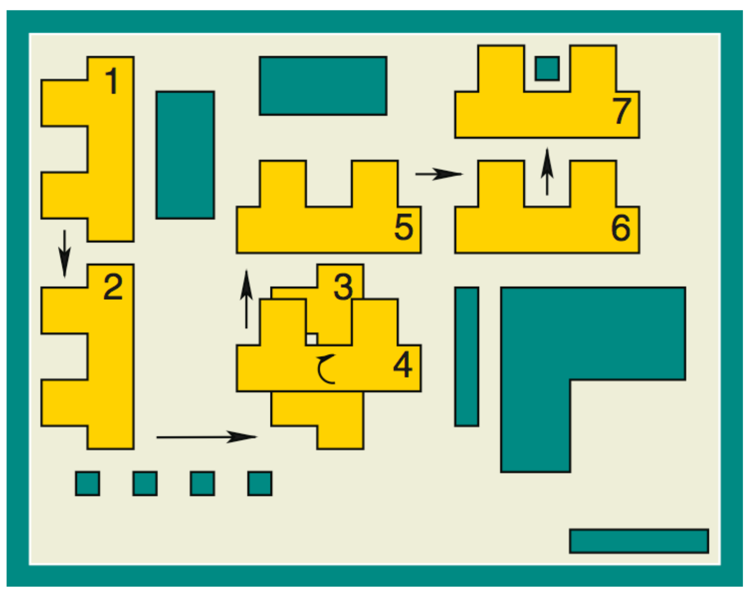
- Η κίνηση πρέπει να γίνεται χωρίς συγκρούσεις.

- Το ρομπότ πρέπει να φθάσει στον προορισμό του από τον συντομότερο δρόμο.

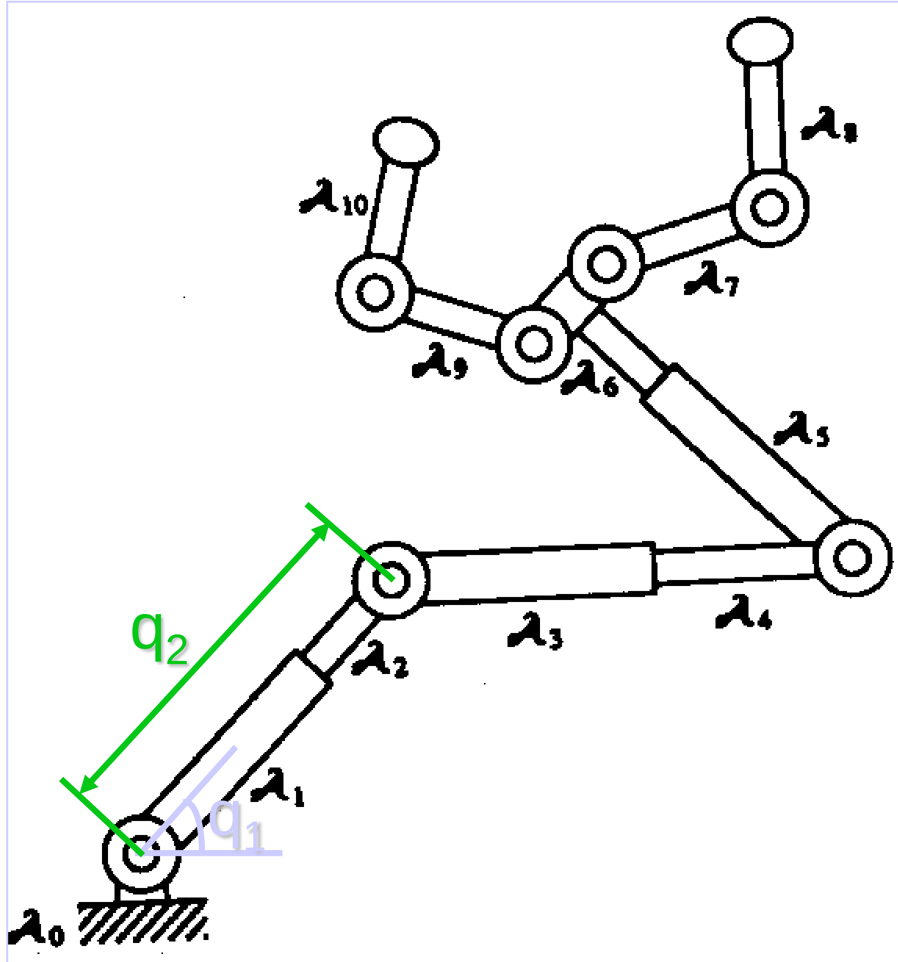
- Βρείτε μια τροχιά την οποία θα ακολουθήσει το ρομπότ από την αρχική στην τελική θέση χωρίς να συγκρουσθεί με άλλα αντικείμενα.



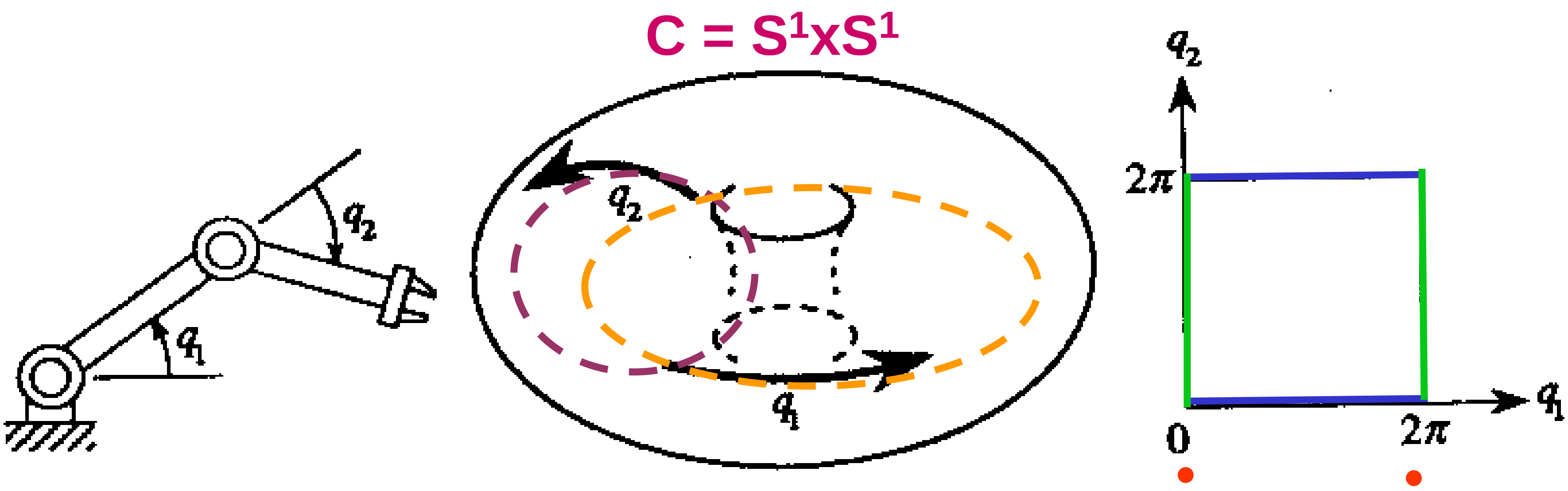



1
2
3
4
5
6
7

Αρθρωτό Robot



Με δύο αρθρώσεις



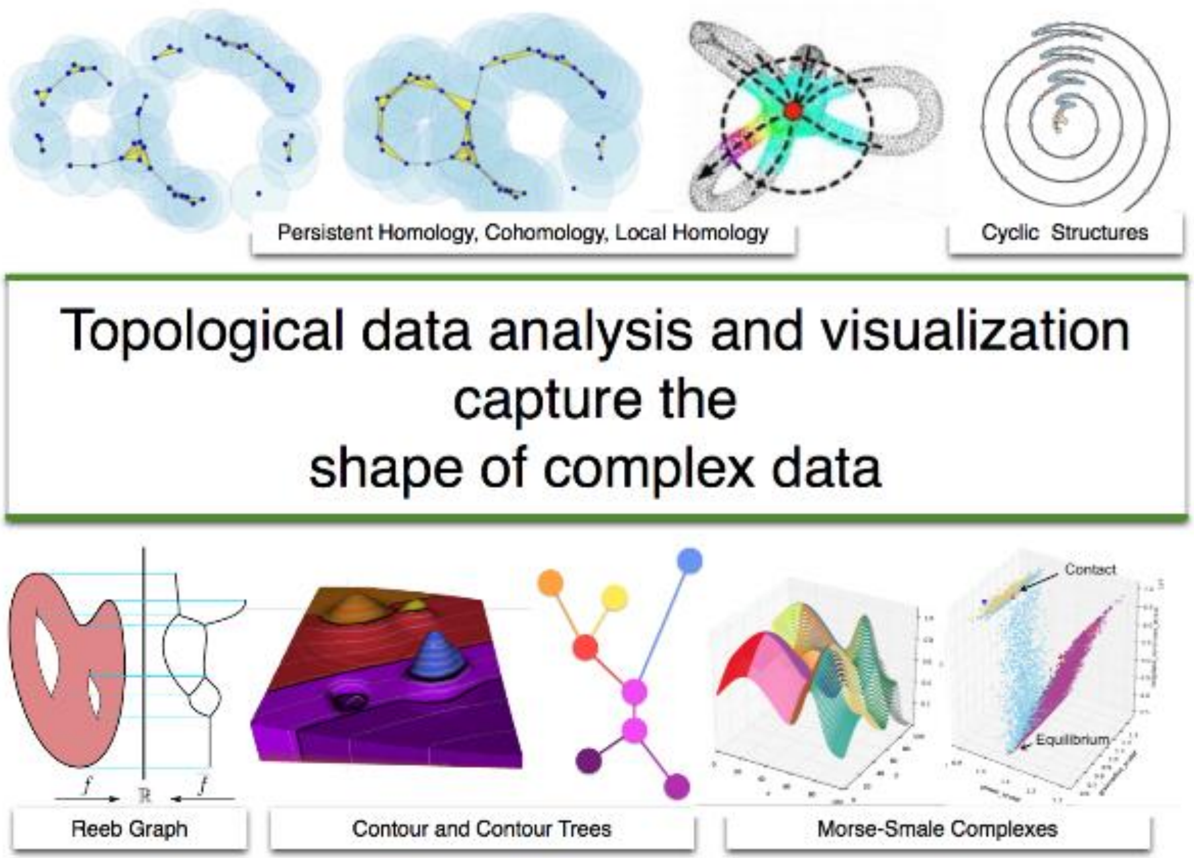
https://www.coursera.org/lecture/robotics-motion-planning/2-2-rr-arm-mNhWs

[Robotics - 2.2.1.2 - Configuration Space]()

https://www.coursera.org/learn/robotics-motion-planning/lecture/mNhWs/2-2-rr-arm

Topological Data Analysis

Persistent Homology



Σας ευχαριστώ πολύ