ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

# Τοπολογικός Βαθμός Απεικόνισης και το Θεώρημα Σταθερού Σημείου

ΓΕΩΡΓΙΑ ΚΟΥΤΣΑΥΤΗ

Μεταπτυχιακη Διατριβη

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2020

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, υπό την επίβλεψη του **Καθηγητή κ. Επαμεινώνδα Κεχαγιά**.

## Τριμελης Επιτροπη Κρισης

Κεχαγιάς Επαμεινώνδας, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)

Πουρναράς Ιωάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Παπαδάκης Σταύρος, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Εγκρίθηκε την 26-05-2020 από την Τριμελή Επιτροπή Εξέτασης:

## Τριμελης Επιτροπη Κρισης

Κεχαγιάς Επαμεινώνδας, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)

Πουρναράς Ιωάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος
Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Παπαδάκης Σταύρος, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος
Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

## ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.»

ΓΕΩΡΓΙΑ ΚΟΥΤΣΑΥΤΗ

Αφιερώνεται στους γονείς μου Θεόδωρο και Μαρία

# ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Επαμεινώνδα Κεχαγιά για την πολύτιμη βοήθεια και την σωστή καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη την διάρκεια της εκπόνησης της μεταπτυχιακής μου διατριβής και για την άριστη συνεργασία που είχαμε όλο αυτό τον καιρό. Επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ στα μέλη της επιτροπής αξιολόγησης, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Ιωάννη Πουρναρά και Επίκουρο Καθηγητή κ. Σταύρο Παπαδάκη, για τις χρήσιμες συμβουλές και διορθώσεις που μου υπέδειξαν.
Ακόμη, αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στους καθηγητές μου κ. Γεώργιο Καρακώστα και κ. Ιωάννη Σταυρουλάκη καθώς χωρίς την ενθάρρυνση τους το μεταπτυχιακό θα είχε παραμείνει ένα απλό όνειρο. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω το σύζυγο μου για τη διαρκή του υποστήριξη σε κάθε μου βήμα.

**Περίληψη.** Ο τοπολογικός βαθμός μιας συνεχούς απεικόνισης μεταξύ δύο ισοδιάστατων προσανατολισμένων, συμπαγών πολλαπλοτήτων χωρίς σύνορο εισήχθη εμμέσως από τον Brouwer (1910) στην απόδειξη του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου και της μη ύπαρξης ομοιομορφισμού από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ για $n \neq m$. Θα ορίσουμε και μελετήσουμε τον βαθμό συνεχούς απεικόνισης απο την $S^1$ στον εαυτό της και χρησιμοποιώντας τη singular ομολογία θα τον επεκτείνουμε στην $S^n$. Σαν αποτέλεσμα θα έχουμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer για ένα $n$-simplex. Τέλος, θα αποδείξουμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου για συμπαγή κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

**Abstract.** Brouwer implicitly introduced the concept of the topological degree of a continuous mapping between two oriented, compact, boundary-less manifolds having the same dimension in his proof of the Fixed Point Theorem and the non-existence of any homeomorphism between $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$ for $n \neq m$ in 1910. We shall study the degree of a continuous mapping from $S^1$ to itself and extend it to $S^n$ using singular homology theory. The Brouwer's Fixed Point Theorem for an $n$-dimensional manifold will be obtained. We, finally, prove Brouwer's Theorem for compact convex subsets of $\mathbb{R}^n$.

# Περιεχόμενα

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου (Θ.Σ.Σ.) του Brouwer αποτελεί ένα από τα πιο γνωστά και σημαντικά Θεωρήματα των Μαθηματικών και παρέχει ισχυρά εργαλεία για την απόδειξη και επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με θεωρητικά και εφαρμοσμένα μαθηματικά. Θεωρείται ένα από τα πρωτεύοντα θεωρητικά εργαλεία σε περιοχές όπως οι διαφορικές εξισώσεις, η τοπολογία, τα οικονομικά, η θεωρία παιγνίων, τα δυναμικά συστήματα, η συναρτησιακή ανάλυση κ. α..

**Ορισμός** *Για μία απεικόνιση $F : X \to X$, ένα* ***σταθερό σημείο*** $x \in X$ *είναι ένα σημείο ώστε* $F(x) = x$.

Τα σταθερά σημεία βρέθηκαν στο μαθηματικό ενδιαφέρον κατά το τέλος του 19ου αιώνα. Ο Henri Poincare άρχισε τη μελέτη τους ωθώντας τη συγκεκριμένη θεωρία προς την αναπτυσσόμενη τότε αλγεβρική τοπολογία. Το 1909 ο Luitzen Egbertus Jan Brouwer ο οποίος εργαζόταν στον κλάδο της αλγεβρικής τοπολογίας απέδειξε το θεώρημα σταθερού σημείου για τις τρεις διαστάσεις [4].

Το συγκεκριμένο Θεώρημα σχετίζεται με το βαθμό απεικονίσεων, τη θεωρία index, το Θεώρημα του Lefschetz και τη γενίκευση αυτού που αποτελεί το Θεώρημα Atiyah-Singer index.

Το Θεώρημα ενδιαμέσου τιμής του Bolzano (1817) γενικεύτηκε από τον Poincare (1884) [20].

**Θεώρημα** *Έστωσαν $f_1, \dots, f_n$ $n$ συνεχείς απεικονίσεις σε $n$ μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$ ώστε η μεταβλητή $x_i$ να λαμβάνει τιμές απο το $-a_i$ μέχρι το $a_i > 0$. Υποθέτουμε ότι για $x_i = a_i$ η $f_i$ είναι σταθερά θετική και για $x_i = -a_i$ είναι σταθερά αρνητική για κάθε $i$, τότε θα υπάρχουν τιμές των μεταβλητών ώστε* ***όλες*** *οι απεικονίσεις να μηδενίζονται ταυτόχρονα.*

Η απόδειξη αυτού του Θεωρήματος ήταν η αρχή για τη θεωρία του τοπολογικού βαθμού συνεχών απεικονίσεων από τον Browder (1983) [7]. Ο Brouwer, [5] στην απόδειξη της μη ύπαρξης ομοιομορφισμού απο τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ με $n \neq m$ εμμέσως έθεσε το υπόβαθρο για τον τοπολογικό βαθμό μιας συνεχούς απεικόνισης μεταξύ δύο προσανατολισμένων, συμπαγών πολλαπλοτήτων χωρίς σύνορα και ίσης διάστασης. Σε επόμενη εργασία ο Brouwer ανέπτυξε την έννοια του τοπολογικού βαθμού και τη χρησιμοποίησε στη μελέτη διανυσματικών πεδίων πάνω στη σφαίρα. Αυτό αποτελεί το γνωστό Θεώρημα της τριχωτής μπάλας, [6].

**Θεώρημα** *Κάθε συνεχές διανυσματικό πεδίο πάνω σε σφαίρα άρτιας διάστασης έχει τουλάχιστον ένα ιδιάζων σημείο.*

Στην ίδια εργασία υπολόγισε τον τοπολογικό βαθμό για τη διάσταση δύο.

**Θεώρημα** *Ο τοπολογικός βαθμός μιας συνεχούς απεικόνισης χωρίς σταθερό σημείο μιας σφαίρας διάστασης δύο (αντίστοιχα $n$) ισούται με $-1$ (αντίστοιχα $(-1)^{n+1}$).*

Σαν πόρισμα ακολουθεί το επόμενο, [4].

**Πόρισμα** *Κάθε συνεχής απεικόνιση μιας σφαίρας διάστασης δύο (αντίστοιχα $n$) στον εαυτό της η οποία έχει τοπολογικό βαθμό διαφορετικό από $-1$ (αντίστοιχα $(-1)^{n+1}$) έχει σταθερό σημείο.*

Ο Miranda ( [18], 1941) απέδειξε ότι το Θεώρημα του Poincare είναι ισοδύναμο με το Θ.Σ.Σ. του Brouwer.

**Θεώρημα** *Έστωσαν $f_1, \ldots, f_n$, $n$ συνεχείς απεικονίσεις σε $n$ μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ ώστε η μεταβλητή $x_i$ να λαμβάνει τιμές απο το $-a_i$ μέχρι το $a_i$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει κοινό σημείο ώστε αυτές να μηδενίζονται για κάθε $i$. Τότε υπάρχει σημείο $(u_1, \ldots, u_n)$ στο σύνορο του πεδίου που ορίστηκε προηγουμένως ώστε $f_i(u_1, \ldots, u_n) = Nu_i$ με $N < 0$.*

Αποτέλεσμα αυτού του Θεωρήματος είναι η πρώτη απόδειξη ότι το σύνορο του κύβου δεν μπορεί να είναι ανάκληση (retract) του κύβου, Bohl [2]. Αυτό είναι ισοδύναμο με το Θεώρημα του Brouwer. Οι Dugundji και Granas, [11], αναφέρουν ότι το επόμενο Θεώρημα

**Θεώρημα** *Για $n \geqslant 1$, η $S^{n-1}$ δεν είναι ανάκληση του δίσκου $D^n$.*

είναι του Borzuk ( [3], 1931). Το Θεώρημα του Bohl είναι το επόμενο.

**Θεώρημα** *Κάθε συνεχής απεικόνιση $F : D^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ έχει τουλάχιστον μια από τις επόμενες ιδιότητες*
*α) Η $F$ έχει σταθερό σημείο.*
*β) Υπάρχει $x \in S^n$ ώστε $x = \lambda F(x)$ για $0 < \lambda < 1$.*

Αν θέσουμε $f = 1 - F$ και η $f$ δεν ικανοποιεί το α), τότε θα ικανοποιεί το β) σύμφωνα με το Θεώρημα του Bohl.

Το Θεώρημα του Brouwer αναφέρει.

**Θεώρημα** *Μια συνεχής απεικόνιση από ένα $n$-simplex στον εαυτό του έχει ένα σταθερό σημείο.*

Η απόδειξη του Brouwer στηρίζεται στον τοπολογικό βαθμό και στην τεχνική προσέγγισης του μέσω βαρυκεντρικών υποδιαιρέσεων. Ουσιαστικά ο Brouwer απέδειξε το περίφημο θεώρημα αποδεικνύοντας ότι ομοτοπικές απεικονίσεις από μια σφαίρα στον εαυτό της έχουν τον ίδιο τοπολογικό βαθμό.

**Πόρισμα** *Κάθε συνεχής απεικόνιση από ένα $n$-διάστατο κέλυφος (cell) στον εαυτό του έχει σταθερό σημείο.*

Στη διατριβή αυτή θα γενικεύσουμε την αρχική απόδειξη του Brouwer και θα αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

**Θεώρημα** *Μια συνεχής απεικόνιση από ένα από ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό του έχει ένα σταθερό σημείο.*

Παραθέτουμε κάποιες σημαντικές επεκτάσεις των προηγουμένων Θεωρημάτων στη συναρτησιακή ανάλυση. Ο Schauder (1930), [22], επέκτεινε τα προηγούμενα σε χώρους Banach.

**Θεώρημα** *Μια συνεχής απεικόνιση από ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach στον εαυτό του έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.*

Το προηγούμενο Θεώρημα επεκτάθηκε απο τον Tychonov (1935), [25], για τοπικά κυρτούς διανυσματικούς χώρους.

Παραπέμπουμε στις εργασίες των Browder [7] και Siegberg [23] για ιστορική αναδρομή σχετικά με τον τοπολογικό βαθμό.

# Κεφάλαιο 1

# ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε κάποιες εισαγωγικές έννοιες τις οποίες θα χρειαστούμε για την καλύτερη κατανόηση του κειμένου, ενώ θα διατυπώσουμε και συγκεκριμένα θεωρήματα τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε σε αποδείξεις στην πορεία.

## 1.1 ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Σε αρκετές περιπτώσεις θα αναφερθούμε σε χώρους τους οποίους θα θέλουμε να εφοδιάσουμε με μια τοπολογία η οποία καθορίζεται από άλλους, που έχουν απλούστερη περιγραφή. Σημαντικό ρόλο σ' αυτό παίζουν οι **απεικονίσεις πηλίκο (quotient maps)**, δηλαδή επί απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων $p : X \to Y$, για τις οποίες ισχύει:

$$U \text{ ανοιχτό υποσύνολο του } Y \quad \Leftrightarrow \quad p^{-1}(U) \text{ ανοιχτό υποσύνολο του } X.$$

Παραδείγματος χάριν οι σφαίρες, οι σαμπρέλες, οι προβολικοί χώροι δημιουργούνται με χρήση τέτοιων απεικονίσεων.

**Ορισμός 1.1.1.** *Έστω τοπολογικός χώρος $X$ και $A$ ένα τυχαίο σύνολο. Εάν $p : X \to A$ είναι μια επί απεικόνιση, τότε υπάρχει ακριβώς μια τοπολογία $\mathcal{T}$ στο $A$ ως προς την οποία η $p$ είναι απεικόνιση πηλίκο, την οποία καλούμε **τοπολογία πηλίκο** [Τοπολογία πηλίκο] που επάγεται από την $p$.*

Ο παραπάνω Ορισμός είναι ιδιαίτερα σημαντικός όταν θέλουμε να εφοδιάσουμε κάποιον χώρο πηλίκο με μια τοπολογία. Εάν δηλαδή ο $X$ είναι κάποιος τοπολογικός χώρος και $\sim$ τυχούσα σχέση ισοδυναμίας στον $X$, η φυσική προβολή:

$$\begin{aligned} p : X &\to X/\sim \\ x &\mapsto [x], \end{aligned}$$

επάγει στον χώρο πηλίκο μια τοπολογία πηλίκο η οποία χαρακτηρίζεται από την εξής καθολική ιδιότητα.

**Θεώρημα 1.1.2.** *Έστω $p : X \to X/\sim$ μια απεικόνιση πηλίκο και $Z$ κάποιος τοπολογικός χώρος, για τον οποίο υπάρχει συνεχής απεικόνιση $g : X \to Z$ με την ιδιότητα $x \sim y \Rightarrow g(x) = g(y)$. Τότε υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $f : X/\sim \to Z$ η οποία κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X/\sim \arrow[r, dashed, "f"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Άμεσο από το παραπάνω είναι το ακόλουθο Θεώρημα, το οποίο κρίνεται ιδιαίτερα χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις.

**Θεώρημα 1.1.3.** *Έστω $X$ και $Z$ τοπολογικοί χώροι και $g : X \to Z$ απεικόνιση πηλίκο για την οποία ισχύει ότι και στο προηγούμενο Θεώρημα. Τότε η $f : X/\sim \to Z$ με τύπο $[x] \mapsto g(x)$ είναι ομοιομορφισμός.*

*Απόδειξη.* Είναι εμφανές ότι η απεικόνιση $f : X/\sim \to Z$ είναι ένα προς ένα και επί, ενώ η συνέχεια της εξασφαλίζεται από το προηγούμενο Θεώρημα.
Μένει να δείξουμε ότι είναι ανοιχτή. Όμως εάν επιλέξουμε $U$ ένα ανοιχτό υποσύνολο του $X/\sim$ τότε $g^{-1}f(U) = p^{-1}(U)$, το οποίο είναι ανοιχτό αφού η $p$ είναι συνεχής. Ως εκ τούτου $f(U)$ ανοιχτό, πράγμα που μας δίνει το ζητούμενο. □

**Ορισμός 1.1.4.** *Αν $X$ και $Y$ τοπολογικοί χώροι και $f_0, f_1$ δύο συνεχείς απεικονίσεις από τον $X$ στον $Y$, η $f_0$ θα καλείται **ομοτοπική** με την $f_1$, και θα συμβολίζουμε με $f_0 \simeq f_1$, εάν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times I \to Y$ με την ιδιότητα:*

$$H(x, 0) = f_0(x) \ \text{ και } \ H(x, 1) = f_1(x) \ \text{ για κάθε } x \in X.$$

*Μια τέτοια απεικόνιση καλείται **ομοτοπία**.*

Εάν θεωρήσουμε και πάλι δύο απεικονίσεις $f_0$ και $f_1 : X \to Y$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$f_0|_A = f_1|_A\,,$$

σε κάποιο υποσύνολο $A$ του $X$ και υπάρχει ομοτοπία $H : X \times I \to Y$ για την οποία ισχύει:

$$H(a, t) = f_0(a) = f_1(a) \text{ για κάθε } a \in A \text{ και } t \in I,$$

τότε αυτή καλείται **σχετική ομοτοπία (relative homotopy)**. Μπορεί δηλαδή να πει κανείς ότι μια ομοτοπία είναι πάντοτε σχετική εάν θεωρήσουμε ως $A = \varnothing$.

Η ομοτοπία ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των συνεχών απεικονίσεων δύο τοπολογικών χώρων. Με $[X, Y]$ θα συμβολίζουμε τις κλάσεις ομοτοπίας μεταξύ των τοπολογικών χώρων $X$ και $Y$. Κάποιες ομοτοπίες παίζουν ιδιαίτερο ρόλο όπως φαίνεται από τους επόμενους ορισμούς.

Στην βιβλιογραφία μια απεικόνιση με τις ιδιότητες του ορισμού 1.1.4. καλείται **ελεύθερη ομοτοπία (free homotopy)** ώστε να γίνεται σαφής διάκριση μεταξύ αυτής και της σχετικής ομοτοπίας.

**Ορισμός 1.1.5.** *Ένας υπόχωρος $X$ ενός τοπολογικού χώρου $Y$ καλείται* **ανάκληση (retract)** *του $Y$ εάν υπάρχει συνεχής απεικόνιση*

$$r : Y \to X,$$

*για την οποία ισχύει $r(x) = x$ για όλα τα $x \in X$. Μια τέτοια απεικόνιση καλείται* **ανάκληση (retraction)**.

**Παράδειγμα 1.1.6.** Θεωρούμε την $\mathbb{S}^{n-1} = \left\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 = 1\right\}$ και τον $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. Εάν ορίσουμε την απεικόνιση με τύπο:

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} &\to \mathbb{S}^{n-1} \\ \vec{x} &\mapsto \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \end{aligned}$$

παρατηρούμε ότι $r(\vec{x}) = \vec{x}$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$. Επομένως η $\mathbb{S}^{n-1}$ αποτελεί ανάκληση του $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.

**Ορισμός 1.1.7.** *Έστω $A$ υπόχωρος τοπολογικού χώρου $X$ και $i : A \hookrightarrow X$ η έγκλειση. Τότε ο $A$ καλείται* **ισχυρή ανάκληση (strong deformation retract)** *του $X$ εάν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times I \to X$ τέτοια ώστε:*

1. $H(x, 0) = x$ *για κάθε* $x \in X$,
2. $H(x, 1) \in A$ *για κάθε* $x \in X$,
3. $H(a, t) = a$ *για κάθε* $a \in A$ *και* $t \in I$.

**Παράδειγμα 1.1.8.** Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα θεωρούμε την $\mathbb{S}^{n-1}$ και τον $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. Εάν ορίσουμε ομοτοπία:

$$F : \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \times I \to \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\},$$

με τύπο

$$F(\vec{x}, t) = \left((1-t) + \frac{t}{\|\vec{x}\|}\right)\vec{x},$$

τότε παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται και οι τρεις προϋποθέσεις του παραπάνω ορισμού, αφού πράγματι:

1. $F(\vec{x}, 0) = \vec{x}$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$,
2. $F(\vec{x}, 1) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.
3. $F(\vec{x}, t) = \vec{x}$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ και $t \in I$.

Επομένως η $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι ισχυρή ανάκληση του $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.

**Ορισμός 1.1.9.** *Έστω $X$ και $Y$ δύο τοπολογικοί χώροι. Τότε συμβολίζουμε με $C(X, Y)$ το σύνολο όλων των συνεχών απεικονίσεων από τον $X$ στον $Y$, δηλαδή:*

$$C(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ συνεχής}\}.$$

**Πρόταση 1.1.10.** *Εάν $C$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $X$ και $U$ ένα ανοιχτό υποσύνολο του $Y$, ορίζουμε τα σύνολα:*

$$S(C, U) = \{f \mid f \in C(X, Y) \text{ και } f(C) \subset U\}.$$

*Τότε αυτά αποτελούν υποβάση για μια τοπολογία στον $C(X, Y)$, η οποία καλείται* **συμπαγής-ανοιχτή τοπολογία**.

*Απόδειξη.* Θέτουμε $\mathcal{C} = \{S(K, U) \mid K \subset X$ συμπαγές, $U \subset Y$ ανοιχτό$\}$. Τότε η συλλογή $\mathcal{C}$ ορίζει μια μοναδική βάση, $\mathcal{B}$, για κάποια τοπολογία στον $X$, τα στοιχεία της οποίας θα είναι τα εξής:

$$\mathcal{B} = \{\textstyle\bigcap_{i=1}^{n} S_i(K, U) \mid S_i(K, U) \in \mathcal{C}\}.$$

Η τελευταία πράγματι αποτελεί βάση για κάποια τοπολογία στον $C(X, Y)$ αφού από γνωστό κριτήριο γνωρίζουμε ότι μια συλλογή υποσυνόλων $\mathcal{B}$ του $C(X, Y)$ θα είναι βάση αν και μόνο αν:

1. $C(X, Y) = \cup\mathcal{B}$.
2. Εάν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ και $x \in B_1 \cap B_2$ τότε υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ με $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Όμως και τα δύο παραπάνω είναι άμεσα, συνεπώς η συλλογή $\mathcal{C}$ πράγματι ορίζει μια τοπολογία $\mathcal{T}$ στον $C(X, Y)$ κατά μοναδικό τρόπο, την οποία θα καλούμε συμπαγή-ανοιχτή τοπολογία. □

Μια εφαρμογή της παραπάνω τοπολογίας είναι η ακόλουθη όπου έχουμε θεωρήσει μια τροχιά

$$H : I \to C(X, Y),$$

η οποία θα συνδέει τις απεικονίσεις $H(0)$ και $H(1)$ της $C(X, Y)$. Δηλαδή μια τροχιά θα είναι μια ομοτοπία μεταξύ των συνεχών απεικονίσεων

$$H(0) : X \to Y \text{ και } H(1) : X \to Y.$$

Άρα οι τροχιές αυτού του χώρου μας δίνουν τις ομοτοπίες μεταξύ των αντίστοιχων απεικονίσεων. Το τελευταίο όμως σημαίνει ότι οι κλάσεις ομοτοπίας των τροχιών στον $C(X, Y)$ ταυτίζονται με τις κλάσεις ομοτοπίας $[X, Y]$.

Η τελευταία προτιμάται έναντι άλλων ως τοπολογία για τον χώρο $C(X, Y)$ στα πλαίσια της αλγεβρικής τοπολογίας καθ' ότι φέρει πολύ καλές ιδιότητες.

Ένας τοπολογικός χώρος $Y$ θα καλείται **τοπικά συμπαγής (locally compact)** εάν για κάθε $x \in Y$ και κάθε ανοιχτή περιοχή του $U \subset Y$ που περιέχει το $x$, υπάρχει συμπαγές υποσύνολο $W \subset Y$, για το οποίο $U \subset W$. Εάν θεωρήσουμε

$X$ και $Z$ τοπολογικούς χώρους, $Y$ έναν τοπικά συμπαγή χώρο Hausdorff και εφοδιάσουμε τον χώρο $C(Y, X)$ με την συμπαγή-ανοιχτή τοπολογία τότε ισχύει ότι: μια απεικόνιση $F : Z \times Y \to X$ είναι συνεχής αν και μόνο αν η απεικόνιση με τύπο:

$$\begin{aligned} \tilde{F} &: Z \to C(Y, X) \\ z &\mapsto \tilde{F}(z) = F_z \text{ (όπου : } F_z : y \mapsto F(z, y)), \end{aligned}$$

είναι συνεχής. Μια άλλη χρήσιμη εφαρμογή της συμπαγούς-ανοιχτής τοπολογίας έχει να κάνει με την συνέχεια της εκτιμήτριας απεικόνισης, δηλαδή της:

$$\begin{aligned} e &: C(Y, X) \times Y \to X \\ (f, y) &\mapsto e(f, y) = f(y), \end{aligned}$$

η οποία, επιπλέον, είναι και η ελάχιστη τοπολογία για την οποία η εκτιμήτρια γίνεται συνεχής, με την έννοια του ότι κάθε άλλη τοπολογία η οποία καθιστά την εκτιμήτρια συνεχή περιέχει την συμπαγή-ανοιχτή τοπολογία.

## 1.2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΗΣ ΟΜΑΔΑΣ

Εάν $X$ τοπολογικός χώρος και $f$ τυχούσα τροχιά από το σημείο $x_0$ στο $x_1$ και $g$ τροχιά από το $x_1$ στο $x_2$, ορίζουμε το «γινόμενο» $f * g$ να είναι η τροχιά $h$ η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$h(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{όταν } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1), & \text{όταν } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Η τελευταία είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Με την παραπάνω πράξη θεωρήσαμε την $h$ ως μια τροχιά από το σημείο $x_0$ στο $x_2$ όπου το πρώτο μισό της είναι η $f$ και το δεύτερο να είναι η $g$.

**Ορισμός 1.2.1.** *Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $x_0$ κάποιο στοιχείο του. Μια τροχιά στον $X$ η οποία έχει αρχή και τέλος το $x_0$ καλείται* **βρόγχος (loop)** *με* **βασικό σημείο (base point)** *το $x_0$.*
*Το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας των βρόγχων με βασικό σημείο το $x_0$ και πράξη την $*$, καλείται* **πρωταρχική ομάδα** *ή* **ομάδα του Poincare** *του $X$ ως προς το σημείο $x_0$. Την ομάδα αυτή θα την συμβολίζουμε με $\pi_1(X, x_0)$.*

**Παρατήρηση 1.2.2.** Ορίσαμε δηλαδή ως πρωταρχική ομάδα ενός χώρου $X$, το σύνολο:

$$\pi_1(X, x_0) = \{[f] \mid f : (I, \{0, 1\}) \to (X, x_0)\}$$

εφοδιασμένο με την πράξη που προαναφέραμε. Εδώ $[f]$ συμβολίζει τους ομοτοπικούς βρόχους.

**Παράδειγμα 1.2.3.** Εάν θεωρήσουμε ως $X = \mathbb{S}^1$ και βασικό σημείο το $x_0 = (1,0)$, τότε $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}$ . (Για την ολοκληρωμένη απόδειξη βλέπε στο [19].)

Η ομάδα αυτή καλείται πρώτη ομάδα ομοτοπίας του $X$, γεγονός που δηλώνει την ύπαρξη και άλλων ομάδων ομοτοπίας μεγαλύτερης τάξης. Έτσι κατ' αναλογία με την πρωταρχική ομάδα ενός χώρου, μπορούμε να ορίσουμε την $n$-οστή ομάδα ομοτοπίας του.

**Ορισμός 1.2.4.** *Έστω $X$ τοπολογικός χώρος και $x_0$ κάποιο στοιχείο του, ενώ ορίζουμε τον $n$-διάστατο κύβο $I^n = [0,1]^n$. Το σύνολο:*

$$\pi_n(X, x_0) = \big\{[f] \;\big|\; f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)\big\},$$

*με πράξη $*$:*

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s, s_2, \ldots, s_n), & \text{όταν } s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n), & \text{όταν } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

*αποτελεί ομάδα, την οποία καλούμε* $n$-**οστή ομάδα ομοτοπίας** *του $X$ στο σημείο $x_0$.*

**Παρατήρηση 1.2.5.** Λόγω του γνωστού ομοιομορφισμού $I^n/\partial I^n \approx \mathbb{S}^n$, ισοδύναμα μπορεί κανείς να ορίσει είτε την πρωταρχική ομάδα, είτε την $n$-οστή ομάδα ομοτοπίας ως:

$$\pi_n(X, x_0) = \big\{[f] \;\big|\; f : (\mathbb{S}^n, s_0) \to (X, x_0)\big\},$$

για τα διάφορα $n \in \mathbb{N}$.

Αναφέρουμε το επόμενο παράδειγμα χωρίς απόδειξη.

**Παράδειγμα 1.2.6.** Και πάλι εάν θεωρήσουμε ως $X = \mathbb{S}^1$ θα έχουμε:

$$\pi_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n = 1 \\ 0, & \text{όταν } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Ο υπολογισμός των ανώτερων ομοτοπικών ομάδων των σφαιρών $\mathbb{S}^m$ για $m > 1$ είναι ιδιαίτερα δύσκολος. Είναι γνωστές για συγκεκριμένες διαστάσεις και συγκεκριμένα εύρη.

Στην ενότητα αυτή θα δούμε την απόδειξη μιας ενδιαφέρουσας πρότασης, η οποία συνδέει τυχούσα ομάδα $G$ με την πρωταρχική ομάδα συγκεκριμένων χώρων και αποτελεί ειδική περίπτωση μιας πιο γενικής κατασκευής. Για την καλύτερη κατανόηση της απόδειξης θα παραθέσουμε ορισμένες προτάσεις και ορισμούς που θα μας φανούν χρήσιμοι στην συνέχεια.

**Ορισμός 1.2.7.** *Θα καλούμε* **κλειστό κέλυφος (closed cell)** *διάστασης n έναν τοπολογικό χώρο ομοιομορφικό με τον n-διάστατο δίσκο $D^n$, ενώ θα καλείται* **ανοιχτό κέλυφος (open cell)** *εάν είναι ομοιομορφικό με τον $\mathring{D}^n$. Θα σύμβολίζουμε ένα κλειστό $n$-κέλυφος με $e^n$ ενώ ένα ανοιχτό με $\mathring{e}^n$.*

**Παρατήρηση 1.2.8.** Εάν θεωρήσουμε τον μηδενοδιάστατο δίσκο $D^0$ τότε ένα 0-κέλυφος είναι ένα σημείο $e^0 = \{*\}$. Ενώ για $n = 1$ θα έχουμε ένα 1-κέλυφος ομοιομορφικό με το διάστημα $[-1, 1]$.

Για να κατασκευάσουμε τους χώρους που αναφέραμε παραπάνω, θα πρέπει να ορίσουμε μια βασική έννοια, αυτήν του σφηνοειδούς αθροίσματος **(wedge sum)**.

**Ορισμός 1.2.9.** *Ας είναι δύο τοπολογικοί χώροι X και Y στους οποίους επιλέξαμε τυχαία $x_0 \in X$ και $y_0 \in Y$, Το σφηνοειδές άθροισμα $X \vee Y$ ορίζεται ως το πηλίκο της ξένης ένωσης $X \coprod Y$ μετά την ταύτιση του $x_0$ και $y_0$ σε ένα σημείο. Όμοια μπορεί να ορίσει κανείς το σφηνοειδές άθροισμα σε αυθαίρετο πλήθος χώρων $\{X_a\}_{a\in A}$, ξεκινώντας με την ξένη ένωση $\coprod_{a\in A} X_a$ και κάνοντας ταύτιση στοιχείων $x_a \in X_a$ σε ένα μοναδικό.*

Και μετά τον τελευταίο ορισμό είμαστε σε θέση να αναφέρουμε μια γενίκευση ενός σημαντικού και γνωστού θεωρήματος του οποίου η απόδειξη οφείλεται στους Herbert Seifert και Egbert van Kampen.

**Θεώρημα 1.2.10. (Seifert-Van Kampen)** *Έστω X τοπολογικός χώρος ο οποίος μπορεί να γραφεί ως ένωση ανοιχτών και τροχιακά συνεκτικών υποσυνόλων του $A_a$, όπου a $\in I$, ώστε καθ' ένας να περιέχει το σημείο $x_0 \in X$. Εάν κάθε τομή $A_a \cap A_b$ είναι τροχιακά συνεκτική για κάθε a, b στο I, τότε ο ομομορφισμός $\Phi : \star_{a\in I}\pi_1(A_a) \to \pi_1(X)$ είναι επιμορφισμός. Εάν επιπλέον κάθε τομή $A_a \cap A_b \cap A_c$ είναι τροχιακά συνεκτικός χώρος, τότε ο πυρήνας της $\Phi$ είναι η κανονική υποομάδα $N$ που γεννάται απο στοιχεία της μορφης $i_{ab}(\omega)i_{ba}(\omega)^{-1}$ όπου $i_{ab} : \pi_1(A_a \cap A_b) \to \pi_1(A_a)$ και $i_{ba} : \pi_1(A_a \cap A_b) \to \pi_1(A_b)$. Επομένως η $\Phi$ επάγει ισομορφισμό:*

$$\pi_1(X) \approx \star_{a\in I}\pi_1(A_a)/N.$$

*Απόδειξη.* Βλέπε στο [11] στη σελίδα 44. □

Το παραπάνω Θεώρημα είναι πολύ σημαντικό για την αποδείξη της επόμενης πρότασης. Αφού πρώτα όμως θεωρήσουμε τον χώρο $\vee_{a\in I}S^1_a$ όπου έχουμε πάρει το σφηνοειδές άθροισμα τυχαίου πλήθους κύκλων σε ένα 0-κέλυφος $e^0$, το οποίο ανήκει στην $S^1_a$ για όλα τα $a \in I$.

Στο τελευταίο κεφάλαιο παραθέτουμε στοιχεία από τη θεωρία ομάδων τα οποία είναι απαραίτητα γιά τις αποδείξεις.

**Πρόταση 1.2.11.** *Η πρωταρχική ομάδα του χώρου $X = \vee_{a\in I}S^1_a, \pi_1(X, x_0)$, σε σημείο $x_0 \in S^1_a$ για όλα τα a $\in I$ είναι ισόμορφη με την ελεύθερη ομάδα πάνω από σύνολο $\{g_a \mid a \in I\}$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $a \in I$, έστω $U_a$ τυχαία ανοιχτή περιοχή του $x_0$ στην $S^1_a$ και $A_a = S^1_a \vee_{a\neq j} U_j$. Τότε κάθε $A_a$ είναι ανοιχτό και η τομή δύο η και παραπάνω μας δίνει $\vee_{a\in I}U_a$, το οποίο είναι τροχιακά συνεκτικό. Ακόμα καθε βρόγχος του $x_0$ στον $\vee_{a\in I}U_a$ είναι μια ισχυρή ανάκληση της σταθερής βρόγχου στο $x_0$. Έτσι από το Θεώρημα Seifert-Van Kampen τα $i_{\mathrm{ab}}(\omega)$ είναι τετριμμένα για κάθε βρόγχο $\omega \in \pi_1(A_a \cap A_b)$ επομένως $N = 0$. Συνεπώς η $\pi_1(X)$ είναι ισόμορφη με την $\star_{a\in I}\pi_1(A_a)$. Αλλά η $S^1_a$ είναι ισχυρή ανάκληση της $A_a$, έτσι $\pi_1(A_a) \approx \pi_1(S^1_a) \approx \mathbb{Z}$ και αυτό ισχύει για κάθε $a \in I$. Συνεπώς το ελεύθερο γινόμενό τους μας δίνει την ελεύθερη ομάδα με γεννήτορες τα στοιχεία $\langle g_a \,|\, a \in I \rangle$ που ήταν και το ζητούμενο. □

Τώρα είμαστε σε θέση να γενικεύσουμε την παραπάνω πρόταση 1.2.11 σε τυχούσα ομάδα με παράσταση $\langle g_a \,|\, r_b \rangle_{\alpha\in I\,,\,b\in J}$, όπου θέσαμε $A = \{g_a\}_{a\in I}$, $R = \{r_b\}_{b\in B}$.

**Θεώρημα 1.2.12.** *Κάθε ομάδα $G$ είναι ισόμορφη με την πρωταρχική ομάδα κάποιου τοπολογικού χώρου.*

*Απόδειξη.* Όπως και στην προηγούμενη θεωρούμε τον χώρο $X = \vee_{a\in I} S^1_a$ όπου έχουμε θεωρήσει έναν κύκλο σε κάποιο βασικό σημείο $x_0$, για κάθε γεννήτορα της τυχούσας ομάδας με παράσταση $G = \langle g_a \,|\, r_b \rangle_{\alpha\in I\,,\,b\in J}$. Τότε η ελεύθερη ομάδα που γεννάται από τους γεννήτορες της $G$ είναι ισόμορφη με την πρωταρχική ομάδα του $\vee_{a\in I} S^1_a$ όπως δείξαμε και στην Πρόταση 1.2.11. Ενώ για κάθε ομάδα γνωρίζουμε ότι ισχύει $G \approx F/N$, όπου $N$ η κανονική υποομάδα που γεννάται απο το σύνολο $\{r_b\}_{b\in J}$ στην $F$. Έτσι θεωρούμε τις απεικονίσεις $\phi_b : S^1_b \to X$ για να προσαρτήσουμε 2-κελύφη στον $X$ μια για κάθε σχέση $r_b$, με αποτέλεσμα να αποκτήσουμε ένα καινούργιο χώρο $Y = X \cup_{\phi_b} e^2_b$. Ο τελευταίος χώρος όμως είναι αυτός που θέλουμε να κατασκευάσουμε, αφού ο εγκλεισμός:

$$i : (X, x_0) \hookrightarrow (Y, x_0)\,,$$

επάγει επιμορφισμό ομάδων:

$$i_* : \pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(Y, x_0)\,.$$

Πράγματι εάν θεωρήσουμε απεικόνιση $\phi_b : S^1_a \to Y$ για να προσαρτήσουμε κελύφη, ένα για κάθε σχέση στην παράσταση της ομάδας, τότε η εικόνα αυτής παριστάνει ένα βρόγχο στον $X$ πρίν από την προσάρτηση του κελύφους με βασικό σημείο τυχαίο $x_1 \in X$. Έτσι εφ' όσον ο $X$ είναι τροχιακά συνεκτικός θεωρούμε τροχιά $\omega$ από το $x_0$ στο $x_1$ και θεωρούμε τον βρόγχο $\omega\,\phi_b\,\omega^{-1}$ με βασικό σημείο το $x_0$. Η τελευταία πρίν την προσάρτηση του κελύφους μέσω της $\phi_b$ στον χώρο $X$ δεν είναι τετριμμένη, έπειτα απο την προσάρτηση όμως θα έχουμε $\omega\,\phi_b\,\omega^{-1} \cong c_{x_0}$. Συνεπώς θεωρούμε την κανονική υποομάδα $N$ της $\pi_1(X, x_0)$ η οποία γεννάται απο το σύνολο:

$$\{\,\omega\,\phi_b\,\omega^{-1} |\, b \in J\,\},$$

και είναι ο πυρήνας του επιμορφισμού. Έτσι από το πρώτο Θεώρημα ισομορφισμών θα έχουμε:

$$\pi_1(X, x_0)/N \approx \pi_1(Y, x_0)\,,$$

πράγμα που μας δίνει τον ζητούμενο ισομορφισμό:

$$G \approx \pi_1(Y, x_0)\,.$$

□

## 1.3 SINGULAR ΟΜΟΛΟΓΙΑ

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε βασικές έννοιες σχετικές με τη Singular ομολογία.

Αρχικά θα υπενθυμίσουμε ότι ένα υποσύνολο $C$ του $\mathbb{R}^n$ είναι κυρτό αν για οποιαδήποτε $x, y \in C$ το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει ανήκει εξ' ολοκλήρου στο $C$. Λέγοντας ευθύγραμμο τμήμα εννοούμε το σύνολο της μορφής:

$$\big\{(1-t)\,x + ty \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\big\}.$$

Αποδεικνύεται ότι η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο. Έτσι αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζουμε **κυρτή θήκη** του $A$ και συμβολίζουμε με $(A)$, την τομή όλων των κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το $A$.
Έτσι μπορούμε να ορίσουμε το $p$-simplex στον $\mathbb{R}^n$ ως εξής για $p \leqslant n$:

**Ορισμός 1.3.1.** *Έστωσν τα $p+1$ σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_p$ του $\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε τα διανύσματα $x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ορίζουμε ως $p$-***simplex** *στον $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζουμε με $s$, την κυρτή θήκη του συνόλου των σημείων $x_0, x_1, \ldots, x_p$. Τα σημεία $x_i$ λέγονται* **κορυφές** *του $s$. Εδώ $p \leqslant n+1$.*

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε δύο προτάσεις χωρίς απόδειξη ώστε να μπορέσουμε να ορίσουμε τη μορφή που θα έχουν τα στοιχεία του συνόλου που ορίστηκε προηγουμένως.

**Πρόταση 1.3.2.** *Έστω $\{x_0, \ldots, x_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$.Τα επόμενα δύο είναι ισοδύναμα:*

1. *τα διανύσματα $x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα,*
2. *εαν $\sum_{i=0}^{p} s_i x_i = \sum_{i=0}^{p} t_i x_i$ και $\sum_{i=0}^{p} s_i = \sum_{i=0}^{p} t_i = 1$,*
   *τότε $s_i = t_i$ για $i = 0, \ldots, p$.*

**Πρόταση 1.3.3.** *Ισχύει ότι:*

$$\big(\{x_0, \ldots, x_p\}\big) = \left\{ \sum_{i=0}^{p} t_i x_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{p} t_i = 1,\, t_i \geqslant 0,\, \forall i \right\}.$$

**Ορισμός 1.3.4.** *Τα διατεταγμένα σημεία $\{x_0, x_1, \ldots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$ καλούνται* **αφφινικά ανεξάρτητα***, αν και μόνο αν τα $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_p - x_0\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

**Ορισμός 1.3.5.** *Έστω $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ αφφινικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε η κυρτή θήκη αυτού $\big(\{x_0, \ldots, x_m\}\big)$ είναι $m$-***simplex** *με κορυφές τα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_m$.*

**Παρατήρηση 1.3.6.** Εάν με $\Delta^m$ συμβολίσουμε ένα τυχαίο $m$-simplex με κορυφές τα σημεία $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ στον $\mathbb{R}^n$, τότε αυτό έχει την εξής περιγραφή:

$$\Delta^m = \left\{ x = \sum_{i=0}^{m} t_i x_i \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=0}^{m} t_i = 1 \;\text{ και }\; t_i \geqslant 0,\; \forall\, i = 0, 1, \ldots, m \right\},$$

όπου τα $\{t_i\}_{i=0}^m$ καλούνται **βαρυκεντρικές συντεταγμένες** του σημείου $x$. (Για την απόδειξη βλέπε στο [15] στην σελίδα 36.)

Σύμφωνα με τις δύο παραπάνω προτάσεις προκύπτει ότι ένα $p$-simplex στον $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο που αποτελείται από στοιχεία της μορφής $\sum_{i=0}^{p} t_i x_i$ με $\sum t_i = 1$ και $t_i \geqslant 0$ , $\forall i$, κι ότι για καθένα από αυτά η αναπαράσταση αυτή είναι μοναδική. Τα σημεία $x_i$ λέγονται κορυφές του $s$. Σύμφωνα με τα παραπάνω κάθε σημείο του $s$ θα αντιστοιχίζεται σε μια $(p+1)$-άδα $(t_0, \ldots, t_p)$, τα στοιχεία της οποίας λέγονται συντεταγμένες του σημείου αυτού.
Εάν στις ακμές του $s$ δώσουμε μια διάταξη, έτσι ώστε κάθε ακμή $[x_i, x_j]$ να έχει θετική φορά αν ο δεξιός δείκτης είναι μεγαλύτερος από τον αριστερό και αρνητική όταν ισχύει το αντίστροφο, τότε το $s$ ονομάζεται διατεταγμένο simplex και μπορούμε να ορίσουμε το εξής:

**Ορισμός 1.3.7.** *Θα καλούμε* **κανονικό p-simplex** *το σύνολο:*

$$\sigma^p = \left\{ (t_0, t_1, \ldots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{p} t_i = 1 \;\textit{ και }\; t_i \geqslant 0,\; \forall i = 0, 1, \ldots, p \right\},$$

*εκείνο το $p$-simplex δηλαδή με κορυφές την κανονική βάση του $\mathbb{R}^{p+1}$.*

**Λήμμα 1.3.8.** *Το κανονικό $p$-simplex είναι ισοδύναμο με το σύνολο:*

$$\left\{ (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p) \mid 0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_p \leqslant 1 \right\}.$$

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό του κανονικού $p$-simplex, γνωρίζουμε ότι έχει περιγραφή:

$$\sigma^p = \left\{ (t_0, t_1, \ldots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{p} t_i = 1 \;\text{ και }\; t_i \geqslant 0,\, \forall\, i = 0, 1, \ldots, p \right\}.$$

Θέτουμε $\tau_i = t_0 + t_1 + \ldots + t_{i-1}$, το οποίο μας ορίζει απεικόνιση από τις βαρύκεντρες συντεταγμένες του simplex σ' αυτές του λήμματος. Αντίστροφα, εάν μας δίνονται:

$$0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_p \leqslant 1,$$

ορίζουμε $t_0 = \tau_1$ , $t_{i-1} = \tau_i - \tau_{i-1}$ όπου $1 < i < p$ και $t_p = 1 - \tau_p$. Αυτό μας δίνει την αντίστροφη απεικόνιση και ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. □

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f\colon \sigma_p \to s$ με $f(t_0, \ldots, t_p) = \sum_{i=0}^{p} t_i x_i$ τότε η $f$ είναι συνεχής, καλά ορισμένη και αφού τα $\sigma_p$ και $s$ είναι συμπαγείς χώροι Hausdorff επάγεται ότι η $f$ είναι ομοιομορφισμός.

**Ορισμός 1.3.9.** *Έστω ο τοπολογικός χώρος $X$. Ορίζουμε ως* **singular $p$-simplex** *στον $X$, μια συνεχή απεικόνιση $\phi : \sigma_p \to X$.*

**Παράδειγμα 1.3.10.**

1. Τα singular 0-simplices είναι τα σημεία του $X$.
2. Τα singular 1-simplices είναι οι τροχιές του $X$.

**Ορισμός 1.3.11.** *Έστω $\phi$ ένα singular $p$-simplex και $i \in \mathbb{Z}$ με $0 \leqslant i \leqslant p$. Ορίζουμε ως $i$* **όψη** *του $\phi$ και το συμβολίζουμε με $\vartheta^i(\phi)$. Αυτό δίνεται από το singular $(p-1)$-simplex στον $X$ :*

$$\vartheta^i(\phi)(t_0, \ldots, t_{p-1}) = \phi(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{p-1}).$$

**Ορισμός 1.3.12.** *Έστω $f : X \to Y$ μια συνεχής συνάρτηση και $\phi$ ένα singular $p$-simplex στον $X$. Μπορούμε να ορίσουμε ως* **singular $p$-simplex στον** *$Y$ και να το συμβολίσουμε με $f_\sharp(\phi)$ τη συνεχή απεικόνιση $f_\sharp(\phi) = f \circ \phi$.*

**Ορισμός 1.3.13.** *Μια αβελιανή ομάδα $G$ θα ονομάζεται* **ελεύθερη αβελιανή** *αν υπάρχει ένα υποσύνολο $A$ της $G$ τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο $g$ της $G$ να γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $g = \sum_{x \in A} n_x \cdot x$ όπου $n_x \in \mathbb{Z}$ και μόνο πεπερασμένο πλήθος απ' αυτούς είναι μη μηδενικοί. Το σύνολο $A$ λέγεται* **βάση** *της $G$. (Βλέπε ορισμό 1.2.9.)*

**Ορισμός 1.3.14.** *Έστω τοπολογικός χώρος $X$. Η ελεύθερη αβελιανή ομάδα που έχει ως βάση όλα τα singular $n$-simplices στον $X$ συμβολίζεται με $S_n(X)$. Κάθε στοιχείο της $S_n(X)$ θα έχει τη μορφή $\sum_\phi n_\phi \cdot \phi$ όπου $n_\phi \neq 0$ μόνο για πεπερασμένο πλήθος simplices και ονομάζεται* **singular $n$-chain** *- αλυσίδα στον $X$.*

Την $i$-οστή όψη ενός singular $p$-simplex $\phi$, όπως ορίστηκε προηγουμένως, μπορούμε να την επεκτείνουμε σε έναν ομομορφισμό ομάδων:

$$\vartheta_n^i : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$$

με τύπο:

$$\vartheta_n^i\left(\sum n_\phi \cdot \phi\right) = \sum n_\phi \cdot \vartheta_n^i(\phi).$$

Έτσι προκύπτει ο ομομορφισμός

$$\vartheta_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$$

με τύπο

$$\begin{aligned} \vartheta_n &= \vartheta_n^0 - \vartheta_n^1 + \ldots + (-1)^n \vartheta_n^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \vartheta_n^i \end{aligned}$$

ο οποίος καλείται **συνοριακός τελεστής**.

**Πρόταση 1.3.15.** *Η σύνθεση $\vartheta_{n-1} \circ \vartheta_n$ στην ακολουθία*

$$\cdots \xrightarrow{\vartheta_n} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\vartheta_{n-1}} S_{n-2}(X) \xrightarrow{\vartheta_{n-2}} \cdots$$

*είναι μηδενική.*

*Απόδειξη.* Έστω ένα singular $(n-1)$-simplex $\phi$ στην $S_{n-1}(X)$. Θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&(\vartheta_{n-1} \circ \vartheta_n)(\phi)(t_0, \ldots, t_{n-1}) = \\
&\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \vartheta_n(\phi)(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}) = \\
&\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \Bigg[\sum_{j<i}(-1)^j(\phi)(t_0, \ldots, t_{j-1}, 0, t_j, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}) + \\
&\sum_{i<j}(-1)^{j-1}(\phi)(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{j-1}, 0, t_j, \ldots, t_{n-1})\Bigg] = \\
&\sum_{i=0}^{n}\sum_{j<i}(-1)^{i+j}(\phi)(t_0, \ldots, t_{j-1}, 0, t_j, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}) + \\
&\sum_{i=0}^{n}\sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}(\phi)(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{j-1}, 0, t_j, \ldots, t_{n-1}).
\end{aligned}$$

Στο πρώτο άθροισμα θέτουμε $j = k$ και στο δεύτερο $j = k + 1$ και προκύπτει

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}\sum_{k<i}(-1)^{i+k}(\phi)(t_0, \ldots, t_{k-1}, 0, t_k, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}) + \\
&\sum_{i=0}^{n}\sum_{i<k+1}(-1)^{i+k}(\phi)(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_k, 0, t_{k+1}, \ldots, t_{n-1}) = 0.
\end{aligned}$$

□

Η παραπάνω πρόταση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το σύνορο κάθε $n$-αλυσίδας είναι μια $(n-1)$-αλυσίδα.

**Ορισμός 1.3.16.** *Ένα στοιχείο $c \in S_n(X)$ θα καλείται $n$-**κύκλος**, αν $\vartheta_n(c) = 0$. Ένα στοιχείο $d \in S_n(X)$ θα καλείται $n$-**σύνορο**, αν $d = \vartheta_{n+1}(e)$ για κάποιο $e \in S_{n+1}(X)$.*

**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ**

- $Z_n(X) = \mathsf{ker}(\vartheta_n) \leqslant S_n(X)$.
- $B_n(X) = \mathsf{Im}(\vartheta_{n+1}) \leqslant S_n(X)$.

Προφανώς, λόγω της Πρότασης 1.4.15 θα ισχύει ότι $B_n(X) \leqslant Z_n(X)$.

**Ορισμός 1.3.17.** *Η ομάδα πηλίκο: $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ που ορίζεται σύμφωνα με τα παραπάνω ονομάζεται $n$*-**οστή singular ομολογιακή ομάδα** *του $X$.*

**Ορισμός 1.3.18.** *Ονομάζουμε* **βαθμωτή αβελιανή ομάδα** *$G$ μια συλλογή $\{G_i \mid i \in Z\}$, όπου $G_i$ αβελιανές ομάδες κι ορίζουμε ως πράξη την αντίστοιχη πράξη των $G_i$ κατά συντεταγμένες.*
*Μια υποομάδα $H$ μιας βαθμωτής ομάδας $G$ είναι μια βαθμωτή ομάδα $\{H_i\}$, όπου $H_i$ είναι υποομάδες των $G_i$. Η αντίστοιχη ομάδα πηλίκο $G/H$ θα είναι η βαθμωτή ομάδα $\{G_i/H_i\}$.*

**Ορισμός 1.3.19.** *Έστωσαν δύο βαθμωτές ομάδες $G$ και $G'$. Ένας ομομορφισμός $f : G \to G'$, μεταξύ τους, είναι μια συλλογή ομομορφισμών $\{f_i\}_{i\in Z}$ όπου $f_i : G_i \to G'_{i+r}$ για κάποιο σταθερό ακέραιο $r$ ο οποίος ονομάζεται* **βαθμός** *της απεικόνισης $f$.*

**Ορισμός 1.3.20.** *Ορίζουμε ως* **αλυσιδωτό πολύπλοκο (chain complex)**, *μια ακολουθία αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών*

$$\cdots \xrightarrow{\vartheta_{n+1}} C_n \xrightarrow{\vartheta_n} C_{n-1} \xrightarrow{\vartheta_{n-1}} \cdots$$

*ώστε $\vartheta_n\vartheta_{n+1} = 0$ για κάθε $n \geqslant 1$.*

Σύμφωνα με τα παραπάνω ένα αλυσιδωτό πολύπλοκο είναι μια βαθμωτή ομάδα $C = \{C_i\}$ με έναν ομομορφισμό $\vartheta : C \to C$ βαθμού $-1$, αφού

$$\cdots \xrightarrow{\vartheta_{n+1}} C_n \xrightarrow{\vartheta_n} C_{n-1} \xrightarrow{\vartheta_{n-1}} \cdots$$

ώστε $\vartheta_n\vartheta_{n+1} = 0$ για κάθε $n \geqslant 1$.
Έστω $C$ και $C'$ αλυσιδωτά πολύπλοκα με συνοριακές συναρτήσεις τις $\vartheta$ και $\vartheta'$ αντίστοιχα. Κάθε αλυσιδωτή απεικόνιση $\Phi : C \to C'$ τέτοια ώστε

$$\vartheta' \circ \Phi_n = \Phi_{n-1} \circ \vartheta,\ n \geqslant 1$$

είναι ένας ομομορφισμός βαθμού 0 και θα ονομάζεται **αλυσιδωτή απεικόνιση**. Τον πυρήνα και την εικόνα στην παραπάνω συλλογή ομομορφισμών $\{\vartheta_i\}$ τα συμβολίζουμε με $Z_*(C)$ και $B_*(C)$ αντίστοιχα, ενώ η ομολογία της $C$ θα είναι η βαθμωτή ομάδα $H_*(C) = Z_*(C)/B_*(C)$.

Έστω $\Phi : C \to C'$ μια αλυσιδωτή απεικόνιση. Τότε:

$$\Phi(Z_*(C)) \subseteq Z_*(C')$$

και $\Phi(B_*(C)) \subseteq B_*(C')$. Δηλαδή η $\Phi$ επάγει τον ομομορφισμό

$$\Phi_* : H_*(C) \to H_*(C').$$

Συνεπώς η βαθμωτή ομάδα $S_*(X) = \{S_i(X)\}$ είναι ένα αλυσιδωτό πολύπλοκο υπό τη συνοριακή απεικόνιση $\vartheta$. Έτσι η ομολογιακή ομάδα του $X$ είναι η ομολογιακή ομάδα της $S_*(X)$.

Έστωσαν οι τοπολογικοί χώροι $X$ και $Y$, μια συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα singular $n$-simplex στον $Y$, το $f_\sharp(\phi) = f \circ \phi$. Έτσι έχουμε τον ομομορφισμό ομάδων

$$f_\sharp : S_n(X) \to S_n(Y)$$

για κάθε $n$.

**ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ:** Η απεικόνιση $f_\sharp : S_n(X) \to S_n(Y)$ είναι μια αλυσιδωτή απεικόνιση.

*Απόδειξη.* Αρκεί να αποδείξουμε ότι το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
S_n(X) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[d, "\vartheta"'] & S_n(Y) \arrow[d, "\vartheta"] \\
S_{n-1}(X) \arrow[r, "f_\sharp"] & S_{n-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.
Πράγματι, για τα singular $n$-simplices έχουμε:

$$f_\sharp \vartheta_i(\phi)(t_0, \ldots, t_{n-1}) = f(\phi(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}))$$

και

$$\begin{aligned}
\vartheta_i f_\sharp(\phi)(t_0, \ldots, t_{n-1}) &= f_\sharp(\phi)(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}) \\
&= f(\phi(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i \ldots, t_{n-1})),
\end{aligned}$$

δηλαδή $\vartheta_i f_\sharp(\phi) = f_\sharp \vartheta_i(\phi)$. Άρα η $f_\sharp$ αντιμετατίθεται με το σύνορο οπότε $f_\sharp(\ker \vartheta) \subseteq \ker \vartheta$ και $f_\sharp(\operatorname{Im} \vartheta) \subseteq \operatorname{Im} \vartheta$.
Τελικά επάγεται ο ομομορφισμός $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ βαθμού 0. □

**Παράδειγμα 1.3.21.** Έστω ότι $X = \{x_0\}$, δηλαδή ο $X$ είναι ένα μόνο σημείο. Τότε για κάθε $p > 0$ θα υπάρχει ακριβώς μια συνεχής συνάρτηση $\phi : \sigma_p \to X$, η σταθερή, και θα ισχύει ότι

$$\partial^i \phi_p = \phi_{p-1}.$$

Η αντίστοιχη συνοριακή απεικόνιση θα είναι η

$$\begin{aligned}
\vartheta_p \phi_p &= \vartheta^0 \phi_p - \vartheta^1 \phi_p + \ldots + (-1)^p \vartheta^p \phi_p \\
&= \phi_{p-1} - \phi_{p-1} + \ldots + (-1)^p \phi_{p-1} \\
&= \begin{cases} \phi_{p-1}\,, & \text{αν } p \text{ άρτιος} \\ 0\,, & \text{αν } p \text{ περιττός.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Έτσι προκύπτει το αλυσιδωτό πολύπλοκο

$$\cdots \longrightarrow S_{2n+1}(X) \xrightarrow{0} S_{2n}(X) \xrightarrow{\mathsf{id}} S_{2n-1}(X) \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{\mathsf{id}} S_1(X) \xrightarrow{0} S_0(X) \xrightarrow{0} 0 \quad \text{και}$$

η αντίστοιχη ομολογία θα είναι

$$\begin{aligned} H_{2n}(X) &= \frac{\mathsf{ker}(\mathsf{id})}{\mathsf{Im}(0)} = 0, \\ H_{2n-1}(X) &= \frac{\mathsf{ker}(0)}{\mathsf{Im}(\mathsf{id})} = \frac{S_{2n-1}(X)}{S_{2n-1}(X)} = 0, \\ H_0(X) &= \frac{\mathsf{ker}(0)}{\mathsf{Im}(0)} = \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}\,, & \text{αν } k = 0 \\ 0\,, & \text{αν } k > 0 \end{cases}.$$

**Πρόταση 1.3.22.** *Εάν $X$ είναι ένας μη κενός τροχιακά συνεκτικός τοπολογικός χώρος, τότε $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $X$ τροχιακά συνεκτικός τοπολογικός χώρος και το παρακάτω τμήμα του αντίστοιχου αλυσιδωτού πολυπλόκου:

$$S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{0} 0\,.$$

Προφανώς $S_0(X) = Z_0(X)$, δηλαδή η ελεύθερη αβελιανή ομάδα με γεννήτορες τα σημεία του $X$. Έτσι κάθε στοιχείο $y \in S_0(X)$ θα έχει την μορφή $y = \sum n_x \cdot x$, για πεπερασμένο πλήθος ακεραίων $n_x$.

Από την άλλη, η $S_1(X)$ είναι η ελεύθερη αβελιανή ομάδα με γεννήτορες τις τροχιές στον $X$, οπότε αν $v_0$ και $v_1$ τα άκρα του $\sigma_1$ και $\phi$ ένα singular 1-simplex στον $X$, τότε

$$\partial_1 \phi = \phi(v_1) - \phi(v_0) \in Z_0(X).$$

Έστω η απεικόνιση $\alpha : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ με τύπο

$$\alpha\big(\sum n_x \cdot x\big) = \sum n_x.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $B_0(X) = \mathsf{ker}\,\alpha$. Παρατηρούμε ότι

$$\alpha(\partial_1 \phi) = \alpha\big(\phi(v_1) - \phi(v_0)\big) = 1 - 1 = 0,$$

δηλαδή $\mathsf{Im}\,\partial_1 \subseteq \mathsf{ker}\,\alpha$.

Αντίστροφα, ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k \in \mathsf{ker}\,\alpha$ και $x_0$ ένα βασικό στοιχείο στο $X$. Αφού ο $X$ είναι τροχιακά συνεκτικός, για κάθε $i$, θα υπάρχει ένα singular 1-simplex $\phi_i$ στον $X$ τέτοιο ώστε $\partial^0(\phi_i) = x_i$ και $\partial^1(\phi_i) = x_0$. Θεωρούμε την singular 1-αλυσίδα $\sum n_i\phi_i$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\partial_1\big(\sum n_i\phi_i\big) &= \sum n_i\partial_1\phi_i\\ &= \sum n_i\big(\partial_1^0(\phi_i) - \partial_1^1(\phi_i)\big)\\ &= \sum n_i x_i - \sum n_i \cdot x_0.\end{aligned}$$

Όμως $\sum n_i x_i \in \ker\alpha \quad\Rightarrow\quad \sum n_i = 0$, άρα $\partial\big(\sum n_i\phi_i\big) = \sum n_i x_i$, δηλαδή ένα στοιχείο του $\ker\alpha$ είναι το σύνορο μιας 1-αλυσίδας της $S_1(X)$, που σημαίνει ότι $\ker\alpha \subseteq B_0(X)$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Έστω ένα σύνολο δεικτών $A$ και κάποιο στοιχείο $\alpha \in A$. Τότε έχουμε το αλυσιδωτό πολύπλοκο

$$\cdots \xrightarrow{\vartheta^\alpha} C_p^\alpha \xrightarrow{\vartheta^\alpha} C_{p-1}^\alpha \xrightarrow{\vartheta^\alpha} \cdots$$

Μπορούμε να ορίσουμε το αλυσιδωτό πολύπλοκο $\sum_{\alpha\in A} C^\alpha$ με $(\sum C^\alpha)_p = \sum C_p^\alpha$ και $\vartheta(c_\alpha : \alpha \in A) = (\vartheta^\alpha c_\alpha : a \in A)$.

**Λήμμα 1.3.23.** $H_\kappa(\sum C^\alpha) \approx \sum_\alpha H_\kappa(C^\alpha)$.

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό του αλυσιδωτού πολυπλόκου $\sum C^\alpha$ έχουμε ότι $Z_\kappa(\sum C^\alpha) = \sum_\alpha Z_\kappa(C^\alpha)$ και $B_\kappa(\sum C^\alpha) = \sum_\alpha B_\kappa(C^\alpha)$, οπότε η $\kappa$-στή ομολογιακή ομάδα θα είναι

$$\begin{aligned}H_\kappa(\textstyle\sum C^\alpha) &= Z_\kappa(\textstyle\sum C^\alpha)\Big/B_\kappa(\textstyle\sum C^\alpha)\\ &= \sum_\alpha Z_\kappa(C^\alpha)\Big/\sum_\alpha B_\kappa(C^\alpha)\\ &\approx \sum_\alpha \Big(Z_\kappa(C^\alpha)/B_\kappa(C^\alpha)\Big)\\ &= \sum_\alpha H_\kappa(C^\alpha).\end{aligned}$$

□

**Ορισμός 1.3.24.** *Σε τυχαίο τοπολογικό χώρο $X$ ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής: Για δύο στοιχεία $x, y \in X$ ισχύει $x \sim y$, αν και μόνο αν υπάρχει μια τροχιά στον $X$ που συνδέει το $x$ με το $y$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας στις οποίες διαμερίζεται ο $X$ σε λέγονται* **τροχιακές συνιστώσες** *του $X$.*

**Πρόταση 1.3.25.** *Έστω ένας τοπολογικός χώρος $X$ και $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ οι συνεκτικές συνιστώσες του $X$ υπό τη σχέση ισοδυναμίας που ορίστηκε προηγουμένως. Τότε*

$$H_\kappa(X) \approx \sum_{\alpha\in A} H_\kappa(X_\alpha).$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τον ομομορφισμό ομάδων

$$\Psi : \sum_{\alpha\in A} S_\kappa(X_\alpha) \to S_\kappa(X)$$

με τύπο

$$\Psi\Big(\big(\sum_{\phi_\alpha} n_{\phi,\alpha}\cdot\phi_\alpha\big)\ :\ \alpha\in A\Big) = \sum_{\alpha\in A}\Big(\sum_{\phi_\alpha} n_{\phi,\alpha}\cdot\phi_\alpha\Big).$$

Αφού οι ομάδες, των οποίων τις πράξεις διατηρεί η $\Psi$, είναι ελεύθερες αβελιανές, έπεται ότι η $\Psi$ είναι μονομορφισμός.
Έστω $\phi : \sigma_\kappa \to X$ ένα singular $\kappa$-simplex στον $X$. Αφού η $\phi$ είναι συνεχής και το $\sigma_\kappa$ είναι τροχιακά συνεκτικό, έπεται ότι και το $\phi(\sigma_\kappa)$ είναι τροχιακά συνεκτικό, οπότε θα ανήκει εξ ολοκλήρου σε μια τροχιακήκή συνιστώσα $X_\alpha$.
Έτσι κάθε $\phi\in S_\kappa(X)$ σχετίζεται με ένα μοναδικό τέτοιο $\phi_\alpha \in S_\kappa(X_\alpha)$ ώστε $\Psi(\phi_\alpha) = \phi$, δηλαδή η $\Psi$ είναι επιμορφισμός.
Επομένως η $\Psi$ είναι ισομορφισμός, για κάθε $\kappa$.
Επίσης η $\Psi$ είναι μια αλυσιδωτή απεικόνιση μεταξύ αλυσιδωτών πολυπλόκων, τέτοια ώστε

$$H_\kappa(X) \approx H_\kappa\big(\sum_{\alpha\in A} S_*(X_\alpha)\big)$$

και σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.23 θα ισχύει

$$H_\kappa\big(\sum_{\alpha\in A} S_*(X_\alpha)\big) \approx \sum_{\alpha\in A} H_\kappa(X_\alpha).$$

□

**Θεώρημα 1.3.26.** *Έστω $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός. Τότε η απεικόνιση $f_* : H_p(X) \to H_p(Y)$ είναι ένας ισομορφισμός για κάθε $p$.*

*Απόδειξη.* Αφού η $f$ είναι ομομορφισμός θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{H_*(X)} &= (\mathrm{id}_X)_*\\ &= (f\circ f^{-1})_*\\ &= f_*\circ f_*^{-1}.\end{aligned}$$

Ισχύει και το ανάποδο. Άρα η $f_*$ είναι ισομορφισμός. □

**Θεώρημα 1.3.27.** *Έστω $X$ ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε θα ισχύει ότι $H_p(X) = 0$ για κάθε $p$.*

*Απόδειξη.* Έστω $X \neq \varnothing$, ένα $x\in X$ και $\phi : \sigma_p \to X$ ένα singular $p$-simplex στον $X$, με $p \geqslant 0$.
Μπορούμε να ορίσουμε ένα singular $(p+1)$-simplex $\theta$, στον $X$ ως εξής:

$$\theta\colon \sigma_{p+1} \to X,$$

με

$$\theta(t_0,t_1,\ldots,t_{p+1}) = \begin{cases}(1-t_0)\,\phi\big(\frac{t_1}{1-t_0},\ldots,\frac{t_{p+1}}{1-t_0}\big) + t_0\,x\,, & \text{για } t_0<1\\ x\,, & \text{για } t_0 = 1\end{cases}.$$

Δηλαδή θέτουμε

$$\theta(0, t_1, \ldots, t_{p+1}) = \phi(t_1, \ldots, t_{p+1}) \text{ και } \theta(1, 0, \ldots, 0) = x.$$

Η $\theta$ είναι καλά ορισμένη. Επειδή το $\sigma_{p+1}$ είναι κυρτό υπάρχουν ευθύγραμμα τμήματα του $\sigma_{p+1}$ από το $t_0$ στην απέναντι από το $t_0$ όψη, τα οποία αντιστοιχίζονται με γραμμικό τρόπο σε αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα του $X$, αφού και το το $X$ είναι κυρτό.

Από τον ορισμό της η $\theta$ είναι συνεχής εκτός ίσως από το $(1, 0, \ldots, 0)$. Για να είναι συνεχής σε αυτό το σημείο πρέπει

$$\lim_{t_0 \to 1} \left\| \theta(t_0, t_1, \ldots, t_{p+1}) - x \right\| = 0.$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} &\lim_{t_0 \to 1} \left\| \theta(t_0, t_1, \ldots, t_{p+1}) - x \right\| \\ &\quad = \lim_{t_0 \to 1} \left\| (1 - t_0)\, \phi\big(\tfrac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \tfrac{t_{p+1}}{1-t_0}\big) - (1 - t_0)\, x \right\| \\ &\quad \leqslant \lim_{t_0 \to 1} (1 - t_0) \left( \left\| \phi\big(\tfrac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \tfrac{t_{p+1}}{1-t_0}\big) \right\| + \|x\| \right). \end{aligned}$$

Επειδή το $\sigma_p$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathcal{R}^n$ και η $\phi$ συνεχής, έπεται ότι το $\phi(\sigma_p)$ είναι συμπαγές, άρα και φραγμένο. Επίσης το $X$, ως κυρτό σύνολο, είναι φραγμένο. Συνεπώς το $\left\| \phi\big(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{p+1}}{1-t_0}\big) \right\| + \|x\|$ είναι φραγμένο. Έτσι, αφού $\lim_{t_0 \to 1}(1 - t_0) = 0$, το τελευταίο όριο ισούται με $0$ και, συνεπώς, η $\theta$ είναι συνεχής και στο $(1, 0, \ldots, 0)$.

Είναι φανερό, εκ κατασκευής, ότι $\partial(\theta) = \phi$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, σε κάθε singular $k$-simplex $\kappa \geqslant 0$, μπορούμε να επεκτείνουμε μοναδικά το $\theta$ σε έναν ομομορφισμό

$$T : S_k(X) \to S_{k+1}(X),$$

τέτοιον ώστε $\partial^0 \circ T = \mathsf{id}$ και

$$\begin{aligned} \partial^i\big(T(\phi)\big)(t_0, \ldots, t_k) &= T(\phi)(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_k) \\ &= (1 - t_0)\, \phi\big(\tfrac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \tfrac{t_{i-1}}{1-t_0}, 0, \tfrac{t_i}{1-t_0} \ldots, \tfrac{t_k}{1-t_0}\big) + t_0\, x. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} T\big(\partial^{i-1}(\phi)\big)(t_0, \ldots, t_k) &= (1 - t_0) \left( \partial^{i-1}\phi\big(\tfrac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \tfrac{t_i}{1-t_0} \ldots, \tfrac{t_k}{1-t_0}\big) + t_0\, x \right) \\ &= (1 - t_0)\, \phi\big(\tfrac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \tfrac{t_{i-1}}{1-t_0}, 0, \tfrac{t_i}{1-t_0} \ldots, \tfrac{t_k}{1-t_0}\big) + t_0\, x. \end{aligned}$$

Συνεπώς για $1 \leqslant i \leqslant k + 1$ ισχύει

$$\partial^i T\phi = T(\partial^{i-1}\phi).$$

Έτσι για οποιοδήποτε singular $k$-simplex $\phi$ μπορούμε να έχουμε (αντί γιά $\vartheta_{k+1}$ γράφουμε $\vartheta$)

$$\begin{aligned}
\partial T\phi &= \partial_0 T\phi + \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i \partial_i T(\phi) \\
&= \partial_0 T\phi + \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i \partial_i T(\phi) - \left( \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i T\partial_i(\phi) + \sum_{j=0}^{k}(-1)^j T\partial_j(\phi) \right) \\
&= \phi - T\partial\phi,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\partial T\phi + T\partial\phi = \phi.$$

Έτσι κατασκευάσαμε έναν ομομορφισμό $T : S_k(X) \to S_{k+1}(X)$ με την ιδιότητα

$$\partial T + T\partial = \mathsf{id}_{S_k(X)}, \quad \forall\, k \geqslant 1.$$

Έστω $z \in Z_p(X)$. Για κάθε $p > 0$ ισχύει $(\partial T + T\partial)z = z$. Επίσης επειδή το $z$ είναι κύκλος ισχύει $T\partial z = 0$. Συνεπώς $\partial T z = z$ και $z \in B_p(X)$. Τελικά, έπεται ότι $H_p(X) = 0$ για κάθε $p > 0$. □

Η απεικόνιση που ορίσαμε στην παραπάνω απόδειξη επεκτείνεται, ως μια αλυσίδα ομοτοπίας, σε αλυσίδα πολυπλόκων. Πράγματι για τις βαθμωτές ομάδες $C = \{C_i, \partial\}$ και $C' = \{C'_i, \partial'\}$ η απεικόνιση

$$T : C \to C'$$

είναι ένας ομομορφισμός βαθμωτών ομάδων βαθμού 1. Προκύπτει ο ομομορφισμός

$$\partial' T + T\partial : C \to C'$$

βαθμού 0 που είναι και αλυσιδωτή απεικόνιση, chain map, καθώς:

$$\begin{aligned}
\partial'(\partial' T + T\partial) &= \partial'\partial' T + \partial' T\partial \\
&= \partial' T\partial \\
&= \partial' T\partial + T\partial\partial \\
&= (\partial' T + T\partial)\partial
\end{aligned}$$

και επάγει τον ομομορφισμό ομολογίας

$$(\partial' T + T\partial)_* : H_p(C) \to H_p(C'), \quad \forall\, p.$$

**ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ :** Η απεικόνιση $(\partial' T + T\partial)_*$ είναι μηδενικός ομομορφισμός.

*Απόδειξη.* Έστω $z \in Z_p(C)$. Τότε $T\partial(z) = 0$.
Συνεπώς $(\partial' T + T\partial)(z) = \partial' T(z) \in B_p(C')$. □

**Ορισμός 1.3.28.** *Έστωσαν οι αλυσιδωτές απεικονίσεις chain maps $f$ και $g : C \to C'$. Οι $f$ και $g$ θα λέγονται* **chain homotopic** *εάν υπάρχει ομομορφισμός $T : C \to C'$ βαθμού $1$, τέτοιος ώστε*

$$\partial' T + T\partial = f - g.$$

**Πρόταση 1.3.29.** *Αν $f$ και $g : C \to C'$ είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές απεικονίσεις (chain homotopic maps), τότε $f_* = g_*$, ως ομομορφισμοί από την $H_*(C)$ στην $H_*(C')$.*

*Απόδειξη.* Αφού $f, g : C \to C'$ chain homotopic, υπάρχει $T : C \to C'$ που είναι απεικόνιση αλυσίδας μεταξύ των $f$ και $g$. Δηλαδή
$0 = (\partial' T + T\partial)_* = (f - g)_* = f_* - g_* \quad \Rightarrow \quad f_* = g_*.$ □

**ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:** Οι $f$ και $g : X \to Y$ είναι τέτοιες ώστε οι επαγόμενες αλυσιδωτές απεικονίσεις (chain maps)

$$f_\sharp, g_\sharp : S_*(X) \to S_*(Y)$$

να είναι αλυσιδωτή ομοτοπία (chain homotopic).

Έστω $\phi$ ένα singular $p$-simplex στον $X$. Αφού οι $f_\sharp, g_\sharp$ είναι chain homotopic, θα υπάρχει απεικόνιση $T$ μεταξύ τους με τις ιδιότητες που αναφέραμε προηγουμένως.
Η $T(\phi)$ μπορεί να θεωρηθεί συνεπώς μια συνεχής παραμόρφωση της $f_\sharp(\phi)$ στην $g_\sharp(\phi)$.

Γεωμετρικά η $T(\phi)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πρίσμα με βάσεις τις $f_\sharp(\phi)$, $g_\sharp(\phi)$ και έδρες $T(\partial\phi)$. Άρα θα είναι

$$\partial T(\phi) = f_\sharp - g_\sharp - T(\partial\phi).$$

Ισότητα που είναι σύμφωνη με το ότι οι $f_\sharp, g_\sharp$ είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές (chain homotopic maps).

Εάν θεωρήσουμε την αλυσίδα $c = \sum m_i \phi_i$ να είναι ένας $n$-κύκλος στον $X$, τότε οι $f_\sharp(c)$, $g_\sharp(c)$ είναι $n$-κύκλοι στον $Y$. Επιπλέον η $T(c)$ θα είναι μια συλλογή από ακέραια πολλαπλάσια των πρισμάτων που περιγράψαμε παραπάνω, με αλγεβρικό άθροισμα εδρών $0$, αφού $\partial c = 0$. Συνεπώς το σύνορο του είναι το αλγεβρικό άθροισμα των βάσεων των πρισμάτων, δηλαδή $f_\sharp(c) - g_\sharp(c)$. Άρα οι $f_\sharp(c), g_\sharp(c)$ είναι ομολογιακοί κύκλοι στον $Y$.

# Κεφάλαιο 2

# ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΗ ΟΜΟΛΟΓΙΑ

## 2.1 ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΗ SINGULAR ΟΜΟΛΟΓΙΑ

Υπενθυμίζουμε κάποιες βασικές τοπολογικές έννοιες από την αρχή του προηγούμενου κεφαλαίου.

Για τυχόντες τοπολογικούς χώρους $X$ και $Y$ οι απεικονίσεις $f_0, f_1 : X \to Y$ είναι **ομοτοπικές** (συμβολίζουμε $f_0 \cong f_1$), εάν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $F : X \times I \to Y,\ I = [0,1]$, με την ιδιότητα:

$$F(x,0) = f_0(x) \text{ και } F(x,1) = f_1(x) \text{ για κάθε } x \in X.$$

Μια τέτοια απεικόνιση καλείται **ομοτοπία** μεταξύ των $f_0$ και $f_1$.
Ισοδύναμα μια ομοτοπία είναι μια οικογένεια απεικονίσεων $\{f_t\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ από τον $X$ στον $Y$, οι οποίες είναι συνεχείς ως προς $t$.
Η σχέση ομοτοπίας είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των απεικονίσεων από τον $X$ στον $Y$, ενώ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας συμβολίζεται με $[X, Y]$.

**Θεώρημα 2.1.1.** *Έστω $f_0, f_1 : X \to Y$ ομοτοπικές απεικονίσεις. Τότε $f_{0*} = f_{1*}$ ως ομομορφισμοί από το $H_*(X)$ στο $H_*(Y)$.*

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.29 αρκεί να δειχθεί ότι οι αλυσιδωτές απεικονίσεις (chain maps) $f_{0\sharp}, f_{1\sharp} : S_*(X) \to S_*(Y)$ είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές (chain homotopic).
Αφού οι $f_0, f_1$ είναι ομοτοπικές, υπάρχει μεταξύ τους ομοτοπία $F : X \times I \to Y$. Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$g_0, g_1 : X \to X \times I$$

έτσι ώστε

$$g_0(x) = (x,0) \quad \text{και} \quad g_1(x) = (x,1).$$

Στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "g_0"'] \arrow[dr, "f_0"] & \\ X \times I \arrow[r, "F"] & Y \\ X \arrow[u, "g_1"] \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

κάθε τρίγωνο είναι αντιμεταθετικό, δηλαδή ισχύουν $f_0 = F \circ g_0$ και $f_1 = F \circ g_1$.
Έστω ότι οι $g_{0\sharp}, g_{1\sharp}$ είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές chain homotopic ως απεικονίσεις αλυσίδας από την $S_*(X)$ στην $S_*(X \times I)$. Εξ ορισμού υπάρχει $T : S_*(X) \to S_*(Y)$, βαθμού 1, έτσι ώστε

$$\partial T + T\partial = g_{0\sharp} - g_{1\sharp}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} F_\sharp(\partial T + T\partial) &= F_\sharp(g_{0\sharp} - g_{1\sharp}) \quad \Rightarrow \\ \partial(F_\sharp T) + (F_\sharp T)\partial &= f_{0\sharp} - f_{1\sharp}. \end{aligned}$$

Η $F_\sharp T$ είναι ένας ομομορφισμός από την $S_*(X)$ στην $S_*(Y)$, βαθμού 1 και μια αλυσιδωτή ομοτοπία chain homotopy μεταξύ των $f_{0\sharp}$ και $f_{1\sharp}$. Επομένως, για να ισχύει η πρόταση, αρκεί να αποδειχθεί ότι οι $g_{0\sharp}, g_{1\sharp}$ είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές chain homotopic.
Έστω το standard $n$-simplex $\sigma_n$ και $\tau_n \in S_n(\sigma_n)$ η ταυτοτική απεικόνιση. Τότε για κάθε singular $n$-simplex $\phi : \sigma_n \to X$ επάγεται ο ομομορφισμός

$$\phi_\sharp : S(\sigma_n) \to S(X)$$

ώστε $\phi_\sharp(\tau_n) = \phi$. Έτσι κάθε singular $n$-simplex στον $X$ μπορεί να θεωρηθεί στοιχείο της εικόνας του $\tau_n$.

Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μια αλυσιδωτή ομοτοπία $T$ μεταξύ των $g_{0\sharp}$ και $g_{1\sharp}$.
Για $n = 0$ θεωρούμε μια αλυσίδα $c \in S_0(\sigma_0 \times I)$ με τύπο $c = g_{0\sharp}(\tau_0) - g_{1\sharp}(\tau_0)$, η οποία θα είναι είναι το σύνορο κάποιου 1-simplex $b$ στον $\sigma_0 \times I$ και ορίζουμε $T_{\sigma_0}(\tau_0) = b$.
Έστω μια απεικόνιση $h : \sigma_0 \to W$, τέτοια ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} S_0(\sigma_0) \arrow[r, "T_{\sigma_0}"] \arrow[d, "h_\sharp"'] & S_1(\sigma_0 \times I) \arrow[d, "(h \times \mathrm{id})_\sharp"] \\ S_0(W) \arrow[r, "T_W"] & S_1(W \times I) \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.
Υποθέτουμε ότι για κάθε $i < n$ και οποιονδήποτε τοπολογικό χώρο $X$ υπάρχει

ομομορφισμός $T : S_i(X) \to S_{i+1}(X \times I)$, τέτοιος ώστε

$$\partial T + T\partial = g_{0\sharp} - g_{1\sharp}$$

και ότι για κάθε απεικόνιση $h : X \to W$ το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} S_i(X) \arrow[r, "T_X"] \arrow[d, "h_\sharp"'] & S_{i+1}(X \times I) \arrow[d, "(h\times \mathrm{id})_\sharp"] \\ S_i(W) \arrow[r, "T_W"] & S_{i+1}(W \times I) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.
Στην διάσταση $n$, όπως έχουμε αναφέρει, για κάθε singular $n$-simplex $\phi$ στον $X$ θα ισχύει ότι $\phi_\sharp(\tau_n) = \phi$.
Ορίζουμε τον ομομορφισμό

$$T_{\sigma_n} : S_n(\sigma_n) \to S_{n+1}(\sigma_n \times I),$$

για τον οποίο θα έχουμε

$$T_X(\phi) = T_X\big(\phi_\sharp(\tau_n)\big) = (\phi \times \mathrm{id})_\sharp\big(T_{\sigma_n}(\tau_n)\big)$$

και έστω ένα singular $n$-simplex $d : \sigma_n \to \sigma_n$. Τότε η αλυσίδα $c \in S_n(\sigma_n \times I)$ με τύπο

$$c = g_{0\sharp}(d) - g_{1\sharp}(d) - T_{\sigma_n}(\partial d)$$

είναι καλά ορισμένη αφού $\partial d \in S_{n-1}(\sigma_n)$ και ο $T_{\sigma_n}(\partial d)$ έχει ορισθεί από την υπόθεση. Επιπλέον θα έχουμε

$$\begin{aligned}\partial c &= \partial\big(g_{0\sharp}(d) - g_{1\sharp}(d) - T_{\sigma_n}(\partial d)\big)\\ &= \partial g_{0\sharp}(d) - \partial g_{1\sharp}(d) - \partial T_{\sigma_n}(\partial d)\\ &= g_{0\sharp}(\partial d) - g_{1\sharp}(\partial d) - \big(g_{0\sharp}(\partial d) - g_{1\sharp}(\partial d) - T_{\sigma_n}(\partial\partial d)\big)\\ &= 0,\end{aligned}$$

αφού $\partial\partial d = 0$.
Άρα το $c$ είναι ένας $n$-κύκλος στο κυρτό σύνολο $\sigma_n \times I$ και αφού $n > 0$ θα είναι και $n$ σύνορο που σημαίνει ότι θα υπάρχει κάποιο $b \in S_{n+1}(\sigma_n \times I)$, τέτοιο ώστε $\partial b = c$.
Έτσι μπορούμε να ορίσουμε $T_{\sigma_n}(d) = b$, οπότε

$$\partial T(d) + T(\partial d) = g_{0\sharp}(d) - g_{1\sharp}(d).$$

Για κάθε singular $n$-simplex $\phi$ στον $X$ ορίζουμε

$$T_X(\phi) = (\phi \times \mathrm{id})_\sharp\big(T_{\sigma_n}(\tau_n)\big)$$

και επεκτείνουμε στον ομομορφισμό

$$T_X : S_n(X) \to S_{n+1}(X \times I),$$

Σύμφωνα με τον τρόπο που έχει ορισθεί ο $T$ θα αντιμετατίθεται στην απεικόνιση $h : X \to W$. Επίσης θα έχουμε ότι

$$g_{0\sharp}(\phi) = g_0\, \phi_\sharp(\tau_n) = (\phi \times \mathsf{id})_\sharp\, g_0(\tau_n)$$

και

$$g_{1\sharp}(\phi) = g_1\, \phi_\sharp(\tau_n) = (\phi \times \mathsf{id})_\sharp\, g_1(\tau_n).$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\partial T(\phi) + T(\partial\phi) &= \partial T \phi_\sharp(\tau_n) + T\partial\phi_\sharp(\tau_n) \\
&= \partial(\phi \times \mathsf{id})_\sharp\, T(\tau_n) + T\phi_\sharp\, \partial(\tau_n) \\
&= (\phi \times \mathsf{id})_\sharp\, \partial T(\tau_n) + (\phi \times \mathsf{id})_\sharp\, T\partial(\tau_n) \\
&= (\phi \times \mathsf{id})_\sharp (\partial T + T\partial)(\tau_n) \\
&= (\phi \times \mathsf{id})_\sharp \big(g_{0\sharp}(\tau_n) - g_{1\sharp}(\tau_n)\big) \\
&= g_{0\sharp}(\phi) - g_{1\sharp}(\phi),
\end{aligned}$$

οπότε ο $T$ είναι μια αλυσιδωτή ομοτοπία μεταξύ των $g_{0\sharp}$ και $g_{0\sharp}$ και έχουμε το ζητούμενο $f_{0*} = f_{1*}$. □

Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν ο $X$ είναι κυρτός χώρος, τότε η ταυτοτική απεικόνιση είναι ομοτοπική με την σταθερή απεικόνιση που στέλνει κάθε στοιχείο του $X$ στο $x$. Έτσι σε θετικές διαστάσεις ο ταυτοτικός ομομορφισμός και ο τετριμμένος ομομορφισμός ταυτίζονται οπότε η αντίστοιχη ομολογιακή ομάδα στον $X$ είναι τετριμμένη.

**Ορισμός 2.1.2.** *Έστωσαν $X$ και $Y$ τοπολογικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ λέγεται **ομοτοπική ισοδυναμία** εάν η $f$ έχει ομοτοπική αντίστροφη. Τότε λέμε ότι οι τοπολογικοί χώροι $X$ και $Y$ έχουν τον ίδιο* **ομοτοπικό τύπο**.

Προφανώς η απεικόνιση $g : Y \to X$ θα είναι ομοτοπική αντίστροφη της $f : X \to Y$ και αντίστροφα, αν οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι ομοτοπικές ως προς τις αντίστοιχες ταυτοτικές απεικονίσεις.

**Πρόταση 2.1.3.** *Εάν η $f : X \to Y$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία, τότε η απεικόνιση*

$$f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$$

*είναι ένας ισομορφισμός, για κάθε $n$.*

*Απόδειξη.* Έστω $g : Y \to X$ ομοτοπική αντίστροφη της $f : X \to Y$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1 θα έχουμε ότι και οι $f_*, g_*$ είναι ομοτοπικές. Άρα

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = \mathsf{id}_*,$$

δηλαδή η $g_*$ είναι ομοτοπική αντίστροφη της $f_*$ . Άρα η $f_*$ είναι ισομορφισμός. □

**Ορισμός 2.1.4.** *Έστω $A$ ένας υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου $X$ και $i : A \to X$ η απεικόνιση εγκλεισμού. Ονομάζουμε* **ανάκληση (retraction)** *του $X$ στον $A$ μια απεικόνιση $g : X \to A$, για την οποία ισχύει $g \circ i = \mathsf{id}_A$.*
*Η $g$ θα λέγεται παραμορφωτικό συμμάζεμα* **(deformation retraction)** *εάν, επιπλέον, ισχύει $i \circ g = \mathsf{id}_X$. Σε αυτήν την περίπτωση ο $A$ λέγεται παραμορφωτική ανάκληση* **(deformation retract)** *του $X$.*

**Σχόλιο 2.1.5.** Προφανώς σε μια τέτοια περίπτωση ο εγκλεισμός $i$ είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία.

**Πόρισμα 2.1.6.** *Έστω $i : A \to X$ ο εγκλεισμός μιας ανάκλησης (retract) του $A$ στον $X$. Τότε η $i_* : S_*(A) \to S_*(X)$ είναι ένας μονομορφισμός επί του ευθέως αθροίσματος $\mathsf{Im}(i_*) \oplus \mathsf{ker}(g_*)$.*
*Αν ο $A$ είναι μια παραμορφωτική ανάκληση (deformation retract) του $X$, τότε η $i_*$ είναι ισομορφισμός.*

*Απόδειξη.* Αν ο $A$ είναι μια deformation retract του $X$, τότε, εξ ορισμού, ο εγκλεισμός $i : A \to X$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία. Άρα από την Πρόταση 2.1.3 η $i_*$ είναι ισομορφισμός.
Για την περίπτωση που ο $A$ είναι μια retract του $X$, έστω $g : X \to A$ η αντίστοιχη ανάκληση. Προφανώς

$$g_* \circ i_* = (g \circ i)_* = \mathsf{id}_* = \mathsf{id}_{H_*(A)} .$$

Άρα η $i_*$ είναι μονομορφισμός.
Ας θεωρήσουμε $G_1 = \mathsf{Im}(i_*)$, $G_2 = \mathsf{ker}(g_*)$ και ένα στοιχείο $\alpha \in G_1 \cup G_2$. Τότε $\alpha = i_*(\beta)$ για κάποιο $\beta \in H_*(A)$ και $g_*(\alpha) = 0$. Όμως

$$0 = g_*(\alpha) = g_*\big(i_*(\beta)\big) = (g_* \circ i_*)(\beta) = \beta$$

και έτσι $\alpha = i_*(0) = 0$.
Αν θεωρήσουμε $\gamma \in H_*(X)$, τότε

$$\gamma = i_*g_*(\gamma) + (\gamma - i_*g_*(\gamma))$$

δηλαδή το $\gamma$ εκφράζεται σαν άθροισμα ενός στοιχείου της $G_1$ και ενός στοιχείου της $G_2$. Επομένως $H_*(X) = G_1 \oplus G_2$. □

**Ορισμός 2.1.7.** *Μια τριάδα αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών*

$$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$$

*θα λέγεται* **ακριβής (exact)** *εάν $\mathsf{Im}\, f = \mathsf{ker}\, g$.*
*Μια ακολουθία αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών*

$$\cdots \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} \cdots$$

*θα λέγεται* **ακριβής (exact)** *εάν κάθε τριάδα της είναι ακριβής.*
*Μια ακριβής ακολουθία της μορφής*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

*θα λέγεται* **σύντομη ακριβής (short exact)**.

**Παρατήρηση 2.1.8.** 1. Μια απεικόνιση $h : G_1 \to G_2$ είναι ισομορφισμός, αν και μόνο αν, η

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{h} G_2 \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

2. Σε κάθε short exact ακολουθία, όπως η παραπάνω, η $f$ είναι ένας μονομορφισμός που ταυτίζει την $C$ με μια υποομάδα $C'$ της $D$ και η $g$ είναι ένας επιμορφισμός με πυρήνα $C'$.
Επομένως, μέχρι ισομορφίας, η παραπάνω ακολουθία είναι η

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} D \xrightarrow{\pi} D/C' \longrightarrow 0 .$$

Έστωσαν τα αλυσιδωτά πολύπολοκα (chain complexes) $C = \{C_n\}$, $D = \{D_n\}$, $E = \{E_n\}$ και η σύντομη ακριβής ακολουθία ( short exact) ακολουθία

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0 ,$$

όπου οι $f, g$ είναι αλυσιδωτού βαθμού $0$.
Θα δείξουμε ότι για κάθε $p$ μπορούμε να έχουμε μια τριάδα ομολογιακών ομάδων

$$H_p(C) \xrightarrow{f_*} H_p(D) \xrightarrow{g_*} H_p(E) .$$

Σχηματίζουμε το άπειρο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"] & D_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"] & D_{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

στο οποίο κάθε μια γραμμή είναι μια σύντομη ακριβής (short exact) ακολουθία και κάθε τετράγωνο μεταθετικό.

Έστωσαν $z, z' \in Z_n(E)$ δυο ομολογιακοί κύκλοι. Τότε υπάρχει $e \in E_{n+1}$ έτσι ώστε $\partial(e) = z - z'$. Αφού η $g$ είναι επιμορφισμός, θα υπάρχουν $d, d' \in D_n$ με $g(d) = z$ και $g(d') = z'$. Λόγω της σύντομης ακριβούς ακολουθίας θα υπάρχουν $c, c' \in D_{n-1}$ με $f(c) = \partial(d)$ και $f(c') = \partial(d')$. Αρκεί να δειχθεί ότι οι $c, c'$ είναι ομολογιακοί κύκλοι.
Πράγματι, αφού $e \in E_{n+1}$, θα υπάρχει $a \in D_{n+1}$ ώστε $g(a) = e$. Λόγω μεταθετικότητας του διαγράμματος ισχύει

$$\begin{aligned} g(\partial a) &= \partial g(a) = \partial e = z - z' \quad \Rightarrow \\ g(\partial a) &= g(d) - g(d'), \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι $d - d' - \partial a \in \ker g$. Επίσης $d - d' - \partial a \in \operatorname{Im} f$, οπότε υπάρχει $b \in C_n$ τέτοιο ώστε $f(b) = (d - d') - \partial a$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} f(\partial b) &= \partial f(b) \\ &= \partial\big(d - d' - \partial a\big) \\ &= \partial d - \partial d' - \partial\partial a \\ &= f(c) - f(c') \\ &= f(c - c'). \end{aligned}$$

Όμως η $f$ είναι μονομορφισμός, επομένως $\partial b = c - c'$. Δηλαδή οι $c$ και $c'$ είναι ομολογιακοί κύκλοι.

Άρα η παραπάνω διαδικασία σε ομολογιακούς κύκλους είναι σωστά ορισμένη και, προφανώς, μονομορφισμός.

**Ορισμός 2.1.9.** *Ο μονομορφισμός που περιγράψαμε παραπάνω θα λέγεται **συνδετικός ομομορφισμός** (connecting homomorphism) για την σύντομη ακριβή (short exact) ακολουθία*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

*και θα συμβολίζεται με*

$$\Delta : H_n(E) \to H_{n-1}(C).$$

**Θεώρημα 2.1.10.** *Αν $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ είναι μια σύντομη ακριβή (short exact) ακολουθία αλυσιδωτών πολυπλόκων (chain complexes) και μηδενικού αλύσιδωτού βαθμού, τότε η ακολουθία*

$$\cdots \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(D) \xrightarrow{g_*} \cdots$$

*είναι ακριβής.*

## 2.2 ΟΜΟΛΟΓΙΑΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Πριν προχωρήσουμε στην μελέτη της ομολογιακής ομάδας της σφαίρας θα ορίσουμε κάποιες τοπολογικές έννοιες που είναι απαραίτητες.

**Ορισμός 2.2.1.** *Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $A$ ένας υπόχωρός του. Ονομάζουμε* **εσωτερικό** *του $A$ (συμβολίζουμε $A^o$) την ένωση όλων των ανοικτών συνόλων του $X$ που είναι υποσύνολα του $A$, ή ισοδύναμα, το μεγιστοτικό υποσύνολο του $A$ που είναι ανοικτό στον $X$.*

**Ορισμός 2.2.2.** *Μια συλλογή $\mathcal{U}$ υποσυνόλων του $X$ είναι μια κάλυψη του $X$ αν και μόνο αν*

$$X \subseteq \bigcup_{u \in \mathcal{U}} U.$$

Στο εξής θα συμβολίζουμε με $\mathcal{U}^\imath$ την συλλογή των εσωτερικών των συνόλων που ανήκουν στην $\mathcal{U}$. Θα μελετήσουμε συλλογές $\mathcal{U}$ των οποίων η $\mathcal{U}^\imath$ είναι μια κάλυψη του $X$.

Έστω $\mathcal{U}$ μια κάλυψη του $X$. Συμβολίζουμε με $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ την υποομάδα της $S_n(X)$ που παράγεται από τα singular $n$-simplices $\phi : \sigma_n \to X$, για τα οποία το $\phi(\sigma_n)$ περιέχεται σε κάποιο $U \in \mathcal{U}$. Τότε, για κάθε $i \leqslant n$, ισχύει $\operatorname{Im} \partial_i \phi \subseteq \operatorname{Im} \phi$, όπου $\partial$ το σύνορο $\partial : S_n^{\mathcal{U}}(X) \to S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$. Έτσι, για κάθε κάλυψη $\mathcal{U}$ του $X$, υπάρχει ένα αλυσιδωτό πολύπλοκο chain complex $S_*^{\mathcal{U}}(X)$, ώστε ο εγκλεισμός $i : S_*^{\mathcal{U}}(X) \to S_*(X)$ να είναι μια chain map.

Εάν θεωρήσουμε μια κάλυψη $\mathcal{V}$ ενός άλλου τοπολογικού χώρου $Y$ και μια απεικόνιση $f : X \to Y$, τέτοια ώστε για κάθε $U \in \mathcal{U}$, η $f(U)$ να περιέχεται σε κάποιο $V$ της $\mathcal{V}$, τότε υπάρχει μια chain map, η

$$f_\sharp : S_*^{\mathcal{U}}(X) \to S_*^{\mathcal{V}}(Y)\,,$$

για την οποία ισχύει $f_\sharp \circ i_X = i_Y \circ f_\sharp$.

Στην συνέχεια δίνεται, χωρίς απόδειξη, το επόμενο Θεώρημα, το οποίο είναι θεμελιώδες στην μελέτη των ομολογιακών ομάδων τοπολογικών χώρων.

**Θεώρημα 2.2.3.** *Εάν $\mathcal{U}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου $X$ τέτοια ώστε η $\mathcal{U}^\imath$ να είναι μια κάλυψη του $X$, τότε ο εγκλεισμός*

$$i_* : H_n\big(S_*^{\mathcal{U}}(X)\big) \to H_n(X)$$

*είναι ισομορφισμός για κάθε $n$.*

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Θεώρημα μπορούμε να αναπτύξουμε μια τεχνική για την μελέτη της ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου $X$ βασιζόμενοι στις συνιστώσες μιας κάλυψης $\mathcal{U}$ του $X$. Η πιο απλή μη-τετριμμένη περίπτωση είναι $\mathcal{U} = \{U, V\}$, όπου $U, V \subset X$ με $U^o \cup V^o = X$. Σε αυτήν την περίπτωση έστω

$$\begin{aligned} A' &= \big\{\text{το σύνολο όλων των singular } n\text{-simplices στο } U\big\}, \\ A'' &= \big\{\text{το σύνολο όλων των singular } n\text{-simplices στο } V\big\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} S_n(U) &= F(A')\,, & S_n(V) &= F(A''), \\ S_n(U \cap V) &= F(A' \cap A'')\,, & S_n^{\mathcal{U}}(X) &= F(A' \cup A''). \end{aligned}$$

και ο ομομορφισμός

$$h : F(A') \oplus F(A'') \to \underbrace{F(A' \cup A'')}_{= S_n^{\mathcal{U}}(X)},$$

με

$$h(a'_i, a''_j) = a'_i + a''_j$$

είναι επιμορφισμός. Από την άλλη υπάρχει ομομορφισμός

$$g : \underbrace{F(A' \cap A'')}_{= S_n^{\mathcal{U}}(U \cap V)} \to F(A') \oplus F(A''),$$

με

$$g(b_i) = (b_i, -b_i)\,.$$

Προφανώς η $g$ είναι μονομορφισμός με $h \circ g = 0$.

$$\begin{tikzcd}
F(A') \oplus F(A'') \arrow[r, "h"] & \underset{= S_n^{\mathcal{U}}(X)}{F(A' \cup A'')} \\
\underset{= S_n(U \cap V)}{F(A' \cap A'')} \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "h \circ g"'] &
\end{tikzcd}$$

$$h \circ g : S_n(U \cap V) \to S_n^{\mathcal{U}}(X)$$

με

$$\begin{aligned}
(h \circ g)(\ell) &= h\big(g(\ell)\big) \\
&= h(\ell, -\ell) \\
&= \ell + (-\ell) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Έστω ότι

$$\begin{gathered}
h\Big(\sum n_i a'_i, \sum m_j a''_j\Big) = 0 \quad \Rightarrow \\
\sum n_i a'_i + \sum m_j a''_j = 0
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Αφού οι $F(A') = S_n(U)$ και $F(A'') = S_n(V)$ είναι ελεύθερες αβελιανές ομάδες, η (2.1) θα ισχύει αν για τα μη-μηδενικά $n_i$ ισχύει ότι $a'_i = a''_j$ για κάποιο $j$, και επιπλέον $m_j = -n_i$. Δηλαδή όλα τα $a'_i \in A' \cap A''$.
Αν $x = \sum n_i a'_i$, τότε

$$\begin{aligned}
\sum m_j a''_j &= -x \qquad \Rightarrow \\
\sum (-n_i) a'_i &= -\sum n_i a'_i.
\end{aligned}$$

Επομένως $x \in F(A' \cap A'')$ και $g(x) = \big(\sum n_i a_i', \sum m_j a_j''\big)$.

$$
\begin{aligned}
\ker h &= \{(k,\ell) \mid h(k,\ell) = 0\},\\
\operatorname{Im} g &= \{(k,\ell) \mid g(x) = (k,\ell)\},\\
\ker h &\subseteq \operatorname{Im} g.
\end{aligned}
$$

Έτσι προκύπτει η short exact ακολουθία αλυσιδωτών ομάδων

$$0 \longrightarrow S_n(U \cap V) \xrightarrow{g_\sharp} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{h_\sharp} S_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0.$$

Ορίζουμε το αλυσωτό πολύπλοκο $S_*(U) \oplus S_*(V)$ ως

$$(S_*(U) \oplus S_*(V))_n = S_n(U) \oplus S_n(V)$$

και συνοριακό τελεστή της αλυσίδας αυτής τον συνοριακό τελεστή κάθε συνιστώσας.

Η παραπάνω σύντομη ακολουθία γίνεται μια ακριβής ακολουθία αλυσιδωτών πολυπλόκων και αλυσιδωτών απεικονίσεων μηδενικού βαθμού. Τότε από το Θεώρημα 2.2.3 έχουμε την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \xrightarrow{h_*} H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

Εξ ορισμού του αλυσωτού πολυπλόκου θα ισχύει ότι

$$H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \approx H_n(U) \oplus H_n(V)$$

και από το Θεώρημα 2.2.3 έχουμε

$$H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \approx H_n(X)\,.$$

Ενσωματώνοντας τους ισομορφισμούς στην μακρά ακριβή ακολουθία έχουμε την ακολουθία **Mayer-Vietoris**

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

Έτσι αν ορίσουμε τις αντίστοιχες απεικονίσεις εγκλεισμού

$$
\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, "k"] & \\
U \cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & U \cup V = X \\
 & V \arrow[ur, "\ell"'] &
\end{tikzcd}
$$

έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
g_*(x) &= \big(i_*(x), -j_*(x)\big),\\
h_*(y,z) &= k_*(y) + \ell_*(z).
\end{aligned}
$$

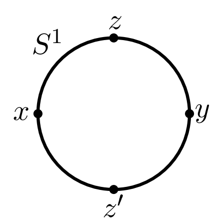
Ο συνδετικός ομομορφισμός $\Delta$ μπορεί να εκφραστεί γεωμετρικά ως εξής: Μια ομολογιακή κλάση $\omega \in H_n(X)$ έχει ως αντιπρόσωπο έναν κύκλο $c + d$, όπου $c$ είναι ένας κύκλος στην $U$ και $d$ είναι ένας κύκλος στην $V$. Συνεπώς η $\Delta(\omega)$ έχει ως αντιπρόσωπο έναν κύκλο $\partial c \in U \cap V$.

Σύμφωνα με την κατασκευή της Mayer-Vietoris ακολουθίας, εάν $X'$ είναι ένας χώρος με υποσύνολα $U', V'$, τέτοια ώστε $(U')^o \cup (V')^o = X'$ και $f : X \to X'$, τέτοια ώστε $f(U) \subseteq U'$, $f(V) \subseteq V'$, τότε στο παρακάτω διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\Delta"] & H_n(U \cap V) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(U) \oplus H_n(V) \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "f_* \oplus f_*"] & H_n(X) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\Delta'"] & H_n(U' \cap V') \arrow[r, "g'_*"] & H_n(U') \oplus H_n(V') \arrow[r, "h'_*"] & H_n(X') \arrow[r, "\Delta'"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

κάθε ορθογώνιο είναι αντιμεταθετικό.

**Παράδειγμα 2.2.4.** Έστω $X = S^1$, $z$ και $z'$ ο βόρειος και νότιος πόλος αντίστοιχα και $x$ και $y$ σημεία του ισημερινού.




Έστωσαν $U = S^1 - \{z'\}$ και $V = S^1 - \{z\}$. Τότε η Mayer-Vietoris ακολουθία για αυτήν την κάλυψη είναι

$$
H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{h_*} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_0(U) \oplus H_0(V)
$$

Ο πρώτος όρος είναι μηδενικός αφού οι $U$ και $V$ είναι συσταλτοί. Έτσι ο $\Delta$ είναι μονομορφισμός και

$$
\begin{aligned}
H_1(S^1) &\approx \operatorname{Im} \Delta = \ker g_*,\\
H_0(U \cup V) &\approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Άρα κάθε στοιχείο της $H_0(U \cup V)$ γράφεται στην μορφή $ax+by$, όπου $a, b$ ακέραιοι. Οπότε

$$
g_*(ax + by) = \big(i_*(ax + by), -j_*(ax + by)\big).
$$

Αφού οι $U$ και $V$ είναι τροχιακά συνεκτικοί, θα ισχύει ότι

$$i_*(ax+by) \text{ αν-ν } a=-b\,.$$

Ομοίως και για την $j_*$. Δηλαδή ο πυρήνας της $g_*$ είναι μια υποομάδα που αποτελείται από στοιχεία της μορφής $ax-ay$. Δηλαδή είναι μια άπειρη κυκλική ομάδα που παράγεται από το στοιχείο $x-y$. Συνεπώς για την $H_1(S^1)$ που είναι ισόμορφη με τον πυρήνα αυτό θα ισχύει

$$H_1(S^1) \approx \mathbb{Z}.$$

*Γεωμετρικά* ένας γεννήτορας της ομάδας αυτής παριστάνεται ως το άθροισμα $c+d$ δυο αλυσίδων $c \in U$, $d \in V$, για τις οποίες ισχύει

$$\partial c = x-y = -\partial d.$$

Άρα για την ομολογία της $S^1$ έχουμε ότι

$$H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}\,, & n=0 \text{ ή } n=1 \\ 0\,, & n>1 \end{cases}.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την ομολογία της $S^n$ για κάθε $n$.

*Υπενθυμίσεις*

- $S^n = \big\{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\big\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
- Η $S^n$ είναι τροχιακά συνεκτική για κάθε $n \geqslant 1$. Άρα $H_0(S^n) = \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ θεωρώντας $\mathbb{R}^n = \big\{(x_1,\ldots,x_n,0) \mid x_i \in \mathbb{R}\big\}$.
- Ο εγκλεισμός $S^n \subseteq S^{n+1}$ θεωρείται ως ο ισημερινός.
- $z=(0,\ldots,0,1)$ ο βόρειος πόλος της $S^n$,
  $z^1=(0,\ldots,0,-1)$ ο νότιος πόλος της $S^n$.
- Μέσω της στερεογραφικής προβολής:
  - $S^n - \{z\} \cong \backsimeq \mathbb{R}^n$.
  - $S^n - \{z^1\} \cong \mathbb{R}^n$.
  - $S^n - \{z, z^1\} \cong \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.
  - $S^{n-1}$ παραμορφωμένη ανάκληση του $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.

Έστωσαν $U = S^n - \{z\}$ και $V = S^n - \{z^1\}$, οπότε $U \cap V = S^n - \{z, z^1\}$. Τότε η Mayer-Vietoris ακολουθία για αυτήν την κάλυψη της σφαίρας θα είναι

$$H_m(\mathbb{R}^n) \oplus H_m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{h_*} H_m(S^n) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{g_*} H_{m-1}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{m-1}(\mathbb{R}^n)$$

- για $m>1$ οι δυο ακραίοι όροι είναι μηδέν, άρα η $\Delta$ είναι ισομορφισμός.

- για $m = 1$ και $n > 1$ οι $g_*, \Delta$ είναι μονομορφισμοί. Επομένως $H_1(S^n) = 0$.

**Θεώρημα 2.2.5.** *Για κάθε ακέραιο $n \geqslant 0$ η $H_*(S^n)$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με δυο γεννήτορες, έναν στην διάσταση $0$ και έναν στην διάσταση $n$.*

**Πρόταση 2.2.6.** *Για $n \neq m$ οι $S^n$ και $S^m$ δεν έχουν την ίδια ομοτοπία.*

**Πρόταση 2.2.7.** *Η $S^{n-1}$ δεν είναι ανάκληση της $D^n$.*

*Απόδειξη.*

- για $n = 1$ είναι προφανές, αφού ο $D^1$ είναι συνεκτικός ενώ ο $S^0$ δεν είναι.

- για $n > 1$ : Έστω ότι υπάρχει retraction της $D^n$ στην $S^{n-1}$. Τότε υπάρχει $f : D^n \to S^{n-1}$, έτσι ώστε $f \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$, όπου $i : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$. Τότε επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα ομολογιακών ομάδων και ομομορφισμών.

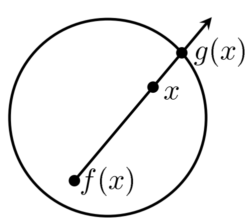
$$\begin{tikzcd} H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "i_*"'] & & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ & H_{n-1}(D^n) \arrow[ur, "f_*"'] & \end{tikzcd}$$

  Δηλαδή προκύπτει η ταυτοτική σε μια άπειρη κυκλική ομάδα μέσω μιας μηδενικής, άτοπο.

□

**Λήμμα 2.2.8. (Brouwer's fixed-point theorem)** *Για κάθε απεικόνιση $f : D^n \to D^n$ υπάρχει $x \in D^n$, τέτοιο ώστε $f(x) = x$.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι υπάρχει απεικόνιση $f : D^n \to D^n$ χωρίς σταθερό σημείο. Ορίζουμε την συνάρτηση $g : D^n \to S^{n-1}$ ως εξής: Για κάθε $x \in D^n$ υπάρχει μοναδική ημιευθεία που αρχίζει από το $f(x)$ διέρχεται από το $x$ και τέμνει την $S^{n-1}$ σε ένα σημείο. Ορίζουμε ως $g(x)$ αυτό το σημείο τομής.




Τότε η $g : D^n \to S^{n-1}$ είναι συνεχής με $g(x) = x$ για κάθε $x \in S^{n-1}$. Δηλαδή η $S^{n-1}$ είναι ανάκληση της $D^n$, άτοπο. Άρα η $f$ έχει σταθερό σημείο. □

## 2.3 ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Μια σχέση ισοδυναμίας σε έναν τοπολογικό χώρο έχει στόχο να παράγει έναν νέο χώρο του οποίου τα σημεία είναι κλάσεις ισοδυναμίας. Αυτό δίνει μια έννοια σύνδεσης ενός χώρου με έναν άλλο, μέσω μιας απεικόνισης από έναν υπόχωρο του πρώτου στον δεύτερο.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η σύνδεση ενός κελιού με έναν χώρο μέσω μιας απεικόνισης που ορίσθηκε στο σύνορό του.

Υπενθυμίζουμε ότι:
Μια διμελής σχέση $\sim$ σε ένα σύνολο $A$ είναι μια **σχέση ισοδυναμίας** εάν πληρεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $a \sim a$,

(ii) $a \sim b \quad \Rightarrow \quad b \sim a$,

(iii) $a \sim b$ και $b \sim c \quad \Rightarrow \quad a \sim c$,

για κάθε $a, b, c \in A$.
Μια τέτοια σχέση επάγει την διαμέριση του συνόλου $A$ σε κλάσεις ισοδυναμίας. Από την άλλη μια διαμέριση του $A$ σε ξένα σύνολα επάγει μιας σχέση ισοδυναμίας ως εξής: $a \sim b \iff a, b$ ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο. Καθένα από αυτά τα υποσύνολα λέγεται κλάση ισοδυναμίας.
Θα ονομάζουμε **σύνολο-πηλίκο** και θα συμβολίζουμε με $A/\sim$, το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που προκύπτουν από την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο $A$. Επίσης θα ονομάζουμε **συνάρτηση-πηλίκο** την συνάρτηση $\pi : A \to A/\sim$ που αντιστοιχεί το $a \in A$ στην κλάση ισοδυναμίας του $A/\sim$ στην οποία ανήκει το $a$, δηλαδή $\pi(a) = [a]$.
Γενικότερα, αν $f : A \to B$ είναι μια απεικόνιση μεταξύ συνόλων, τότε μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας ως εξής:

$$a_1 \sim a_2 \iff f(a_1) = f(a_2).$$

Έστω $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας σε έναν τοπολογικό χώρο $X$. Μπορούμε να ορίσουμε στον $X/\sim$ μια τοπολογία ως εξής: ένα σύνολο $U \in X/\sim$ είναι ανοικτό αν-ν το $\pi^{-1}(U)$ είναι ανοικτό σύνολο στο $X$. Δηλαδή η συνάρτηση $\pi : X \to X/\sim$ είναι συνεχής. Μας ενδιαφέρουν σχέσεις ισοδυναμίας $\sim$ σε τοπολογικούς χώρους $X$ που οι ίδιοι είναι Hausdorff αλλά και οι αντίστοιχοι χώροι-πηλίκα $X/\sim$ να καθίστανται χώροι Hausdorff.
Για παράδειγμα στον τ.χ. $X = [-1, 1]$, ο οποίος είναι Hausdorff με την επαγώμενη από το $\mathbb{R}$ τοπολογία, η σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται ως $a \sim -a$ για κάθε $|a| < 1$ και $a \sim a$ για κάθε $a \in [-1, 1]$ δεν καθιστά τον τ.χ. $X/\sim$ Hausdorff, αφού οι εικόνες των $-1$ και $1$ δεν μπορούν να διαχωριστούν από αντίστοιχα, ξένα μεταξύ τους, ανοικτά σύνολα.

**Ορισμός 2.3.1.** *Έστω ένας τοπολογικός χώρος $X$. Το σύνολο*

$$D = \{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$$

*ονομάζεται* **διαγώνιος** *στο $X \times X$.*

Υπενθυμίζουμε ότι ο $X$ είναι Hausdorff, αν η διαγώνιος $D$ είναι κλειστό σύνολο του $X \times X$.

Έστω $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στον τοπολογικό χώρο $X$ και $\Delta$ η διαγώνιος στον $(X/\!\sim) \times (X/\!\sim)$, δηλαδή

$$\Delta = \big\{\big([x],[x]\big) \mid x \in X\big\} \subseteq (X/\!\sim) \times (X/\!\sim).$$

Για την συνάρτηση

$$\pi \times \pi : X \times X \to (X/\!\sim) \times (X/\!\sim)$$

με $(\pi \times \pi)(x,y) = \big([x],[y]\big)$, παρατηρούμε ότι

$$(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta) = \{(x,y) \mid x \sim y\} \subseteq X \times X.$$

Αυτό το υποσύνολο του $X \times X$ ονομάζεται **γράφημα της σχέσης** $\sim$.

**Ορισμός 2.3.2.** *Μια σχέση $\sim$ στο $X$ ονομάζεται* **κλειστή**, *αν-ν το γράφημά της είναι κλειστό στο $X \times X$.*

Είναι φανερό, από τα παραπάνω, ότι αν ο τ.χ. $X/\!\sim$ είναι Hausdorff, τότε η σχέση $\sim$ είναι κλειστή στον $X$. Ισχύει και το αντίστροφο στην περίπτωση που ο $X$ είναι συμπαγής.

**Πρόταση 2.3.3.** *Εάν η σχέση $\sim$ είναι κλειστή σε έναν συμπαγή Hausdorff χώρο $X$, τότε και ο τ.χ. $X/\!\sim$ είναι Hausdorff.*

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι σε κάθε συμπαγή Hausdorff χώρο ένα υποσύνολό του είναι κλειστό αν-ν είναι συμπαγές.
Έστωσαν $p_1$ και $p_2$ οι προβολές του $X \times X$ στην πρώτη και δεύτερη συνιστώσα, αντίστοιχα. Έστω $C$ ένα κλειστό υποσύνολο του $X$ και $G \subseteq X \times X$ το γράφημα της $\sim$. Αφού

$$\begin{aligned} p_1 : X \times X \to X\,; &\quad p_1(x,y) = x, \\ p_2 : X \times X \to X\,; &\quad p_2(x,y) = y, \\ G = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta) &= \{(x,y) \mid x \sim y\} \subseteq X \times X, \end{aligned}$$

θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} p_2\big(p_1^{-1}(C) \cap G\big) &= \big\{y \in X \mid y \sim x \text{ για κάποιο } x \in X\big\} \\ &= \pi^{-1}\big(\pi(C)\big). \end{aligned}$$

Επειδή το $C$ είναι κλειστό, έπεται ότι και το $p_1^{-1}(C)$ είναι κλειστό. Επειδή η $\sim$ είναι κλειστή, έπεται ότι και το $G$ είναι κλειστό. Συνεπώς το $p_1^{-1}(C) \cap G$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς Hausdorff χώρου $X \times X$, άρα συμπαγές. Αφού η $p_2$ είναι συνεχής, έπεται ότι και το $p_2\big(p_1^{-1}(C) \cap G\big)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του συμπαγούς Hausdorff χώρου $X$, άρα είναι και κλειστό. Δηλαδή για κάθε κλειστό $C \subseteq X$, το $\pi^{-1}\big(\pi(C)\big)$ είναι κλειστό στον $X$, άρα το $\pi(C)$ είναι κλειστό στον $X/\sim$.
Έστωσαν $\overline{x}$, $\overline{y}$ δυο διαφορετικά στοιχεία του $X/\sim$. Επειδή είναι εικόνες μονοστοιχειακών υποσυνόλων του $X$, είναι κλειστά στον $X/\sim$. Επειδή η $\pi$ είναι συνεχής, έπεται ότι τα $\pi^{-1}(\overline{x})$ και $\pi^{-1}(\overline{y})$ είναι κλειστά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του $X$. Επειδή ο $X$ είναι Hausdorff, έπεται ότι υπάρχουν $U$ και $V$ ανοικτά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του $X$ με $\pi^{-1}(\overline{x}) \subseteq U$ και $\pi^{-1}(\overline{y}) \subseteq V$.
Έστωσαν $U'$ και $V'$ τα αντίστοιχα συμπληρώματα των $U$ και $V$ στον $X$, τα οποία είναι, προφανώς, κλειστά στον $X$. Συνεπώς τα $\pi(U')$ και $\pi(V')$ είναι κλειστά στον $X/\sim$. Τα συμπληρώματα των τελευταίων είναι ανοικτά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του $X/\sim$. Άρα ο $X/\sim$ είναι Hausdorff. □

Έστωσαν οι τοπολογικοί χώροι $A$, $X$ και $Y$, με $A \subseteq X$ και $X \cap Y = \varnothing$ και η συνεχής συνάρτηση $f : A \to Y$. Θεωρούμε τον $X \cup Y$ ως έναν τ.χ. στον οποίο οι $X$ και $Y$ θεωρούνται και ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του $X \cup Y$ και έχουν τις γνήσιες ιδιότητές τους ως ξεχωριστοί τ.χ.
Έστω $\sim$ η ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας στο $X \cup Y$ για την οποία ισχύει $x \sim f(x)$, για κάθε $x \in A$. Ο **χώρος ταύτισης** $(X \cup Y)/\sim$ είναι ο χώρος που προκύπτει συνδέοντας το $X$ με το $Y$ μέσω της $f : A \to Y$ (adjunction space). Είναι σύνηθες ο παραπάνω χώρος ταύτισης να συμβολίζεται και με $X \cup_f Y$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας στον $X \cup_f Y$ είναι

- Κάθε σύνολο $\big\{u \in X \cup Y \mid (\exists\, x \in A)\ f(x) = u\big\}$, δηλαδή
- Κάθε μονοσύνολο $\big\{u \in X \cup Y \mid (\forall\, x \in A)\ f(x) \neq u\big\}$

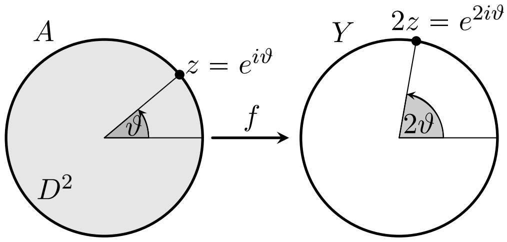
**Πόρισμα 2.3.4.** *Έστωσαν $X$ και $Y$ συμπαγείς Hausdorff τοπολογικοί χώροι, $A$ κλειστό υποσύνολο του $X$ και $f : A \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Τότε ο τ.χ. $X \cup_f Y$ είναι Hausdorff.*

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι στο $X \cup_f Y$ υπάρχει ένα ομοιομορφικό αντίγραφο του $Y$. Συμβολίζουμε $i : Y \to X \cup_f Y$ τον ομοιομορφισμό που είναι επί του συγκεκριμένου υποχώρου. Ο $i$ μπορεί να ιδωθεί ως σύνθεση του εγκλεισμού του $Y$ στον $X \cup Y$ με την συνάρτηση-πηλίκο $\pi : X \cup Y \to X \cup_f Y$.

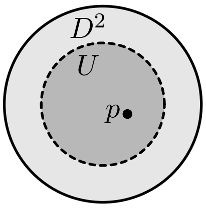
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου οι παραπάνω τ.χ. είναι οι $X = D^n$ και $A = S^{n-1} = \partial D^n$. Ο χώρος $D^n \cup_f Y$ ονομάζεται ο χώρος που προκύπτει αν απεικονίσουμε ένα $n$-cell στον $Y$ μέσω της $f$. Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, τον χώρο $D^n \cup_f Y$ θα τον συμβολίζουμε με $Y_f$.

**Παράδειγμα 2.3.5.** Έστωσαν $X = D^2$, $A = S^1 = \partial D^2$ και $Y$ ένα αντίγραφο της $S^1$ ξένο με το $X$. Έστω, επίσης, $f : A \to Y$ με

$$f(e^{i\vartheta}) = e^{2i\vartheta}.$$




Τότε $X \cup_f Y = (2)$. Οι ομολογιακές ομάδες σε αυτόν τον χώρο μπορούν να υπολογισθούν με την Mayer-Vietoris ακολουθία.




Στο εσωτερικό της $D^2$ θεωρούμε ένα ανοικτό κελί $U$ και ένα σημείο $p \in U$.
Για την Mayer-Vietoris ακολουθία θεωρούμε την κάλυψη $\{U, V\}$, όπου $V = (2) - \{p\}$. Οι $U \cap V$ και $U$ έχουν την ίδια ομοτοπία με την $S^1$, ενώ ο $U$ είναι συσταλτός.

Έτσι στο τμήμα της Mayer-Vietoris ακολουθίας

$$\begin{array}{ccccc} H_1(U \cap V) & \xrightarrow{\alpha} & H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{\beta} & H_1((2)) \\ \approx \mathbb{Z} & & \approx \mathbb{Z} & & \end{array}$$

είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο $\beta$ είναι επιμορφισμός.
Ένας γεννήτορας 1-κύκλος στο $U \cap V$ όταν παραμορφώνεται στο σύνορο, τυλίγεται δυο φορές γύρω από την $S^1$, αφού η $f$ έχει βαθμό 2. Έτσι ο $\alpha$ είναι ένας μονομορφισμός στο $2\mathbb{Z}$ και, επίσης, $H_1(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$.
Επιπλέον ο συνδετικός ομομορφισμός

$$H_2((2)) \xrightarrow{\Delta} H_1(U \cap V)$$

είναι ένας μονομορφισμός του οποίου η εικόνα είναι ο πυρήνας του $\alpha$. Επομένως $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$.
Οι ομολογίες μεγαλυτέρων διαστάσεων εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι μηδενικές και ο $\mathbb{R}P^2$ είναι τροχιακά συνεκτικός. Άρα η ομολογία του έχει καθοριστεί πλήρως.

**Πρόταση 2.3.6.** *Εάν $f : S^{n-1} \to Y$ συνεχής απεικόνιση και ο $Y$ είναι Hausdorff, τότε υπάρχει μια ακριβής ακολουθία*

$$\cdots \longrightarrow H_m(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} H_m(Y) \xrightarrow{i_*} H_m(Y_f) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(S^{n-1}) \longrightarrow H_m(Y) \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(Y_f)$$

Η ακριβής ακολουθία της παραπάνω πρότασης δείχνει πόσο σχετικές είναι οι ομολογίες των $Y$ και $Y_f$. Εάν ένα $n$-cell έχει προσκολληθεί στο $Y$, τότε ο

$H_n(Y) \xrightarrow{i_*} H_n(Y_f)$ είναι μονομορφισμός με cokernel είτε το $0$, είτε την άπειρη κυκλική ομάδα. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε δημιουργήσει μια $n$-διάστατη «τρύπα». Από την άλλη ο $H_{n-1}(Y) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(Y_f)$ είναι επιμορφισμός με πυρήνα είτε το $0$, είτε την άπειρη κυκλική ομάδα, οπότε εδώ το $n$-cell έρχεται να «γεμίσει» μια $(n-1)$-διάστατη «τρύπα» στον $Y$. Πάντως σε άλλες διαστάσεις η προσθήκη ενός $n$-cell δεν επηρεάζει την ομολογία.

**Ορισμός 2.3.7.** *Έστωσαν $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ με $a_i < b_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$. Το σύνολο*

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

*είναι ένα $n$-**cell**.*

*Παρατήρηση:* Κάθε $n$-cell είναι συμπαγές.

Για $k \leqslant 3$ τα $k$-cells είναι απλά. Έτσι

1. 1-cell$=[a, b]\,, \quad a < b\,,$
2. 2-cell= το καρτεσιανό γινόμενο δυο κλειστών μη-κενών διαστημάτων,
3. 3-cell= ορθογώνιο στερεό.

Έστω $(X, A)$ ένα ζεύγος τ.χ. με $X \supseteq A \neq \varnothing$ και $Y$ ένα μονοσύνολο. Τότε υπάρχει ακριβώς μια απεικόνιση $f : A \to Y$ και ο χώρος $X \cup_f Y$ συμβολίζεται $X/A$, αφού μπορεί να θεωρηθεί ως ο χώρος που παράγεται από το $X$ αν το $A$ «επικολληθεί» με ένα «σημείο».

Παρατηρούμε ότι αν ο $X$ είναι συμπαγής Hausdorff χώρος και το $A$ κλειστό, τότε ο $X/A$ είναι, επίσης, συμπαγής Hausdorff χώρος.

**Πρόταση 2.3.8.** *Έστωσαν $X$ και $W$ συμπαγείς Hausdorff χώροι και $g : X \to W$ συνεχής συνάρτηση επί του $W$, τέτοια ώστε για κάποιο $w_0 \in W$, το $g^{-1}(w_0)$ να είναι ένα κλειστό σύνολο $A$ και για $w \neq w_0$, το $g^{-1}(w)$ να είναι μόνο ένα σημείο του $X$. Τότε ο $W$ είναι ομοιομορφικός με τον $X/A$.*

Το παραπάνω προκύπτει άμεσα από την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 2.3.9.** *Έστωσαν $X$, $Y$ και $W$ συμπαγείς Hausdorff χώροι και $A$ ένα κλειστό υποσύνολο του $X$. Έστω, επίσης, η συνεχής συνάρτηση $f : A \to Y$ και η συνάρτηση $g : X \cup Y \to W$ συνεχής και επί του $W$. Εάν για κάθε $w \in W$, το $g^{-1}(w)$ είναι, είτε μόνο ένα σημείο του $X - A$, είτε, για κάποιο $y \in Y$, η ένωση του $\{y\}$ με το $f^{-1}(y)$ στο $A$, τότε ο $W$ είναι ομοιομορφικός με τον $X \cup_f Y$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\pi : X \cup Y \to X \cup_f Y$ η απεικόνιση ταύτισης. Η $g$, σύμφωνα με τις παραπάνω προϋποθέσεις, μπορεί να «παραχθεί» μέσω της $\pi$ ώστε να έχουμε το παρακάτω αντιμεταθετικό τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
X \cup Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & W \\
& X \cup_f Y \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

όπου η $k$ επάγεται από την $g$ και είναι 1-1 και επί λόγω αυτών των προϋποθέσεων. Θα δείξουμε ότι η $k$ είναι συνεχής. Πράγματι αν $C$ κλειστό στο $W$, τότε το $k^{-1}(C)$ θα είναι κλειστό, αν-ν το $\pi^{-1}\big(k^{-1}(C)\big)$ είναι κλειστό. Όμως, σύμφωνα με το διάγραμμα, $\pi^{-1}k^{-1}(C) = g^{-1}(C)$ με το $g^{-1}(C)$ να είναι κλειστό, αφού το $C$ είναι κλειστό και η $g$ συνεχής. Έτσι το $k^{-1}(C)$ είναι κλειστό και, συνεπώς, η $k$ είναι συνεχής.
Αφού οι $X \cup_f Y$ και $W$ είναι συμπαγείς Hausdorff χώροι, έπεται ότι η $k$ είναι ομοιομορφισμός. □

**Παράδειγμα 2.3.10.** Θεωρούμε την $S^{n-1}$ σαν σύνορο της $D^n$ και, έστω, $h_1 : D^n - S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ ένας ομοιομορφισμός. Έστω $z$ ένα σημείο της $S^{n-1}$ και ας θεωρήσουμε την $h_2 : S^{n-1} - \{z\} \to \mathbb{R}^n$ να είναι ο ομοιομορφισμός που δίνεται από την στερεογραφική προβολή.
Ορίζουμε την απεικόνιση $g : D^n \to S^n$ με

$$g(x) = \begin{cases} z\,, & \text{αν } x \in S^{n-1} \\ h_2^{-1}h_1(x)\,, & \text{αν } x \in D^n - S^{n-1} \end{cases},$$

Προφανώς η $g$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της Πρότασης 2.3.9 για $A = S^{n-1}$ και, έτσι, συμπεραίνουμε ότι ο $D^n/S^{n-1}$ είναι ομοιομορφικός με την $S^n$.
Έτσι η $S^n$ μπορεί να ιδωθεί ως ο χώρος που προκύπτει από την προσκόλληση ενός $n$-cell σε ένα σημείο.

## 2.4 ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ JORDAN-BROUWER

Για τις απαραίτητες έννοιες των κατευθυνόμενων συνόλων και ευθέων ορίων παραπέμπουμε στο τελευταίο κεφάλαιο.

**Λήμμα 2.4.1.** *Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $\{X_a\}$ η οικογένεια των συμπαγών υποσυνόλων του $X$, τα οποία είναι μερικώς διατεταγμένα μέσω του εγκλεισμού. Τότε η οικογένεια ομάδων $\{H_*(X_a)\}$ αποτελεί ένα ευθύ σύστημα, όπου οι ομομορφισμοί επάγονται από τις συναρτήσεις εγκλεισμού και ισχύει*

$$\varinjlim_a H_*(X_a) = H_*(X).$$

*Απόδειξη.* Για κάθε $X_a$, έστω ότι ο ομομορφισμός που επάγεται από την συνάρτηση εγκλεισμού είναι

$$g_{a*} : H_*(X_a) \to H_*(X)\,.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g : \sum_a H_*(X_a) \to H_*(X)$ με $g = \sum_a g_{a*}$ . Ας υποθέσουμε επίσης ότι $\sum_{i=1}^n x_{a_i} \in R$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει συμπαγές $X_b \subseteq X$, τέτοιο ώστε $X_{a_i} \subseteq X_b$, για κάθε $i$, και

$$\sum_{i=1}^{n} g^b_{a_i *}(x_{a_i}) = 0 \quad \text{στο} \quad H_*(X_b).$$

Τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & H_*(X_b) \arrow[dr, "g_{b*}"] & \\ \sum_{i=1}^n H_*(X_{a_i}) \arrow[ur, "\sum g^b_{a_i *}"] \arrow[rr, "g"] & & H_*(X) \end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό και, συνεπώς, $g\big(\sum_{i=1}^n H_*(X_{a_i})\big) = 0$ και $R \subseteq \ker g$. Έτσι από την $g$ επάγεται ο ομομορφισμός

$$\overline{g} : \sum_a H_*(X_a)/R = \varinjlim_a H_*(X_a) \to H_*(X).$$

Σε κάθε κλάση ομολογίας $x \in H_n(x)$ αναπαριστούμε το $x$ από τον κύκλο $\sum n_j \phi_j$. Αφού $\sigma_n$ συμπαγές, άρα $\phi_j(\sigma_n)$ συμπαγές στο $X$, για κάθε $j$. Έτσι η αλυσίδα $\sum n_j \phi_j$ είναι υποστηριζόμενη «supported» στο σύνολο $\bigcup_j \phi_j(\sigma_n)$, το οποίο είναι συμπαγές, αφού το άθροισμα είναι πεπερασμένο. Έτσι

$$\bigcup_j \phi_j(\sigma_n) = X_a, \text{ για κάποιο } a$$

και η $\sum n_j \phi_j$ αναπαριστά κάποια κλάση ομολογίας $x_a \in H_n(X_a)$. Επιπλέον θα ισχύει ότι $g_{a*}(x_a) = x$. Άρα το $x$ βρίσκεται στην εικόνα του $\overline{g}$ και, συνεπώς, ο $\overline{g}$ είναι επιμορφισμός.

Έστω ότι $\sum_{i=1}^n x_{a_i} \in \sum_a H_n(X_a)$ με $g\big(\sum_{i=1}^n x_{a_i}\big) = 0$. Κάθε $x_{a_i}$ αναπαριστάνεται από έναν κύκλο $\sum_j n_{ij}\phi_{ij} \in x_{a_i}$. Έτσι το $g\big(\sum_{i=1}^n a_i\big)$ αναπαριστάνεται στον $X$ με τον κύκλο $\sum_{i,j} n_{ij}\phi_{ij}$.

Αφού αυτός ο κύκλος έχουμε υποθέσει ότι είναι και σύνορο, θα υπάρχει μια $(n+1)$-αλυσίδα $\sum_k m_k \psi_k \in X$ με

$$\partial\big(\textstyle\sum_k m_k \psi_k\big) = \displaystyle\sum_{i,j} n_{ij}\phi_{ij}.$$

Ορίζουμε ένα υποσύνολο του $X$, το

$$X_b = \Big(\bigcup_k \psi_k(\sigma_{n+1})\Big) \cup \Big(\bigcup_i X_{a_i}\Big)$$

που είναι συμπαγές ως ένωση συμπαγών συνόλων.

Αφού το $\sum_k m_k \psi_k$ είναι μια $(n+1)$-αλυσίδα στον $X_b$ με $\partial\big(\sum_k m_k\psi_k\big) = \sum_{i,j} n_{ij}\phi_{ij}$, έπεται ότι το

$$\sum_{i=1}^n g^b_{a_i \sharp}\big(\textstyle\sum_j n_{ij}\phi_{ij}\big)$$

είναι ένα σύνορο στην $S_n(X_b)$ και $\sum_{i=1}^n g^b_{a_i *}(x_{a_i}) = 0$ στην $H_n(X_b)$.

Συνεπώς $\sum_{i=1}^n x_{a_i} \in R$ και $R = \ker g$ που σημαίνει ότι ο $\overline{g}$ είναι ένας ισομορφισμός.

$\square$

**Λήμμα 2.4.2.** *Αν $A \subseteq S^n$ και ομοιομορφικό με το $I^k$ για κάποιο $k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, τότε*

$$H_j(S_n - A) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}\,, & \text{για } j = 0 \\ 0\,, & \text{για } j > 0 \end{cases}.$$

*Απόδειξη.* Επαγωγικά: Για $k = 0$ : Το $A$ είναι ένα σημείο και, ως γνωστόν, το $S^n - A$ είναι ομοιομορφικό με τον $\mathbb{R}^n$, οπότε προκύπτει το ζητούμενο.
Έστω ότι η υπόθεση ισχύει για $k < m$ και έστω $h : A \to I^m$ ένας ομοιομορφισμός. Διαιρούμε τον $m$-κύβο $I^m$ σε δυο κομμάτια

$$I^+ = \big\{(x_1, \ldots, x_m) \in I^m \mid x_1 \geqslant 0\big\},$$
$$I^- = \big\{(x_1, \ldots, x_m) \in I^m \mid x_1 \leqslant 0\big\},$$

οπότε $I^+ \cap I^-$ ομοιομορφικό με τον $I^{m-1}$. Την αντίστοιχη αποσύνθεση του $A$ συμβολίζουμε $A^+ = h^{-1}(I^+)$ και $A^- = h^{-1}(I^-)$.
Τώρα μπορούμε να γράψουμε

$$S^n - (A^+ \cap A^-) = (S^n - A^+) \cup (S^n - A^-),$$

με τα σύνολα $S^n - A^+$, $S^n - A^-$ να ικανοποιούν τις προϋποθέσεις της Mayer-Vietoris ακολουθίας. Έτσι έχουμε την exact ακολουθία

$$\begin{aligned} H_{j+1}\big(S^n - (A^+ \cap A^-)\big) \longrightarrow H_j(S^n - A) &\longrightarrow H_j(S^n - A^+) \oplus H_j(S^n - A^-) \\ &\longrightarrow H_j\big(S^n - (A^+ \cap A^-)\big) \end{aligned}$$

Αφού υποθέσαμε ότι το λήμμα ισχύει για $k$, άρα για $j > 0$, οι δυο ακραίοι όροι είναι μηδενικοί και συνεπώς προκύπτει ο ισομορφισμός

$$H_j(S^n - A) \xrightarrow[i_*^+ \oplus i_*^-]{\approx} H_j(S^n - A^+) \oplus H_j(S^n - A^-).$$

Επομένως αν για κάποιο $x \in H_j(S^n - A)$ ισχύει $x \neq 0$, τότε είτε $i_*^+(x) \neq 0$, είτε $i_*^-(x) \neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $i_*^+(x) \neq 0$.
Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία διαιρώντας το $A^+$ σε δυο κομμάτια που η τομή τους είναι ομοιομορφική με το $I^{m-1}$. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία υποσυνόλων της σφαίρας $S^n$, την

$$A = A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$$

με την ιδιότητα ότι ο εγκλεισμός

$$S^n - A \subseteq S^n - A_k$$

εισάγει έναν ομομορφισμό στην ομολογία στέλνοντας το $x$ σε ένα μη-μηδενικό στοιχείο της $H_j(S^n - A_k)$ και, επιπλέον, ότι η $\bigcap_i A_i$ είναι ομοιομορφική με τον $I^{m-1}$.

Τώρα, κάθε συμπαγές υποσύνολο του $S^n - \bigcap_i A_i$ θα περιέχεται σε κάποιο $S^n - A_k$. Έτσι, σύμφωνα με το Λήμμα 2.4.1, ο ισομορφισμός παραγόντων στο ευθύ όριο

$$\varinjlim_k H_j(S^n - A_k)$$

πρέπει, επίσης, να είναι ισόμορφος με την $H_j\big(S^n - \bigcap_i A_i\big)$.
Έτσι όπως έχει γίνει η κατασκευή το στοιχείο του ευθέως ορίου που παριστάνεται με $x$ είναι μη-μηδενικό και $H_j\big(S^n - \bigcap_i A_i\big) = 0$, άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο $x$ και $H_j(S^n - A) = 0$. □

**Πόρισμα 2.4.3.** *Αν $B \subseteq S^n$ και ομοιομορφικό με την $S^k$ για κάποιο $k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, τότε η $H_*(S^n - B)$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με δυο γεννήτορες, έναν στην διάσταση $0$ και έναν στην διάσταση $n-k-1$.*

*Απόδειξη.* Επαγωγικά. Για $k = 0$, η $S^k = S^0$ είναι δυο σημεία και το $S^n - B$ έχει τον ίδιο τύπο ομοτοπίας με την $S^{n-1}$. Γνωρίζουμε ότι η $H_*(S^{n-1})$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με δυο γεννήτορες, έναν στην διάσταση $0$ και έναν στην διάσταση $n-1 = n-0-1$. Άρα η υπόθεση ισχύει για $k = 0$.
Έστω ότι η υπόθεση ισχύει $k-1$. Μπορούμε να γράψουμε $B = B^+ \cup B^-$, όπου $B^+$, $B^-$ ομοιομορφικά με τα κλειστά ημισφαίρια της $S^k$ και $B^+ \cap B^-$ ομοιομορφικό με την $S^{k-1}$. Οπότε για την κάλυψη $S^n - (B^+ \cap B^-) = (S^n - B^+) \cup (S^n - B^-)$ η Mayer-Vietoris ακολουθία είναι

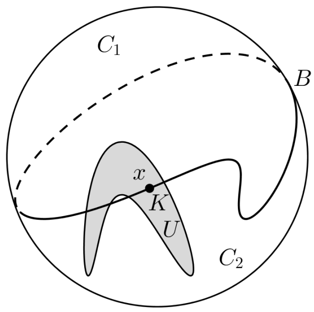
$$\begin{aligned} H_{j+1}(S^n - B^+) \oplus H_{j+1}(S^n - B^-) &\longrightarrow H_{j+1}\big(S^n - (B^+ \cap B^-)\big) \\ &\longrightarrow H_j(S^n - B) \\ &\longrightarrow H_j(S^n - B^+) \oplus H_j(S^n - B^-) \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 2.4.2 και οι δυο ακριανοί όροι της παραπάνω ακολουθίας είναι μηδενικοί για $j > 0$. Ο ισομορφισμός που προκύπτει παρέχει το απαραίτητο επαγωγικό βήμα για να ολοκληρωθεί η απόδειξη. □

**Θεώρημα 2.4.4.** *( ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ JORDAN-BROUWER) Μια $(n-1)$-σφαίρα, εμφυτευμένη στην $S^n$, διαχωρίζει την $S^n$ σε $2$ συνιστώσες και είναι το σύνορο κάθε μιας από αυτές.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι το εμφυτευμένο αντίγραφο της $(n-1)$-σφαίρας στην $S^n$ είναι το σύνολο $B \subseteq S^n$. Από το Πόρισμα 2.4.3 η $H_*(S^n - B)$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με δυο γεννήτορες που και οι δυο είναι μηδενικής διάστασης, αφού $k = n-1$, άρα $n-k-1 - n - (n-1) - 1 = 0$. Συνεπώς το $S^n - B$ έχει δυο συνεκτικές συνιστώσες.
Προφανώς $B$ κλειστό στην $S^n$, άρα $S^n - B$ ανοικτό, άρα και τοπικά οδικά συνεκτικό. Άρα οι οδικές συνιστώσες είναι συνιστώσες.
Έστωσαν $C_1$ και $C_2$ οι συνιστώσες της $S^n - B$. Αφού το $C_1 \cup B$ είναι κλειστό, το σύνορο $\partial C_1 = \overline{C}_1 - \mathring{C}_1$ του $C_1$ περιέχεται στο $B$. Μένει να αποδειχθεί ότι

$B \subseteq \partial C_1$.
Έστω $x \in B$ και $U$ μια περιοχή του στην $S^n$. Αφού το $B$ είναι ένα εμφυτευμένο αντίγραφο της $S^{n-1}$, υπάρχει $K \subseteq B \cap U$, τέτοιο ώστε $x \in K$ και $B - K$ ομοιομορφικό με την $D^{n-1}$.

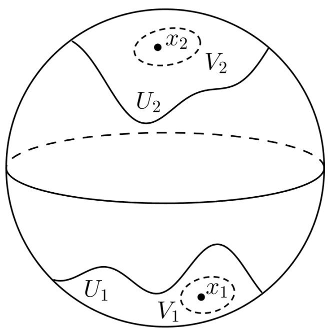



Από το Λήμμα 2.4.2 έχουμε ότι $H_*\big(S^n - (B - K)\big) \approx \mathbb{Z}$ με ένα γεννήτορα μηδενικής διάστασης. Συνεπώς το $S^n - (B - K)$ έχει μια οδική συνιστώσα. Έστω $p_1 \in C_1$, $p_2 \in C_2$ και $\gamma$ ένα μονοπάτι στο $S^n - (B - K)$ μεταξύ των $p_1$ και $p_2$. Αφού τα $C_1$ και $C_2$ είναι διακριτές οδικές συνιστώσες στην $S^n - B$, το μονοπάτι $\gamma$ πρέπει να τέμνει το $K$ και, επομένως, το $K$ περιέχει σημεία των $\overline{C}_1$ και $\overline{C}_2$.
Δείξαμε ότι τυχούσα περιοχή του $x$ περιέχει στοιχεία τόσο του $\overline{C}_1$ όσο και του $\overline{C}_2$, συνεπώς, $x \in \partial C_1$. Άρα $B \subseteq \partial C_1$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα του διαχωριστικού θεωρήματος είναι το

**Θεώρημα 2.4.5.** *(BROUWER'S THEOREM ON THE INVARIANCE OF DOMAIN) Έστωσαν $U_1$ και $U_2$ υποσύνολα της $S^n$ και $h : U_1 \to U_2$ ομοιομορφισμός. Αν το $U_1$ είναι ανοικτό, τότε και το $U_2$ είναι ανοικτό.*

*Απόδειξη.* Έστω $x_2 = h(x_1)$ σημείο του $U_2$. Έστω $V_1$ μια περιοχή του $x_1$ στο $U_1$ ομοιομορφική με τον δίσκο $D^{n-1}$ και τέτοια ώστε το σύνορο $\partial V_1$ να είναι ομοιομορφικό με την $S^{n-1}$. Θέτουμε $V_2 = h(V_1)$ και συμβολίζουμε $\partial V_2 = h(\partial V_1)$, με το $\partial V_2$ να είναι υποσύνολο της $S^n$ ομοιομορφικό με την $S^{n-1}$.



Από το Λήμμα 2.4.2 το $S^n - V_2$ είναι συνεκτικό, ενώ από το θεώρημα διαχωρισμού, το $S^n - \partial V_2$ έχει δυο συνιστώσες. Συνεπώς το $S^n - \partial V_2$ είναι η ένωση των ξένων μεταξύ τους συνόλων $S^n - V_2$ και $V_2 - \partial V_2$, τα οποία είναι και τα δυο συνεκτικά. Επομένως είναι οι δυο συνιστώσες του $S^n - \partial V_2$. Από αυτό έπεται ότι το $V_2 - \partial V_2$ είναι ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο $U_2$ και $x_2 \in V_2 - \partial V_2$. Συνεπώς το $U_2$ είναι, επίσης, ανοικτό. □

## 2.5 ΣΧΕΤΙΚΗ ΟΜΟΛΟΓΙΑ

**Ορισμός 2.5.1.** *Έστω $A$ ένας υπόχωρος του $X$. Θα λέμε ότι δυο αλυσίδες του $X$ είναι* **ισοδύναμες** modulo $A$, *αν η διαφορά τους είναι μια αλυσίδα στο $A$.*

**Ορισμός 2.5.2.** *Έστω $C = \{C_n, \partial\}$ ένα αλυσιδωτό πολύπλοκο (chain complex). Το $D = \{D_n, \partial\}$ είναι ένα αλυσιδωτό υποπολύπλοκο (***chain subcomplex***) του $C$, αν $D_n \subseteq C_n$, για κάθε $n$, και ο συνοριακός τελεστής για το $D$ είναι ο περιορισμός στο $D$ του συνοριακού τελεστή για το $D$.*

Μπορούμε να ορίσουμε το αλυσιδωτό πολύπλοκο (**chain complex) πηλίκο**

$$C/D = \{C_n/D_n, \partial'\},$$

όπου $\partial'\{c\} = \{\partial c\}$, όπου $\{c\}$ το σύμπλοκο που περιέχει το $c$. Χάριν απλότητας ο τόνος θα παραλείπεται και όλοι οι συνοριακοί τελεστές θα συμβολίζονται με $\partial$.

Υπάρχει μια φυσική σύντομη ακριβής ακολουθία από αλυσιδωτά πολύπλοκα (chain complexes) και αλυσιδωτές απεικονίσεις (chain maps) η

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} C/D \longrightarrow 0$$

όπου $i$ είναι ο εγκλεισμός και $\pi$ η προβολή. Από το Θεώρημα 2.1.10 προκύπτει η σύντομη ακριβής long exact ακολουθία ομολογιακών ομάδων

$$\cdots \longrightarrow H_n(D) \xrightarrow{i_*} H_n(C) \xrightarrow{\pi_*} H_n(C/D) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(D) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

Για λόγους σαφήνειας θα συμβολίζουμε με $\{\ \}$ την σχέση ισοδυναμίας στο $C/D$ και με $\langle\ \rangle$ την σχέση ισοδυναμίας στην ομολογία.

Για να δούμε πώς ορίζεται ο συνδετικός ομομορφισμός $\Delta$ ας θεωρήσουμε έναν κύκλο $\{c\}$ στην $Z_n(C/D)$. Για να καθορίσουμε τον $\Delta\big(\langle\{c\}\rangle\big)$ αναπαριστούμε τον $\{c\}$ με ένα στοιχείο $C$ που έχει σύνορο $\partial c \in D_{n-1}$. Προφανώς $\partial c \in Z_{n-1}(D)$, άρα θα αναπαριστά μια κλάση στην $Z_{n-1}(D)$. Οπότε

$$\Delta\big(\langle\{c\}\rangle\big) = \langle\partial c\rangle.$$

Πιο γενικά, αν $E \subseteq C \subseteq D$ είναι chain complexes και subcomplexes, τότε θα υπάρχει μια short exact ακολουθία από chain complexes και chain maps

$$0 \longrightarrow D/E \longrightarrow C/E \longrightarrow C/D \longrightarrow 0$$

Στην αντίστοιχη long exact ακολουθία ομολογιακών ομάδων

$$\cdots \longrightarrow H_n(D/E) \longrightarrow H_n(C/E) \longrightarrow H_n(C/D) \xrightarrow{\Delta'} H_{n-1}(D/E) \longrightarrow \cdots$$

ο συνδετικός ομομορφισμός δίνεται από $\Delta'\big(\langle\{c\}\rangle\big) = \langle\{\partial c\}\rangle$, ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί ως η σύνθεση

$$H_n(C/D) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(D) \xrightarrow{\pi_*} H_{n-1}(D/E),$$

που είναι φυσική απόρροια του ότι αν $E' \subseteq C' \subseteq D'$ είναι chain complexes και subcomplexes και $f : C \to C'$ μια chain map τέτοια ώστε $f(D) \subseteq D'$ και $f(E) \subseteq E'$, τότε οι επαγόμενοι ομομορφισμοί στις ομολογιακές ομάδες δίνουν έναν μετασχηματισμό μεταξύ των long exact homology ακολουθιών, στις οποίες κάθε ορθογώνιο είναι αντιμεταθετικό.

Στο εξής, όταν θα λέμε **ζεύγος χώρων** $(X, A)$ θα εννοούμε έναν χώρο $X$ με τον υποχώρο του $A$.
Έστω $(X, A)$ ένα ζευγάρι χώρων. Με $S_*(A)$ θα συμβολίζουμε ένα υποπολύπλοκο (subcomplexes) της $S_*(X)$ και ορίζουμε σαν **singular chain complex** του $X$ ως προς $\mathrm{mod} A$ την

$$S_*(X, A) = S_*(X)/S_*(A).$$

Η ομολογία αυτού του chain complex λέγεται σχετική singular homology του $X$ $\mathrm{mod} A$ και δίνεται από την σχέση

$$H_*(X, A) = H_n\big(S_*(X)/S_*(A)\big).$$

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει προηγουμένως, κάθε ζεύγος $(X, A)$ έχει μια μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας (long exact homology)

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{\pi_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

Με αυτήν την έννοια η ομολογία $H_*(X, A)$ είναι ένας τρόπος μέτρησης του πόσο απέχει η $i_* : H_*(A) \to H_*(X)$ ώστε να είναι ισομορφισμός. Έτσι ο $i_*$ είναι ισομορφισμός βαθμωτών ομάδων αν-ν $H_*(X, A) = 0$.

**Πρόταση 2.5.3.** *Αν σε ένα ζεύγος $(X, A)$ ο $A$ είναι παραμορφωμένη ανάκληση (deformation retract) του $X$, τότε $H_*(X, A) = 0$.*

Γενικότερα, αν $(X, A, B)$ είναι μια τριάδα χώρων με $B \subseteq A \subseteq X$, θα έχουμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία από αλυσιδωτά πολύπλοκα

$$0 \longrightarrow S_*(A, B) \longrightarrow S_*(X, B) \longrightarrow S_*(X, A) \longrightarrow 0$$

η οποία μας δίνει την αντίστοιχη μακρά ακριβή ακολουθία των σχετικά ομολογιακών ομάδων. Ορίζουμε $S_*(\varnothing) = 0$, όποτε $S_*(X, \varnothing) = S_*(X)$. Συνεπώς όλες οι ομολογίες ομάδων μπορούν να ιδωθούν ως ομολογίες ζευγών.

**Ορισμός 2.5.4.** *Έστωσαν δυο ζεύγη $(X, A)$ και $(Y, B)$. Ονομάζουμε* **απεικόνιση ζευγών** $f : (X, A) \to (Y, B)$ *μια συνεχή συνάρτηση* $f : X \to Y$ *για την οποία* $f(A) \subseteq B$.

Παρατηρούμε ότι για μια τέτοια απεικόνιση θα ισχύει $f_\sharp\big(S_*(A)\big) \subseteq S_*(B)$, δηλαδή θα υπάρχει ένας ομομορφισμός $f_\sharp : S_*(X, A) \to S_*(Y, B)$, ο οποίος είναι απεικόνιση αλυσίδας καθώς και ομομορφισμός στην σχετική ομολογία ομάδων.

**Ορισμός 2.5.5.** *Δυο απεικονίσεις ζευγών* $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ *είναι* **ομοτοπικές** *ως απεικονίσεις ζευγών, αν υπάρχει μια απεικόνιση ζευγών* $F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$, *τέτοια ώστε*

$$F(x, 0) = f(x) \quad \textit{και} \quad F(x, 1) = g(x).$$

**Θεώρημα 2.5.6.** *Εάν* $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ *είναι ομοτοπικές ως απεικονίσεις ζευγών, τότε θα ισχύει ότι* $f_* = g_*$, *ως ομομορφισμοί από την* $H_*(X, A)$ *στην* $H_*(Y, B)$.

*Απόδειξη.* Ορίζουμε τις απεικονίσεις $i_0, i_1 : (X, A) \to (X \times I, A \times I)$, για τις οποίες ισχύει $i_0(x) = (x, 0)$ και $i_1(x) = (x, 1)$. Αρκεί να δειχθεί ότι οι $i_{0\sharp}, i_{1\sharp}$ είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές.
Θα χρησιμοποιήσουμε τεχνική παρόμοια με εκείνη στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1: Κατασκευάζουμε τον φυσικό ομομορφισμό $T : S_n(X) \to S_{n+1}(X \times I)$ για τον οποίο θα ισχύει

$$\partial T + T\partial = i_{0\sharp} - i_{1\sharp}.$$

Παρατηρούμε ότι ο περιορισμός της $T$ έχει $T\big(S_n(A)\big) \subseteq S_{n+1}(A \times I)$, άρα προκύπτει η ζητούμενη αλυσίδα ομοτοπίας $T : S_n(X, A) \to S_{n+1}(X \times I, A \times I)$. □

**Παράδειγμα 2.5.7.** Για να αποσαφηνίσουμε την διαφορά που υπάρχει μεταξύ των απεικονίσεων που είναι ομοτοπικές από εκείνες που είναι ομοτοπικές ως απεικονίσεις ζευγών, θεωρούμε $X = [0, 1]$, $A = \{0, 1\}$, $Y = S^1$ και $B = \{1\}$. Για τις απεικονίσεις $f, g : X \to Y$ με $f(x) = e^{2\pi i x}$, $g(x) = 1$ γνωρίζουμε ότι είναι ομοτοπικές απεικονίσεις.
Όμως ως απεικονίσεις ζευγών $(X, A) \to (Y, B)$ δεν είναι ομοτοπικές.

**Θεώρημα 2.5.8.** *Έστω ένα ζεύγος χώρων* $(X, A)$ *και ένα σύνολο* $U \subseteq A$, *τέτοιο ώστε* $\overline{U} \subseteq A^\circ$. *Τότε η απεικόνιση εγκλεισμού*

$$i : (X - U, A - U) \to (X, A)$$

*επάγει έναν ισομορφισμό*

$$i_* : H_*(X - U, A - U) \to H_*(X, A)$$

*στην σχετική ομολογία ομάδων.*
*Δηλαδή το υποσύνολο* $U$ *μπορεί να αφαιρεθεί χωρίς να επηρεάσει την ομολογία.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathcal{U} = \{X - U, A^o\}$ μια κάλυψη του $X$. Αφού τα εσωτερικά τους καλύπτουν τον $X$, έπεται ότι θα καλύπτουν και τον $A$. Έστω $\mathcal{U}'$ η αντίστοιχη κάλυψη του $A$ με $\mathcal{U}' = \{A - U, A^o\}$. Τότε από το Θεώρημα 2.2.3 προκύπτει ότι οι εγκλεισμοί αλυσίδων $i : S_*^{\mathcal{U}}(X) \to S_*(X)$ και $i' : S_*^{\mathcal{U}'}(A) \to S_*(A)$ επάγουν αντίστοιχους ισομορφισμούς στην ομολογία.
Θεωρώντας το $S_*^{\mathcal{U}'}(A)$ σαν ένα subcomplex της $S_*^{\mathcal{U}}(X)$, θα υπάρχει μια αλυσιδωτή απεικόνιση από αλυσιδωτά πολύπλοκα

$$j : S_*^{\mathcal{U}}(X)\big/S_*^{\mathcal{U}'}(A) \longrightarrow S_*(X)\big/S_*(A) = S_*(X, A).$$

Έτσι οι απεικονίσεις $i$, $i'$ και $j$ δίνουν το παρακάτω διάγραμμα ομολογιακών ο-μάδων.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n\big(S_*^{\mathcal{U}'}(A)\big) \arrow[r] \arrow[d, "i'_*"] & H_n\big(S_*^{\mathcal{U}}(X)\big) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"] & H_n\big(S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*^{\mathcal{U}'}(A)\big) \arrow[r] \arrow[d, "j_*"] & H_{n-1}\big(S_*^{\mathcal{U}'}(A)\big) \arrow[r] \arrow[d, "i'_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X, A) \arrow[r] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Α-
φού οι $i_*$ και $i'_*$ είναι ισομορφισμοί, αποδεικνύεται ότι και η $j_*$ είναι, επίσης, ισομορφισμός. Έτσι η $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο υποομάδων:

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) = S_*(X - U) + S_*(A^o),$$

το οποίο δεν είναι απαραίτητα ευθύ άθροισμα.
Ομοίως μπορούμε να γράψουμε

$$S_*^{\mathcal{U}'}(A) = S_*(A - U) + S_*(A^o).$$

Από την στοιχειώδη θεωρία ομάδων γνωρίζουμε ότι

$$S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*^{\mathcal{U}'}(A) \approx S_*(X - U)/S_*(A - U) = S_*(X - U, A - U).$$

Έτσι, αν συνθέσουμε τον παραπάνω ισομορφισμό με την αλυσιδωτή απεικόνιση $j$, τότε επάγεται στην ομολογία ο ισομορφισμός

$$H_*(X - U, A - U) \to H_*(X, A)$$

που μας δίνει το ζητούμενο. □

**Ορισμός 2.5.9.** *Μια σύντομη ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

*θα είναι διασπάσιμα ακριβής* **split exact** *εάν ο $f(A)$ είναι ευθύς προσθετέος του $B$.*

Έστω ο τοπολογικός χώρος $X$, ένα σημείο $y$ και η απεικόνιση $\alpha : X \to y$ επί του $y$. Τότε ορίζεται ο επαγόμενος ομομορφισμός ομολογίας

$$\alpha_* : H_*(X) \to H_*(y).$$

Ο πυρήνας της παραπάνω απεικόνισης, που είναι υποομάδα της $H_*(X)$, ονομάζεται ελαττωμένη ομολογία (reduced homology) ομάδα του $X$ και συμβολίζεται με $\widetilde{H}_*(X)$.
Όπως έχουμε αποδείξει στο παράδειγμα (*) $H_i(y) = 0\,,\ \forall\, i \neq 0$, άρα $\widetilde{H}_i(X) = H_i(X)$, για $i \neq 0$.
Επιπλέον, αν $X \neq \varnothing$, τότε η $\alpha_*$ είναι ένας επιμορφισμός, συνεπώς η $\widetilde{H}_0(X)$ θα είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με ένα στοιχείο βάσης λιγότερο από την $H_0(X)$.
Παρατηρούμε ότι για μια απεικόνιση $f : X \to Y$ θα ισχύει ότι $f_* : \widetilde{H}_*(X) \to \widetilde{H}_*(Y)$. Έτσι, για παράδειγμα η $\widetilde{H}_*(S^n)$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με ένα στοιχείο βάσης στην διάσταση $n$.

**Πρόταση 2.5.10.** *Εάν $x_0 \in X$, τότε $H_*(X, x_0) \approx \widetilde{H}_*(X)$.*

*Απόδειξη.* Στην ακριβή ακολουθία ομολογίας για τα ζεύγη $(X, x_0)$ ο ομομορφισμός $H_i(x_0) \to H_i(X)$ είναι μονομορφισμός, $\forall\, i$. Έτσι η μακρά ακριβής ακολουθία διασπάται σε μια συλλογή σύντομων ακριβών ακολουθιών

$$0 \longrightarrow H_i(x_0) \xrightarrow{i_*} H_i(X) \xrightarrow{j_*} H_i(X, x_0) \longrightarrow 0.$$

Από την απεικόνιση $\alpha : X \to x_0$ επάγεται ο $\alpha_* : H_i(X) \to H_i(x_0)$ ο οποίος διασπά την ακολουθία. Συνεπώς υπάρχει ένας ομομορφισμός $\beta : H_i(X, x_0) \to H_i(X)$, τέτοιος ώστε $j_*\beta = \mathrm{id}_{H_i(X,x_0)}$.
Αυτή η απεικόνιση $\beta$ είναι, επομένως, ένας ισομορφισμός επί της υποομάδας $\widetilde{H}_i(X)$. □

# Κεφάλαιο 3

# ΒΑΘΜΟΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ

Στην πρώτη ενότητα θα μελετήσουμε το βαθμό ενός ενδομορφισμού στον κύκλο και στην επόμενη θα γενικεύσουμε σε οποιαδήποτε σφαίρα.

## 3.1 Η ΟΜΟΤΟΠΙΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε απεικονίσεις από τον κύκλο στον εαυτό του από ομοτοπική σκοπιά. Κρίνεται απαραίτητο να υπενθυμίσουμε ότι τα σημεία του κύκλου $S^1 \subset \mathbb{C}$ είναι της μορφής $e^{2\pi it}$ και να ορίσουμε την απεικόνιση ταυτοποίησης $q : I \longrightarrow S^1$ με $q(t) = e^{2\pi it}$.

Έστω, επίσης, η συνεχής απεικόνιση $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(1) = n \in \mathbb{Z}$. Μπορούμε να ορίσουμε την σημειακή απεικόνιση $\hat{\varphi} : S^1 \longrightarrow S^1$, τέτοια ώστε

- $\hat{\varphi}(1) = 1$.
- $\hat{\varphi}(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i\varphi(t)}$.
- το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & S^1 \end{array}$$

  να είναι μεταθετικό.

Με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε ότι καθώς το όρισμα της συνάρτησης $\varphi$ διατρέχει το διάστημα $[0, 1]$ οι αντίστοιχες τιμές της διατρέχουν είτε το διάστημα $[0, n]$, αν $n \geqslant 0$, είτε το διάστημα $[n, 0]$, αν $n < 0$. Συνεπώς η $\hat{\varphi}(1)$ είναι μια συνάρτηση που καθώς το όρισμά της διατρέχει μια φορά τον κύκλο, ξεκινώντας από την θέση 1 και καταλήγοντας στην θέση 1, οι αντίστοιχες τιμές της διατρέχουν τον κύκλο $n$ φορές. Πιο συγκεκριμένα, αν $n > 0$, η περιέλιξη αυτή είναι $n$ φορές αριστερόστροφα, ενώ αν $n < 0$, είναι $n$ περιελίξεις δεξιόστροφα.

Θα αποδείξουμε ότι κάθε απεικόνιση $f : S^1 \longrightarrow S^1$ συμπίπτει με την $\hat{\varphi}$ για κάποια $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι μπορεί κανείς να «ξετυλίξει» την απεικόνιση.

**Πρόταση 3.1.1.** *Για οποιαδήποτε απεικόνιση $f : S^1 \longrightarrow S^1$ με $f(1) = 1$, υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\varphi(0) = 0$ και $f(j) = \hat{\varphi}(j),\ j \in S^1$.*

*Απόδειξη.* Αρχικά θα αποδείξουμε την μοναδικότητα. Έστω ότι οι συναρτήσεις $\varphi, \psi : (I, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ είναι τέτοιες ώστε $\hat{\varphi} = \hat{\psi} : S^1 \longrightarrow S^1$, δηλαδή $e^{2\pi i\varphi(t)} = e^{2\pi i\psi(t)}$. Συνεπώς $\varphi(t) - \psi(t) \in \mathbb{Z},\ \forall\, t \in I$. Έτσι η συνάρτηση $\delta : I \longrightarrow \mathbb{Z}$ με

$$\delta(t) = \varphi(t) - \psi(t)$$

είναι συνεχής και αφού $I$ συνεκτικός χώρος και $\mathbb{Z}$ διακριτός, η $\delta$ θα είναι σταθερή απεικόνιση. Όμως

$$\delta(0) = \varphi(0) - \psi(0) = 0 - 0 = 0.$$

Άρα $\delta(t) = 0\,,\ \forall\, t \in I$, συνεπώς $\varphi = \psi$.
Μένει να δείξουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $\varphi$ με τις παραπάνω ιδιότητες. Ας θεωρήσουμε το κύριο όρισμα $\log$, από τον μιγαδικό λογάριθμο. Δηλαδή για $z = r\, e^{ia}\,,\ r > 0\,,\ -\pi < a < \pi$, έχουμε

$$\log(z) = \ln(r) + i\, a,$$

όπου $\ln$ η φυσική λογαριθμική συνάρτηση.
Έστω $h : I \longrightarrow S^1$, τέτοια ώστε

$$h(t) = f\big(e^{2\pi i t}\big).$$

Αφού $I$ και $S^1$ είναι συμπαγείς χώροι η $h$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, οπότε θα υπάρχει διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ του $I$, τέτοια ώστε

$$|h(t) - h(t_j)| < 2,$$

για $t \in [t_j, t_{j+1}]$ και $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Άρα

$$h(t) \neq -h(t_j) \quad \Rightarrow \quad h(t)\, h^{-1}(t_j) \neq -1.$$

Επομένως ο $\log\big(h(t)\, h^{-1}(t_j)\big)$ είναι καλά ορισμένος. Για $t \in [t_j, t_{j+1}]$ θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\log\big(\tfrac{h(t_1)}{h(t_0)}\big) + \ldots + \log\big(\tfrac{h(t_j)}{h(t_{j-1})}\big) + \log\big(\tfrac{h(t)}{h(t_j)}\big)\Big).$$

Η $\varphi$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής με πραγματικές τιμές. Αφού $h(t_0) = h(0) = 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
e^{2\pi i\varphi(t)} &= e^{\log\left(\frac{h(t_1)}{h(t_0)}\right)+\ldots+\log\left(\frac{h(t_j)}{h(t_{j-1})}\right)+\log\left(\frac{h(t)}{h(t_j)}\right)} \\
&= e^{\log(h(t_1))-\log(h(t_0))+\ldots+\log(h(t_j))-\log(h(t_{j-1}))+\log(h(t))-\log(h(t_j))} \\
&= e^{\log\left(\frac{h(t)}{h(t_0)}\right)} \\
&= \frac{h(t)}{h(t_0)} \\
&= h(t) \\
&= f\left(e^{2\pi i t}\right).
\end{aligned}$$

□

Συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι το επόμενο θεμελιώδες αποτέλεσμα της ενότητας:

**Θεώρημα 3.1.2.** *Για οποιαδήποτε απεικόνιση $f : S^1 \longrightarrow S^1$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(j) = f(1)\,\hat{\varphi}(j),\ j \in S^1$.*

*Απόδειξη.* Έστω συνάρτηση $g : S^1 \longrightarrow S^1$ με τύπο

$$g(j) = f^{-1}(1)\,f(j)\,.$$

Αφού $g(1) = f^{-1}(1)\,f(1) = 1$, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.1 θα υπάρχει μοναδική σημειακή συνάρτηση $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $g(j) = \hat{\varphi}(j)\,,\ \forall\, j \in S^1$. Επομένως για κάθε $j \in S^1$,

$$\hat{\varphi}(j) = f^{-1}(1)\,f(j) \quad \Rightarrow \quad f(j) = f(1)\,\hat{\varphi}(j).$$

□

Έστω οι συναρτήσεις $\varphi$ και $\varphi_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε

- $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(1) = n \in \mathbb{Z}$,
- $\varphi_n(s) = ns\,,\ \forall\, s \in I$,

και το σύνολο $A = \{0, 1\}$.
Σύμφωνα με όσα έχουμε προαναφέρει, αφού $\varphi|_A = \varphi_n|_A$ ($\varphi(0) = \varphi_n(0)$ και $\varphi(1) = \varphi_n(1)$) και για την συνεχή απεικόνιση $H : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$H(s,t) = (1-t)\,\varphi(s) + tns$$

ισχύουν

- $H(0,t) = 0 = \varphi(0) = \hat{\varphi}_n(0)$,

- $H(1,t) = n = \varphi(1) = \hat{\varphi}_n(1)$,

προκύπτει ότι οι συναρτήσεις $\varphi$ και $\varphi_n$ είναι ομοτοπικές σχετικά ως προς το σύνολο $A$. Αφήνοντας την εκθετική συνάρτηση να δράσει επί των $\varphi$ και $\varphi_n$ έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

**Λήμμα 3.1.3.** *Έστω η συνάρτηση $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(1) = n \in \mathbb{Z}$. Τότε θα ισχύει $\hat{\varphi} \simeq \hat{\varphi}_n$ σε σχέση με το σύνολο $\{1\}$.*

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2, για κάθε απεικόνιση $f : S^1 \longrightarrow S^1$, έχουμε $f = f(1)\,\hat{\varphi}$, δηλαδή η $f$ είναι το αποτέλεσμα της σύνθεσης μιας συνάρτησης τύπου $\hat{\varphi}$ με μια περιστροφή η οποία προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό με έναν σταθερό μιγαδικό αριθμό μοναδιαίου μέτρου.
Προφανώς κάθε περιστροφή είναι ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_{S^1}$ του κύκλου, επομένως $f \cong \hat{\varphi}$ για κάποια $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(1) = n \in \mathbb{Z}$.

Έτσι προκύπτει το εξής:

**Πρόταση 3.1.4.** *Για οποιαδήποτε απεικόνιση $f : S^1 \longrightarrow S^1$, υπάρχει μοναδικός ακέραιος $n$, τέτοιος ώστε $f \simeq \hat{\varphi}_n : S^1 \longrightarrow S^1$.*

**Ορισμός 3.1.5.** *Έστω μια απεικόνιση $f : S^1 \longrightarrow S^1$ και $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ η μοναδική συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $f(j) = f(1)\,\hat{\varphi}(j)\,,\ \forall\, j \in S^1$, από το Θεώρημα 3.1.2. Ορίζουμε ως **βαθμό** της $f$ και συμβολίζουμε με $(f)$ τον καλά ορισμένο ακέραιο $n$ για τον οποίο ισχύει $\varphi(1) = n$.*

Γεωμετρικά, ο βαθμός της $f$ είναι ο ακέραιος που υποδηλώνει πόσες φορές τυλίγεται γύρω από την $S^1$ η $f(j)$ καθώς το όρισμά της διαγράφει 1 φορά την $S^1$. Η κίνηση αυτή γίνεται αριστερόστροφα αν $n > 0$ και δεξιόστροφα αν $n < 0$. Στην περίπτωση που έχουμε $n = 0$, προφανώς $f \simeq c_0$, δηλαδή ο αριθμός των περιελίξεων είναι $0$.
Παρατηρούμε ότι ο βαθμός $(f)$ εξαρτάται μόνο από την κλάση ομοτοπίας της $f$. Συγκεκριμένα ισχύει

**Λήμμα 3.1.6.** *Αν $f \simeq g : S^1 \longrightarrow S^1$, τότε $(f) = (g)$.*

*Απόδειξη.* Έστω $H : S^1 \times I \longrightarrow S^1$ με $H(j,0) = f(j)$ και $H(j,1) = g(j)$ η ομοτοπία που συνδέει τις $f$ και $g$ και η συνάρτηση $f_s : S^1 \longrightarrow S^1$ με $f_s(j) = H(j,s)$. Λόγω του θεωρήματος 3.1.2 θα υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $\varphi_s : I \longrightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\varphi_s(0) = 0\,,\ \varphi_s(1) \in \mathbb{Z}\ \text{ και }\ f_s(j) = f_s(1)\,\hat{\varphi}_s(j).$$

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $F : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ με $F(t,s) = \varphi_s(t)$ είναι ομοτοπία. Θεωρούμε την συνάρτηση $h : I \times I \longrightarrow S^1$ με $h(t,s) = f_s\big(e^{2\pi i t}\big)$.
Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στην Πρόταση 3.1.1

αποδεικνύεται ότι η $h$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Άρα μπορούμε να πάρουμε μια διαμέριση του $I$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\big|h(s,t) - h(s,t_j)\big| < 2,$$

για $s \in I,\ t \in [t_j, t_{j+1}]$, όπου $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη ορίζουμε την συνάρτηση $\varphi_s$ με την βοήθεια της $h_s : t \longmapsto h(t,s)$ αντί της $h$. Για $s \in I,\ t \in [t_j, t_{j+1}]$ έχουμε

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\log\big(\tfrac{h(s,t_1)}{h(s,t_0)}\big) + \ldots + \log\big(\tfrac{h(s,t_j)}{h(s,t_{j-1})}\big) + \log\big(\tfrac{h(s,t)}{h(s,t_j)}\big)\Big).$$

Προφανώς η $\varphi_s(t)$ είναι συνεχής και ως προς $t$ και ως προς $s$, άρα και η συνάρτηση $s \longmapsto \varphi_s(1)$ θα είναι συνεχής και αφού $\varphi_s(1) \in \mathbb{Z}$ έπεται ότι θα είναι σταθερή. Αφού $f(j) = f(1)\,\hat{\varphi}_0(j)$ και $g(j) = g(1)\,\hat{\varphi}_1(j)$, έπεται ότι

$$(f) = \varphi_0(1) = \varphi_1(1) = (g).$$

□

Έτσι για τον βαθμό της απεικόνισης, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $[S^1, S^1] \longrightarrow \mathbb{Z}$, για την οποία θα ισχύει το εξής:

**Θεώρημα 3.1.7.** *Η συνάρτηση $[S^1, S^1] \longrightarrow \mathbb{Z}$ που δίνεται από τον τύπο $[f] \longrightarrow (f)$ είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί.*
*Συγκεκριμένα ισχύουν:*

*α) Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, υπάρχει η απεικόνιση $g_n : S^1 \longrightarrow S^1$ με $g_n(j) = j^n$, τέτοια ώστε $(g_n) = n$.*

*β) Έστωσαν $f$ και $g : S^1 \longrightarrow S^1$. Τότε $f \simeq g$, αν και μόνο αν, $(f) = (g)$.*

*Απόδειξη.*

α) Αφού $g_n(e^{2\pi it}) = e^{2\pi int}$, άρα $g_n = \hat{\varphi}_n$. Συνεπώς $(f) = \varphi_n(1) = n$.

β) Αν $f \simeq g$, από το Λήμμα 3.1.6 έπεται $(f) = (g)$.
Αντίστροφα, αν $(f) = (g) = n$, τότε $f(j) = f(1)\,\hat{\varphi}(j)$ και $g(j) = g(1)\,\hat{\psi}(j)$, όπου $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ και $\varphi(1) = \psi(1) = n$.
Όμως οι πολλαπλασιασμοί με $f(1)$ και $g(1)$ παράγουν περιστροφές, που όπως αναφέραμε παραπάνω είναι ομοτοπικές με την $\mathrm{id}_{S^1}$. Έτσι από το Λήμμα 3.1.3 προκύπτει ότι $\varphi \simeq \varphi_n \simeq \psi$. Άρα $f \simeq \hat{\varphi} \simeq \hat{\varphi}_n \simeq \hat{\psi} \simeq g$.

□

1. Η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \longrightarrow S^1$, αφού $\mathrm{id}_{S^1} = g_1$ θα έχει βαθμό 1.

2. Εάν η $f : S^1 \longrightarrow S^1$ είναι ομοτοπική με την σταθερή συνάρτηση, τότε $(f) = 0$, καθώς $f \simeq g_0$.

**Πρόταση 3.1.8.** *Έστωσαν οι συναρτήσεις $f, g : S^1 \longrightarrow S^1$. Αν ορίσουμε ως $f \cdot g$ την συνάρτηση $f \cdot g : S^1 \longrightarrow S^1$ με $j \longmapsto f(j)\, g(j)$ χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών στην $S^1$, τότε*

$$(f \cdot g) = (f) + (g).$$

*Απόδειξη.* Έστω $(f) = m \in \mathbb{Z}$ και $(g) = n \in \mathbb{Z}$. Τότε $f \simeq g_m$ και $g \simeq g_n$. Οπότε, σύμφωνα με τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών, θα ισχύει ότι

$$f \cdot g \simeq g_m \cdot g_n = g_{m+n}.$$

□

**Πρόταση 3.1.9.** *Αν $f, g : S^1 \longrightarrow S^1$, τότε*

$$(f \circ g) = (f)\,(g).$$

*Απόδειξη.* Έστω $f \simeq g_m$ και $g \simeq g_n$. Τότε $f \circ g \simeq g_m \circ g_n = g_{mn}$. □

**Λήμμα 3.1.10.** *Εάν η απεικόνιση $f : S^1 \longrightarrow S^1$ είναι ομοιομορφισμός, τότε $(f) = \pm 1$. Συνεπώς είτε $f \simeq \mathrm{id}_{S^1}$, είτε $f \simeq \rho$, $\rho$ όπου η ανάκλαση που προκύπτει από τον συζυγή μιγαδικό.*

*Απόδειξη.* Αφού ορίζεται η αντίστροφη της $f$ και ισχύει $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{S^1}$, έπεται ότι

$$(f)\,(f^{-1}) = 1.$$

Όμως επειδή οι $(f)$ και $(f^{-1})$ είναι ακέραιοι, για να ισχύει η ισότητα, πρέπει είτε $(f) = (f^{-1}) = 1$, είτε $(f) = (f^{-1}) = -1$. □

**Ορισμός 3.1.11.** *Μια απεικόνιση $f : S^m \longrightarrow S^n$ λέγεται **περιττή**, αν-ν $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in S^m$, ενώ λέγεται **άρτια**, αν-ν $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in S^m$.*

**Θεώρημα 3.1.12.**

*α) Αν η απεικόνιση $f : S^1 \longrightarrow S^1$ είναι περιττή, τότε $(f)$ περιττός.*

*β) Αν η απεικόνιση $f : S^1 \longrightarrow S^1$ είναι άρτια, τότε $(f)$ άρτιος.*

*Απόδειξη.*

α) Από το Θεώρημα 3.1.2 υπάρχει συνάρτηση $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\varphi(0) = 0\,,\ \varphi(1) = (f)$ και

$$f\big(e^{2\pi i t}\big) = e^{2\pi i \varphi(t)}.$$

Όμως

$$-e^{2\pi i t} = e^{2\pi i (t+\frac{1}{2})}$$

και

$$-f\big(e^{2\pi i t}\big) = f\big(-e^{2\pi i t}\big) = f\big(e^{2\pi i (t+\frac{1}{2})}\big).$$

Οπότε

$$e^{2\pi i (\varphi(t)+\frac{1}{2})} = -e^{2\pi i \varphi(t)} = e^{2\pi i \varphi(t+\frac{1}{2})}.$$

Συνεπώς

$$\varphi\big(t+\tfrac{1}{2}\big) = \varphi(t) + \frac{1}{2} + k,$$

όπου $k \in \mathbb{Z}$ ανεξάρτητος του $t$ καθώς $I$ συνεκτικό και $\varphi$ συνεχής.
Για $t = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(f) &= \varphi(1) \\
&= \varphi\big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\big) \\
&= \varphi\big(\tfrac{1}{2}\big) + \frac{1}{2} + k \\
&= \frac{1}{2} + k + \frac{1}{2} + k \\
&= 2k + 1 \text{ περιττός.}
\end{aligned}$$

β) Αν η απεικόνιση $f : S^1 \longrightarrow S^1$ είναι άρτια, τότε αποδεικνύεται ανάλογα ότι $(f)$ άρτιος.

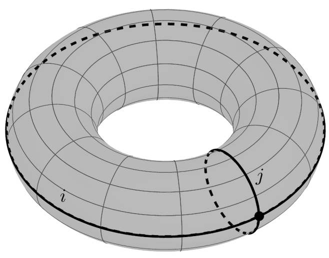
□

**Παρατήρηση 3.1.13.** Από όσα έχουμε αναφέρει ως τώρα, προκύπτει ότι η κλάση ομοτοπίας $[S^1, S^1]$ έχει μια προσθετική δομή αβελιανής ομάδας αφού $[f] + [g] = [f \cdot g]$, και μια πολλαπλασιαστική δομή λόγω του ότι $[f]\,[g] = [f \circ g]$.
Σύμφωνα με τις παραπάνω δομές, αποδεικνύεται ότι η $[S^1, S^1]$ είναι προσθετικός δακτύλιος με προσθετικό ουδέτερο το $0 = [g_0]$ $(g_0(j) = 1, \forall\, j \in S^1)$ και πολλαπλασιαστικό ουδέτερο το $1 = [g_1]$ $(g_0(j) = j, \forall\, j \in S^1)$. Συνεπώς η συνάρτηση $[S^1, S^1] \longrightarrow \mathbb{Z}$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων.

**Πρόταση 3.1.14.** *Οι εγκλεισμοί $i, j : S^1 \hookrightarrow T^2 = S^1 \times S^1$ με τύπους $i(z) = (z, 1)$ και $j(z) = (1, z)$ δεν είναι μηδενοτοπικοί, ούτε ομοτοπικοί μεταξύ τους. Δηλαδή $0 \neq [i] \neq [j] \neq 0$.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι οι $i, j$ είναι μηδενοτοπικοί. Τότε οι συνθέσεις $\mathsf{proj}_1 \circ i = \mathsf{id}_{S^1}$ και $\mathsf{proj}_2 \circ j = \mathsf{id}_{S^1}$ είναι, επίσης, μηδενοτοπικές. Άτοπο, αφού $\mathsf{id}_{S^1} = g_1$.
Έστω τώρα ότι $i \simeq j$, τότε και οι συνθέσεις $\mathsf{proj}_1 \circ i = \mathsf{id}_{S^1} = g_1$ και $\mathsf{proj}_1 \circ j = g_0$ είναι ομοτοπικές. Άτοπο. □

Το γεγονός ότι οι απεικονίσεις $i$ και $j$ δεν είναι ομοτοπικές δείχνει ότι οι δυο απεικονίσεις περιβάλουν μια συγκεκριμένη τρύπα η κάθε μία, που όμως έχουν ουσιαστικές διαφορές μεταξύ τους. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, η $i$ περιβάλλει την εξωτερική τρύπα του τόρου, ενώ $j$ η την εσωτερική.

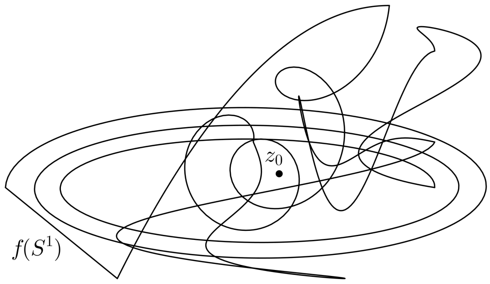



Το επόμενο παράδειγμα είναι ακόμα πιο σαφές. Έστω ότι στο μιγαδικό επίπεδο κάνουμε μια τρύπα στην αρχή 0 και έχουμε το συμπλήρωμα $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Ο εγκλεισμός $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ δεν είναι μηδενοτοπικός, διότι αν ήταν, τότε η απεικόνιση

$$\mathsf{id}_{S^1} : S^1 \xhookrightarrow{i} \mathbb{C}\backslash\{0\} \xrightarrow{r} S^1 ,$$

όπου $r(z) = \frac{z}{|z|}$, θα ήταν μηδενοτοπική, που όπως έχουμε προαναφέρει, δεν είναι. Αυτό σημαίνει ότι ο $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ανιχνεύει την τρύπα που υπάρχει στην αρχή 0.

**Παρατήρηση 3.1.15.** Έστω η συνεχής συνάρτηση $F : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ και σημείο $z_0 \notin f(S^1)$. Εγείρεται το ερώτημα, πόσες φορές περιστρέφεται γύρω από το $z_0$ η καμπύλη που παριστάνει η $f$. Γίνεται φανερό από το παρακάτω σχήμα




ότι η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα δεν είναι εφικτό να δοθεί διαισθητικά. Για τον λόγο αυτό θεωρούμε την ανάκληση (retraction) $r : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow S^1$ με $r(z) = \frac{z}{|z|}$. Τότε η απεικόνιση

$$f_{z_0} : S^1 \xrightarrow{f} \mathbb{C}\backslash\{z_0\} \xrightarrow{t_{z_0}} \mathbb{C}\backslash\{0\} \xrightarrow{r} S^1 \ ,$$

όπου $t_{z_0}(z) = z - z_0$, είναι καλά ορισμένη.
Η απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε προηγουμένως είναι ότι η καμπύλη που παριστάνει η $f$ περιστρέφεται γύρω από το $z_0$ ακριβώς $(f)$ φορές.
Ο αριθμός αυτός ονομάζεται **αριθμός περιελίξεων (winding number)** και συμβολίζεται με $W(f, z_0)$ . Δηλαδή

$$W(f, z_0) = (f_{z_0}),$$

όπου $f_{z_0}(z) = \frac{f(z)-z_0}{|f(z)-z_0|}$.
Στην πραγματικότητα, όταν η είναι διαφορίσιμη, ο αριθμός περιελίξεων γύρω από το αντιστοιχεί στον αριθμό που λαμβάνεται από τον τύπο του Cauchy:

$$W(f, z_0) = (f_{z_0}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} \frac{f'(j)}{f(j) - z_0}\,dj.$$

**Ορισμός 3.1.16.** *Ένας τοπολογικός χώρος $X$ ονομάζεται **συσταλτός (contractible)** εάν υπάρχει ομοτοπική ισοδυναμία μεταξύ αυτού και ενός χώρου που αποτελείται μόνο από ένα σημείο. Ισοδύναμα, αν υπάρχει μια ομοτοπία $F : X \times I \longrightarrow X$ με αφετηρία την ταυτοτική απεικόνιση και κατάληξη την σταθερή απεικόνιση $c(x) = x_0$, δηλαδή η $\mathrm{id}_X$ είναι μηδενομοτοπική. Στην περίπτωση αυτή η $F$ ονομάζεται **συστολή (contraction)**.*

Η παραπάνω κατηγοριοποίηση των απεικονίσεων $S^1 \longrightarrow S^1$ με βάση την ομοτοπία μας οδηγεί σε κάποια πολύ σημαντικά συμπεράσματα. Ένα από αυτά είναι ότι η $\mathrm{id}_{s^1}$ δεν είναι μηδενομοτοπική, καθώς $deg(\mathrm{id}_{s^1}) \neq 0$, οπότε καταλήγουμε στο εξής

**Θεώρημα 3.1.17.** *Ο κύκλος, $S^1$, δεν είναι συσταλτός.*

*Απόδειξη.* Αν ο κύκλος $S^1$ ήταν συσταλτός, τότε η $\mathrm{id}_{s^1}$ θα ήταν ομοτοπική με τη σταθερή απεικόνιση, που είναι άτοπο. □

Στο παραπάνω παράδειγμα, όπου $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$, είδαμε ότι η απεικόνιση $r : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow S^1$ είναι μια ανάκληση του τρύπιου μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ στον υπόχωρο $S^1$. Υπό αυτό το πρίσμα μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω σημαντικό συμπέρασμα.

**Πρόταση 3.1.18.** *Δεν υπάρχει ανάκληση $r : D^2 \longrightarrow S^1$. Δηλαδή δεν υπάρχει απεικόνιση $r|_{S^1} = \mathsf{id}_{s^1}$.*

*Απόδειξη.* Αφού ο $D^2$ είναι συσταλτός, άρα κάθε απεικόνιση με όρισμα στον $D^2$ θα είναι μηδενομοτοπική. Προφανώς το ίδιο θα ισχύει και για την $r$ (εφόσον υπάρχει). Συνεπώς η σύνθεση της με τον εγκλεισμό $i : S^1 \hookrightarrow D^2$, δηλαδή η $\mathsf{id}_{s^1}$, θα είναι μηδενομοτοπική. Άτοπο. □

Βασιζόμενοι στην παραπάνω πρόταση μπορούμε να αποδείξουμε το ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ BROUWER, το οποίο είναι ένα πολύ ουσιαστικό Θεώρημα της τοπολογίας με πολλές εφαρμογές.

**Θεώρημα 3.1.19.** *Κάθε απεικόνιση $f : D^2 \longrightarrow D^2$ έχει ένα σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει ένα σημείο $x_0 \in D^2$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.*

## 3.2 ΟΡΙΣΜΟΣ & ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΒΑΘΜΟΥ ΣΤΗ ΣΦΑΙΡΑ

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε και θα υπολογίσουμε το βαθμό απεικόνισης στη σφαίρα. Ουσιαστικά θα γενικεύσουμε τις έννοιες της προηγούμενης ενότητας.

Έστω η απεικόνιση $f : S^n \to S^n$ για $n \geqslant 1$ και $a$ ένας γεννήτορας της $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$. Ο επαγόμενος ομομορφισμός της $f$ στην $H_n(S^n)$ είναι

$$f_*(a) = m\,a\,, \text{ για κάποιον ακέραιο } m.$$

Ο ακέραιος $m$ είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του $a$ αφού

$$\begin{aligned} f_*(-a) &= -f_*(a) \\ &= -m\,a \\ &= m\,(-a). \end{aligned}$$

**Ορισμός 3.2.1.** *Ο ακέραιος $m$ ονομάζεται* **βαθμός** *της $f$ και συμβολίζεται με $(f)$. Συχνά αναφέρεται και ως* **βαθμός Brouwer**.

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει στο προηγούμενο κεφάλαιο και από τον ορισμό του βαθμού απεικόνισης προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

1. $(\mathsf{id}) = 1$.
   Πράγματι, αν $a$ ένας γεννήτορας της $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$, τότε

   $$\mathsf{id}_*(a) = \mathsf{id}(a) = a = 1 \cdot a\,.$$

   Άρα $(\mathsf{id}) = 1$.

2. Εάν $f, g : S^n \to S^n$, τότε $(f \circ g) = (f)\,(g)$.
   Πράγματι, έστω $k$ ο βαθμός της $f$, $\ell$ ο βαθμός της $g$ και $a$ ένας γεννήτορας της $H_n(S^n)$. Γνωρίζουμε ότι $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. Άρα
   $$\begin{aligned}(f \circ g)_*(a) &= f_*(g_*(a))\\ &= f_*(\ell a)\\ &= k(\ell a)\\ &= (k\ell)a,\end{aligned}$$
   οπότε $(f \circ g) = (f)\,(g)$.

3. (σταθερής απεικόνισης) $= 0$.
   Πράγματι, έστω $f : S^n \to S^n$ σταθερή απεικόνιση. Τότε θα υπάρχει κάποιο $y \in S^n$ τέτοιο ώστε $y \notin \operatorname{Im} f$. Έτσι η $f$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση $f = h \circ g$, όπου $g : S^n \to S^n \backslash \{y\}$ και $g : S^n \backslash \{y\} \to S^n$. Όμως ο $S^n \backslash \{y\}$ είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^n$ που είναι συσταλτός, άρα $H_n\big(S^n \backslash \{y\}\big) = 0$. Συνεπώς $g_* = 0$, άρα $f_* = h_* \circ g_* = 0$, άρα $(f) = 0$.

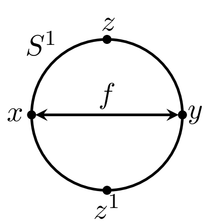
4. Εάν $f, g : S^n \to S^n$ ομοτοπικές, τότε $(f) = (g)$.
   Πράγματι, αφού $f, g$ ομοτοπικές, από το Θεώρημα 2.1.1 θα έχουμε ότι $f_* = g_*$, άρα και $(f) = (g)$.

5. Εάν $f : S^n \to S^n$ ομοτοπική ισοδυναμία, τότε $(f) = \pm 1$.
   Πράγματι, αφού η $f$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία, αν $g$ είναι η ομοτοπική της αντίστροφη, εξ ορισμού θα έχουμε ότι $f \circ g \cong \mathrm{id}_{S^n}$, άρα
   $$(f \circ g) = 1 \quad \Rightarrow \quad (f)\,(g) = 1$$
   και αφού $(f)$, $(g) \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι είτε $(f) = (g) = 1$, είτε $(f) = (g) = -1$.

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε, χωρίς απόδειξη, το Θεώρημα Hopf, σύμφωνα με το οποίο ισχύει και το αντίστροφο της ιδιότητας 4. Δηλαδή αν δυο απεικονίσεις $f$ και $g : S^n \to S^n$ έχουν τον ίδιο βαθμό, τότε είναι ομοτοπικές.

**Πρόταση 3.2.2.** *Ορίζουμε για $n > 0$ την απεικόνιση $f : S^n \to S^n$ με*
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}).$$
*Τότε $(f) = -1$.*

*Απόδειξη.* Για $n = 1$ :




$$\begin{aligned} z &= (0,1)\\ z^1 &= (0,-1)\\ x &= (-1,0)\\ y &= (1,0)\end{aligned}$$

η κάλυψη $\mathcal{U} = \{U, V\}$, όπου $U = S^1 - \{z^1\}$, $V = S^1 - \{z\}$, έχει την ιδιότητα ότι $f(U) \subseteq U$ και $f(V) \subseteq V$. Έτσι η Mayer-Vietoris ακολουθία έχει διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_1(S^1) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "f_*"] & H_0(U \cap V) \arrow[d, "f_{3*}"] \\
0 \arrow[r] & H_1(S^1) \arrow[r, "\Delta"] & H_0(U \cap V)
\end{tikzcd}$$

όπου $f_3$ ο περιορισμός της $f$.
Στο παραπάνω διάγραμμα κάθε γραμμή είναι μια ακριβής ακολουθία και το ορθογώνιο είναι αντιμεταθετικό. Όπως έχουμε αναφέρει στο προηγούμενο κεφάλαιο, κάθε γεννήτορας $a$ της $H_1(S^1)$ παριστάνεται από έναν κύκλο $c + d$ για τον οποίον ισχύει

$$\partial c = x - y = -\partial d.$$

και η $\Delta(a)$ αναπαρίσταται από $x - y$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
\Delta f_*(a) &= f_{3*}\Delta(x) \\
&= f_{3*}(x - y) \\
&= y - x \\
&= -\Delta(a) \\
&- \Delta(-a)
\end{aligned}$$

και αφού η $\Delta$ είναι μονομορφισμός, έπεται ότι $(f) = -1$.
Για $n \geqslant 2$, δηλαδή για $n - 1 \geqslant 1$:
Θεωρούμε ότι το συμπέρασμα ισχύει σε διάσταση $n - 1$ και έστω ότι $S^{n-1} \subseteq S^n$. Θεωρούμε $U$ και $V$ τα συμπληρώματα βορείου και νότιου πόλου της $S^n$, αντίστοιχα. Ο εγκλεισμός $i : S^{n-1} \hookrightarrow U \cap V$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία. Επειδή $n \geqslant 2$ ο συνδετικός ομομορφισμός στην Mayer-Vietoris ακολουθία είναι ισομορφισμός. Έτσι στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
H_n(S^n) \arrow[r, "\Delta", "\approx"'] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(U \cap V) \arrow[d, "f_{3*}"] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[l, "i_*"', "\approx"] \arrow[d, "f_*"] \\
H_n(S^n) \arrow[r, "\Delta", "\approx"'] & H_{n-1}(U \cap V) & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[l, "i_*"', "\approx"]
\end{tikzcd}$$

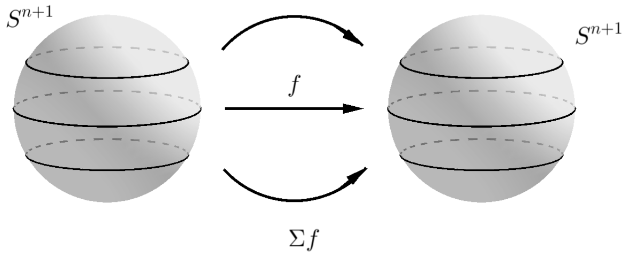
κάθε ορθογώνιο είναι αντιμεταθετικό και κάθε οριζόντιος ομομορφισμός είναι ισομορφισμός. Έτσι αν $a$ είναι ένας γεννήτορας της $H_n(S^n)$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
f_*(a) &= \Delta^{-1} f_{3*} \Delta(a) \\
&= \Delta^{-1} i_* f_* i_*^{-1} \Delta(a) \\
&= -\Delta^{-1} i_* i_*^{-1} \Delta(a) \\
&= -a.
\end{aligned}$$

Άρα $(f) = -1$. □

**Ορισμός 3.2.3.** *Σε κάθε απεικόνιση $f : S^n \to S^n$, $n \geqslant 0$, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια απεικόνιση $g : S^{n+1} \to S^{n+1}$ η οποία ονομάζεται* **ανάρτηση (suspension)** *της $f$ και συμβολίζεται με $\Sigma f$.*

Διαισθητικά ο περιορισμός της $S^{n+1}$ στον ισημερινό της ($S^n$) είναι η $f$ και κάθε «φέτα» στην $S^{n+1}$, παράλληλη στον ισημερινό, αντιστοιχίζεται στην «φέτα» που περιγράφηκε προηγουμένως μέσω της $f$.




Π.χ. ας θεωρήσουμε $S^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^1$ έτσι ώστε τα σημεία της $S^{n+1}$ να έχουν την μορφή $(x, t)$, όπου $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $t \in \mathbb{R}$ και $\|x\|^2 + |t|^2 = 1$. Τότε

$$\Sigma f(x,t) = \begin{cases} (x, z)\,, & \text{αν } x = 0 \\ \left(\|x\|\, f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), t\right), & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η $\Sigma f$ είναι συνεχής και πληρεί όλες τις ιδιότητες.

Με την ίδια τεχνική που αποδείχθηκε η Πρόταση 3.1.2 μπορεί να αποδειχθεί ότι

**Πρόταση 3.2.4.** *Έστω η $f : S^n \to S^n$ και η ανάρτησή της $\Sigma f : \Sigma S^n \to \Sigma S^n$, τότε $(f) = (\Sigma f)$.*

Παρατηρήστε ότι αν $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, \ldots, x_{n+1})$ και $g(x_1, \ldots, x_{n+2}) = (-x_1, \ldots, x_{n+2})$, τότε $g = \Sigma f$ και η Πρόταση 3.1.2 είναι ειδική περίπτωση της Πρότασης 3.1.5.

**Πόρισμα 3.2.5.** *Για $n > 0$ υπάρχουν απεικονίσεις $f : S^n \to S^n$ με $(f) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

**Πόρισμα 3.2.6.** *Ορίζουμε για $n > 0$ την απεικόνιση $f : S^n \to S^n$ με*

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_{n+1})\,.$$

*Τότε $(f) = -1$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $h : S^n \to S^n$ με

$$h(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) = (x_i, \dots, x_1, \dots, x_{n+1})\,.$$

Τότε η $h$ είναι ομοιομορφισμός με $h^{-1} = h$ και, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει παραπάνω, ισχύει $(h) = \pm 1$.
Επίσης θεωρούμε την συνάρτηση $g : S^n \to S^n$ με

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})\,.$$

Τότε

$$\begin{aligned}(g \circ h)(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) &= g\big(h(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1})\big)\\ &= g(x_i, x_2, \dots, x_1, \dots, x_{n+1})\\ &= (-x_i, x_2, \dots, x_1, \dots, x_{n+1})\,.\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}(h \circ g \circ h)(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) &= h(-x_i, \dots, x_1, \dots, x_{n+1})\\ &= (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})\\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1})\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(f) &= (h \circ g \circ h)\\ &= (h)\,(g)\,(h)\\ &= \big((h)\big)^2(g)\\ &= (\pm 1)^2(-1)\\ &= -1\,.\end{aligned}$$

□

**Πόρισμα 3.2.7.** *Η αντιποδική απεικόνιση (***antipodal map***) $A : S^n \to S^n$ που ορίζεται ως*

$$A(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_{n+1}),$$

*έχει $(A) = (-1)^{n+1}$.*

*Απόδειξη.* Η $A$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση των $n+1$ απεικονίσεων $f_i : S^n \to S^n$, $i = 1, \dots, n+1$, που ορίζονται ως

$$f_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$$

και οι οποίες, από το προηγούμενο πόρισμα, έχουν $(f_i) = -1$.
Επομένως $(A) = (-1)(-1)\cdots(-1) = (-1)^{n+1}$. □

**Πρόταση 3.2.8.** *Αν η $f : S^n \to S^n$ δεν έχει σταθερό σημείο τότε $(f) = (-1)^{n+1}$. Αν η $f : S^n \to S^n$ δεν έχει αντιποδικό σημείο ($f(x) \neq -x$ ), τότε $(f) = 1$. Κάθε απεικόνιση $f : S^{2k} \to S^{2k}$ έχει σταθερό ή αντιποδικό σημείο.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι η $f$ δεν έχει σταθερό σημείο, τότε η απεικόνιση $d : S^n \times I \to \mathbb{R}^{n+1}$ με τύπο

$$d(x,t) = (1-t)f(x) - tx$$

δεν μηδενίζεται. Επομένως η απεικόνιση $D : \mathbb{R}^{n+1} \times I \to S^n$ με τύπο

$$D(x,t) = \frac{d(x,t)}{\|d(x,t)\|}$$

είναι μια παραμόρφωση της $f$ στην αντιποδική απεικόνιση. Άρα $(f) = (-1)^{n+1}$. Υποθέτουμε τώρα ότι $f(x) \neq -x$ , τότε η $g(x) = -f(x)$ δεν έχει σταθερό σημείο. Επομένως

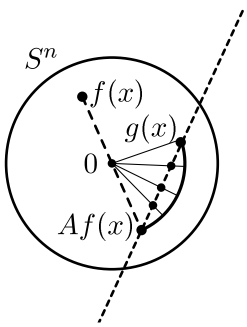
$$(-1)^{n+1}(f) = (g) = (-1)^{n+1}$$

Άρα $(f) = 1$. □

**Πρόταση 3.2.9.** *Αν $f$ και $g : S^n \to S^n$ απεικονίσεις τέτοιες ώστε $f(x) \neq g(x)$, για κάθε $x \in S^n$, τότε*

$$g \underset{\text{ομοτοπ.}}{\simeq} A \circ f\,.$$

*Απόδειξη.* Αφού $f(x) \neq g(x)$, για κάθε $x \in S^n$, η γραμμή που ενώνει τα $Af(x)$ και $g(x)$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$ δεν διέρχεται από το $0$.




Επομένως η προβολή, από το $0$, του τμήματος με άκρα τα $Af(x)$ και $g(x)$ επί της $S^n$ είναι το μονοπάτι που ορίζει την ομοτοπία. Συγκεκριμένα η απεικόνιση $F : S^n \times I \to S^n$ με

$$F(x,t) = \frac{(1-t)\,Af(x) + t\,g(x)}{\|(1-t)\,Af(x) + t\,g(x)\|}$$

ορίζει αυτήν την ομοτοπία.

□

**Πόρισμα 3.2.10.** *Αν $f : S^{2n} \to S^{2n}$ απεικόνιση, τότε υπάρχει $x \in S^{2n}$, τέτοιο ώστε $f(x) = x$, ή υπάρχει $y \in S^{2n}$, τέτοιο ώστε $f(y) = -y$.*

*Απόδειξη.* Εάν $f(x) \neq x$, για κάθε $x \in S^{2n}$, τότε, από την Πρόταση 3.2.9, προκύπτει ότι

$$f \underset{\text{ομοτοπ.}}{\simeq} A \circ \mathsf{id}_{S^{2n}} = A.$$

Εάν ταυτόχρονα $f(x) \neq -x = A(x)$, για κάθε $x \in S^{2n}$, τότε

$$f \underset{\text{ομοτοπ.}}{\simeq} A \circ A = \mathsf{id}_{S^{2n}} .$$

Αλλά τότε

$$(f) = (A) = (\mathsf{id}) = 1,$$

άτοπο, αφού $(A) = (-1)^{2n+1} = -1$. □

**Πόρισμα 3.2.11.** *Δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : S^{2n} \to S^{2n}$, τέτοια ώστε, για κάθε $x \in S^{2n}$, τα $x$ και $f(x)$ να είναι ορθογώνια.*

**Παρατηρήσεις:**

- Η $S^n$ είναι μια πολλαπλότητα διάστασης $n$, δηλαδή τοπικά ομοιομορφική με τον $\mathbb{R}^n$.
- Σε κάθε $x \in S^n$ ορίζεται το αντίστοιχο εφαπτόμενο επίπεδο $T(S^n, x)$.
- Η $S^n$ ταυτίζεται με την μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και το $T(S^n, x)$ είναι το υπερεπίπεδο στην που εφάπτεται στην σφαίρα στο σημείο $x$.
- Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο $T(S^n, x)$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τότε είναι ένας $n$-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n+1}$ κάθετος στο διάνυσμα $x$. Καθώς μεταβάλλεται το $x$ έχουμε τους αντίστοιχους υποχώρους $T(S^n, x)$ του $\mathbb{R}^{n+1}$.

**Ορισμός 3.2.12.** *Ονομάζουμε* **διανυσματικό πεδίο** *στην $S^n$ μια συνεχή συνάρτηση $\phi$ η οποία σε κάθε σημείο $x \in S^n$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα στον $T(S^n, x)$. Αν, για κάθε $x \in S^n$, ισχύει $\phi(x) \neq 0$, τότε το $\phi$ ονομάζεται μη-μηδενικό διανυσματικό πεδίο.*

**Πόρισμα 3.2.13.** *Δεν υπάρχει μη-μηδενικό διανυσματικό πεδίο στην $S^{2n}$.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι υπάρχει $\phi$ μη-μηδενικό διανυσματικό πεδίο στην $S^{2n}$. Τότε το $\psi(x) = \frac{\phi(x)}{\|\phi(x)\|}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο μοναδιαίων διανυσμάτων και, έτσι, η $\psi : S^{2n} \to S^{2n}$ είναι μια απεικόνιση για την οποία, για κάθε $x \in S^{2n}$, το $\psi(x)$ είναι ορθογώνιο με το $x$. Άτοπο, λόγω του Πορίσματος 3.2.11. □

**Παρατήρηση:** Μη-μηδενικά διανυσματικά πεδία υπάρχουν σε σφαίρες περιττής διάστασης.

# Κεφάλαιο 4

# ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

## 4.1 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε το Θεώρημα σταθερού σημείου για συμπαγή, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

**Λήμμα 4.1.1.** *Έστω $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει μοναδικό σημείο $y$ το οποίο εξαρτάται από το $x$, $y = y(x)$, ώστε $\| x-y \|= inf \{\| x - z \|, z \in C\}$ και η απεικόνιση $g : \mathbb{R}^n \to C$ με τύπο $g(x) = y(x)$ να είναι συνεχής.*

*Απόδειξη.* Πρώτα δείχνουμε τη μοναδικότητα. Έστω $y, z \in C$ με $\| x - y \|=\| x - z \|> 0$. Έχουμε λοιπόν

$$\| x - \frac{y+z}{2} \|=\| \frac{x-y}{2} + \frac{x-z}{2} \|<\| \frac{x-y}{2} \| + \| \frac{x-z}{2} \|=\| x-y \| .$$

Άρα υπάρχει σημείο $\frac{y+z}{2} \in C$ με

$$\| x - \frac{y+z}{2} \|<\| x-y \|$$

και αυτό είναι αδύνατο.
Τώρα θα δείξουμε τη συνέχεια της $g$. Έστω $x^k \to x$ με $x \in \mathbb{R}^n$, τότε πρέπει $g(x^k) \to g(x)$ με $g(x) \in C$. Αν δεν ισχύει αυτό, θα υπάρχει υπακολουθία $x^{k_l}$ ώστε $g(x^{k_l}) \to y$ με $y \neq g(x)$. Άρα

$$\| x^{k_l} - g(x^{k_l}) \|\to\| x-y \|$$

και

$$\| x^{k_l} - g(x^{k_l}) \|\leqslant\| x^{k_l} - g(x) \|\to\| x - g(x) \| .$$

Οπότε έχουμε $\| x - g(x) \|\geqslant\| x-y \|$ και $g(x) = y$. $\square$

**Λήμμα 4.1.2.** *Έστω $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο υποσύνολο. Υπάρχουν $n+1$ αφφινικά ανεξάρτητα διανύσματα $\{x^0, \cdots, x^n\}$ ώστε το $C$ να είναι υποσύνολο της κυρτής θήκης των $\{x^0, \cdots, x^n\}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $C \subseteq [0, m]^n$ με $0 < m$. Ορίζουμε $x^0 = \overline{0}$ και $x^i = nme^i$ όπου $e^i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ το στοιχείο της κανονικής βάσης. Τα διανύσματα $\{x^1, \cdots, x^n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και το $\{x^0, \cdots, x^n\}$ είναι αφφινικά ανεξάρτητο υποσύνολο.

Για κάθε $y = (y_1, \cdots, y_n) \in [0, m]^n$ έχουμε $y = \left(1 - \sum\limits_1^n \frac{y_i}{nm}\right) x^0 + \sum\limits_1^n \frac{y_i}{nm} x^i$. Άρα $y \in co\{x^0, \cdots, x^n\}$. Δηλαδή $C \subseteq co\{x^0, \cdots, x^n\}$.

Έστω τώρα τυχαίο $C$ φραγμένο. Θα υπάρχει διάνυσμα $z \in \mathbb{R}^n$ και $m > 0$ ώστε $z + C \subseteq [0, m]^n$. Άρα $z + C \subseteq co\{x^0, \cdots, x^n\}$ και $C \subseteq co\{x^0 - z, \cdots, x^n - z\}$ . Το σύνολο $\{x^0 - z, \cdots, x^n - z\}$ είναι αφφινικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν το $\{x^0, \cdots, x^n\}$ είναι.

□

**Θεώρημα 4.1.3.** *Έστω $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο. Έστω $f : C \to C$ συνεχής απεικόνιση. Τότε η $f$ έχει σταθερό σημείο.*

*Απόδειξη.* Αν το $C$ είναι ένα κανονικό γεωμετρικό simplex

$$C = \sigma^n = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0, \sum_1^n x_i = 1 \right\}$$

τότε γνωρίζουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει.

Έστω τώρα $C = co\{x^0, \cdots, x^n\}$ να είναι η κυρτή θήκη ενός αφφινικά ανεξάρτητου υποσυνόλου $\{x^0, \cdots, x^n\}$. Τότε υπάρχει ομοιομορφισμός $g : \sigma^n \to C$ με τύπο $g(y_1, \cdots, y_n) = \sum\limits_1^n y_i(x^i - x^0)$. Άρα η $g^{-1} f g : \sigma^n \to \sigma^n$ είναι συνεχής και έχει σταθερό σημείο $y \in \sigma^n$.

$$(g^{-1} f g)(y) = y.$$

Δηλαδή το $g(y)$ είναι σταθερό σημείο της $f$.

Έστω τώρα το $C \subseteq \mathbb{R}^n$ να είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο και $f : C \to C$ συνεχής απεικόνιση. Έστω $\{x^0, \cdots, x^n\}$ αφφινικά ανεξάρτητο υποσύνολο ώστε $C \subseteq co\{x^0, \cdots, x^n\}$. Έστω $g : \mathbb{R}^n \to C$ η συνάρτηση με τύπο $g(x) = y$ ώστε $\| x - y \| = inf\{\| x - z \|, z \in C\}$. Γνωρίζουμε ότι η $g$ είναι συνεχής.

Ορίζουμε την $h : co\{x^0, \cdots, x^n\} \to co\{x^0, \cdots, x^n\}$ με τύπο $h(x) = f(g(x))$. Η $h$ έχει σταθερό σημείο $x \in co\{x^0, \cdots, x^n\}$ με $f(g(x)) = x$. Αλλά $g(x) \in C$ και $f(g(x)) \in C$. Άρα $g(x) = x$ και $f(x) = x$. □

**Πόρισμα 4.1.4.** *Έστω $f : D^n \to \mathbb{R}^n$ μια συνεχής απεικόνιση, τότε υπάρχει $x \in D^n$ με $f(x) = 0$ ή $f(z) = \lambda z$ για κάποιο $z \in S^{n-1}$ και $\lambda > 0$.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε την $g : D^n \to \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$g(x) = (2 \parallel x \parallel -1)\, x - (2 - 2 \parallel x \parallel)\, f(\frac{x}{\parallel x \parallel})$$

για $\parallel x \parallel > 1/2$ και $g(x) = -f(4 \parallel x \parallel x)$ για $\parallel x \parallel \leqslant 1/2$.
Ισχύει ότι $g(x) = x$ για $x \in S^{n-1}$. Αν η $g$ δεν λάμβανε την τιμή 0 για $x \in (\overset{\circ}{D})^n$ θα είχαμε μια παραμόρφωση της $D^n$ στην $S^{n-1}$ η οποία θα δινόνταν από την $r : D^n \to S^{n-1}$ με $r(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}$.
Έστω λοιπόν $g(x) = 0$ για $\parallel x \parallel > 1/2$, τότε θα έχουμε $f(4 \parallel x \parallel x) = 0$.
Έστω ότι $g(x) = 0$ για $\parallel x \parallel \leqslant 1/2$, τότε θα έχουμε

$$f(\frac{x}{\parallel x \parallel}) = \frac{2 \parallel x \parallel -1}{2 - 2 \parallel x \parallel} x.$$

Άρα για $y = \frac{x}{\|x\|}$ και $\lambda = \frac{2\|x\|-1}{2-2\|x\|} \parallel x \parallel$ έχουμε το ζητούμενο. □

**Πόρισμα 4.1.5.** *Έστω $g : D^n \to \mathbb{R}^n$ μια συνεχής απεικόνιση, τότε υπάρχει $x \in D^n$ με $g(x) = x$ ή $g(z) = \lambda z$ για κάποιο $z \in S^{n-1}$ και $\lambda > 1$.*

*Απόδειξη.* Από το προηγούμενο πόρισμα έχουμε το ζητούμενο για $g(x) = f(x) + x$. □

Χωρίς λεπτομέρειες ούτε αποδείξεις περιγράφουμε την εξέλιξη του βασικού Θεωρήματος του Brouwer μέχρι το Θεώρημα του Lefschetz.

Όπως προαναφέραμε ο Poincare, 1880, μελέτησε διανυσματικές κατανομές σε επιφάνειες. Σε κάθε απομονωμένη ιδιομορφία μιας τέτοιας κατανομής όρισε έναν ακέραιο τον οποίο ονόμασε index . Μια διανυσματική κατανομή μπορεί να θεωρηθεί σαν μια απεικόνιση από την επιφάνεια στον εαυτό της. Σ' αυτήν την περίπτωση τα σταθερά σημεία της απεικόνισης είναι τα ιδιόμορφα σημεία. Ο Poincare απέδειξε ότι σε μία προσανατολισμένη επιφάνεια γένους $g$ το άθροισμα των indeces ισούται με $(2 - 2g)$.
Ο Brouwer επέκτεινε την έννοια του index από επιφάνειες σε πολλαπλότητες. Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματά του ήταν το επόμενο.
*Αν οι απεικονίσεις $f$ και $g : M \to M$ είναι ομοτοπικές και έχουν πεπερασμένο πλήθος σταθερών σημείων τότε το άθροισμα των indeces είναι το ίδιο και για τις δύο απεικονίσεις.*

Γνωρίζουμε ότι κάθε απεικόνιση μπορεί να παραμορφωθεί με συνεχή τρόπο σε μια άλλη η οποία να έχει πεπερασμένο αριθμό σταθερών σημείων. Κατά συνέπεια ορίζεται μια ομοτοπική αναλλοίωτος η οποία συνδέεται με τον αριθμό των σταθερών σημείων. Το 1922 ο Lefschetz δημοσίευσε την πρώτη έκδοση για τον τύπο των σταθερών σημείων.

*Αν $M$ είναι μια κλειστή προσανατολισμένη πολλαπλότητα και $f : M \to M$ μια συνεχής απεικόνιση, τότε έχουμε έναν ομομορφισμό διανυσματικών χώρων*

$$f_k : H_k(M, \mathbb{Q}) \to H_k(M, \mathbb{Q}).$$

Επιλέγοντας κατάλληλη βάση ο $f_k$ αναπαρίσταται με πίνακα και ορίζεται ο αριθμός του Lefschetz διαμέσου του ίχνους του πίνακα

$$L(f) = \sum_0^\infty (-1)^{ktr(f_k).}$$

Ο αριθμός του Lefschetz δεν εξαρτάται από τη βάση και εξαρτάται από τον τύπο ομοτοπίας της $f$.

**Θεώρημα 4.1.6.** *Αν $M$ είναι μια κλειστή προσανατολισμένη πολλαπλότητα και $f : M \to M$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν ο αριθμός του Lefschetz είναι διάφορος του μηδενός, $L(f) \neq 0$, τότε η $f$ έχει σταθερό σημείο.*

Ο Lefschetz απέδειξε ότι για κάθε $f$ υπάρχει μια $g$ όσο κοντά θέλουμε (όταν έχουμε μετρική στην πολλαπλότητα) ώστε η $g$ να έχει πεπερασμένα σταθερά σημεία και για κάθε σταθερό σημείο $x$ της $g$ η $g$ απεικονίζει ομοιόμορφα κάποια ανοικτή περιοχή του σε κάποια άλλη περιοχή του $x$. Άρα για κάθε σταθερό σημείο ορίζεται ο **τοπικός βαθμός** ο οποίος είναι κάποιος ακέραιος κατά την προσέγγιση του Brouwer.

Αν $x_1, \cdots, x_m$ είναι τα σταθερά σημεία της $g$ και $a_1, \cdots, a_m$ οι τοπικοί βαθμοί της $g$, ο Lefschetz έδειξε ότι

$$L(g) = \sum_1^m a_i.$$

Και επειδή οι $f$ και $g$ είναι ομοτοπικές, έχουμε ότι $f_k = g_k$, οπότε

$$L(f) = \sum_1^m a_i.$$

Άρα ο αριθμός του Lefschetz είναι πάντα ακέραιος. Έχουμε λοιπόν το Θεώρημα του Lefschetz.

**Θεώρημα 4.1.7.** *Αν $M$ είναι μια κλειστή προσανατολισμένη πολλαπλότητα και $f : M \to M$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν ο αριθμός του Lefschetz είναι διάφορος του μηδενός, $L(f) \neq 0$, τότε η $f$ έχει σταθερό σημείο.*

# Κεφάλαιο 5

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΟΜΑΔΩΝ

Εάν $G$ ομάδα και $A$ κάποιο υποσύνολο της, τότε ορίζουμε ως την υποομάδα της $G$ που γεννάται από το σύνολο $A$ να είναι η

$$\langle A \rangle = \bigcap_{Y \leqslant G,\, A \subset Y} Y\,.$$

Αυτό που αποδεικνύεται (βλέπε στο [16] στην σελίδα 63) είναι πως η τελευταία έχει και μια εναλλακτική περιγραφή η οποία δίνεται από το σύνολο

$$\{\alpha_1^{\epsilon_1}.\alpha_2^{\epsilon_2}...\alpha_n^{\epsilon_n} \mid n \in \mathbb{N},\, \alpha_i \in A \text{ και } \epsilon_i = \pm 1 \text{ για όλα τα } i\}\,.$$

Με βάση το παραπάνω έχουμε τον ακόλουθο ορισμό για την παράσταση μιας τύχουσας ομάδας.

**Ορισμός 5.0.1.** *Έστω μια ομάδα $G$ και $A$ κάποιο υποσύνολό της, τέτοιο ώστε $G = \langle A \rangle$. Μια παράσταση για την $G$ είναι ένα ζεύγος $\langle A \mid R \rangle$, όπου το $R$ είναι ένα σύνολο στοιχείων της ελεύθερης ομάδας $F$ που γεννάται από το σύνολο $A$, του οποίου η υποομάδα που γεννάται στην $F$ είναι ο πυρήνας του επιμορφισμού $\phi : F \to G$. Τα στοιχεία του συνόλου $A$ καλούνται* **γεννήτορες (generators)**, *ενώ εκείνα της $R$* **σχέσεις (relators)** *της $G$.*

**Ορισμός 5.0.2.** *Έστω ομάδα $F$, $X$ ένα μη-κενό σύνολο και $\sigma : X \to F$ μια απεικόνιση. Τότε το ζεύγος $(F, \sigma)$ θα καλείται* **ελεύθερο πάνω από το** *$X$ εάν ικανοποιεί την εξής καθολική ιδιότητα: Για κάθε απεικόνιση $\alpha$ από το $X$ σε τυχούσα ομάδα $G$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\beta : F \to G$ τέτοιος ώστε $\alpha = \beta\sigma$. Διαγραμματικά το παραπάνω μπορεί να εκφραστεί ως:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\alpha"'] & F \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ G & \end{tikzcd}$$

*Μια ομάδα η οποία είναι ελεύθερη σε κάποιο σύνολο θα καλείται* **ελεύθερη ομάδα**.

**Παρατήρηση 5.0.3.** Αυτό που αποδεικνύεται και είναι σημαντικό για εμάς στην παρούσα ενότητα είναι ότι εάν $X$ ένα τυχαίο μη-κενό σύνολο, τότε υπάρχει ομάδα $F$ και απεικόνιση $\sigma : X \to F$ τέτοια ώστε το ζεύγος $(F, \sigma)$ να είναι ελεύθερο πάνω από το $X$ και $F = \langle \mathsf{Im}\, \sigma \rangle$ (βλέπε στο [16] ). Σαν συνέπεια αυτού έχουμε ότι κάθε ομάδα είναι η επιμορφική εικόνα κάποιας ελεύθερης, αφού μπορούμε να διαλέξουμε ως $X = G$, να θεωρήσουμε την ελεύθερη ομάδα που παράγεται απ' αυτήν και ταυτόχρονα επιμορφισμό $\phi : F \to G$ που κάνει μεταθετικό το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mathsf{id}"'] & F \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ G & \end{tikzcd}$$

εκμεταλλευόμενοι την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων ομάδων. Επιπλέον από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών θα έχουμε για κάθε ομάδα $G$:

$$G \approx F/N\,,$$

όπου $N = \mathsf{ker}\, \phi$.

**Ορισμός 5.0.4.** *Ονομάζουμε* ***κατευθυνόμενο (directed) σύνολο*** $\Lambda$, *το σύνολο που είναι εφοδιασμένο με μια σχέση μερικής διάταξης* $\leqslant$ *έτσι ώστε για δυο οποιαδήποτε στοιχεία* $a, b \in \Lambda$ *να υπάρχει* $c \in \Lambda$, *τέτοιο ώστε* $a \leqslant c$ *και* $c \leqslant b$.
*Ονομάζουμε* ***ευθύ σύστημα*** *(direct system) συνόλων μια οικογένεια συνόλων* $\{X_a\}_{a\in\Lambda}$, *όπου* $\Lambda$ *είναι ένα κατευθυνόμενο directed σύνολο, και συναρτήσεων*

$$f_a^b : X_a \to X_b\,, \quad \textit{οποτεδήποτε } a \leqslant b\,,$$

*που ικανοποιούν τις ιδιότητες:*

(i) $f_a^a = \mathsf{id}_{X_a}$, *για κάθε* $a \in \Lambda$.

(ii) *εάν* $a \leqslant c \leqslant b$, *τότε* $f_a^c = f_a^b \circ f_b^c$.

Εμείς ενδιαφερόμαστε για ευθέα συστήματα (direct systems) όπου τα $X_a$ είναι ομάδες και οι $f_a^b$ είναι ομομορφισμοί ομάδων.
Έστω $\{X_a, f_a^b\}$ ένα ευθύ σύστημα αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών. Μπορούμε να ορίσουμε μια υποομάδα της $\sum_{a\in\Lambda} X_a$ ως εξής:

$$R = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_{a_i} \mid \exists c \in \Lambda,\ a_i \leqslant c,\ \sum_{i=1}^{n} f_{a_i}^c(x_{a_i}) = 0. \right\rangle$$

**Ορισμός 5.0.5.** *Ονομάζουμε* ***ευθύ (direct) όριο*** *του συστήματος* $\{X_a, f_a^b\}$ *και το συμβολίζουμε με* $\varinjlim_a X_a$, *την ομάδα*

$$\varinjlim_a X_a = \sum_a X_a/R\,.$$

Παρατηρούμε ότι αν $x_a \in X_a$ και $x_b \in X_b$, θα είναι ίσα στο ευθύ όριο, εάν για κάποιο $s \in \Lambda$ ισχύουν $a \leqslant c$ και $b \leqslant c$ και $f_a^c(x_a) = f_b^c(x_b)$.

Η επόμενη έννοια την οποία θα δούμε μέσω της καθολικής της ιδιότητας, είναι αυτή του ελεύθερου γινομένου μεταξύ δύο ομάδων (βλέπε [16]). Υποθέτουμε λοιπόν ότι H και  είναι δύο ομάδες. Η L καλείται ελεύθερο γινόμενο των H και K εάν υπάρχουν ομομορφισμοί $i_H : H \to L$ και $i_K : K \to L$ οι οποίοι ικανοποιούν την εξής ιδιότητα: για κάθε ζεύγος ομομορφισμών $\alpha : H \to G$ και $\beta : K \to G$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\gamma : L \to G$ τέτοιος ώστε $\alpha = \gamma \circ i_H$, $\beta = \gamma \circ i_K$. Διαγραμματικά επομένως έχουμε το ακόλουθο:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "i_H"] \arrow[dr, "\alpha"'] & L \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma"] & K \arrow[l, "i_K"'] \arrow[dl, "\beta"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

όπου $\gamma$ ο μοναδικός ομομορφισμός που μας δίνει την μεταθετικότητα. Από εδώ και πέρα θα συμβολίζουμε την ομάδα $L$ με $H \star K$.

# Ευρετήριο

# Βιβλιογραφία


[1] **M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto**. *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*. Springer, 2000.

[2] **P. Bohl**. *Uber die Bewegung eines mechanischen systems in der Nahe einer Gleichgewichtslage*. J. Reine Angew. Math. **127**, 1904, 179-276.

[3] **K. Borsuk**. *Sur les retractes*. Fund. Math. **17**, 1931, 152-170

[4] **L.E.J. Brouwer**. *On continuous one-to-one transformations of surfaces into themselves*. Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A **11**, 1909, 788-798.

[5] **L.E.J. Brouwer**. *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl*. Math. Ann. **70**, 1911, 161-165.

[6] **L.E.J. Brouwer**. *Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann. **71**, 1912, 97-115.

[7] **F.E. Browder**. *Fixed point theory and nonlinear problems*. Bull. Amer. Math. Soc. (NS) **9**, 1983, 1-39.

[8] **J. F. Davis and P. Kirk**. *Lecture notes in Algebraic Topology*. American Mathematical Society, Vol. **35**, 2001.

[9] **A. Dold**. *Lectures on Algebraic Topology*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag **200**, 1972.

[10] **J. Dugundji**. *Topology, second edition*. Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[11] **J. Dugundji and A. Granas**. *Fixed point theory and nonlinear problems*. Fixed Point Theory, PWN-Polish Scientific Publishing, Warszawa **9**, 1982.

[12] **M. J. Greenberg and J. R. Harper**. *Algebraic Topology A First Course*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1989.

[13] **A. Hatcher**. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[14] **Shizuo Kakutani**. *A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem*. Duke Mathematical Journal. 1941.

[15] **N. Kechagias**. http://users.uoi.gr/nkechag/SimiosisAlgTop21.pdf.

[16] **N. Kechagias**. http://users.uoi.gr/nkechag/GroupsNotesLONG3.pdf.

[17] **J. P. May**. *A Concise Course in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics Series, 1999.

[18] **C. Miranda**. *Un'osseryazione su una teorema di Brouwer*. BolI. Un. Mat. ItaI. (Seconda Serie) **3**, 1941, 5-7.

[19] **J. R. Munkres**. *Topology a first course, second edition*. Prentice Hall, Inc., 2000.

[20] **H. Poincare**. *Sur certaines solutions particulieres du probleme des trois corps*. C.R. Acad. Sci.Paris **97**, 1883, 25I-252.

[21] **J. Rotman**. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1998.

[22] **J. Schauder**. *Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen*. Studia Math. **2**, 1930, 171-180. Oeuvres, PWN, Warsaw, 1978.

[23] **H. W. Siegberg**. *Some Historical Remarks Concerning Degree Theory*. The American Mathematical Monthly Volume 88, Issue 2, 1981.

[24] **R. M. Switzer**. *Algerbaic Topology-Homotopy and Homology*. Springer-Verlag, 1973.

[25] **A.N. Tychonov**. *Ein Fixpunktsatz*. Math. Ann. **111**, 1935, 767-776.

[26] **J. W. Vick**. *Homology Theory*. Springer-Verlag, 1991.