- Ο ΓΡΙΦΟΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
- ΚΑΙ Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ
- **34ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας**
- 3, 4, 5 Νοεμβρίου 2017. Λευκάδα

Επαμεινώνδας Κεχαγιάς

- ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$

- ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Υποθέτουμε ότι για κάθε μη-μηδενικό συντελεστή υπάρχει ο αντίστροφός του.

Δηλαδή είμαστε σε σώμα.

- Πρωτοβάθμια **ax = b.**

- Πρωτοβάθμια **ax = b.**

- Τριώνυμο $\boldsymbol{x^2 + \mathbf{a}x + b = 0}$

- Πρωτοβάθμια **ax = b.**

- Τριώνυμο $\boldsymbol{x^2 + \mathbf{a}x + b = 0}$

- Βαβυλώνιοι 2000 π.Χ.
- Για τον υπολογισμό εκτάσεων γης.
- **Εμπειρικός υπολογισμός ριζών**

- Τον 7ο αιώνα ο ομφαλός της διεθνούς πολιτιστικής και εκπαιδευτικής ανάπτυξης ήταν η Βαγδάτη υπό τον χαλίφη **Αλ Μαμούν**. Ο χαλίφης ίδρυσε την ανακτορική βιβλιοθήκη, η οποία ονομάστηκε "Οίκος σοφίας".

- Μεγάλο βάρος έδωσαν στον πλούτο της
- ελληνικής και αριστοτελικής σκέψης,
- αξιοποιώντας τις μελέτες που είχαν σαν
- αποτέλεσμα να δημιουργηθούν οι ισλαμικές
- φυσικές επιστήμες και η ισλαμική φιλοσοφία
- (φάλσαφα). **Ο Αλ-Χουαρίζμι** ήταν ο
- πρωθιερέας των μαθηματικών στον Οίκο της
- Σοφίας.

Ο Αλ-Χουαρίζμι είναι ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς και δικαίως θεωρείται ως ο πατέρας της Άλγεβρας. Ο Αλ-Χουαρίζμι συνέγραψε την Άλγεβρά του (μαθηματικό έργο) για να δώσει τις απαραίτητες γνώσεις για υπολογισμούς σχετικούς με καθαρώς πρακτικά θέματα της ζωής, όπως είναι τα κληρονομικά και τα εμπορικά, οι καταμετρήσεις γαιών και το σκάψιμο ορυγμάτων και γενικώς γεωμετρικοί υπολογισμοί σχετικοί με αυτά. Για αυτό μόνον στο πρώτο μέρος της Άλγεβρας του πραγματεύεται πρωτοβάθμιες και δευτεροβάθμιες εξισώσεις, πάντοτε εκφράζοντάς τες ρητορικά και όχι με σύμβολα.

- $x^2 + 2x = 3 \rightarrow (x+1)^2 = 4 \rightarrow x = 1$

- $x^2 + 2x = 3 \rightarrow (x+1)^2 = 4 \rightarrow x = 1$
- Οι αρνητικοί δεν ήταν γνωστοί ακόμη.

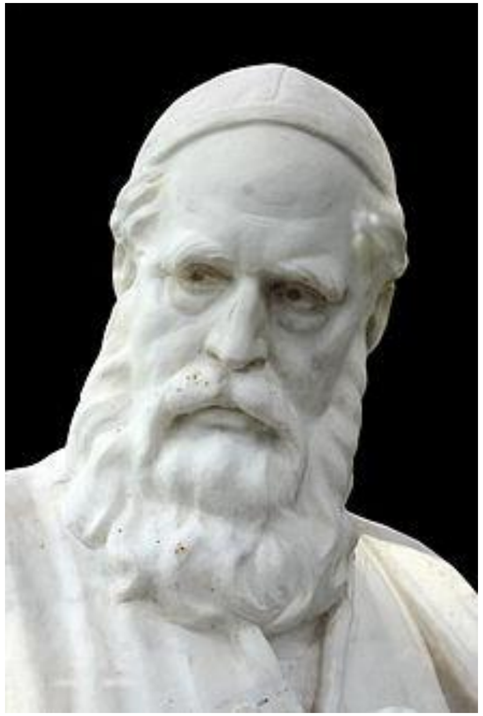
$$x^2 + 2x = 3 \rightarrow (x+1)^2 = 4 \rightarrow x = 1$$

Οι αρνητικοί δεν ήταν γνωστοί ακόμη.

Ινδοί μαθηματικοί εισήγαγαν τους αρνητικούς μαζί με την έννοια του μηδενός. Τους ονόμασαν οφειλές. Ο **Βραχμαγκούπτα** (598-670 μαθηματικός και αστρονόμος) αναγνώρισε ότι κάθε θετικός έχει δύο τετραγωνικές ρίζες. Εισήγαγε αφηρημένο συμβολισμό τον οποίο υιοθέτησαν οι Δυτικοί μετά από χίλια χρόνια.

- Τον μεσαίωνα η τοκογλυφία θεωρείτο αμαρτία και οι αρνητικοί αριθμοί οι οποίοι εκφράζουν οφειλή αποτελούσαν την ενσάρκωση του κακού.
- Για τα εμβαδά χρειαζόμαστε τις δευτεροβάθμιες ενώ για τους όγκους τις τριτοβάθμιες.

- Τον μεσαίωνα η τοκογλυφία θεωρείτο αμαρτία και οι αρνητικοί αριθμοί οι οποίοι εκφράζουν οφειλή αποτελούσαν την ενσάρκωση του κακού.
- Για τα εμβαδά χρειαζόμαστε τις δευτεροβάθμιες ενώ για τους όγκους τις τριτοβάθμιες.



Ο ποιητής **Ομάρ Καγιάμ** (1048-1131) ασχολήθηκε με το πρόβλημα επίλυσης των τριτοβαθμίων. Ήταν Πέρσης φιλόσοφος, μαθηματικός, αστρονόμος και ποιητής. Υπολόγισε τη διάρκεια του έτους με μεγάλη ακρίβεια.

Δεν έλυσε πλήρως την τριτοβάθμια και το γνώριζε.

- Θεωρούσε σημαντικό ότι πίσω από αυτές τις εξισώσεις κρύβεται γεωμετρία.
- «Όποιος νομίζει ότι η άλγεβρα είναι ένα κόλπο για να βρίσκουμε αγνώστους όρους μάταια πασχίζει.»

- Θεωρούσε σημαντικό ότι πίσω από αυτές τις εξισώσεις κρύβεται γεωμετρία.
- «Όποιος νομίζει ότι η άλγεβρα είναι ένα κόλπο για να βρίσκουμε αγνώστους όρους μάταια πασχίζει.»

- Όταν συνάντησε τεταρτοβάθμιες εξισώσεις τις προσπέρασε γιατί δεν έβρισκε γεωμετρική ερμηνεία.
- Χρειάστηκε να περάσουν πολλές γενιές για να περάσουμε στις πολλές διαστάσεις.

- Θεωρούσε σημαντικό ότι πίσω από αυτές τις εξισώσεις κρύβεται γεωμετρία.
- «Όποιος νομίζει ότι η άλγεβρα είναι ένα κόλπο για να βρίσκουμε αγνώστους όρους μάταια πασχίζει.»
- Όταν συνάντησε τεταρτοβάθμιες εξισώσεις τις προσπέρασε γιατί δεν έβρισκε γεωμετρική ερμηνεία.
- Χρειάστηκε να περάσουν πολλές γενιές για να περάσουμε στις πολλές διαστάσεις.

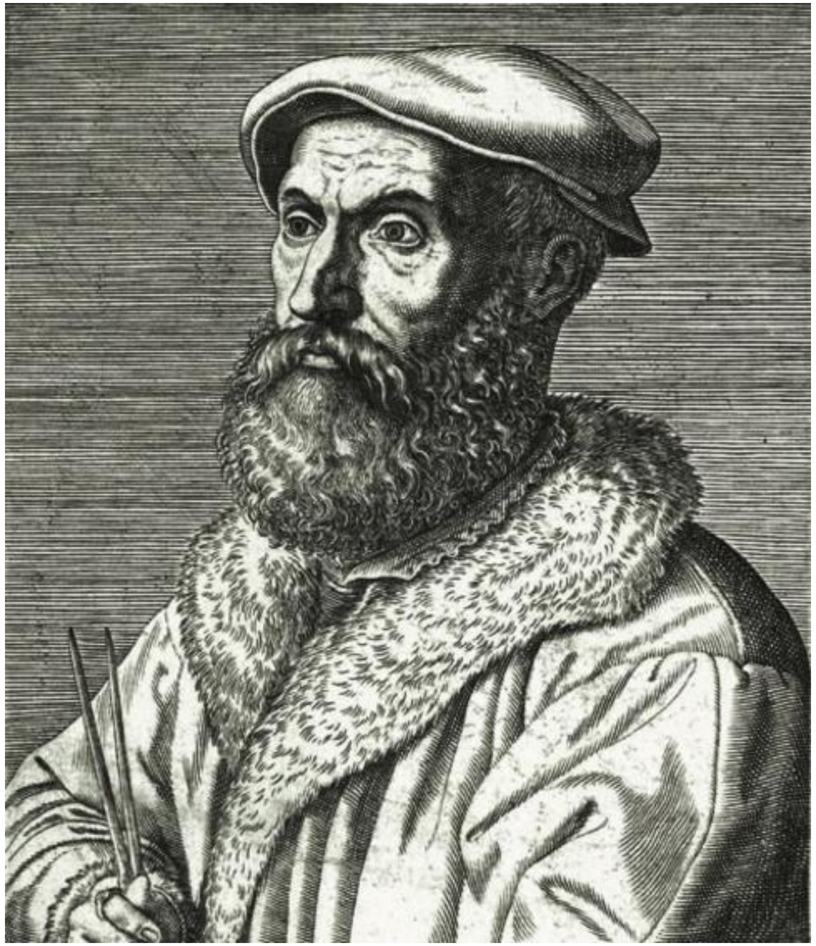
- Όταν οι Μογγόλοι κατέκτησαν τον κόσμο και κατέστρεψαν τον Οίκο της Σοφίας, καταστράφηκαν μελέτες και κείμενα ανεκτίμητης αξίας. Επίσης καταστράφηκαν επιστημονικά ιδρύματα και βιβλιοθήκες.

- Η τριτοβάθμια δεν έχει λυθεί ακόμη.
- Τη σκυτάλη παίρνουν οι Δυτικοί.

- Η τριτοβάθμια δεν έχει λυθεί ακόμη.
- Τη σκυτάλη παίρνουν οι Δυτικοί.

- 16ος αιώνας. Αναγέννηση. Ιταλία.
- Τα μαθηματικά του Ευκλείδη και Αρχιμήδη έρχονται στην επιφάνεια.

- Οι Ιταλοί λόγιοι εξελίσσουν τα μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων και Αράβων.



Αρχιτέκτονας των νέων μαθηματικών είναι ο **Νίκολο Φοντάνα** (1500) γνωστός ως **Ταρτάλια**.

Ασχολήθηκε κυρίως με τη μελέτη μαθηματικών προβλημάτων της στρατιωτικής βιομηχανίας της εποχής του, όπως τη βαλλιστική και τις οχυρώσεις.
Αφιέρωσε τη ζωή του στην επίλυση της τριτοβάθμιας.

- Οι μαθηματικοί πίστευαν ότι η γενική τριτοβάθμια δεν έχει λύση.
- Οι αρνητικοί δεν έχουν γίνει αποδεκτοί ακόμη!!!

- Οι μαθηματικοί πίστευαν ότι η γενική τριτοβάθμια δεν έχει λύση.
- Οι αρνητικοί δεν έχουν γίνει αποδεκτοί ακόμη!!!

- Είναι απαραίτητες οι τετραγωνικές ρίζες αρνητικών!!!
- Ο Ταρτάλια κατόρθωσε να κατασκευάσει τύπο επίλυσης ορισμένων τριτοβάθμιων εξισώσεων.

- Οι μαθηματικοί πίστευαν ότι η γενική τριτοβάθμια δεν έχει λύση.
- Οι αρνητικοί δεν έχουν γίνει αποδεκτοί ακόμη!!!
- Είναι απαραίτητες οι τετραγωνικές ρίζες αρνητικών!!!
- Ο Ταρτάλια κατόρθωσε να κατασκευάσει τύπο επίλυσης ορισμένων τριτοβάθμιων εξισώσεων.

- Πανεπιστήμιο της Μπολόνια, από τα μεγαλύτερα εκπαιδευτικά κέντρα της Ευρώπης.
- 1535, οι μαθηματικοί συγκεντρώνονται για να εξετάσουν αν ο Ταρτάλια είχε πράγματι λύσει την τριτοβάθμια εξίσωση. Αντίπαλός του ήταν ο αμφίβολος Αντόνιο Φιόρ.
- Ο Ταρτάλια είχα αναγάγει τα 14 διαφορετικά είδη του Καγιάμ σε δύο και είχε βρει μέθοδο για την επίλυσή τους.

- Η επιτυχία του Ταρτάλια ήταν η απαρχή για Ομηρικούς καυγάδες.
- Ο Λουντοβίκο Φεράρι (1522) από το Παν/μιο του Μιλάνο ασχολήθηκε με τις τεταρτοβάθμιες και προκάλεσε σε δημόσιο διαγωνισμό τον Ταρτάλια.

- Η επιτυχία του Ταρτάλια ήταν η απαρχή για Ομηρικούς καυγάδες.
- Ο Λουντοβίκο Φεράρι (1522) από το Παν/μιο του Μιλάνο ασχολήθηκε με τις τεταρτοβάθμιες και προκάλεσε σε δημόσιο διαγωνισμό τον Ταρτάλια.

- Ο διαγωνισμός διήρκησε 2 ημέρες μπροστά σε πλήθος μαθηματικών και επιστημόνων.
- Ο νεαρός Φεράρι υπερίσχυσε και δέχθηκε πλήθος προσφορών για ακαδημαικές και κυβερνητικές θέσεις.

- Η επιτυχία του Ταρτάλια ήταν η απαρχή για Ομηρικούς καυγάδες.
- Ο Λουντοβίκο Φεράρι (1522) από το Παν/μιο του Μιλάνο ασχολήθηκε με τις τεταρτοβάθμιες και προκάλεσε σε δημόσιο διαγωνισμό τον Ταρτάλια.
- Ο διαγωνισμός διήρκησε 2 ημέρες μπροστά σε πλήθος μαθηματικών και επιστημόνων.
- Ο νεαρός Φεράρι υπερίσχυσε και δέχθηκε πλήθος προσφορών για ακαδημαϊκές και κυβερνητικές θέσεις.

- Ο Φεράρι δηλητηριάστηκε από την αδελφή του για να του πάρει την περιουσία του στα 43 έτη του.
- Ο Ταρτάλια πέθανε πάμπτωχος στη Βενετία.

- Το κύριο πρόβλημα των μαθηματικών εκείνης της εποχής ήταν η επίλυση των πολυωνυμικών εξισώσεων.
- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \;\rightarrow x = y - \frac{a}{3} \;\rightarrow y^3 + py + q = 0$
- $p = b - \frac{a^2}{3}, q = \frac{2a^2}{27} - \frac{ab}{3} + c$
- $A = \sqrt[3]{-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}},\; B = \sqrt[3]{-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$
- Ρίζες.
- A+B, ωA+ω^2B, ωB+ω^2A.
- $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Υπάρχουν πάντα λύσεις για όλες τις πολυωνυμικές εξισώσεις με ριζικά;
- Μήπως αυτό το ερώτημα συνδέεται με κάποιο άλλο πιο αφηρημένο;

- Υπάρχουν πάντα λύσεις για όλες τις πολυωνυμικές εξισώσεις με ριζικά;
- Μήπως αυτό το ερώτημα συνδέεται με κάποιο άλλο πιο αφηρημένο;

- Οι μαθηματικοί της αναγέννησης είχαν ξεκλειδώσει το μυστικό της επίλυσης τριτοβάθμιων και τεταρτοβάθμιων εξισώσεων.
- Για 250 χρόνια οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί προσπαθούσαν να βρούν τρόπο να διασπάσουν το μυστικό της επίλυσης της πεμπτοβάθμιας.

- Υπάρχουν πάντα λύσεις για όλες τις πολυωνυμικές εξισώσεις με ριζικά;
- Μήπως αυτό το ερώτημα συνδέεται με κάποιο άλλο πιο αφηρημένο;
- Οι μαθηματικοί της αναγέννησης είχαν ξεκλειδώσει το μυστικό της επίλυσης τριτοβάθμιων και τεταρτοβάθμιων εξισώσεων.
- Για 250 χρόνια οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί προσπαθούσαν να βρούν τρόπο να διασπάσουν το μυστικό της επίλυσης της πεμπτοβάθμιας.

- Μέχρι που εμφανίστηκε ο Άβελ από τη Νορβηγία, μια χώρα με περιορισμένη μαθηματική κουλτούρα.

Niels Henrik Abel (1802 – 1829).

Δύσκολη παιδική ηλικία, 18 ετών φρόντιζε τα πέντε μικρότερα αδέλφια του και την αλκοολική μητέρα του. Ένας δάσκαλός του αναγνώρισε το ταλέντο του και φρόντισε να πληρώσει τα δίδακτρά του ώστε να φοιτήσει στο νεοσύστατο πανεπιστήμιο της χώρας του.

- Η επίλυση της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης εθεωρείτο του ιδίου επιπέδου δυσκολίας με το **Τελευταίο Θεώρημα του Fermat** ή **της κατανομής των πρώτων αριθμών**.

- Η επίλυση της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης εθεωρείτο του ιδίου επιπέδου δυσκολίας με το **Τελευταίο Θεώρημα του Fermat** ή **της κατανομής των πρώτων αριθμών**.

- Ο Άβελ άρχισε να ασχολείται με το πρόβλημα της επίλυσης της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης.
- Η πρώτη του προσπάθεια μετά από ένα χρόνο απέτυχε. Έλυνε μόνο μια μικρή κατηγορία, όχι όλες. Αλλά η μέθοδός του είχε δυναμική.

- Η επίλυση της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης εθεωρείτο του ιδίου επιπέδου δυσκολίας με το **Τελευταίο Θεώρημα του Fermat** ή **της κατανομής των πρώτων αριθμών**.
- Ο Άβελ άρχισε να ασχολείται με το πρόβλημα της επίλυσης της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης.
- Η πρώτη του προσπάθεια μετά από ένα χρόνο απέτυχε. Έλυνε μόνο μια μικρή κατηγορία όχι όλες. Αλλά η μέθοδός του είχε δυναμική.

- Η αναγνώριση του λάθους τον βοήθησε να αντιληφθεί ότι ίσως οι πεμπτοβάθμιες να μην λύνονται όλες με ριζικά.

- Η επίλυση της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης εθεωρείτο του ιδίου επιπέδου δυσκολίας με το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat ή της κατανομής των πρώτων αριθμών.
- Ο Άβελ άρχισε να ασχολέιται με το πρόβλημα της επίλυσης της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης.
- Η πρώτη του προσπάθεια μετά από ένα χρόνο απέτυχε. Έλυνε μόνο μια μικρή κατηγορία όχι όλες. Αλλά η μέθοδός του είχε δυναμική.
- Η αναγνώριση του λάθους τον βοήθησε να αντιληφθεί ότι ίσως οι πεμπτοβάθμιες να μην λύνονται όλες με ριζικά.

- **Αλλά γιατί να μην λύνονται;**

- Εκείνη την εποχή οι μαθηματικοί άρχισαν να υιοθετούν τις τετραγωνικές ρίζες των αρνητικών αριθμών.
- ΕΡΩΤΗΜΑ. Αρκεί μόνο το i= $\sqrt{-1}$ για να περιγραφούν όλες;

- Εκείνη την εποχή οι μαθηματικοί άρχισαν να υιοθετούν τις τετραγωνικές ρίζες των αρνητικών αριθμών.
- ΕΡΩΤΗΜΑ. Αρκεί μόνο το i= $\sqrt{-1}$ για να περιγραφούν όλες;

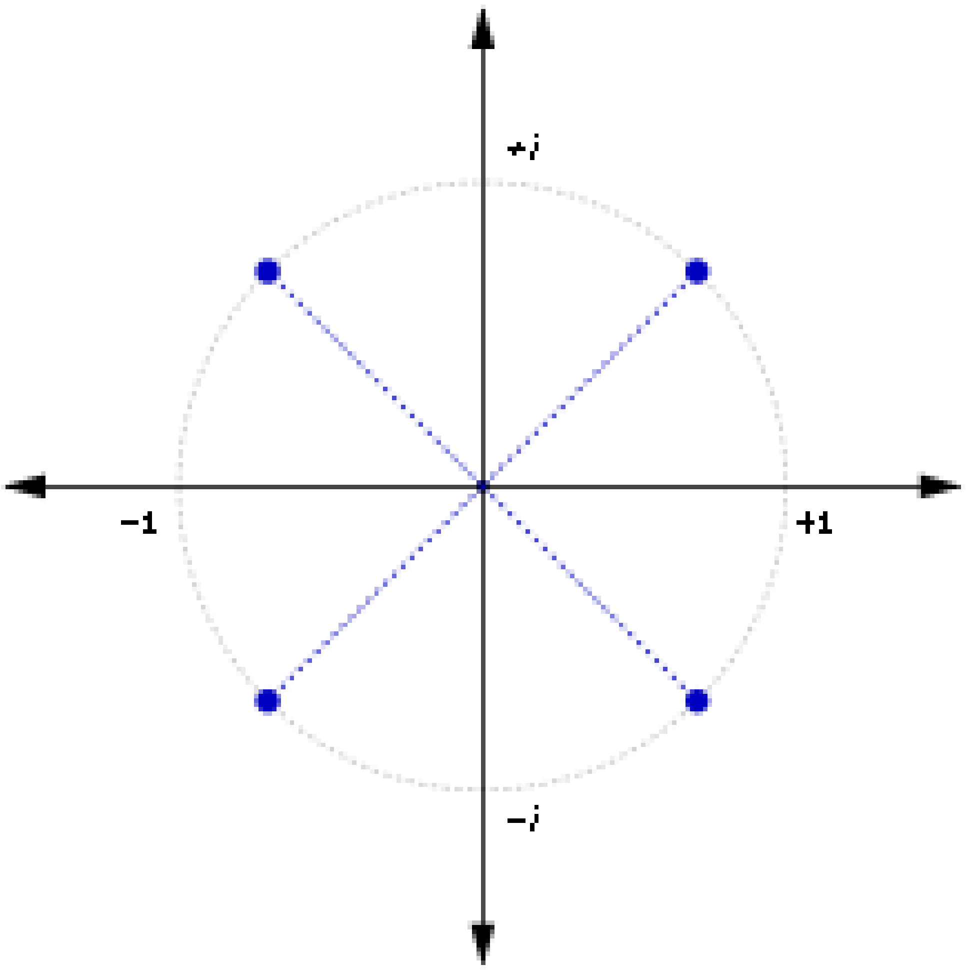
Carl Friedrich Gauss (1777−1855).

Ο πρίγκιπας των μαθηματικών το απέδειξε στο διδακτορικό του αλλά δεν τόλμησε να το δημοσιεύσει αμέσως.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

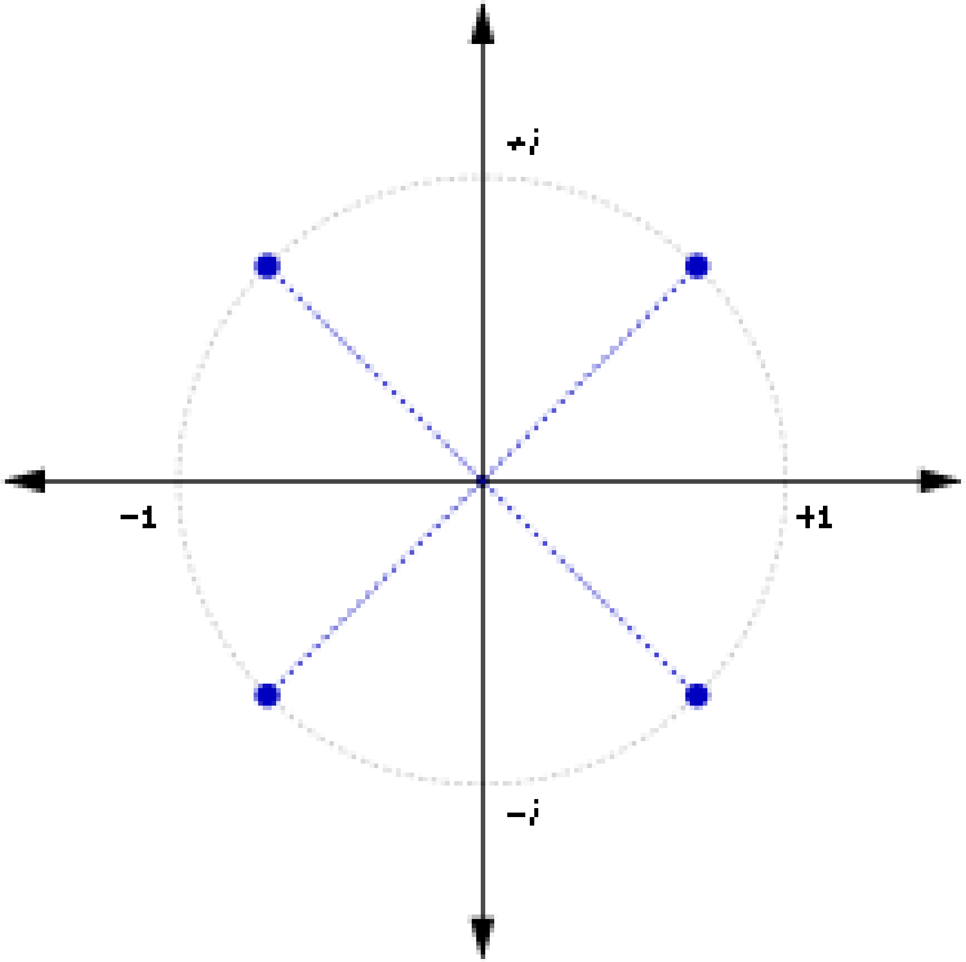
$x^2 = -1, x^4 = -1.$

- $x^4 = -1.$



$$x^2 = \pm i \rightarrow$$
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),$$
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i),$$
$$x_3 = -x_1, x_4 = -x_2.$$

- $x^4 = -1.$



$$x^2 = \pm i \rightarrow$$
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),$$
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i),$$
$$x_3 = -x_1, x_4 = -x_2.$$

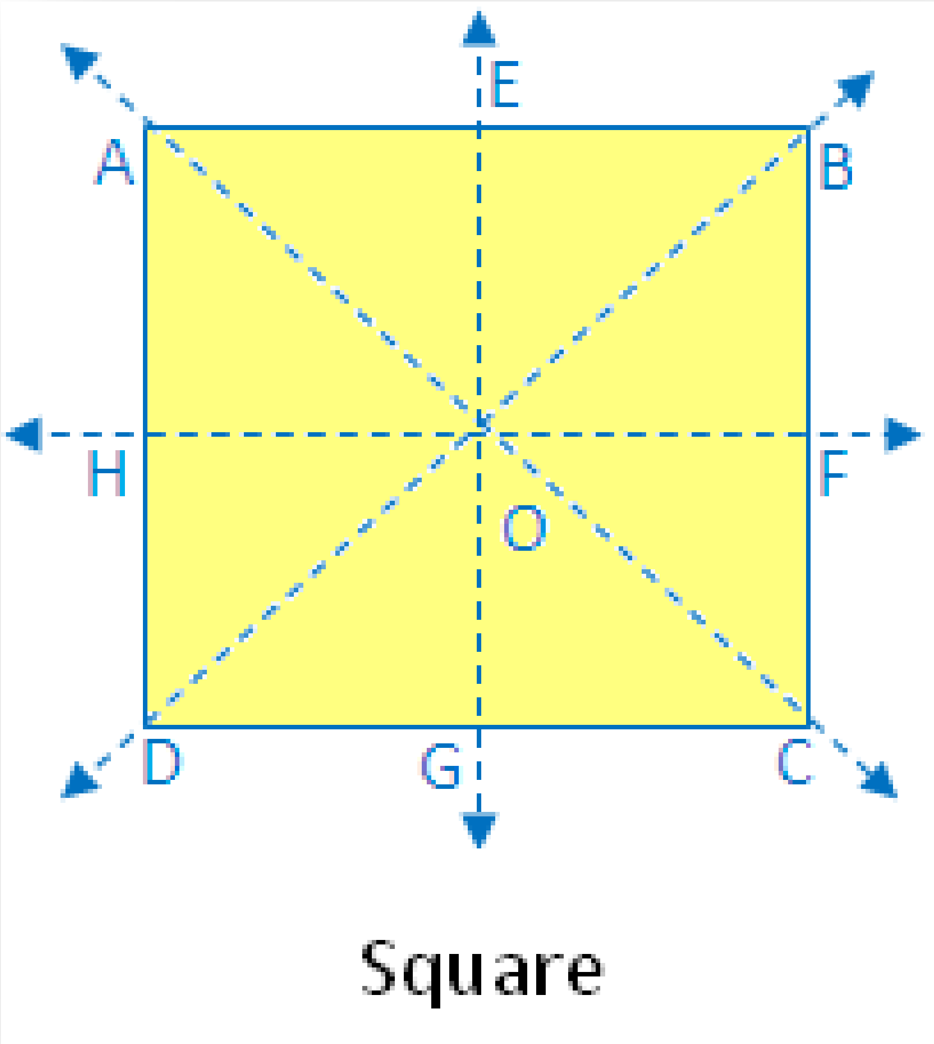
Οι ρίζες ικανοποιούν τις επόμενες συνθήκες.

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 1,$$
$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = 0,$$
$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

- Είναι μόνο αυτές;
- $x_1x_2x_3x_4 = 1,$
- $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0,$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0,$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

- Είναι μόνο αυτές;
- $x_1x_2x_3x_4 = 1,$
- $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0,$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0,$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

- Αυτές όμως;
- $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_4}.$
- $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),$
- $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i),$
- $x_3 = -x_1, x_4 = -x_2.$



Αν οι ρίζες αποτελούν τις κορυφές ενός τετραγώνου τότε οι συμμετρίες του σέβονται τις συνθήκες των ριζών.

$$x_1x_2x_3x_4 = 1,$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Κυρίως αυτές.

$$x_1 + x_3 = 0 = x_2 + x_4$$

- 1824. Ο Άβελ συνειδητοποίησε ότι αυτές οι συγκεκριμένες συμμετρίες των ριζών ήταν το κλειδί για την απάντηση, αν η εξίσωση λύνεται με ριζικά.

- 1824. Ο Άβελ συνειδητοποίησε ότι αυτές οι συγκεκριμένες συμμετρίες των ριζών ήταν το κλειδί για την απάντηση, αν η εξίσωση λύνεται με ριζικά.

- Το να αποδείξεις ότι δεν υπάρχει τύπος λύσης με ριζικά είναι πρόβλημα ανώτερης τάξης πολυπλοκότητας από αυτό που είχε απασχολήσει τον Ταρτάλια, Φεράρι και τους υπόλοιπους.

- 1824. Ο Άβελ συνειδητοποίησε ότι αυτές οι συγκεκριμένες συμμετρίες των ριζών ήταν το κλειδί για την απάντηση, αν η εξίσωση λύνεται με ριζικά.
- Το να αποδείξεις ότι δεν υπάρχει τύπος λύσης με ριζικά είναι πρόβλημα ανώτερης τάξης πολυπλοκότητας από αυτό που είχε απασχολήσει τον Ταρτάλια, Φεράρι και τους υπόλοιπους.

- Όταν έχεις τύπο τον δοκιμάζεις.
- Πως θα πείσεις ότι δεν υπάρχει κανένας άλλος;
- Δεν μπορείς να τους ελέγξεις όλους.

- 1824. Ο Άβελ συνειδητοποίησε ότι αυτές οι συγκεκριμένες συμμετρίες των ριζών ήταν το κλειδί για την απάντηση, αν η εξίσωση λύνεται με ριζικά.
- Το να αποδείξεις ότι δεν υπάρχει τύπος λύσης με ριζικά είναι πρόβλημα ανώτερης τάξης πολυπλοκότητας από αυτό που είχε απασχολήσει τον Ταρτάλια, Φεράρι και τους υπόλοιπους.

- Όταν έχεις τύπο τον δοκιμάζεις.
- Πως θα πείσεις ότι δεν υπάρχει κανένας άλλος;
- Δεν μπορείς να τους ελέγξεις όλους.

- Αυτό σημαίνει ότι χρειάζονται νέες έννοιες.
- Τώρα πέφτει ο σπόρος για τη δημιουργία της Θεωρίας Ομάδων.

- Ας δούμε επιγραμματικά την απόδειξη του Άβελ.
- Υπάρχουν πεμπτοβάθμιες με πέντε διαφορετικές ρίζες, ας είναι αυτές οι A, B, C, D, E.
- Πχ. (x-A)(x-B)(x-C)(x-D)(x-E).

- Ας δούμε επιγραμματικά την απόδειξη του Άβελ.
- Υπάρχουν πεμπτοβάθμιες με πέντε διαφορετικές ρίζες , ας είναι αυτές οι A, B, C, D, E.
- Πχ. (x-A)(x-B)(x-C)(x-D)(x-E).

- Δημιούργησε διάφορες αλγεβρικές εκφράσεις όπως
- ABCDE (1)
- A-BC-DE (2)
- (A-B) (A-C) (A-D) (A-E) (B-C) (B-D) (B-E) (C-D) (C-E) (D-E) (3)

- Ας δούμε επιγραμματικά την απόδειξη του Άβελ.
- Υπάρχουν πεμπτοβάθμιες με πέντε διαφορετικές ρίζες , ας είναι αυτές οι A, B, C, D, E.
- Πχ. (x-A)(x-B)(x-C)(x-D)(x-E).
- Δημιούργησε διάφορες αλγεβρικές εκφράσεις όπως
- ABCDE (1)
- A-BC-DE (2)
- (A-B) (A-C) (A-D) (A-E) (B-C) (B-D) (B-E) (C-D) (C-E) (D-E) (3)

- Αν μεταθέσουμε τα γράμματα σ’ αυτές τις εκφράσεις κάποιες δεν αλλάζουν όπως η (1), ενώ άλλες λαμβάνουν δύο μόνο τιμές όπως η (3).

- Ο Άβελ απέδειξε ότι δεν υπάρχει μαθηματική έκφραση η οποία να λαμβάνει τρεις ή τέσσερις μόνο τιμές.
- Δηλαδή από μία ή δύο περνάμε στις πέντε τουλάχιστον.
- Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται μόνο στις πεμπτοβάθμιες.

- Ο Άβελ απέδειξε ότι δεν υπάρχει μαθηματική έκφραση η οποία να λαμβάνει τρεις ή τέσσερις μόνο τιμές.
- Δηλαδή από μία ή δύο περνάμε στις πέντε τουλάχιστον.
- Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται μόνο στις πεμπτοβάθμιες.

- Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια μαγική λύση με ριζικά.
- Θα προχωρήσουμε με άτοπο.

- Ο Άβελ απέδειξε ότι δεν υπάρχει μαθηματική έκφραση η οποία να λαμβάνει τρεις ή τέσσερις μόνο τιμές.
- Δηλαδή από μία ή δύο περνάμε στις πέντε τουλάχιστον.
- Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται μόνο στις πεμπτοβάθμιες.
- Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια μαγική λύση με ριζικά.
- Θα προχωρήσουμε με άτοπο.

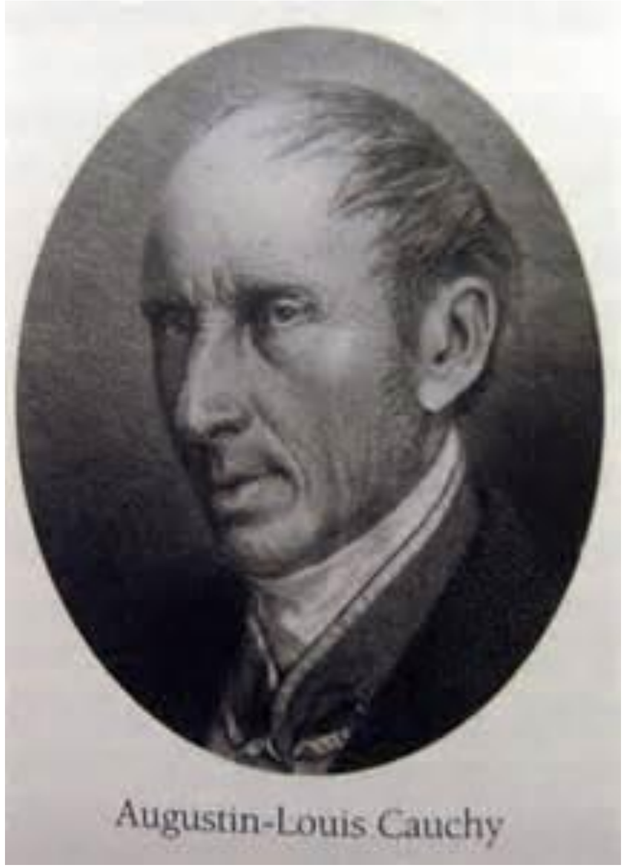
- Ο Άβελ βρήκε κανόνες που πρέπει να διέπουν αυτόν τον μαγικό τύπο. Δηλαδή δεν είναι τόσο πολύ γενικός.
- Εισήγαγε τον μαγικό γενικό τύπο στις προηγούμενες εκφράσεις.

- Ο Άβελ απέδειξε ότι δεν υπάρχει μαθηματική έκφραση η οποία να λαμβάνει τρεις ή τέσσερις μόνο τιμές.
- Δηλαδή από μία ή δύο περνάμε στις πέντε τουλάχιστον.
- Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται μόνο στις πεμπτοβάθμιες.
- Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια μαγική λύση με ριζικά.
- Θα προχωρήσουμε με άτοπο.
- Ο Άβελ βρήκε κανόνες που πρέπει να διέπουν αυτόν τον μαγικό τύπο. Δηλαδή δεν είναι τόσο πολύ γενικός.
- Εισήγαγε τον μαγικό γενικό τύπο στις προηγούμενες εκφράσεις.

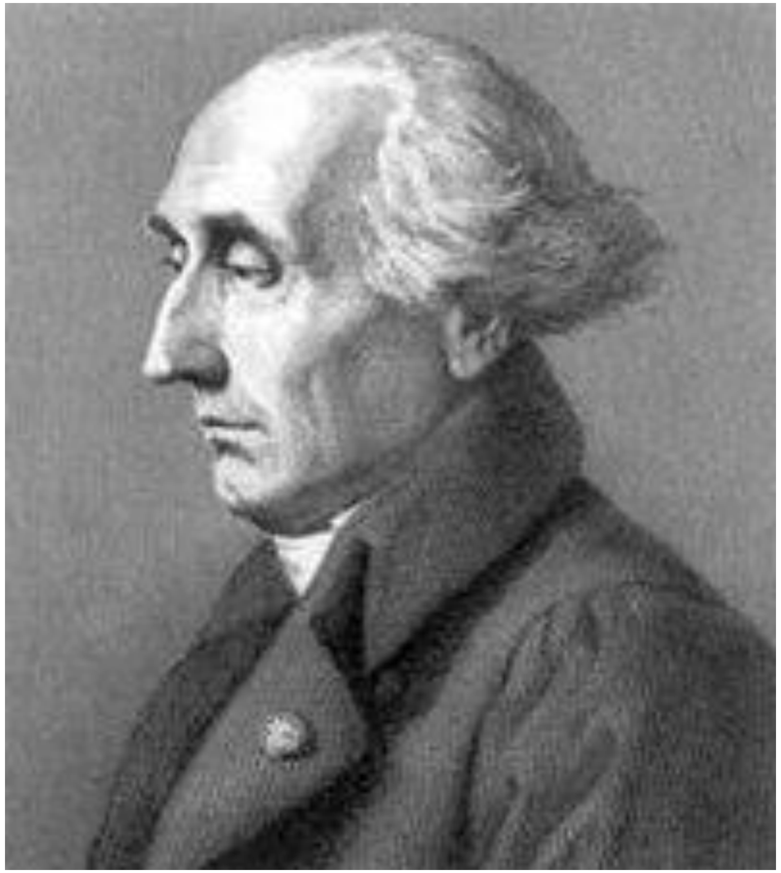
- Ύστερα από σελίδες ολόκληρες με συνδυασμούς, ανακάλυψε ότι ο μαγικός τύπος προσέκρουε στο γεγονός που είχε μόλις αποδείξει για 1 ή 2 ή περισσότερες από 4 απαντήσεις!

- Ο Άβελ έστειλε την εργασία του στους διαπρεπέστερους μαθηματικούς της εποχής αλλά κυρίως ήλπιζε να εντυπωσιάσει τη Γαλλική Ακαδημία Επιστημών. Έστειλε την εργασία του στον Cauchy και ήλπιζε ότι θα την παρουσιάσει στην Ακαδημία.

- Ο Άβελ έστειλε την εργασία του στους διαπρεπέστερους μαθηματικούς της εποχής αλλά κυρίως ήλπιζε να εντυπωσιάσει τη Γαλλική Ακαδημία Επιστημών. Έστειλε την εργασία του στον Cauchy και ήλπιζε ότι θα την παρουσιάσει στην Ακαδημία.



Augustin-Louis Cauchy,1789 – 1857. Είχε ιδιαίτερα σκληρή ηλικία λόγω της Γαλλικής επανάστασης. Το ταλέντο του φάνηκε από μικρή ηλικία. Ο Lagrange είπε στον Laplace: *Βλέπεις αυτόν τον μικρό, σύντομα θα μας αντικαταστήσει*.
Ο Lagrange είπε στον πατέρα του, *μην τον αφήσεις να αγγίζει βιβλία μαθηματικών πριν ολοκληρώσει τις σπουδές του στη λογοτεχνία*.
Θεωρείτο από τους πιο δύσκολους ακαδημαϊκούς.



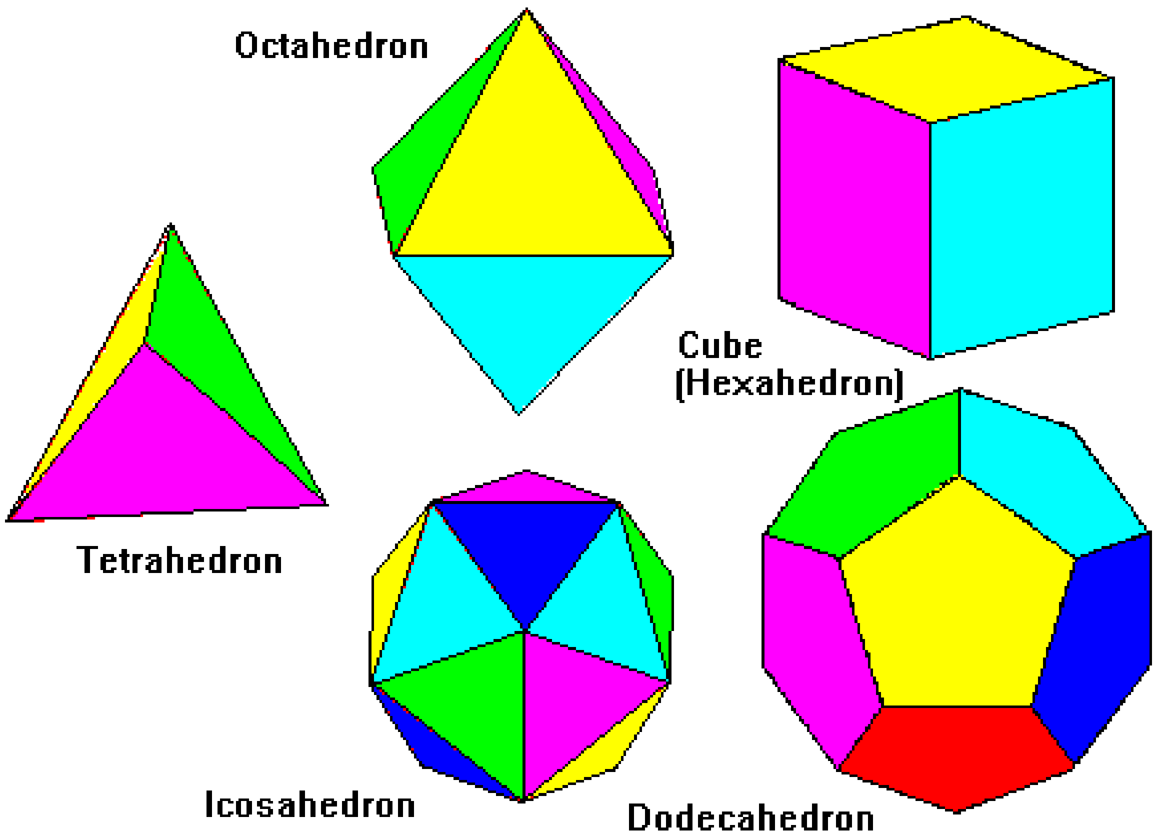
Joseph-Louis Lagrange 1736 – 1813.

Έδωσε στον μικρό Cauchy ένα πρόβλημα με το οποίο είχαν ασχοληθεί οι Πλατωνικοί και είχε προκαλέσει σύγχυση στους μαθηματικούς.

ΤΑ ΠΛΑΤΩΝΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ.

- **Πλατωνικό στερεό** λέγεται ένα κυρτό κανονικό πολύεδρο, του οποίου όλες οι έδρες είναι ίσα κανονικά πολύγωνα και όλες οι πολυεδρικές γωνίες του είναι ίσες. Επομένως, όλες οι ακμές του είναι ίσα ευθύγραμμα τμήματα, καθώς επίσης και όλες οι επίπεδες γωνίες των εδρών του είναι ίσες. (WIKIPEDIA)

- **Πλατωνικό στερεό** λέγεται ένα κυρτό κανονικό πολύεδρο, του οποίου όλες οι έδρες είναι ίσα κανονικά πολύγωνα και όλες οι πολυεδρικές γωνίες του είναι ίσες. Επομένως, όλες οι ακμές του είναι ίσα ευθύγραμμα τμήματα, καθώς επίσης και όλες οι επίπεδες γωνίες των εδρών του είναι ίσες. (WIKIPEDIA)
- Ο μαθητής του Πλάτωνα, ο **Θεαίτητος**, απέδειξε ότι υπάρχουν μόνο πέντε τέτοια πολύεδρα:



- https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid
- 1809. Κατασκευάσθηκε το ***μεγάλο δωδεκάεδρο*** χαλαρώνοντας τη συνθήκη ότι οι έδρες των σχημάτων δεν πρέπει να τέμνονται.

- https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid
- 1809. Κατασκευάσθηκε το ***μεγάλο δωδεκάεδρο*** χαλαρώνοντας τη συνθήκη ότι οι έδρες των σχημάτων δεν πρέπει να τέμνονται.

Ανακαλύφθηκαν τρία ακόμα.
Υπήρχαν άλλα;

- https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid
- 1809. Κατασκευάσθηκε το μεγάλο δωδεκάεδρο χαλαρώνοντας τη συνθήκη ότι οι έδρες των σχημάτων δεν πρέπει να τέμνονται.

Ανακαλύφθηκαν τρία ακόμα.
Υπήρχαν άλλα;

Αυτό ήταν το ερώτημα το οποίο έθεσε ο Lagrange στον Cauchy.
https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler-Poinsot_polyhedron

- https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid
- 1809. Κατασκευάσθηκε το μεγάλο δωδεκάεδρο χαλαρώνοντας τη συνθήκη ότι οι έδρες των σχημάτων δεν πρέπει να τέμνονται.

Ανακαλύφθηκαν τρία ακόμα.
Υπήρχαν άλλα;
Αυτό ήταν το ερώτημα το οποίο έθεσε ο Lagrange στον Cauchy.
https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler-Poinsot_polyhedron

Ο Cauchy απέδειξε ότι δεν υπάρχουν άλλα, κερδίζοντας το βραβείο της Ακαδημίας το 1811.

- Αυτό που έχει περισσότερο σημασία εδώ είναι ο τρόπος με τον οποίο ο Cauchy αντιμετώπισε το πρόβλημα.
- Αποτελεί σημείο καμπής στη μαθηματική σκέψη.

- Αυτό που έχει περισσότερο σημασία εδώ είναι ο τρόπος με τον οποίο ο Cauchy αντιμετώπισε το πρόβλημα.
- Αποτελεί σημείο καμπής στη μαθηματική σκέψη.

- Ο Cartesius είχε πει ότι οι ***αισθήσεις είναι ψευδαισθήσεις***.
- Ο Cauchy αναγνώρισε την αδυναμία που υπήρχε στην επίκληση της γεωμετρικής διαίσθησης και αναζήτησε έναν πιο αυστηρό τρόπο για να αντιμετωπίσει τις συμμετρίες.

- Αυτό που έχει περισσότερο σημασία εδώ είναι ο τρόπος με τον οποίο ο Cauchy αντιμετώπισε το πρόβλημα.
- Αποτελεί σημείο καμπής στη μαθηματική σκέψη.
- Ο Cartesius είχε πει ότι ***οι αισθήσεις είναι ψευδαισθήσεις***.
- Ο Cauchy αναγνώρισε την αδυναμία που υπήρχε στην επίκληση της γεωμετρικής διαίσθησης και αναζήτησε έναν πιο αυστηρό τρόπο για να αντιμετωπίσει τις συμμετρίες.

- Μετά την επίλυση του προβλήματος αυτού αρρώστησε βαριά.

- Το πρόβλημα αυτό είχε κοινά σημεία με το πρόβλημα που έλυσε ο Άβελ.

- Μήπως ο Cauchy είχε χρησιμοποιήσει ιδέες από τις συμμετρίες των εξισώσεων;

- Μήπως ο Cauchy είχε χρησιμοποιήσει ιδέες από τις συμμετρίες των εξισώσεων;

Paolo Ruffini (1765 – 1822) είχε ασχοληθεί με την πεμπτοβάθμια εξίσωση και είχε γράψει μια εργασία 500 σελίδων την οποία έστειλε πρώτα στον Lagrange ο οποίος δεν του έδωσε σημασία.

Μετά απευθύνθηκε στον Cauchy οποίος του έγραψε ***Κατά την κρίση μου αποδεικνύετε πλήρως την αδυναμία επίλυσης των εξισώσεων ανωτέρω του τετάρτου βαθμού***, όπως πίστευα.

- Η απόδειξη του Ruffini περιείχε ένα σημαντικό κενό το οποίο ο Cauchy δεν είχε επισημάνει.
- Πιθανόν αν κάποιος το είχε επισημάνει, ο Ruffini να ήταν ικανός να το διορθώσει.

- Η απόδειξη του Ruffini περιείχε ένα σημαντικό κενό το οποίο ο Cauchy δεν είχε επισημάνει.
- Πιθανόν αν κάποιος το είχε επισημάνει, ο Ruffini να ήταν ικανός να το διορθώσει.

- Ο Cauchy αντί να παρουσιάσει την εργασία του Ruffini ως όφειλε παρουσίασε μια δική του γενίκευση χωρίς καμία αναφορά στον Ruffini.

- Η απόδειξη του Ruffini περιείχε ένα σημαντικό κενό το οποίο ο Cauchy δεν είχε επισημάνει.
- Πιθανόν αν κάποιος το είχε επισημάνει, ο Ruffini να ήταν ικανός να το διορθώσει.
- Ο Cauchy αντί να παρουσιάσει την εργασία του Ruffini ως όφειλε παρουσίασε μια δική του γενίκευση χωρίς καμία αναφορά στον Ruffini.

- Ας επανέλθουμε στον Άβελ.
- Ο Άβελ συνδέθηκε με τον Γερμανό μαθηματικό Crelle ο οποίος είχε στα σκαριά ένα μαθηματικό περιοδικό για πολλά υποσχόμενους νέους μαθηματικούς.
- ***Journal für die reine und angewandte Mathematik.***
- Το πρώτο τεύχος του περιοδικού περιείχε τη δουλειά του Άβελ.

- Ο Άβελ πίστευε ότι με αυτή τη δημοσίευση θα εύρισκε επιτέλους δουλειά στο μοναδικό Πανεπιστήμιο της Νορβηγίας.
- Περίμενε και από τον Cauchy κάποια αναγνώριση χωρίς αποτέλεσμα.

- Ο Άβελ πίστευε ότι με αυτή τη δημοσίευση θα εύρισκε επιτέλους δουλειά στο μοναδικό Πανεπιστήμιο της Νορβηγίας.
- Περίμενε και από τον Cauchy κάποια αναγνώριση χωρίς αποτέλεσμα.

- Κάποιοι στο Παρίσι και ο Κρέλε στο Βερολίνο κατάφεραν να βρουν χρηματοδότηση ώστε να βρει δουλειά ο Άβελ.

- Ο Άβελ πίστευε ότι με αυτή τη δημοσίευση θα εύρισκε επιτέλους δουλειά στο μοναδικό Πανεπιστήμιο της Νορβηγίας.
- Περίμενε και από τον Cauchy κάποια αναγνώριση χωρίς αποτέλεσμα.
- Κάποιοι στο Παρίσι και ο Κρέλε στο Βερολίνο κατάφεραν να βρουν χρηματοδότηση ώστε να βρει δουλεία ο Άβελ.

- Δυστυχώς ήταν αργά.
- Η πείνα και οι αρρώστιες τον είχαν εξουθενώσει.
- Πέθανε σε ηλικία 26 ετών.
- Μετά θάνατον του απενεμήθει το Μεγάλο Βραβείο της Ακαδημίας Επιστημών.

- Ο Άβελ πίστευε ότι με αυτή τη δημοσίευση θα εύρισκε επιτέλους δουλειά στο μοναδικό Πανεπιστήμιο της Νορβηγίας.
- Περίμενε και από τον Cauchy κάποια αναγνώριση χωρίς αποτέλεσμα.
- Κάποιοι στο Παρίσι και ο Κρέλε στο Βερολίνο κατάφεραν να βρουν χρηματοδότηση ώστε να βρει δουλεία ο Άβελ.
- Δυστυχώς ήταν αργά.
- Η πείνα και οι αρρώστιες τον είχαν εξουθενώσει.
- Πέθανε σε ηλικία 26 ετών.
- Μετά θάνατον του απενεμήθει το Μεγάλο Βραβείο της Ακαδημίας Επιστημών.

- 2003, η Νορβηγική Ακαδημία θέσπισε το **Βραβείο Άβελ** με το κύρος του βραβείου Νόμπελ και χρηματικό έπαθλο μισό εκατομμύριο λίρες Αγγλίας.

- ***Ο Άβελ είχε συνειδητοποιήσει ότι ο τρόπος συμπεριφοράς των ριζών κάθε εξίσωσης ως προς τις μεταθέσεις τους έμοιαζε να υποδηλώνει ότι κάθε εξίσωση συνδέεται με ένα συγκεκριμένο συμμετρικό αντικείμενο και το κλειδί για την επίλυση μιας εξίσωσης με ριζικά πρέπει να βρίσκεται στις ιδιότητες αυτών των αντικειμένων.***

- Δηλαδή την αντίστοιχη ομάδα συμμετρίας.

Εδώ εισέρχεται ο **Évariste Galois** (1811 - 1832) με τη μεγαλειώδη θεωρία του.

Εδώ εισέρχεται ο **Évariste Galois** (1811 - 1832) με τη μεγαλειώδη θεωρία του.

Η επιρροή της Γαλλικής επανάστασης στη ζωή του Galois ήταν ουσιαστική.
Η ζωή του ήταν σκληρή. Διάβαζε προχωρημένα μαθηματικά βιβλία για να ξεφεύγει από την καθημερινότητα.
Ήταν ιδιόρρυθμος απομονωμένος με επαναστατικές ιδέες. Όνειρό του ήταν να γίνει δεκτός στην **École Polytechnique**.
16 ετών απέτυχε.
Ασχολήθηκε με την επίλυση της πεμπτοβάθμιας.
17 ετών γράφει την πρώτη του εργασία.

- Ενδιαφέρθηκε να ξεχωρίσει αυτές που λύνονται με ριζικά με αυτές που δεν λύνονται.
- **Ουσιαστικά ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε ότι κάθε εξίσωση καθορίζεται από ένα συμμετρικό σχήμα.**

- Ενδιαφέρθηκε να ξεχωρίσει αυτές που λύνονται με ριζικά με αυτές που δεν λύνονται.
- **Ουσιαστικά ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε ότι κάθε εξίσωση καθορίζεται από ένα συμμετρικό σχήμα.**

- Ανακάλυψε ότι το ερώτημα αν μια εξίσωση μπορεί να λυθεί με ριζικά καθορίζονταν από το συγκεκριμένο τρόπο αλληλεπίδρασης των μεταθέσεων των ριζών μεταξύ τους και των νόμων που έπρεπε να ικανοποιούν.

- $x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 3\,x - 1\ = 0$

$$\sqrt{\begin{array}{c} 53\sqrt{\frac{273}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{9}\sqrt{3}\,\sqrt{6474}\,-\,\frac{161}{27}}\,+9\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\,\sqrt{6474}\,-\,\frac{161}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-53}\,+ \\ \frac{273}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{9}\sqrt{3}\,\sqrt{6474}\,-\,\frac{161}{27}}\,\sqrt{\frac{273}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{9}\sqrt{3}\,\sqrt{6474}\,-\,\frac{161}{27}}\,+9\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\,\sqrt{6474}\,-\,\frac{161}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-53}\,- \\ 9\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\,\sqrt{6474}\,-\,\frac{161}{27}\right)^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{273}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{9}\sqrt{3}\,\sqrt{6474}\,-\,\frac{161}{27}}\,+9\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\,\sqrt{6474}\,-\,\frac{161}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-53}-\frac{567}{8}\sqrt{2}\,\sqrt{6}\,\sqrt{3\sqrt{3}\,\sqrt{6474}\,-161} \end{array}}\;-$$

$$\frac{1}{6\sqrt[6]{\frac{1}{9}\sqrt{3}\,\sqrt{6474}-\frac{161}{27}}}\,\sqrt{\frac{273}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{9}\sqrt{3}\,\sqrt{6474}\,-\,\frac{161}{27}}\,+9\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\,\sqrt{6474}\,-\,\frac{161}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-53}$$

- $x^5 + 6x + 3 = 0$
- -0.49504
- -0.96774+1. 1337i
- -0.96774-1. 1337i
- 1. 2153+1. 1183i
- 1. 2153-1. 1183i

- 17 ετών παρέδωσε την πρώτη του εργασία στον Cauchy.
- Πίστευε ότι το επίτευγμά του θα ενδιέφερε όλη τη μαθηματική κοινότητα.

- 17 ετών παρέδωσε την πρώτη του εργασία στον Cauchy.
- Πίστευε ότι το επίτευγμά του θα ενδιέφερε όλη τη μαθηματική κοινότητα.

- Ο Cauchy εντυπωσιάστηκε και αποφάσισε να την αναφέρει στην επόμενη συνάντηση της ακαδημίας.
- Θεωρείται σημαντικό να αναφερθεί ο Cauchy σε εργασία άλλου και μάλιστα 17χρονου.

- 17 ετών παρέδωσε την πρώτη του εργασία στον Cauchy.
- Πίστευε ότι το επίτευγμά του θα ενδιέφερε όλη τη μαθηματική κοινότητα.
- Ο Cauchy εντυπωσιάστηκε και αποφάσισε να την αναφέρει στην επόμενη συνάντηση της ακαδημίας.
- Θεωρείται σημαντικό να αναφερθεί ο Cauchy σε εργασία άλλου και μάλιστα 17χρονου.

- Ο Cauchy δεν παρουσίασε ποτέ την εργασία του Galois και μάλιστα την εξαφάνισε.
- Ο Galois υπέβαλε και δεύτερο αναθεωρημένο αντίγραφο για την ύψιστη διάκριση της ακαδημίας.
- Το ανέλαβε ο Joseph Fourier οποίος πέθανε λίγες εβδομάδες αργότερα.

- Ο Galois συμμετείχε σε επαναστατικά κινήματα το 1830 και απεβλήθη από τη σχολή του. Έδινε διαλέξεις σε βιβλιοπωλεία όπου τον άκουσε ο Siméon Poisson ο οποίος τον ενθάρρυνε να καταθέσει και τρίτο αντίγραφο.
- Ο Poisson είχε αντίθετες πολιτικές ιδέες με τον Galois και δεν ήταν αμερόληπτος. Ήταν αρνητικός αλλά όχι πλήρως.
- Ο Galois φυλακίστηκε για τις ιδέες του. Στη φυλακή έγραψε

- Ο Galois συμμετείχε σε επαναστατικά κινήματα το 1830 και απεβλήθη από τη σχολή του. Έδινε διαλέξεις σε βιβλιοπωλεία όπου τον άκουσε ο Poisson ο οποίος τον ενθάρρυνε να καταθέσει και τρίτο αντίγραφο.
- Είχε αντίθετες πολιτικές ιδέες και δεν ήταν αμερόληπτος. Ήταν αρνητικός αλλά όχι πλήρως.
- Φυλακίστηκε για τις ιδέες του. Στη φυλακή έγραψε

- ***Για το χάσιμο των χειρογράφων μου κάπου στα συρτάρια της ακαδημίας ευθύνονται οι άνθρωποι της επιστήμης. Μπορώ να κατανοήσω μια τέτοια αμέλεια σε ανθρώπους που έχουν τον θάνατο του Άβελ στη συνείδησή τους χωρίς αυτό να σημαίνει ότι συγκρίνω τον εαυτό μου με τον μεγάλο αυτό μαθηματικό.***

- Ο Galois αρχίζει να συντάσσει το τρίτο του δοκίμιο. Δεν ήθελε να είναι 6 σελίδες (Άβελ) αλλά ούτε και 512 (Ρουφίνι).
- Είχε πρόβλημα να μεταδώσει τις ιδέες του γιατί δεν υπήρχε η κατάλληλη μαθηματική γλώσσα.

- Ο Galois αρχίζει να συντάσσει το τρίτο του δοκίμιο. Δεν ήθελε να είναι 6 σελίδες (Άβελ) αλλά ούτε και 512 (Ρουφίνι).
- Είχε πρόβλημα να μεταδώσει τις ιδέες του γιατί δεν υπήρχε η κατάλληλη μαθηματική γλώσσα.

- Ας δούμε όμως τον Galois και από τη μεριά του απλού ανθρώπου.
- Ερωτεύθηκε την κόρη του γιατρού στην κλινική που νοσηλεύθηκε μετά τη φυλακή, όταν ξέσπασε επιδημία χολέρας.
- Ο Galois δεν ήταν ικανός να αντιμετωπίσει το πρόβλημα του έρωτα όπως αντιμετώπιζε τα μαθηματικά προβλήματα.
- Εικάζεται ότι πέθανε σε μονομαχία με τον εραστή της κοπέλας.

- Το μεγαλύτερο μέρος της νύχτας πριν την μονομαχία το πέρασε προσπαθώντας να περιγράψει τη θεωρία για την οποία δεν είχε ενδιαφερθεί ουσιαστικά κανείς.
- Θα την έστελνε στο φίλο του τον Auguste Chevalier. Ήταν τόσο σίγουρος ότι θα πεθάνει ώστε προσπάθησε να ξεκαθαρίσει κάποια σημεία που είχε θίξει ο Poisson. Όσο πλησίαζε η αυγή τόσο συντόμευε τις αποδείξεις του.

- Το μεγαλύτερο μέρος της νύχτας πριν την μονομαχία το πέρασε προσπαθώντας να περιγράψει τη θεωρία για την οποία δεν είχε ενδιαφερθεί ουσιαστικά κανείς.
- Θα την έστελνε στο φίλο του τον Chevalier. Ήταν τόσο σίγουρος ότι θα πεθάνει ώστε προσπάθησε να ξεκαθαρίσει κάποια σημεία που είχε θίξει ο Poisson. Όσο πλησίαζε η αυγή τόσο συντόμευε τις αποδείξεις του.

- ***Όσα γράφω είναι ξεκάθαρα στο μυαλό μου. Δεν θα τολμούσα να αναγγείλλω θεωρήματα για τα οποία δεν έχω πλήρη απόδειξη. Κάνω έκκληση στους Gauss και Jacobi να εκφέρουν γνώμη. Όχι για την αλήθεια αλλά για τη σπουδαιότητα. Ας βάλλουν σε τάξη αυτήν την αταξία.***

- Δυστυχώς κανένας τους δεν απάντησε.

- O Joseph Liouville δημοσίευσε το χειρόγραφο στο νέο περιοδικό που ίδρυσε, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, παρακινούμενος από το Chevalier. Αλλά και ο ίδιος πίστευε στην αξία του χειρογράφου το οποίο παρουσίασε στην ακαδημία το 1843.

- Αργότερα ο Jacobi έδειξε ενδιαφέρον για την εργασία του Galois.

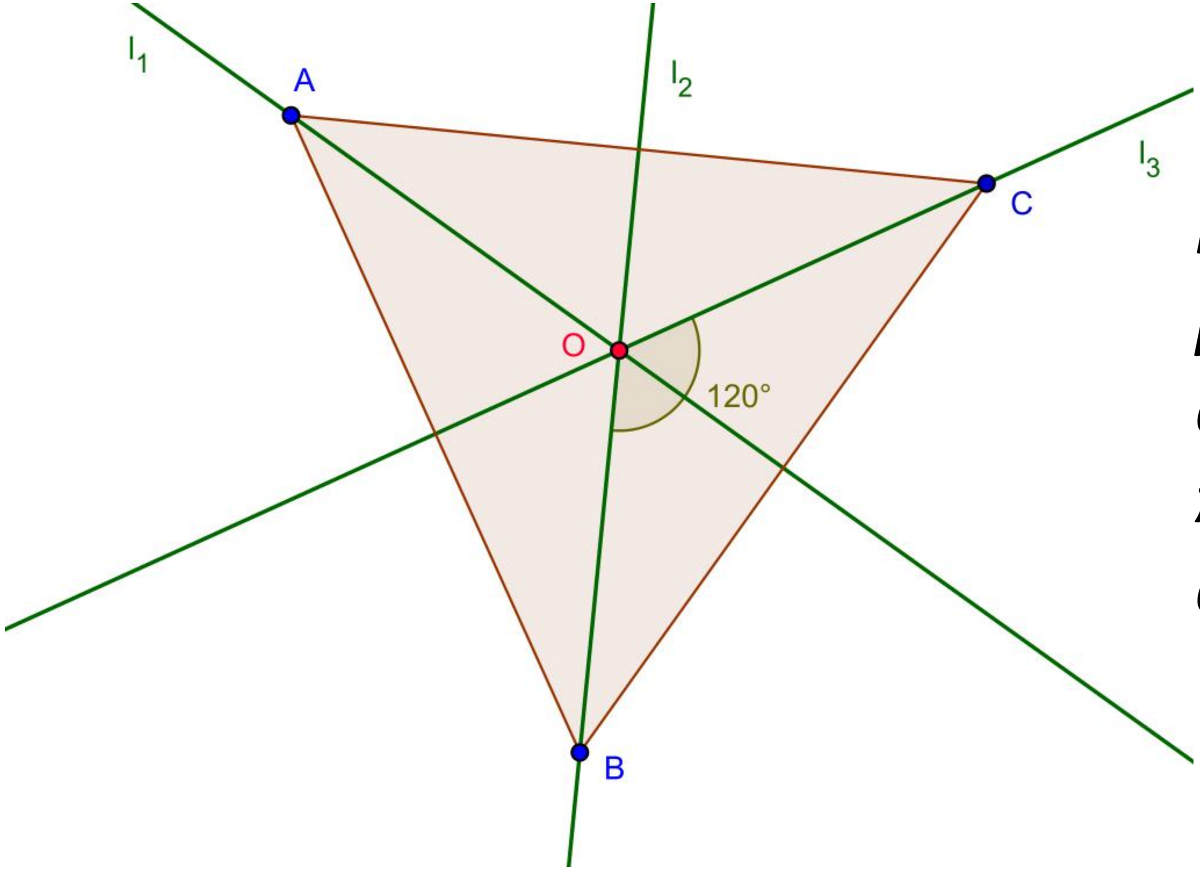
- Ο Joseph Liouville δημοσίευσε το χειρόγραφο στο νέο περιοδικό που ίδρυσε, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, παρακινούμενος από το Chevalier. Αλλά και ο ίδιος πίστευε στην αξία του χειρογράφου το οποίο παρουσίασε στην ακαδημία το 1843.

- Αργότερα ο Jacobi έδειξε ενδιαφέρον για την εργασία του Galois.

- Αυτός που αναγνώρισε την ευφυία του Galois ήταν ο Camille Jordan ο οποίος δημοσίευσε ένα βιβλίο πάνω στις ιδέες του Galois.

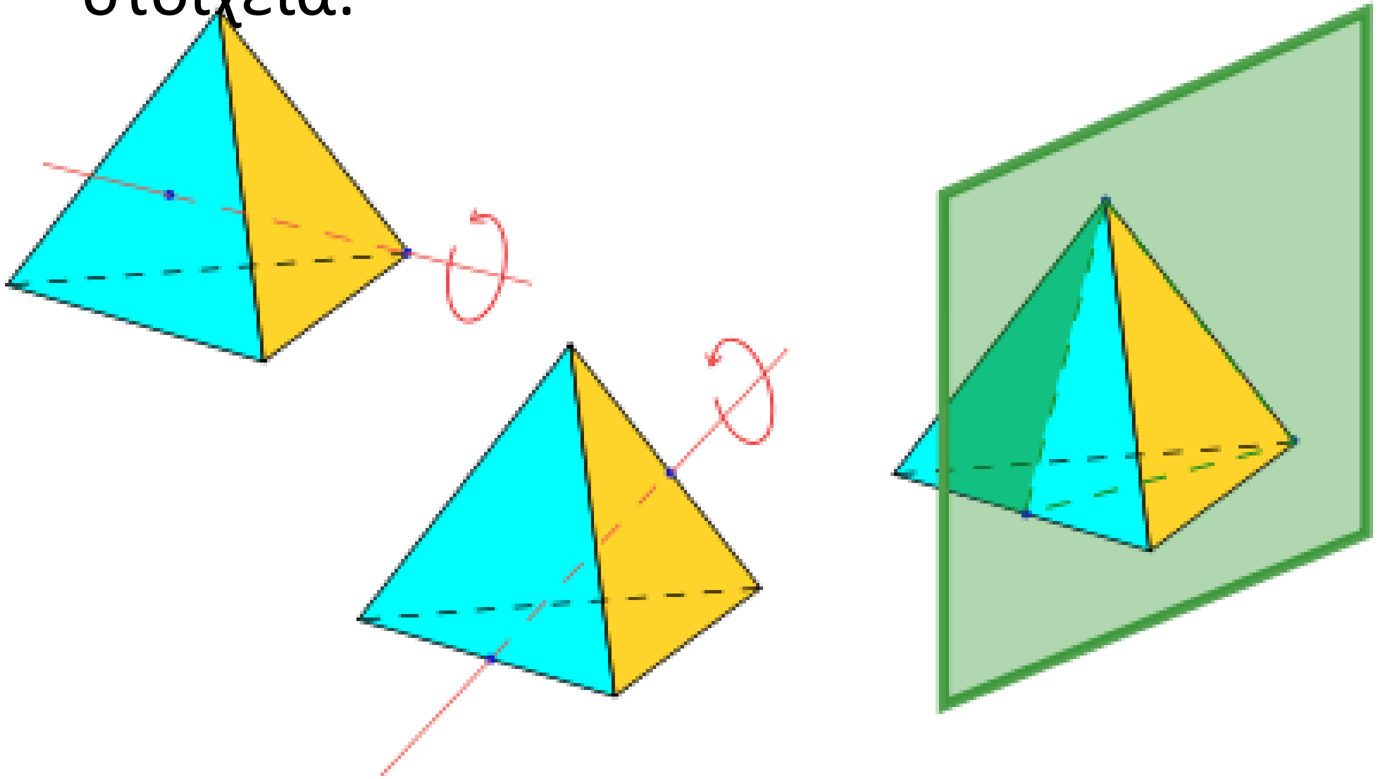
- ***Τα μεγάλα επιτεύγματα των μαθηματικών τα τελευταία 200 χρόνια στη θεωρία των ομάδων και συμμετρίας ανάγονται όλα στις βαθύτατες συλλήψεις που κρύβονται πίσω από τους κακογραμμένους χαρακτήρες του Galois. Ο νεαρός αυτός επαναστάτης ήταν ο πρώτος που άρθρωσε μια γλώσσα την οποία σήμερα μιλώ κάθε μέρα στη δουλεία μου.*** Hardy.

- Γιατί ο Ταρτάλια μπόρεσε να βρει λύση με ριζικά στην τριτοβάθμια;
- Διότι οι ρίζες της αποτελούν τις κορυφές του ισοπλεύρου τριγώνου και η ομάδα συμμετρίας αποτελείται από τρεις στροφές και τρεις ανακλάσεις ώστε

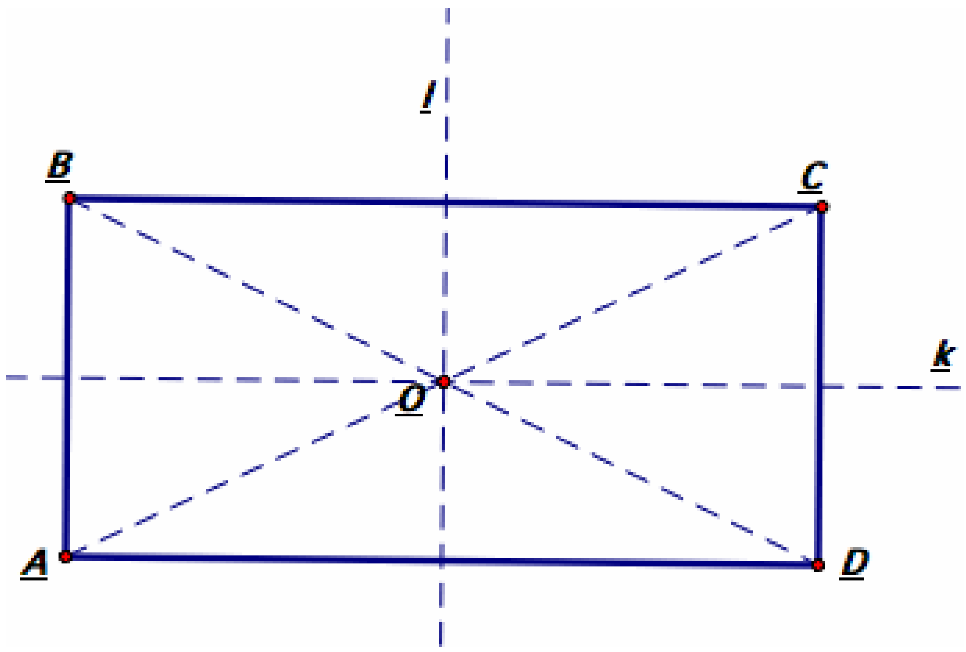


η ομάδα αυτή μπορεί να «διαιρεθεί» με την υποομάδα των στροφών που αποτελείται από τρία στοιχεία και να προκύψει μια ομάδα με δύο ανακλάσεις.

- Γιατί ο Φεράρι μπόρεσε να βρει λύση με ριζικά στην τεταρτοβάθμια;
- Διότι οι ρίζες της αποτελούν τις κορυφές του κανονικού τετραέδρου και η ομάδα συμμετρίας αποτελείται από συμμετρίες και ανακλάσεις με 24 στοιχεία.



Η υποομάδα που δημιουργείται από τις συμμετρίες ως προς τους άξονες οι οποίοι συνδέουν τα απέναντι μέσα συμπίπτει με τις συμμετρίες του ορθογωνίου οι οποίες είναι τέσσερες.



Συμμετρίες ορθογωνίου

Το πηλίκο των δύο αυτών ομάδων δίνει μια ομάδα με έξι στοιχεία η οποία χαρακτηρίζει την τριτοβάθμια την οποία είδαμε προηγουμένως.

Η δυνατότητα της αναγωγής των συμμετριών που χαρακτηρίζουν την εξίσωση σε αντίστοιχες σχημάτων με πρώτο αριθμό είναι ο λόγος που οι τριτοβάθμιες και τεταρτοβάθμιες έχουν λύση με ριζικά.

- Η γενική πεμπτοβάθμια δέχεται 120 μεταθέσεις των ριζών της. Μπορούμε να την «διαιρέσουμε» με μια υποομάδα με δύο συμμετρίες και θα προκύψει μια με 60 συμμετρίες. Ουσιαστικά είναι αυτή του δωδεκαέδρου με 60 στοιχεία η οποία δεν διασπάται. Αυτή καλείται **απλή** ομάδα.
- **Από εδώ ξεκινά η μοντέρνα θεωρία ομάδων.**