Τοπολογία, γεωμετρία, και ανάλυση

Η Εικασία του Poincare

Νώντας Κεχαγιάς

Η εποχή μας χαρακτηρίζεται από άκρα εξειδίκευση. Φυσικό αποτέλεσμα αυτής της τακτικής είναι ο διαχωρισμός των επιστημονικών αντικειμένων σε επιμέρους κλάδους οι οποίοι σε πρώτη μελέτη φαίνονται ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Η μαθηματική επιστήμη χωρίζεται σε τρεις βασικούς κλάδους: *ανάλυση, άλγεβρα*, και *γεωμετρία*. Οι επιστήμονες έχουν φθάσει στο σημείο, λόγω του όγκου της γνώσης, να μελετούν επιμέρους ενότητες. Τα μεγάλα αποτελέσματα όμως δίνονται από επιστήμονες ικανούς να χρησιμοποιούν με ευχέρεια διάφορους κλάδους.

Αυτή η διαπίστωση ήταν πανάκεια μέχρι την αρχή του εικοστού αιώνα και επαληθεύτηκε έναν αιώνα αργότερα με την απόδειξη της Εικασίας του Poincare. Αλλά ας δούμε την επιρροή αυτής της Εικασίας στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης επικεντρώνοντας μόνο στα κύρια σημεία.

Ένα βασικό πρόβλημα από την περιοχή της ανάλυσης που σχετίζεται με διαφορικές εξισώσεις είναι το ακόλουθο :

Έστω f(z) συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής και C ο βρόγχος (θηλιά) υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f. Αν ο C μπορεί με συνεχή τρόπο να μετασχηματισθεί σε σταθερό βρόγχο , τότε το ολοκλήρωμα :

$$\int_C \mathbf{f(z)dz}$$

είναι μηδέν.

Αυτό το πρόβλημα ήταν η αρχή ώστε ο Poincare να θέσει τις βάσεις για τον κλάδο της αλγεβρικής τοπολογίας.

Στην τοπολογία μπορούμε να μεταβάλουμε τη μορφή ενός σώματος και να πάρουμε ένα ισοδύναμο με τέντωμα, συμπίεση,

περιστροφή ή συστροφή. Δεν μπορούμε να το κόψουμε ούτε να το επικολλήσουμε. Η κλάση ισοδυναμίας ανάγεται στον αριθμό και το είδος των τρυπών που έχει το σώμα. Παραδείγματος χάριν, οι επιφάνειες που έχουν τον ίδιο αριθμό και είδος από τρύπες είναι ισοδύναμες, και μάλιστα ομοιομορφικές. Αυτό δεν ισχύει σε ανώτερες διαστάσεις. Δεν μας ενδιαφέρουν οι γωνίες ούτε οι αποστάσεις αλλά ούτε και το ακριβές σχήμα ενός σώματος. Αντίθετα στη γεωμετρία αυτές οι έννοιες είναι πολύ σημαντικές και κάνουν τα σώματα να διαφέρουν μεταξύ τους.
Σκοπός της τοπολογίας είναι η ταξινόμηση των τοπολογικών χώρων. Ο κύριος τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζεται το πρόβλημα αυτό είναι η αναγωγή των τοπολογικών προβλημάτων σε αλγεβρικά, δηλαδή η συσχέτιση αλγεβρικών αναλλοίωτων με τοπολογικές.
Οι πρώτες σοβαρές βάσεις του κλάδου δόθηκαν από τον Poincare το 1895 με το άρθρο του:

- Henri Poincaré, *Analysis Situs*, Journal de l'École Polytechnique ser 2, **1** (1895) pages 1-123.

Και με τις πέντε μετέπειτα συμπληρώσεις :

- Henri Poincaré, *Complément à l'Analysis Situs*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, **13** (1899) pages 285-343.
- Henri Poincaré, *Second complément à l'Analysis Situs*, Proceedings of the London Mathematical Society, **32** (1900), pages 277-308.
- Henri Poincaré, *Sur certaines surfaces algébriques ; troisième complément à l'Analysis Situs*, Bulletin de la Société mathématique de France, **30** (1902), pages 49-70.
- Henri Poincaré, *Sur les cycles des surfaces algébriques ; quatrième complément à l'Analysis Situs*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 5° série, **8** (1902), pages 169-214.
- Henri Poincaré, *Cinquième complément à l'analysis situs*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **18** (1904) pages 45-110.

Δυστυχώς η μαθηματική κοινότητα αντελήφθη τη συμβολή του μετά το θάνατό του και η επιρροή του νέου κλάδου στα μαθηματικά φανερώθηκε αρκετά αργότερα. Ο Herman Weyl δήλωσε ότι η αλγεβρική τοπολογία έμμεσα η άμεσα διεκδικεί κάθε μεμονωμένο κλάδο των μαθηματικών. Αλλά οι εφαρμογές της δεν περιορίζονται μόνο στα μαθηματικά. Εφαρμόζεται στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, στα οικονομικά, στη βιολογία, τη ρομποτική, τη φυσική, την κοσμολογία και αλλού.

Θα ήταν ευχής έργο αν με έναν απλό τρόπο μπορούσαν να ταξινομηθούν οι τοπολογικοί χώροι ως προς τοπολογική ισοδυναμία.
Αυτό ήταν το πρόγραμμα των μαθηματικών του δέκατου ένατου αιώνα. Γρήγορα όμως αποδείχθηκε ότι ήταν ουτοπία. Ήταν ήδη γνωστό ότι μία κλειστή επίπεδη καμπύλη που δεν τέμνεται είναι ομοιομορφική με την σφαίρα S^1. Επίσης οι Poincare και Kebe (1907) είχαν ταξινομήσει τις συμπαγείς, συνεκτικές επιφάνειες.

Κάθε κλειστή επιφάνεια είναι ομοιομορφική είτε με τη σφαίρα, είτε με τη σφαίρα όπου έχουν προστεθεί πεπερασμένου πλήθους χειρολαβές, είτε με τη σφαίρα όπου έχουν αφαιρεθεί πεπερασμένου πλήθους δίσκοι και αντικατασταθεί με ταινίες του Mobius.

Η ουσιώδης ιδέα του Poincare προς αυτήν την κατεύθυνση ήταν να χρησιμοποιηθούν ακολουθίες αριθμών (αντί για έναν όπως πίστευαν μέχρι τότε) οι οποίες θα περιέγραφαν τοπολογικές ιδιότητες. Συγκεκριμένα χρησιμοποίησε τους αριθμούς Betti και τους συντελεστές στρέψης. Αυτοί οι αριθμοί δεν είναι τίποτα άλλο από την ομολογία ενός χώρου. Προφανώς αν δύο χώροι έχουν διαφορετικές ακολουθίες αριθμών, τότε δεν είναι ισοδύναμοι. Δυστυχώς δεν ισχύει και το ανάποδο. Ισχύει όμως μερικώς και από εδώ ξεκίνησε ο Poincare για να διατυπώσει την αρχική Εικασία του:

Μία συνεκτική, συμπαγής, τρισδιάστατη πολλαπλότητα με τις ίδιες ομάδες ομολογίας με αυτές της τρισδιάστατης σφαίρας είναι ομοιομορφική με αυτήν;

Οι αριθμοί Betti μπορούμε να πούμε απλοϊκά ότι είναι το πλήθος και το είδος των τρυπών ενός χώρου. Οι συντελεστές στρέψης μας περιγράφουν αν ο χώρος συστρέφεται όπως η λωρίδα του Mobius.

Στην αρχική έκφραση της Εικασίας του δεν υπήρχε η έννοια της «**απλής συνεκτικότητας** » γιατί ακόμα δεν είχε οριστεί η πρωταρχική ή θεμελιώδης ομάδα ή ομάδα του Poincare όπως ονομάστηκε αργότερα. Ο ίδιος βρήκε αντιπαράδειγμα της αρχικής Εικασίας, την περίφημη τρισδιάστατη σφαίρα ομολογίας του Poincare:
http://www.eg-models.de/models/Simplicial_Manifolds/2003.04.001/_preview.html
Είναι το σύνορο μιας συμπαγούς, απλά συνεκτικής τετραδιάστατης πολλαπλότητας. Είναι το μόνο γνωστό αντιπαράδειγμα με αυτές τις ιδιότητες. Αυτό το αντιπαράδειγμα τον οδήγησε στη σύλληψη της έννοιας της απλής συνεκτικότητας και του ορισμού της πρώτης ομοτοπικής ομάδας. Θεωρείται ο πατέρας της θεωρίας ομοτοπίας και χρησιμοποίησε την άλγεβρα σαν ένα βασικό εργαλείο στη μελέτη των τοπολογικών χώρων. Μέχρι τότε χρησιμοποιούσαν ακολουθίες αριθμών και όχι αλγεβρικές δομές.
Προφανώς η ομάδα Poincare δεν είναι ικανή να διαχωρίσει από μόνη της τους τοπολογικούς χώρους. Αργότερα ο Alexander κατασκεύασε φακοειδείς χώρους οι οποίοι έχουν την ίδια ομάδα αλλά δεν είναι ισοδύναμοι.
Ένας τρισδιάστατος φακοειδής χώρος είναι το αποτέλεσμα της επικόλλησης δύο γεμάτων σαμπρελών ως προς έναν ομοιομορφισμό μεταξύ των συνόρων τους. Δεν καθορίζονται από την ομολογία τους και την πρωταρχική τους ομάδα.

Στο πέμπτο βιβλίο του ο Poincare διατύπωσε ένα ερώτημα, την περίφημη Εικασία του η οποία με τη γλώσσα της απλής συνεκτικότητας περιγράφεται ως εξής :

Θα μπορούσε μια τρισδιάστατη συμπαγής απλά συνεκτική πολλαπλότητα να μην είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα;

Παρατηρείστε ότι χρησιμοποιώντας την δυικότητα του Poincare έχουμε αμέσως τις υποθέσεις της πρώτης του εικασίας.

Αυτό το ερώτημα αποδείχθηκε μετά από εκατό χρόνια και κατόπιν τρομακτικών προσπαθειών κορυφαίων μαθηματικών. Οι προσπάθειες αυτές έγιναν αιτία να γεννηθούν νέες περιοχές στα μαθηματικά και να ανακαλυφθούν πολλά και ουσιώδη αποτελέσματα σε όλους σχεδόν τους κλάδους των μαθηματικών. Η Αμερικανική Μαθηματική εταιρεία είχε θεσπίσει ειδικό αριθμό για τις εργασίες σχετικά με το πρόβλημα του Poincare.
Για τις δυδιάστατες πολλαπλότητες ήταν γνωστό το αποτέλεσμα. Όταν οι προσπάθειες απέβησαν άκαρπες μέχρι το 1950 περίπου, οι τοπολόγοι προσπάθησαν να αποδείξουν το αντίστοιχο πρόβλημα σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Όσο κι αν αποτελεί έκπληξη, αποδείχθηκε πιο εύκολο το πρόβλημα στις ανώτερες διαστάσεις.
Αν μία συμπαγής συνεκτική n-διάστατη πολλαπλότητα είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με τη σφαίρα τότε είναι και ομοιομορφική για, n>4.
Η απόδειξη δόθηκε πρώτα από τον Smale με χρήση του θεωρήματος του συν-συνορισμού.

- Smale, Stephen The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **66,** 1960, 373--375.

Παράλληλα ο Stallings έδωσε μία απόδειξη για n>6.

- Stallings, John R. Polyhedral homotopy-spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.* **66,** 1960, 485--488.

Ο Zeeman επέκτεινε την απόδειξη του Stallings για n>4. Τέλος ο Wallace στηριζόμενος σε κάποια λήμματα του Smale έδωσε κι αυτός μία απόδειξη για n>4.

- Zeeman, E. C. The generalised Poincaré conjecture. *Bull. Amer. Math. Soc.* **67,** 1961, 270.
- Wallace, Andrew H. A geometric method in differential toplogy. *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** 1962 533--542.

Η μέθοδος του Smale στηρίζεται στην αποδόμηση πολλαπλότητας και στη συστροφή των λαβών (τέχνασμα του Whitney) και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διαστάσεις μικρότερες του πέντε.

Η Εικασία του Poincare αποδείχτηκε για τη διάσταση τέσσερα από τον Freedman ο οποίος ταξινόμησε όλες τις τετραδιάστατες, συμπαγείς, απλά συνεκτικές πολλαπλότητες.

Αν μια τετραδιάστατη τοπολογική πολλαπλότητα είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με την S^4, τότε είναι ομοιομορφική με την S^4.

- Michael Hartley Freedman, J. Differential Geom. Volume 17, Number 3 (1982), 357-453.

Επανερχόμαστε στη διάσταση τρία. Για ενενήντα χρόνια οι τοπολόγοι προσπαθούσαν να αποδείξουν την Εικασία στη διάσταση τρία χρησιμοποιώντας τοπολογικές μεθόδους. Το κλειδί όμως για την αντιμετώπιση αυτής της διάστασης βρίσκεται στο θεώρημα του Wallace που λέει ότι όλες οι τρισδιάστατες πολλαπλότητας μπορούν να γίνουν ομοιομορφικές με λείες πολλαπλότητες. Στην διάσταση τρία η ύπαρξη τριγωνισμού συνεπάγεται την ύπαρξη λείας δομής. Αυτό είναι η αρχή της επίλυσης της εικασίας με γεωμετρία Riemann. Ο Thurston το αντελήφθη αυτό οπότε αντιμετώπιζε τις πολλαπλότητες σαν γεωμετρικά τώρα αντικείμενα.

Εικασία Γεωμετρικοποίησης του Thurston:

Αφού διασπαστεί μια τρισδιάστατη πολλαπλότητα στο συνεκτικό άθροισμα και στην αποδόμηση κατά Jaco-Shalen-Johannson, οι συνιστώσες που δημιουργούνται επιδέχονται μια από τις οκτώ γεωμετρίες του Thurston.

Η προεργασία για την επίλυση της Εικασίας έγινε από τον Hamilton ο οποίος για την αποδόμηση της πολλαπλότητας χρησιμοποίησε διαφορικές εξισώσεις. Πιο συγκεκριμένα τη ροή Ricci.

$$\partial_t g_{ij} = -2R_{ij} + \frac{2}{n} R_{\text{avg}} g_{ij}$$

Όπου R_{avg} είναι η μέση τιμή της σταθερής καμπυλότητας η οποία δίνεται από το ίχνος του τανυστή Ricci.
Αυτή η ροή δεν είναι τίποτα άλλο από τη διάχυση καμπυλότητας, δηλαδή πως εξελίσσεται η καμπυλότητα στο χρόνο.

- Hamilton, Richard S. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.* **17** (1982), no. 2, 255--306.

Το τοπολογικό πρόβλημα λοιπόν ανάγεται σε πρόβλημα διαφορικών εξισώσεων. Υπάρχουν πολλά προβλήματα που δημιουργεί η μέθοδος του Hamilton η οποία μπορεί να καταλήξει σε παθολογικές καταστάσεις. Αυτά τα προβλήματα που δεν μπορούσε να ξεπεράσει ο Hamilton ξεπέρασε ο ιδιόρρυθμος, με την καλή έννοια, κορυφαίος Ρώσσος μαθηματικός Grisha Perelemann. Σημειώνουμε ότι δεν αποδέχθηκε το βραβείο του 1.000.000$ αλλά ούτε και τη μεγαλύτερη διάκριση της μαθηματικής επιστήμης το Fields Metal. Επίσης απέρριψε προσφορές εργασίας από τα κορυφαία παν/μια της Αμερικής και ζει με έναν πενιχρό μισθό σε μια φτωχική συνοικία της Αγίας Πετρούπολης. Τις εργασίες του τις ανάρτησε στο διαδίκτυο.

- The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. [arxiv:math.DG/0211159]

- Ricci flow with surgery on three-manifolds. [arxiv:math.DG/0303109]

Μια πολλή καλή ανάλυση της απόδειξης όπως και το απαραίτητο υπόβαθρο δίνεται στο βιβλίο:
"***Ricci flow and the Poincare conjecture***" J. Morgan and G. Tian, AMS – Clay Mathematics Institute.

Η Εικασία (το Θεώρημα από εδώ και εμπρός) του Poincare έχει να κάνει με τη μελέτη λύσεων επί των διαφορικών εξισώσεων και απεδείχθη με τη χρήση διαφορικών εξισώσεων. Τελικά είναι οι διάφορες περιοχές των μαθηματικών ανεξάρτητες μεταξύ τους;