Επαμεινώνδας Κεχαγιάς

Τοπολογικές ομάδες πινάκων

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τμήμα Μαθηματικών
Ιωάννινα, 2019

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι σημειώσεις αυτές έχουν σκοπό να συνδέσουν την άλγεβρα, γεωμετρία και ανάλυση με την ευρεία έννοια. Συγκεκριμένα τη θεωρία ομάδων με την τοπολογία και τη διαφορική γεωμετρία χρησιμοποιώντας πίνακες. Αποτελούν μια εισαγωγή εισαγωγής σε ένα μεγάλο κομμάτι των μαθηματικών το οποίο έχει εφαρμογές και στη μαθηματική φυσική.

Πολλά βιβλία στη Θεωρία Ομάδων ξεκινούν με τη μελέτη των κρυσταλλογραφικών ομάδων. Εύλογα κάποιος θα θεωρούσε ότι η Θεωρία Ομάδων αποτελεί μια έξυπνη εφαρμογή στην ανάλυση της κρυσταλλικής δομής. Η μελέτη της κρυσταλλικής δομής ξεκίνησε το 1784 πολύ πριν καν εκφραστεί η έννοια της ομάδας, η οποία άρχισε να διαμορφώνεται με τη μελέτη των συμμετριών πολύ αργότερα.

Η έννοια της τοπολογικής ομάδας εισήχθη από τον Sofus Lie. Σκοπός της μελέτης ήταν να μελετηθεί μια ¨μικρή ανοικτή¨ περιοχή του ταυτοτικού στοιχείου της ομάδας. Καθώς η θεωρία των τοπολογικών χώρων αναπτυσσότανε και η ιδέα του Lie για τις τοπολογικές ομάδες έπαιρνε πιό αφηρημένη και ολοκληρωμένη μορφή. Παράλληλα και η μελέτη επεκτεινότανε σ' όλη την ομάδα.

Μία ομάδα Lie περικλείει τρεις διαφορετικές μαθηματικές δομές. Αποτελεί αλγεβρική ομάδα, τοπολογικό χώρο και διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Ουσιαστικά μία ομάδα Lie μπορεί να περιγραφεί ισοδύναμα με διαφορετικούς τρόπους εξαρτώμενους από τη δομή στην οποία θέλουμε να δώσουμε έμφαση. Μπορεί να ορισθεί σαν τοπολογική ομάδα με επιπρόσθετες ιδιότητες διαφορισιμότητας κατά τον Pontryagin ή σαν διαφορίσιμη πολλαπλότητα με επιπρόσθετες αλγεβρικές ιδιότητες κατά τους Chevalley και Adams.

Οι ομάδες Lie οι οποίες υπεισέρχονται σε φυσικά προβλήματα είναι οι καλούμενες γραμμικές ομάδες Lie για τις οποίες μπορεί να δοθεί ένας πιο άμεσος ορισμός. Οι συγκεκριμένες ομάδες δέχονται μία τουλάχιστον πιστή αναπαράσταση σε πεπερασμένο διανυσματικό χώρο. Δεν θα επεκταθούμε προς αυτήν την κατεύθυνση σ' αυτές τις σημειώσεις.

Η απλούστερη εφαρμογή της Θεωρίας Ομάδων στη φυσική είναι μέσω μιας αβελιανής ομάδας σε τρεις γεννήτορες (χρόνος, μήκος, μάζα). Η ομάδα Lorentz αφήνει αναλλοίωτες τις εξισώσεις του Maxwell στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Με πολλούς τρόπους μπορεί να δει κάποιος το ρόλο της ομάδας Lorentz στη μοντέρνα φυσική. Είναι γνωστό (A. N. Whitehead) ότι οι τύποι αλλαγής μεταβλητών από ένα σύστημα σ' ένα άλλο το οποίο κινείται ομοιόμορφα εν σχέση με το πρώτο είναι γραμμικοί. Η υπόθεση ότι το σύνολο των μετασχηματισμών αποτελεί ομάδα υπονοεί την ύπαρξη μίας απόλυτης σταθεράς k ώστε η ποιοτική φύση των μετασχηματισμών θα είναι ριζικά διαφορετικοί εξαρτώμενοι από το αν η σταθερά είναι θετική, μηδέν ή αρνητική. Η περίπτωση $k = 0$ αντιστοιχεί στη Νευτώνεια Μηχανική. Αν $k \neq 0$, τότε οι τιμές της είναι ιδιαίτερα μικρές της τάξης του c^{-2}, για c την ταχύτητα του φωτός. Για $k < 0$, θα έχουμε περίεργα φυσικά φαινόμενα, οπότε η μελέτη στρέφεται στην περίπτωση $k > 0$. Η Νευτώνεια μηχανική παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς για $k = 0$ ενώ η Θεωρία του Maxwell για $k > 0$.

Η βασική ιδιότητα μίας ομάδας Lie είναι ότι έχει ένα υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων *κοντά* στο ταυτοτικό στοιχείο και η δομή αυτής της περιοχής ουσιαστικά καθορίζει τη δομή ολόκληρης της ομάδας και καθορίζεται από την αντίστοιχη άλγεβρα Lie.

Ουσιαστικά θα επιδιώξουμε τούτο, να παρουσιάσουμε μια εισαγωγή στις ομάδες Lie μέσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων από ομάδες πινάκων. Παρότι οι ομάδες πινάκων δεν περιγράφουν πλήρως τις ομάδες Lie, οι περισσότερο ενδιαφέρουσες ομάδες Lie αναδύονται από ομάδες πινάκων. Κατά συνέπεια το αντικείμενο μελέτης μας δίνει μια καλή εισαγωγή στη θεωρία των ομάδων Lie.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε άλγεβρες πινάκων πάνω από τους πραγματικούς, μιγαδικούς και τετραρτόνια. Ορίζουμε τις γενικές ομάδες για τους προηγούμενους διαιρετικούς δακτυλίους. Στο τρίτο κεφάλαιο αναφερόμαστε στις ορθογώνιες ομάδες μέσω του κανονικού εσωτερικού γινομένου οπότε οι προηγούμενες άλγεβρες πινάκων γίνονται τοπολογικοί χώροι και οι ομάδες μας τοπολογικές ομάδες. Στο τέταρτο κεφάλαιο δίνεται μια εισαγωγή στις τοπολογικές ομάδες. Η έννοια του εφαπτόμενου χώρου για συγκεκριμένες ομάδες πινάκων εισάγεται στο πέμπτο κεφάλαιο χρησιμοποιώντας την έννοια του σπέρματος. Στο έκτο κεφάλαιο εισάγουμε τις αντίστοιχες άλγεβρες Lie και στο έβδομο παρουσιάζουμε μια εισαγωγή στις ομάδες Lie. Οι αβελιανές ομάδες οι οποίες δίνονται από καρτεσιανά γινόμενα κύκλων, δηλαδή ομάδες σπείρες ή τόροι, διαδραματίζουν ιδιαίτερο ρόλο μεταξύ των αβελιανών ομάδων πινάκων. Ο ρόλος αυτός μελετάται στο όγδοο κεφάλαιο όπου αποδεικνύεται ότι μια συμπαγής αβελιανή ομάδα πινάκων είναι ισόμορφη με κάποια σπείρα. Στο ένατο κεφάλαιο συνεχίζουμε τη μελέτη σπειρών και δείχνουμε ότι οι ομάδες $U(n)$ και $SO(n)$ καλύπτονται από συζυγείς σπείρες. Στο τελευταίο κεφάλαιο αποδεικνύεται ότι τα στοιχεία της $O(n)$ δίνονται από γινόμενα ανακλάσεων.

Οι σημειώσεις αυτές βρίσκονται υπό διαρκεί ενημέρωση. Αποτελούν ένα ¨μπούσουλα¨ για ένα μάθημα με τίτλο **Τοπολογικές ομάδες πινάκων**. Οι περισσότερες αποδείξεις απουσιάζουν λόγω έλλειψης χρόνου και θα συμπληρώνονται μέχρι οι σημειώσεις αυτές να πάρουν την τελική τους μορφή. Οι παρατηρήσεις ή και διορθώσεις είναι καλοδεχούμενες. Γράψτε μας στη διεύθυνση
nkechag@uoi.gr

Κεφάλαιο 2

Άλγεβρες πινάκων

2.1 Ο Διαιρετικός δακτύλιος τεταρτονίων

Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ αποτελεί σώμα όπως επίσης και το σύνολο των μιγαδικών $\mathbb{C}$ το οποίο είναι και πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης δύο. Ένα προφανές ερώτημα είναι αν ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ μπορεί να γίνει σώμα. Ουσιαστικά να εφοδιαστεί με γινόμενο.

Ο $\mathbb{C}$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης δύο πάνω από τους πραγματικούς με βάση το $\{1, i\}$. Υπενθυμίζουμε ότι ισχύει $i^2 = -1$.

Ας υποθέσουμε ότι ο $\mathbb{R}^3$ έχει βάση το $\{1, i, j\}$ και είναι εφοδιασμένος με γινόμενο ώστε να αποτελεί σώμα και μάλιστα οι μιγαδικοί να είναι υποσώμα του νέου σώματος όπως οι πραγματικοί στους μιγαδικούς. Τότε κάθε στοιχείο θα γράφετε στη μορφή $a + bi + cj$. Εδώ $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Αν λοιπόν είχαμε $ij = a + bi + cj$ τότε $i^2 j = ia + bi^2 + cij$. Δηλαδή $-j = ai - b + ijc$ και $-j = ai - b + ac + bci + c^2 j$. Οπότε $c^2 = -1$. Το οποίο είναι αδύνατο γιατί το $c \in \mathbb{R}$.

Το πρόβλημα δημιουργείται διότι θεωρούμε ότι $ij \in \mathbb{R}^3$. Για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα ας υποθέσουμε ότι είναι κάποια νέα μεταβλητή $ij = k$. Σ' αυτήν την περίπτωση χρειαζόμαστε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ με βάση το $\{1, i, j, k\}$ ο οποίος επεκτείνει τον $\mathbb{C}$.

Ας δούμε τι γίνεται με το γινόμενο. Αν περιοριστούμε στο υποσύνολο

$$\{1, -1, i, -1, j, -j, k, -k\}$$

με το γινόμενο $ij = k$, τότε ουσιαστικά έχουμε την **ομάδα των τεταρτονίων**, Q_8. Δηλαδή $i^2 = -1 = j^2$, και $ji = -k$. Άρα ο $\mathbb{R}^4 \equiv < 1, i, j, k >$ δεν έχει αντιμεταθετικό γινόμενο, οπότε δεν είναι σώμα αλλά όπως θα δείξουμε είναι **διαιρετικός δακτύλιος**. Δηλαδή κάθε μη-μηδενικό στοιχείο του έχει αντίστροφο. Θα συμβολίζουμε τον $\mathbb{R}^4 \equiv < 1, i, j, k >$ με αυτές τις πράξεις με $\mathbb{H}$.

Αν $q = a + bi + cj + dk \neq 0$, τότε $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$ και εύκολα δείχνουμε ότι

$$q^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Με $\mathbb{k}$ θα συμβολίζουμε τους πραγματικούς $\mathbb{R}$, μιγαδικούς $\mathbb{C}$ ή τον **διαιρετικό δακτύλιο των τεταρτονίων** $\mathbb{H}$.

2.2 Άλγεβρες πινάκων

Με $\mathbb{k}^n$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των n-άδων με πρόσθεση κατά συντεταγμένες και σημειακό γινόμενο από αριστερά

$$c(x_1, \cdots, x_n) = (cx_1, \cdots, cx_n).$$

Με αυτές τις δύο πράξεις το σύνολο $\mathbb{k}^n$ γίνεται **διανυσματικός χώρος**. Προσοχή. Εδώ δεν απαιτούμε το $\mathbb{k}$ να είναι σώμα. Μπορεί απλά να είναι διαιρετικός δακτύλιος όπως το $\mathbb{H}$ (βλέπε Hungerford).

Ορισμός 2.2.0.1. *Μια απεικόνιση $T : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ καλείται γραμμική αν ισχύει*

$$T(av + bw) = aT(v) + bT(w)$$

με $a,\ b\ \in \mathbb{k}$ και $v,\ w\ \in \mathbb{k}^n$.

Γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα ότι το άθροισμα και η σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων είναι επίσης γραμμική απεικόνιση.

Ορισμός 2.2.0.2. *Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω από το $\mathbb{k}$ καλείται **πραγματική άλγεβρα**, αν είναι εφοδιασμένος με ένα γινόμενο το οποίο έχει ταυτοτικό στοιχείο e ώστε $ve = v = ev$ για όλα τα $v \in V$ και ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες για όλα τα στοιχεία $c \in \mathbb{k}$ και $u,\ v,\ w \in \mathbb{k}^n$.*
1) $(cu)v = c(uv) = u(cv)$.
2) $(u + v)w = uw + vw$.
3) $u(v + w) = uv + uw$.
Αν το γινόμενο είναι προσεταιριστικό, τότε καλείται προσεταιριστική άλγεβρα.

Αμέσως έρχεται στη σκέψη μας το σύνολο των $n \times n$ πινάκων πάνω από το $\mathbb{k}$ όπως θα δούμε αμέσως.

Ορισμός 2.2.0.3. *Με $M_n(\mathbb{k})$ συμβολίζουμε το σύνολο των $n \times n$ πινάκων πάνω από το $\mathbb{k}$.*

Έστω πίνακας $M \in M_n(\mathbb{k})$ με $M = (a_{ij})$. Μέσω του πίνακα M ορίζεται γραμμική απεικόνιση ως προς κάποιες βάσεις. Συνήθως θα χρησιμοποιούμε τις κανονικές βάσεις. $T(M) : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ με

$$T(M)(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)(a_{ij}).$$

Εδώ χρησιμοποιούμε το γινόμενο των πινάκων. Ο λόγος που χρησιμοποιούμε το γινόμενο ως διάνυσμα επί πίνακα και όχι πίνακα επί διάνυσμα στήλη είναι ότι το γινόμενο στο $\mathbb{k}$ δεν είναι αντιμεταθετικό οπότε η απεικόνιση που θα οριζότανε δεν θα ήταν γραμμική όπως εύκολα ελέγχει κάποιος.

Σε κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί μοναδικά ένας πίνακας ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{k}^n$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο $M_n(\mathbb{k})$ δεν είναι απλά ένας διανυσματικός χώρος αλλά εφοδιάζεται και με το γινόμενο των πινάκων το οποίο δεν είναι αντιμεταθετικό αλλά είναι προσεταιριστικό. Με αυτές τις τρεις πράξεις αποτελεί μια προσεταιριστική πραγματική άλγεβρα.

2.3 Γενικές γραμμικές ομάδες

Σε μια προσεταιριστική άλγεβρα ιδιαίτερο ενδιαφέρουν παρουσιάζουν τα στοιχεία τα οποία έχουν αντίστροφο.

Ορισμός 2.3.0.1. *Έστω A μια άλγεβρα. Το στοιχείο x θα καλείται **μονάδα** (unit), αν υπάρχει στοιχείο x' ώστε $xx' = e = x'x$.*

Πρόταση 2.3.0.2. *Σε μια προσεταιριστική άλγεβρα το σύνολο των μονάδων της αποτελεί ομάδα με το γινόμενο.*

Ορισμός 2.3.0.3. *Η ομάδα των μονάδων της άλγεβρας $M_n(\mathbb{R})$ συμβολίζεται με $GL(n, \mathbb{R})$, της $M_n(\mathbb{C})$ με $GL(n, \mathbb{C})$ και της $M_n(\mathbb{H})$ με $GL(n, \mathbb{H})$. Αυτές καλούνται **γενικές γραμμικές ομάδες**.*

Γνωρίζουμε ότι ένας πίνακας είναι μονάδα αν και μόνο αν ορίζει αυτομορφισμό στον $\mathbb{k}^n$. Στις άλγεβρες $M_n(\mathbb{R})$ και $M_n(\mathbb{C})$ ισχύει ότι ένας πίνακας είναι μονάδα αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διάφορη από το μηδέν. Η ιδιότητα αυτή στηρίζεται στο ότι τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί. Δηλαδή είναι στοιχεία από κάποιο σώμα. Αν τα στοιχεία αυτά είναι στοιχεία από κάποιο διαιρετικό δακτύλιο τότε δημιουργούνται προβλήματα όπως θα δούμε αμέσως.

Με προσοχή θα γενικεύσουμε την έννοια της ορίζουσας και για τα στοιχεία της $M_n(\mathbb{H})$.

Αναφέρουμε με προσοχή για τον επόμενο λόγο. Αν στην $M_2(\mathbb{H})$ η ορίζουσα είχε ορισθεί ως

$$detA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc,$$

τότε θα είχαμε

$$detA = \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} = 2k \neq 0.$$

Αλλά η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση δεν είναι αυτομορφισμός!

Πρώτα θα ορίσουμε έναν μονομορφισμό $\phi : \mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C})$ με τύπο

$$\phi(a + bi + cj + dk) = \begin{pmatrix} a + bi & -c - di \\ c - di & a - bi \end{pmatrix}.$$

Λήμμα 2.3.0.4. *1) $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w)$.*

2) $\phi(vw) = \phi(v)\phi(w)$.

3) Η ϕ είναι $1 - 1$.

Θα επεκτείνουμε την ϕ σε $\psi : M_n(\mathbb{H}) \to M_{2n}(\mathbb{C})$ με τύπο

$$\psi(A) = (\phi(a_{ts}))$$

για $A = (a_{ts})$. Δηλαδή ξεκινώντας με έναν $n \times n$ πίνακα με στοιχεία τεταρτόνια ορίζουμε έναν $2n \times 2n$ πίνακα με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς.

Λήμμα 2.3.0.5. $\psi(AB) = \psi(A)\psi(B)$.

Έστω τώρα $A \in GL(n, \mathbb{H})$, τότε υπάρχει ο A^{-1} ώστε $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ και $\psi(A^{-1}) = (\psi(A))^{-1}$. Αφού ο $\psi(A)$ αντιστρέφεται θα έχουμε ότι $det(\psi(A)) \neq 0$. Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο.

2.4 Πραγματικές διαιρετικές άλγεβρες

Ως γνωστόν ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιάζεται με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο οπότε ορίζεται το μήκος ενός διανύσματος και με τη βοήθεια του μήκους ορίζεται και η απόσταση μεταξύ δύο διανυσμάτων. Ουσιαστικά ο $\mathbb{R}^n$ είναι ένας χώρος με νόρμα. Σ' αυτήν την υποενότητα θα αναφερθούμε σε ένα σημαντικό πρόβλημα το οποίο απασχόλησε την μαθηματική κοινότητα μεγάλο χρονικό διάστημα.

Ορισμός 2.4.0.1. *Μια **νορμαρισμένη άλγεβρα** A είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης εφοδιασμένος με ένα διγραμμικό γινόμενο*

$$A \times A \to A$$

$$(x, y) \longmapsto xy$$

με μονάδα $1 \in A$ ώστε $1x = 1 = x1$ και εφοδιασμένος με μια νόρμα

$$|| - || : A \to [0, \infty)$$

ώστε

$$||xy|| = ||x||||y||.$$

Εδώ ισχύει $(ax + bx')y = axy + bx'y$ και $x(ay + by') = axy + bxy'$ με $a, b \in \Bbbk$. Επίσης ισχύουν

1. $||x|| = 0 \Rightarrow x = \mathbf{0}$, το μηδενικό διάνυσμα.
2. $||ax|| = |a|||x||$ με $a \in \Bbbk$.
3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Προσοχή. Το γινόμενο δεν είναι απαραίτητα προσεταιριστικό.

Ο Hurwitz το 1900 απέδειξε αλγεβρικά το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.0.2. *Ο $\mathbb{R}^n$ έχει τη δομή νορμαρισμένης άλγεβρας αν και μόνο αν $n = 1, 2, 4, 8$.*

Θα δώσουμε τον ορισμό της διαιρετικής άλγεβρας πάνω από τους πραγματικούς.

Ορισμός 2.4.0.3. *Μια **διαιρετική άλγεβρα** A πάνω από τους πραγματικούς είναι μια άλγεβρα ώστε*

$$xy = \mathbf{0} \Rightarrow x = \mathbf{0} \text{ η } y = \mathbf{0}.$$

Προφανώς μια νορμαρισμένη άλγεβρα είναι μια διαιρετική άλγεβρα.

Πρόταση 2.4.0.4. *Έστω A μια προσεταιριστική άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης. Τότε η A είναι διαιρετική άλγεβρα αν και μόνο αν για όλα τα μη-μηδενικά στοιχεία x υπάρχει μοναδικό x' με $xx' = 1 = x'x$. Δηλαδή τα μη-μηδενικά στοιχεία της A δημιουργούν μια πολλαπλασιαστική ομάδα.*

Το 1960 ο J. F. Adams χρησιμοποιώντας πολύ προχωρημένα εργαλεία απο την αλγεβρική τοπολογία απέδειξε το αντίστοιχο θεώρημα για τις διαιρετικές άλγεβρες (Hatcher).

Θεώρημα 2.4.0.5. *Ο $\mathbb{R}^n$ έχει τη δομή διαιρετικής άλγεβρας αν και μόνο αν* $n = 1, 2, 4, 8$.

2.5 Ασκήσεις

1. Αν $u \in \mathbb{H}$ και $iu = ui$, τότε $u \in \mathbb{C}$.

2. Να δείξετε ότι το κέντρο μίας ομάδας είναι υποομάδα της.

3. Έστω ένα υποσύνολο S μίας ομάδας G. Ορίζουμε τον κεντροποιητή $C(S)$ του S να είναι
$$\{g \in G | gs = sg, \forall s \in S\}$$
και τον κανονικοποιητή $N(S)$ να είναι
$$\{g \in G | gSg^{-1} = S\}.$$
Να δείξετε ότι $C(S) \leqslant N(S) \leqslant G$.

4. Έστω $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ δύο στοιχεία της $GL(2, \mathbb{R})$. Έστω H η υποομάδα της $GL(2, \mathbb{R})$ που γεννάται από το a και K αυτή που γεννάται από το b. Περιγράψτε τις δύο υποομάδες. Δείξτε ότι το
$$HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$$
δεν είναι υποομάδα της $GL(2, \mathbb{R})$.

5. Ορίζουμε τη $\varphi : \mathbb{C} \to M(2, \mathbb{R})$ με τύπο
$$\varphi(z) = \sqrt{\|z\|} \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$
για $z = \sqrt{\|z\|}(cos\theta + isin\theta)$. Δείξτε ότι $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$, η φ είναι 1-1 και $\varphi(z + z') \neq \varphi(z) + (z')$.

6. Δείξτε ότι τα στοιχεία της $\mathbb{H}$ τα οποία αντιμετατίθενται με όλα τα στοιχεία της $\mathbb{H}$ είναι οι πραγματικοί αριθμοί.

7. Δείξτε ότι $\mathbb{H} \cong \mathbb{C} \bigoplus \mathbb{C}j \cong \mathbb{C}^2$.

8. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : GL_n(\mathbb{C}) \to SL_{n+1}(\mathbb{C})$ με τύπο
$$\phi(A) = \begin{pmatrix} (\det A)^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$
είναι μονομορφισμός ομάδων.

9. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathbb{C}^* \to SU_2(\mathbb{C})$ με τύπο

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(z + z^{-1}) & \frac{i}{2}(z - z^{-1}) \\ -\frac{i}{2}(z - z^{-1}) & \frac{1}{2}(z + z^{-1}) \end{pmatrix}$$

είναι ομομορφισμός ομάδων.

10. Δείξτε ότι η ομάδα $\mathbb{Q}$ γεννάται από τα στοιχεία $\dfrac{1}{p^n}$ για $n \in \mathbb{N}$ και p πρώτος αριθμός.

11. Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : \Sigma_n \to GL_n(\mathbb{C})$ με τύπο $\phi(\sigma) = (a_{ij})$ ώστε $a_{ij} = 1$ για $i = \sigma(j)$ και 0 διαφορετικά. Δείξτε ότι η ϕ είναι ομομορφισμός ομάδων.

12. Βρείτε τις υποομάδες της $\mathbb{C}^*$ με πεπερασμένη τάξη.

13. Δίνεται η απεικόνιση $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ για $ad - bc \neq 0$. Η απεικόνιση ϕ καλείται μετασχηματισμός Mobious. Δείξτε ότι το σύνολο των μετασχηματισμών Mobious με πράξη τη σύνθεση αποτελεί ομάδα.

14. Δίνεται το σύνολο

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Αν το H εφοδιασθεί με τη συνηθισμένη πρόσθεση και γινόμενο πινάκων, τότε είναι ισόμορφο με το δακτύλιο των τετρατονίων.

Κεφάλαιο 3

Ορθογώνιες ομάδες

3.1 Εσωτερικά γινόμενα

Σ' αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε ορθογώνιες ομάδες.

Υπενθυμίζουμε ότι με $\mathbb{k}$ θα συμβολίζουμε τους πραγματικούς $\mathbb{R}$, μιγαδικούς $\mathbb{C}$ ή τον διαιρετικό δακτύλιο των τετρατονίων $\mathbb{H}$.

Θα ξεκινήσουμε με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στον αντίστοιχο Ευκλείδειο χώρο το οποίο ορίζεται χρησιμοποιώντας τα συζυγή στοιχεία. Υπενθυμίζουμε τη **συζυγία** στα σύνολα $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

$$\text{Αν } a \in \mathbb{R}, \text{ τότε } \overline{a} = a.$$
$$\text{Αν } a = x + yi \in \mathbb{C}, \text{ τότε } \overline{a} = x - yi.$$
$$\text{Αν } a = x + yi + zj + wk \in \mathbb{H}, \text{ τότε } \overline{a} = x - yi - zj - wk.$$

Γνωρίζουμε ότι τα τεταρτόνια δεν είναι αντιμεταθετικά. Εφιστούμε την προσοχή στην επόμενη ιδιότητα.

$$\overline{ab} = \overline{b}\overline{a}.$$

Αλλά όχι $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$ το οποίο ισχύει στους μιγαδικούς.

Ορισμός 3.1.0.1. *Ορίζουμε ένα **εσωτερικό γινόμενο** $< -, - >: \mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}$ με*

$$< (v_1, \cdots, v_n), (w_1, \cdots, w_n) >= v_1\overline{w_1} + \cdots + v_n\overline{w_n}.$$

Ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες.

1) $< v + v', w >=< v, w > + < v', w >$.
2) $< av, w >= a < v, w >$ και $< v, aw >=< v, w > \overline{a}$.
3) $< v, w >= \overline{< w, v >}$.
4) $< v, v >\geqslant 0$ και $< v, v >= 0$ αν και μόνο αν $v = \mathbf{0}$.
5) Αν $< v, w >= 0$ για όλα τα w τότε $v = \mathbf{0}$.

Ορισμός 3.1.0.2. *Ορίζεται το **μήκος** ή η **νόρμα** ενός διανύσματος από*

$$||v|| = \sqrt{< v, v >}.$$

Αν $M \in M_n(\mathbb{k})$ τότε $vM \in \mathbb{k}^n$ και έχουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.1.0.3. $< vM, w >=< v, w\overline{M}^t >$. *Εδώ* $\overline{M}^t$ *είναι ο ανάστροφος και συζυγής πίνακας του* M.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από τους πραγματικούς εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο καλείται **Ευκλείδειος χώρος**.

Λήμμα 3.1.0.4. *Σε Ευκλείδειο χώρο* V *ισχύει η* ***ανισότητα του Schwarz***.

$$| < u, v > | \leqslant ||u|| \, ||v||.$$

3.2 Ορθογώνιοι πίνακες

Ορισμός 3.2.0.1. *Ορίζουμε το σύνολο*

$$O(n,\mathbb{k}) = \{M \in M_n(\mathbb{k}) \mid \; < vM, wM > = < v, w > \}$$

για όλα τα $v,\ w \in \mathbb{k}^n$.

Λήμμα 3.2.0.2. *Το σύνολο* $O(n,\mathbb{k})$ *αποτελεί ομάδα και για κάθε στοιχείο του ισχύει ότι* $M\overline{M}^t = I = \overline{M}^t M$. *Άρα* $M^{-1} = \overline{M}^t$.

Αν $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, τότε η ομάδα $O(n,\mathbb{k})$ καλείται **ορθογώνια ομάδα** και συμβολίζεται με $O(n)$.
Αν $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, τότε η ομάδα $O(n,\mathbb{k})$ καλείται **ορθομοναδιαία ομάδα** και συμβολίζεται με $U(n)$.
Αν $\mathbb{k} = \mathbb{H}$, τότε η ομάδα $O(n,\mathbb{k})$ καλείται **συμπλεκτική ομάδα** και συμβολίζεται με $Sp(n)$.

Αναφέρουμε ιδιότητες των στοιχείων της ομάδας $O(n,\mathbb{k})$.
1) Διατηρούν το μήκος.
2) Οι στήλες και οι γραμμές τους αποτελούν ορθοκανονικές βάσεις.
3) $M^{-1} = \overline{M}^t$.
4) Απεικονίζουν ορθοκανονικές βάσεις σε ορθοκανονικές βάσεις.
5) Αν $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, τότε $(detM)\overline{detM} = 1$.

Με βάση την τελευταία ιδιότητα ορίζουμε τις επόμενες υποομάδες.

Ορισμός 3.2.0.3. *Η* ***ειδική ορθογώνια ομάδα*** *ορίζεται* $SO(n) = \{M \in O(n) \mid detM = 1\}$.
Η ειδική ορθομοναδιαία ομάδα ορίζεται $SU(n) = \{M \in U(n) \mid detM = 1\}$.

Από τις ιδιότητες των ορθογωνίων ομάδων στο $\mathbb{k}$ φαίνεται ότι αυτές είναι κλειστές και φραγμένες. Άρα είναι συμπαγείς υπόχωροι του $\mathbb{R}^{n^2}$ ή $\mathbb{R}^{2n^2}$.

Ορισμός 3.2.0.4. *Με* S^{n-1} *θα συμβολίζουμε τα διανύσματα μήκους ένα στον* $\mathbb{R}^n$ *με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο.*

Έχουμε λοιπόν σύμφωνα με τους ορισμούς.

$$O(1) = S^0 = \{1, -1\},\ U(1) = S^1,\ Sp^1 = S^3.$$

Σύμφωνα με το περίφημο Θεώρημα του J. F. Adams, αυτές είναι οι μόνες σφαίρες που δέχονται δομή ομάδας (Hatcher).

Είναι γνωστό ότι η $SO(3)$ αποτελεί την ομάδα συμμετριών της σφαίρας S^2, η $SU(2)$ σχετίζεται με τη στροφορμή ενός φυσικού συστήματος και η $SU(3)$ χαρακτηρίζει στοιχειώδη σωματίδια (Sternberg).

3.3 Το ερώτημα του ισομορφισμού

Το βασικό πρόβλημα στη θεωρία ομάδων είναι η ταξινόμησή τους ως προς ισομορφισμό. Για να δείξουμε ότι δυο ομάδες δεν είναι ισόμορφες αρκεί να βρούμε μια ιδιότητα την οποία έχει η μια και δεν έχει η άλλη. Το αντίστροφο ερώτημα είναι δυσκολότερο. Πρέπει να βρεθεί ισομορφισμός μεταξύ τους.

Πρόταση 3.3.0.1. *Η συμμετρική ομάδα σε τρία στοιχεία* Σ_3 *είναι ισόμορφη με την* $GL(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Προς αυτήν την κατεύθυνση θα δείξουμε οτι η $Sp(1)$ με το γινόμενο των τετραρτονίων είναι ισόμορφη με την $SU(2)$ με το γινόμενο των πινάκων.

Πρόταση 3.3.0.2. *Η απεικόνιση* $\psi : M_n(\mathbb{H}) \to M_{2n}(\mathbb{C})$ *που ορίστηκε στο Λήμμα 2.3.0.4 επάγει εναν ισομορφισμό*

$$\psi : Sp(1) \to SU(2).$$

Απόδειξη. Δείξαμε ότι η ψ είναι μονομορφισμός από την $GL(n, \mathbb{H})$ στην $GL(2n, \mathbb{C})$, διότι είναι 1-1 και σέβεται το γινόμενο. Αρκεί να δείξουμε ότι ο περιορισμός της στην $Sp(1)$ δίνει εικόνες στην $SU(2)$ και είναι επί.

Έστω $u = a + bi + cj + dk$, τότε $\phi(a + bi + cj + dk) = \begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}$.
Θα δείξουμε ότι

$$\phi(a + bi + cj + dk)(\overline{\phi(a + bi + cj + dk)})^t = I.$$

Βλέπουμε ότι

$$\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

διότι $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Επίσης $det(\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}) = 1$.

Έστω τώρα $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \in SU(2)$. Εύκολα βλέπουμε ότι $c_4 = \overline{c_1}$ και $c_3 - = \overline{c_2}$. Αν $c_1 = a + ib$ και $c_2 = c + id$, ας θεωρήσουμε το $u = a + bi + jc - kd$. Τότε

$$\phi(a + bi + cj - dk) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -\overline{c_2} & \overline{c_1} \end{pmatrix}.$$

□

Τώρα θα συγκρίνουμε την S^3 με την $O(3)$. Γνωρίζουμε ότι $Sp(1) \cong S^3$. Για κάθε $v \in S^3$ ορίζεται μια αριστερή μετατόπιση στον διαιρετικό δακτύλιο $\mathbb{H}$ μέσω της απεικόνισης

$$L_v : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \text{ με τύπο } L_v(u) = vu.$$

Αν θεωρήσουμε τον $\mathbb{H}$ σαν πραγματικό διανυσματικό χώρο, τότε ταυτίζεται με τον $\mathbb{R}^4$ και η L_v δίνει μια γραμμική απεικόνιση

$$L_v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4.$$

Θα δείξουμε ότι η αριστερή μετατόπιση είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός στον $\mathbb{R}^4$. Επειδή είναι γραμμική, αρκεί να εξετάσουμε τα στοιχεία της βάσης.

$$1 =< L_v(1), L_v(1) >=< L_v(i), L_v(i) >=< L_v(j), L_v(j) >=< L_v(k), L_v(k) >$$

και

$$0 =< L_v(1), L_v(t) >=< L_v(t), L_v(s) > .$$

Εδώ $t, s \in \{i, j, k\}$ και $t \neq s$.

Αν $v = a + bi + jc + kd$, τότε $L_v(1) = v$, $L_v(i) = -b + ia + jd - kc$, $L_v(j) = -c - id + ja + kb$ και $L_v(k) = -d + ic - jb + ka$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του εσωτερικού γινομένου λαμβάνουμε το ζητούμενο.

Επειδή η L_v διατηρεί τα μήκη και είναι γραμμική είναι ορθογώνια, άρα $L_v \in O(4)$.

Πρόταση 3.3.0.3. *Για $v \in S^3$ ορίζεται μια δεξιά μετατόπιση στον διαιρετικό δακτύλιο $\mathbb{H}$ μέσω της απεικόνισης*

$$R_v : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \text{ με τύπο } R_v(u) = uv$$

η οποία είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός στον $\mathbb{R}^4$.

Ορισμός 3.3.0.4. *Έστωσαν $v \in S^3$ και $u \in \mathbb{H}$, ορίζουμε την απεικόνιση*

$$\rho(v)(u) = vu\overline{v}.$$

Επειδή η $\rho(v)$ είναι μια ορθογώνια απεικόνιση στον $\mathbb{R}^4$ σαν σύνθεση ορθογωνίων απεικονίσεων, έχουμε ότι επάγεται μια απεικόνιση

$$\rho : S^3 \to O(4).$$

Παρατηρούμε ότι αν το $u = r$ είναι πραγματικός αριθμός, τότε $\rho(v)(r) = vr\overline{v} = rv\overline{v} = r$. Επίσης $\rho(\overline{v}) = \rho(v)^{-1}$, διότι $\rho(v)\rho(\overline{v})(a) = v(\overline{v}av)\overline{v} = a$. Αν $u = ai + bj + ck$, τότε $\rho(v)(u) = a'i + b'j + c'k$. Δηλαδή για κάθε $v \in S^3$, η $\rho(v)$ απεικονίζει το διανυσματικό χώρο $< i, j, k >$ στο εαυτό του. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ορθογώνια απεικόνιση στον $\mathbb{R}^3$, $\rho(v) \in O(3)$.

Πρόταση 3.3.0.5. *Έστω $\rho : S^3 \to O(3)$ η απεικόνιση όπως ορίστηκε προηγουμένως. Τότε $ker\rho = \{\pm 1\}$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η ρ είναι ομομορφισμός ομάδων. Έστωσαν v_1, $v_2 \in S^3$ και $u \in < i, j, k >$. Τότε έχουμε

$$\rho(v_1 v_2)(u) = v_1 v_2 u \overline{v_2} \overline{v_1} = \rho(v_1)\rho(v_2)(u).$$

Επειδή $\rho(1)(u) = u$ και $\rho(-1)(u)$, έχουμε ότι $\{1, -1\} \subseteq ker\rho$.

Έστω $v \in ker\rho$ με $v = a + bi + jc + kd$, τότε $\rho(v)(i) = i$ και έχουμε

$$(a + bi + jc + kd)i(a - bi - jc - kd) = i.$$

Άρα $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 1$ και επειδή $v \in S^3$, επίσης έχουμε $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Οπότε $c = 0 = d$. Από τη σχέση $\rho(v)(j) = j$, έχουμε ότι $d = 0$ και $a^2 = 1$, οπότε $a \in \{1, -1\}$ □

Πρόταση 3.3.0.6. *Το κέντρο της $S^3 = Sp(1)$ είναι το $\{1, -1\}$ ενώ της $SO(3)$ το $\{I\}$.*

Απόδειξη. Πρώτα θα βρούμε το κέντρο της S^3. Γνωρίζουμε ότι $\{1, -1\} \subseteq C(S^3)$, διότι μόνο οι πραγματικοί αριθμοί αντιμετατίθενται με τα τεταρτόνια.

Έστω $v = a + bi + jc + kd \in C(S^3)$. Από τη σχέση $vi = iv$ έχουμε ότι

$$-b + ia + jd - kc = -b + ia - jd + kc.$$

Δηλαδή $c = 0 = d$. Επίσης από τη σχέση $vj = jv$ έχουμε ότι $b = 0$. Άρα $v = a$ και $a^2 = 1$. Τελικά $\{1, -1\} = C(S^3)$.

Τώρα θα υπολογίσουμε το κέντρο της $SO(3)$. Έστω τώρα $A \in C(SO(3))$. Έχουμε ότι ο A αντιμετατίθεται με τον $T(\theta)$ όπου

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

Θα δείξουμε ότι ο A αφήνει το βασικό υπόχωρο $< (0, 0, 1) >$ αναλλοίωτο.

Ο $T(\pi)$ στέλνει το $e_1 = (1, 0, 0)$ στο $e_2 = (0, 1, 0)$, το $(0, 1, 0)$ στο $(-1, 0, 0)$ και αφήνει το $e_3 = (0, 0, 1)$ αναλλοίωτο. Έστω ότι $e_3 A = ae_1 + be_2 + ce_3$, τότε

$$e_3 A T(\pi) = ae_1 T(\pi) + be_2 T(\pi) + ce_3 T(\pi) = ae_2 - be_1 + ce_3.$$

Αλλά $e_3 T(\pi) A = e_3 A$. Άρα $a = 0 = b$ και επειδή ο A διατηρεί τα μήκη, πρέπει να έχουμε ότι $c \in \{\pm\}$.

Ο A λοιπόν δημιουργεί μια ορθογώνια απεικόνιση στο επίπεδο $< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$ αφού αφήνει τον υπόχωρο $< (0, 0, 1) >$ αναλλοίωτο. Θα δείξουμε ότι είναι στροφή σ' αυτό το επίπεδο. Δηλαδή $A = T(\theta)$. Ας υποθέσουμε ότι $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, τότε

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$. Επίσης ο $A \in C(SO(3))$ αντιμετατίθεται με όλες τις στροφές στο επίπεδο $<(1,0,0),(0,1,0)>$. Άρα

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

για κάθε θ. Έχουμε λοιπόν μετά από τις αναγκαίες πράξεις ότι

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

και θα πρέπει η ορίζουσα αυτή να είναι 1. Διαφορετικά θα είχαμε $det(A) = -1!$. Δηλαδή $c = 1$ και τότε $A = T(\theta)$.

Χρειαζόμαστε ένα ακόμη βήμα για να τελειώσει η απόδειξη. Έχουμε ότι $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in SO(3)$ και

$$T(\theta)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} T(\theta) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Τελικά $\cos\theta = 1$ και $\sin\theta = 0$. Άρα $T(\theta) = I$. □

Πόρισμα 3.3.0.7. *Η S^3 δεν είναι ισόμορφη με την $SO(3)$ σαν ομάδες.*

Αργότερα θα δείξουμε ότι $\rho(S^3) = SO(3)$ χρησιμοποιώντας τοπολογικά εργαλεία. Δηλαδή θα δείξουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ των αντίστοιχων τοπολογικών ομάδων και επειδή η S^3 και η $SO(3)$ είναι συνεκτικές έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Άρα $S^3/\{\pm 1\} \cong SO(3)$. Από την αλγεβρική τοπολογία γνωρίζουμε ότι ο χώρος $S^3/\{\pm 1\}$ είναι ομοιομορφικός με τον πραγματικό προβολικό χώρο διάστασης 3, $\mathbb{R}P^3$ (βλέπε Hatcher). Οπότε υπάρχει ομοιομορφισμός $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$.

3.4 Ασκήσεις

1. Έστω A ένα στοιχείο της $O(n)$ με $detA = -1$. Δείξτε ότι
$$O(n) - SO(n) = \{BA|B \in SO(n)\}.$$

2. Έστω $A \in U(n)$ και $z \in \mathbb{C}$ με μήκος ένα. Δείξτε ότι $zA \in U(n)$.

3. Ένας πίνακας $A \in M_n()$ καλείται **ιδιοδύναμος** αν $A^2 = A$. Δείξτε ότι η εικόνα του $\mathbb{R}^n$ μέσω του A είναι ακριβώς τα σταθερά του σημεία.

4. Ένας πίνακας $A = (a_{i,j})$ καλείται **μηδενοδύναμος** αν $A^k = \mathbf{O}$ για κάποιον φυσικό k. Δείξτε ότι αν $a_{i,j} = 0$ για $i \geqslant j$, τότε ο A είναι μηδενοδύναμος.

5. Έστω B το σύνολο όλων των πινάκων $B = (b_{i,j})$ με $b_{i,j} = 0$ για $i > j$ και $b_{i,i} = 1$. Δείξτε ότι το B είναι ομάδα.

6. Δείξτε ότι $SU(2) =$
$$\left\{x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right|$$
$$\left| x, y, z, w \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \right\}.$$

7. Δείξτε ότι το κέντρο της S^3 είναι η υποομάδα $\{\pm 1\}$.

8. Δείξτε ότι το κέντρο της $SO(2)$ είναι η υποομάδα $\{\pm I\}$.

9. Δείξτε ότι το κέντρο της $SO(3)$ είναι η υποομάδα $\{I\}$.

10. Έστω $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Με $G_A(\mathbb{C})$ συμβολίζουμε το υποσύνολο $\{B|B\overline{A}^t\}$ και με $SG_A(\mathbb{C})\{B|B\overline{A}^t, detB = 1\}$. Δείξτε ότι $SG_A(\mathbb{C}) \leqslant G_A(\mathbb{C}) \leqslant GL_n((\mathbb{C}))$, $G_{I_n}(\mathbb{C}) = U(n)$ και $SG_{I_n}(\mathbb{C}) = SU(n)$.

11. Έστω $J_n(a_{ij}$ με στοιχεία $a_{ij} = 0$ για $i+j \neq n+1$ και $a_{ij} = 1$ για $i+j = n+1$. Ο J_n καλείται αντιθετοδιαγώνιος. Έστω $S = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & J_n \\ -J_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, τότε $G_S(\mathbb{C}) \cong Sp(n)$.

12. Έστω $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Ορίζουμε μια διγραμμική μορφή που εξαρτάται από τον A ως εξής
$$< -, - >: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$
με τύπο $< u, v >= uA\overline{v}^t$. Δείξτε ότι η $< -, - >$ ικανοποιεί τις ιδιότητες της διγραμμικής μορφής. Ένας πίνακας καλείται αυτομορφισμός της μορφής $< -, - >$, αν
$$< uB, vB >=< u, v >, \forall u, v \in \mathbb{C}^n.$$
Δείξτε ότι η $G_A(\mathbb{C})$ ταυτίζεται με τους αυτομορφισμούς της $< -, - >$.

Κεφάλαιο 4

Ομάδες και τοπολογικοί χώροι

4.1 Βασικά Στοιχεία

Υπενθυμίζουμε γνωστές έννοιες σχετικά με ομάδες και τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός 4.1.0.1. *Μια συλλογή αντικειμένων O καλείται* ***ομάδα****, αν είναι εφοδιασμένη με μια πράξη ώστε αυτή να είναι προσεταιριστική $(ab)c = a(bc)$, να έχει ταυτοτικό στοιχείο e ώστε $ae = a = ea$ και για κάθε στοιχείο a να υπάρχει ένα a' ώστε $aa' = e = a'a$.*

Ορισμός 4.1.0.2. *Μια συλλογή αντικειμένων X καλείται* ***τοπολογικός χώρος****, αν είναι εφοδιασμένη με μια συλλογή υποσυνόλων $\boldsymbol{T}$ τα οποία θα καλούνται ανοικτά σύνολα ώστε να ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες.*
1) Το κενό σύνολο και ο X βρίσκονται στη συλλογή.
2) Η ένωση οποιουδήποτε αριθμού στοιχείων της συλλογής είναι στοιχείο της συλλογής.
3) Η τομή πεπερασμένου αριθμού στοιχείων της συλλογής είναι στοιχείο της συλλογής.

Μια συγκεκριμένη συλλογή υποσυνόλων του X όπως προηγουμένως καλείται μια τοπολογία για τον X και τα εν λόγω υποσύνολα ανοικτά υποσύνολα.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο $\mathbf{B}$ της $\mathbf{T}$ καλείται **βάση της τοπολογίας** αν: 1) γιά κάθε $x \in X$ υπάρχει $A \in \mathbf{B}$ με $x \in A$ και 2) για κάθε δύο στοιχεία A, B της $\mathbf{B}$ υπάρχει $C \in \mathbf{B}$ ώστε $C \subseteq A \cap B$.

Ένα υποσύνολο $X_1 \subseteq X$ θα καλείται ανοικτό, αν για κάθε $x \in X_1$ υπάρχει $A \in \mathbf{B}$ με $x \in A \subseteq X_1$.

Ορισμός 4.1.0.3. *Έστω Y υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \boldsymbol{T})$, η συλλογή $\boldsymbol{T'} = \{Y \cap A \mid A \in \boldsymbol{T}\}$ καλείται τοπολογία του υποχώρου για τον Y.*

Για το αντικείμενο μελέτης μας, τις τοπολογικές ομάδες, θα θεωρήσουμε ότι ικανοποιείται και η επόμενη συνθήκη. Αν a και b είναι δυο αντικείμενα του X, τότε υπάρχει ένα στοιχείο A της συλλογής T το οποίο περιέχει το a και δεν περιέχει το b.

Ορισμός 4.1.0.4. *Μια συλλογή αντικειμένων O καλείται **τοπολογική ομάδα**, αν είναι ομάδα, τοπολογικός χώρος, η πράξη της ομάδας $O \times O \to O$ είναι συνεχής απεικόνιση και η πράξη του αντιστρόφου στοιχείου $O \to O$ με $a \longmapsto a^{-1}$ είναι επίσης συνεχής απεικόνιση.*

Διαφορετικά, η απεικόνιση $\phi : O \times O \to O$ με τύπο $\phi(a, b) = ab^{-1}$ είναι συνεχής απεικόνιση. Εδώ το σύνολο $O \times O$ έχει την καρτεσιανή τοπολογία.

Δηλαδή η τοπολογική δομή του χώρου συνδέεται με την αλγεβρική του δομή. Η απαίτηση αυτή είναι ιδιαίτερα περιοριστική.

Το εσωτερικό γινόμενο σ' έναν Ευκλείδειο χώρο V ορίζει μετρική $d : V \times V \to \mathbb{R}^+ \cup 0$ με $d(u, v) = \sqrt{< u - v, u - v >}$ και ο V γίνεται μετρικός τοπολογικός χώρος.

Με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο 3.1.0.1 ο $\mathbb{R}^n$ γίνεται μετρικός χώρος. Με τη μετρική ορίζεται μια βάση ανοικτών περιοχών με ανοικτά σύνολα τις ανοικτές μπάλες κέντρου v και ακτίνας $\varepsilon > 0$

$$B(v, \varepsilon) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid d(v, u) < \varepsilon\}.$$

Εδώ μπορούμε να πάρουμε όλα τα $v = (x_1, \cdots, x_n)$ ώστε $x_i \in \mathbb{Q}$ και $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Δηλαδή ο $\mathbb{R}^n$ έχει **αριθμήσιμη βάση περιοχών**.

Ορισμός 4.1.0.5. *Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **ανοικτό**, αν για κάθε $v \in A$ υπάρχει $B(v, \varepsilon)$ ώστε $B(v, \varepsilon) \subseteq A$. Εδώ $B(v, \varepsilon)$ είναι η ανοικτή μπάλα με κέντρο το v και ακτίνα $\varepsilon > 0$. Δηλαδή το σύνολο $\{u \in \mathbb{R}^n \mid \, ||u - v|| < \varepsilon\}$.*

Εδώ η νόρμα επάγεται από το κανονικό εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 4.1.0.6. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και απεικόνιση $f : A \to \mathbb{R}^m$. Η f θα καλείται **συνεχής** στο $v \in A$, αν για κάθε $B(f(v), \varepsilon)$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(A \cap B(v, \delta)) \subseteq B(f(v), \varepsilon)$.*

Αν το προηγούμενο ισχύει για κάθε στοιχείο του A, τότε η f θα καλείται συνεχής στο A.

Ορισμός 4.1.0.7. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και απεικόνιση $f : X \to Y$ συνεχής. Η f θα καλείται **ομοιομορφισμός** αν είναι 1-1, επί και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : Y \to X$ είναι επίσης συνεχής. Τότε γράφουμε $X \cong Y$.*

Παράδειγμα 4.1.0.8. *Οι πραγματικοί αριθμοί είναι ταυτόχρονα τοπολογικός (μετρικός) χώρος και ομάδα με την πρόσθεση. Οι προηγούμενες πράξεις είναι προφανώς συνεχείς.*

Παράδειγμα 4.1.0.9. *Οι μιγαδικοί αριθμοί με την πρόσθεση είναι ομάδα. Οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν με τα σημεία του επιπέδου, δηλαδή τον $\mathbb{R}^2$, ο οποίος είναι τοπολογικός (μετρικός) χώρος και οι προηγούμενες πράξεις είναι προφανώς συνεχείς.*

Παράδειγμα 4.1.0.10. *Ας θεωρήσουμε τους μιγαδικούς με μήκος ένα, δηλαδή την υποομάδα S^1 της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{C}^*$. Και αυτή είναι επίσης τοπολογική ομάδα. Γνωρίζουμε επίσης ότι η συγκεκριμένη ομάδα είναι ισόμορφη με το πηλίκο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Παράδειγμα 4.1.0.11. *Έστω $f : [0, 2\pi) \to S^1$ με $f(t) = e^{it}$. Η f είναι συνεχής 1-1 και επί αλλά η f^{-1} δεν είναι συνεχής.*

Λήμμα 4.1.0.12. *Μια τοπολογική ομάδα είναι χώρος Hausdorff. Δηλαδή για κάθε δύο στοιχεία του χώρου υπάρχουν δυο ανοικτά ξένα υποσύνολα τα οποία περιέχουν τα στοιχεία αντίστοιχα.*

Παράδειγμα 4.1.0.13. *Έστω $M_n(\mathbb{R})$ το σύνολο των πραγματικών τετραγωνικών πινάκων. Κάθε στοιχείο αυτής της ομάδας μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^{n^2}$ βάζοντας τις γραμμές του πίνακα την μία δίπλα στην άλλη. Οπότε το $M_n(\mathbb{R})$ είναι και τοπολογικός χώρος και σαν βασικά σύνολα του μηδενικού στοιχείου μπορούμε να θεωρήσουμε τα υποσύνολα*

$$S_\varepsilon(\boldsymbol{0}) = \left\{ A = (a_{i,j}) \in M(n, \mathbb{R}) \mid \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{i,j}^2 < \varepsilon \right\}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

Αν $B \in M(n, \mathbb{R})$ έχουμε τα βασικά υποσύνολα στον B να δίνονται από

$$S_\varepsilon(B) = B + S_\varepsilon(\boldsymbol{0})$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

Τώρα οι πράξεις που είναι εφοδιασμένο το $M(n, \mathbb{R})$, της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, είναι συνεχείς. Αν θεωρήσουμε κάποιο υποσύνολό του το οποίο να είναι ομάδα με το γινόμενο των πινάκων, όπως το σύνολο $GL_n(\mathbb{R})$ των αντιστρέψιμων πινάκων, και η απεικόνιση η οποία στέλνει τον A στον αντίστροφό του A^{-1} είναι επίσης συνεχής. Αυτά λοιπόν τα υποσύνολα είναι τοπολογικές ομάδες. Θα δούμε πιο κάτω ότι είναι ομάδες Lie.

Πρόταση 4.1.0.14. *Κάθε υποομάδα τοπολογικής ομάδας είναι τοπολογική ομάδα με την τοπολογία του υποχώρου.*

Έστω a ένα συγκεκριμένο στοιχείο της τοπολογικής ομάδας O. Ορίζεται η απεικόνιση $L_a : O \to O$ με τύπο $L_a(g) = ag$ η οποία είναι ομοιομορφισμός και καλείται αριστερή μεταφορά. Αν c και b είναι δύο στοιχεία της, τότε υπάρχει ομοιομορφισμός L_a ο οποίος στέλνει το b στο c με $a = cb^{-1}$. Αυτό δηλώνει ότι ανοικτές περιοχές των c και b είναι τοπολογικά ¨όμοιες¨. Άρα τοπικά σε κάθε σημείο είναι όμοιες. Αρκεί λοιπόν να τις μελετήσουμε γύρω από το ταυτοτικό στοιχείο. Αυτή ήταν και η αρχική προσέγγιση του Lie. Αν το a διαφέρει από το ταυτοτικό στοιχείο, τότε η L_a δεν έχει σταθερό σημείο, $L_a(g) \neq g$.

Ανάλογα ορίζεται και η δεξιά μεταφορά $R_a : O \to O$ η οποία είναι επίσης ομοιομορφισμός. Ακόμη μια σημαντική απεικόνιση είναι και ο εσωτερικός ομοιομορφισμός για κάθε στοιχείο a με τύπο $O_a(g) = aga^{-1}$.

Αναφέρουμε επιγραμματικά βασικούς ορισμούς και προτάσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στη μελέτη μας.

Ορισμός 4.1.0.15. *Ένα υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X καλείται **συνεκτικό**, αν είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό. Δηλαδή δεν μπορεί να γραφεί σαν ξένη ένωση ανοικτών υποσυνόλων.*

Θεώρημα 4.1.0.16. *Έστω O μία συνεκτική τοπολογική ομάδα και H υποομάδα η οποία περιέχει μια ανοικτή περιοχή του ταυτοτικού στοιχείου, τότε $O = H$.*

Ορισμός 4.1.0.17. *Ένας τοπολογικός χώρος X θα καλείται **τροχιακά συνεκτικός**, αν για κάθε $v, u \in X$ υπάρχει $\alpha : [0,1] \to X$ συνεχής ώστε $\alpha(0) = v$ και $\alpha(1) = u$.*

Υπάρχουν συνεκτικοί χώροι οι οποίοι δεν είναι τροχιακά συνεκτικοί.

Λήμμα 4.1.0.18. *Η συνεχής εικόνα τροχιακά συνεκτικού υποσυνόλου είναι επίσης τροχιακά συνεκτικό υποσύνολο. Το ίδιο ισχύει και για συνεκτικό υποσύνολο.*

Παράδειγμα 4.1.0.19. *Η απεικόνιση της ορίζουσας $det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ είναι συνεχής επιμορφισμός μεταξύ τοπολογικών ομάδων. Συνεπώς η $GL_n(\mathbb{R})$ δεν είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος.*

Θεώρημα 4.1.0.20. *Η συνεκτική συνιστώσα του ταυτοτικού στοιχείου μιας τοπολογικής ομάδας είναι υποομάδα.*

Ορισμός 4.1.0.21. *Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **φραγμένο**, αν υπάρχει στοιχείο v και αριθμός $\varepsilon > 0$ ώστε $A \subseteq B(v, \varepsilon)$.*

Ορισμός 4.1.0.22. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται **συμπαγής**, αν κάθε ανοικτό κάλυμμά του έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.*

Πρόταση 4.1.0.23. *Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές, αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Λήμμα 4.1.0.24. *Η συνεχής εικόνα συμπαγούς υποσυνόλου είναι επίσης συμπαγές υποσύνολο.*

4.2 Η σχέση με τη Φυσική

Πολλά βιβλία στη Θεωρία Ομάδων ξεκινούν με τη μελέτη των κρυσταλλογραφικών ομάδων. Εύλογα κάποιος θα θεωρούσε ότι η Θεωρία Ομάδων αποτελεί μια έξυπνη εφαρμογή στην ανάλυση της κρυσταλλικής δομής. Η μελέτη της κρυσταλλικής δομής ξεκίνησε το 1784 πολύ πριν καν εκφραστεί η έννοια της ομάδας, η οποία άρχισε να διαμορφώνεται με τη μελέτη των συμμετριών πολύ αργότερα.

Η απλούστερη εφαρμογή της Θεωρίας Ομάδων στη φυσική είναι μέσω μιας αβελιανής ομάδας σε τρεις γεννήτορες (χρόνος, μήκος, μάζα). Η ομάδα Lorentz αφήνει αναλλοίωτες τις εξισώσεις του Maxwell στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Με πολλούς τρόπους μπορεί να δει κάποιος το ρόλο της ομάδας Lorentz στη μοντέρνα φυσική. Είναι γνωστό (A. N. Whitehead) ότι οι τύποι αλλαγής μεταβλητών από ένα σύστημα σ' ένα άλλο το οποίο κινείται ομοιόμορφα εν σχέση με το πρώτο είναι γραμμικοί. Η υπόθεση ότι το σύνολο των μετασχηματισμών αποτελεί ομάδα υπονοεί την ύπαρξη μίας απόλυτης σταθεράς k ώστε η ποιοτική φύση των μετασχηματισμών θα είναι ριζικά διαφορετικοί εξαρτώμενοι από το αν η σταθερά είναι θετική, μηδέν ή αρνητική. Η περίπτωση $k = 0$ αντιστοιχεί στη Νευτώνεια Μηχανική. Αν $k \neq 0$, τότε οι τιμές της είναι ιδιαίτερα μικρές της τάξης του c^{-2}, για c την ταχύτητα του φωτός. Για $k < 0$, θα έχουμε περίεργα φυσικά φαινόμενα, οπότε η μελέτη στρέφεται στην περίπτωση $k > 0$. Η Νευτώνεια μηχανική παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς για $k = 0$ ενώ η Θεωρία του Maxwell για $k > 0$.

Η προφανής υπόθεση ότι το σύνολο των μετασχηματισμών ενός συστήματος αποτελεί ομάδα μας επιτρέπει να συμπεράνουμε την ύπαρξη μιάς σημαντικής φυσικής σταθεράς η οποία δεν εξαρτάται από τον παρατηρητή. Ο Einstein ήταν αυτός που κατόρθωσε να συλλάβει τα επαναστατικά αποτελέσματα της σωστής επιλογής για τη σταθερά και ανάγκασε την επιστημονική κοινότητα να δει με νέα αντίληψη τη σχέση του χρόνου με τον χώρο. Από την άλλη μεριά ο Dirac επέμενε ότι η κβαντική μηχανική θα πρέπει να βρίσκεται σε συνεργασία με την ειδική σχετικότητα η οποία μας αναγκάζει να δούμε ότι σωματίδια και αντισωματίδια υπάρχουν κατά δυικό τρόπο. Η απαίτηση ότι μια εξίσωση όπως του Dirac είναι αναλλοίωτη κάτω από τη δράση συγκεκριμένης ομάδας δεν καθορίζει μοναδικά την εξίσωση. Για τις εξισώσεις βαρύτητας του Einstein, ο Cartan έδειξε ότι σχεδόν καθορίζονται μοναδικά. Αυτό είχε σημαντικές επιπτώσεις στις εφαρμογές της Θεωρίας Ομάδων στη Φυσική.

Υπάρχει πληθώρα βιβλιογραφίας πάνω στο συγκεκριμένο θέμα, αν και τα περισσότερα βιβλία αναφέρονται κυρίως στην κβαντική μηχανική. Σαν μια εφαρμογή θα αναφέρουμε ότι τα οκτώ από τα βαρέα στοιχειώδη σωματίδια μπορούν να ταξινομηθούν χρησιμοποιώντας στοιχεία από τη θεωρία αναπαραστάσεων της $SU(3)$. Φυσικά είναι γνωστή η επίδραση της θεωρίας των ομάδων και υποομάδων ισομετριών του χωρόχρονου στην κβαντική φυσική.

Ο τελεστής , Hamilton H, ενός φυσικού συστήματος παίζει δύο σημαντικούς ρόλους στην κβαντική μηχανική κατα τον Schiff, 1968.
1) Οι ιδιοτιμές ε, όπως δίνονται από την ανεξάρτητη του χρόνου εξίσωση του Schrodinger

$$H\phi = \varepsilon\phi$$

είναι οι μοναδικές επιτρεπτές τιμές της ενέργειας του συστήματος.
2) Η εξέλιξη του συστήματος στο χρόνο καθορίζεται από μια κυματική συνάρτηση

η οποία ικανοποιεί την εξίσωση του Schrodinger

$$H\psi = ih\frac{\vartheta\psi}{\vartheta t}.$$

Σημαντική πληροφορία για την εξέλιξη του συστήματος μπορεί να εξαχθεί από την μελέτη της ομάδας των μετασχηματισμών οι οποίοι αφήνουν το σύστημα Hamilton αναλλοίωτο.

Αναφέρουμε το επόμενο Θεώρημα το οποίο εκφράζει πως και γιατί η Θεωρία Ομάδων παίζει τόσο σημαντικό ρόλο στην κβαντική μηχανική.

Θεώρημα 4.2.0.1. *Το σύνολο των μετασχηματισμών οι οποίοι αφήνουν το σύστημα Hamilton αναλλοίωτο αποτελεί ομάδα η οποία καλείται η ομάδα της εξίσωσης του Schrodinger.*

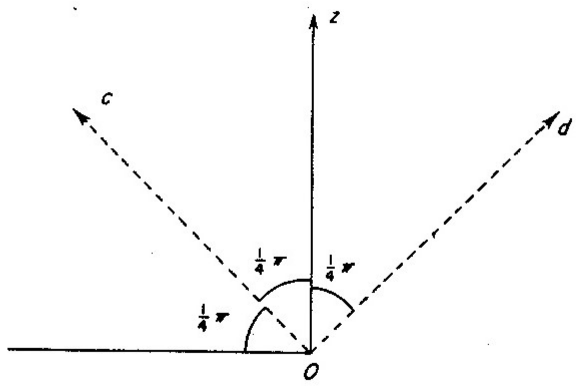
Παράδειγμα 4.2.0.2. *Για το άτομο του υδρογόνου έχουμε*

$$H(r) = -\frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(r) =$$

$$-\frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{x^2+y^2+x^2}}.$$

Εδώ το μ δηλώνει τη μάζα και η $V(r)$ το πιθανό πεδίο το οποίο επηρεάζει το σωματίδιο. Η αντίστοιχη ομάδα είναι η ομάδα στροφών του $\mathbb{R}^3$, $O(3)$.

Παράδειγμα 4.2.0.3. *Η διεδρική ομάδα D_4 είναι ισόμορφη με την κρυσταλλική ομάδα Schonfliess, 1923, η οποία αφήνει αναλλοίωτο ένα κρυσταλλικό πλέγμα και ένα συγκεκριμένο σημείο του. Είναι ομάδα στροφών κατά γωνία π στον $\mathbb{R}^3$. Μπορεί να περιγραφεί ως εξής.*



Με C_{2x}, C_{2y}, C_{2z} συμβολίζουμε δεξιόστροφες στροφές κατά γωνία π γύρω από τους άξονες x, y και z αντίστοιχα. Δηλαδή ο άξονας μένει αναλλοίωτος και η στροφή γίνεται στο κάθετο επίπεδο (Θεώρημα Euler).

$$C_{2x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C_{2y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C_{2z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Με C_{4y} συμβολίζουμε δεξιόστροφες στροφές κατά γωνία $\pi/2$ γύρω από τον άξονα y και με C_{4y}^{-1} την αριστερόστροφη.

$$C_{4y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \;\; C_{4y}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι C_{2c} και C_{2d} δηλώνουν δεξιόστροφες στροφές κατά γωνία π γύρω από τους άξονες c και d αντίστοιχα.

$$C_{2c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \;\; C_{2d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3 Ασκήσεις

1. Δείξτε τον ισομορφισμό που περιγράφεται στο παράδειγμα 4.2.0.3.

2. Έστω $det : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση της ορίζουσας.

   α) Δείξτε ότι το σύνολο $GL_n(\mathbb{R})$ είναι ανοικτό υποσύνολο.

   β) Δείξτε ότι το σύνολο $GL_n(\mathbb{R})$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες.

   γ) Δείξτε ότι ο περιορισμός της det στο $GL_n(\mathbb{R})$ και $\mathbb{R}^*$ είναι συνεχής επιμορφισμός ομάδων.

   δ) Δείξτε ότι το σύνολο $SL_n(\mathbb{R})$ είναι κλειστό υποσύνολο.

   ε) Δείξτε ότι η υποομάδα $SL_n(\mathbb{R})$ είναι κανονική στην $GL_n(\mathbb{R})$.

   στ) Δείξτε τον ισομορφισμό τοπολογικών ομάδων

   $$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*.$$

   ζ) Δείξτε ότι το σύνολο $GL_n(\mathbb{R})$ δεν είναι συμπαγές.

   η) Δείξτε ότι το σύνολο $SL_n(\mathbb{R})$ δεν είναι συμπαγές.

   θ) Δείξτε ότι η υποομάδα $SO(n)$ είναι κανονική στην $O(n)$.

   ι) Δείξτε ότι το σύνολο $O(n)$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο, άρα συμπαγές.

3. α) Έστω $A \in O(n)$ τότε ορίζεται η απεικόνιση

   $$\varphi_A : S^{n-1} \to S^{n-1}$$

   με τύπο $\varphi_A(u) = uA$. Δείξτε ότι είναι συνεχής.

   β) Δείξτε ότι υπάρχει μια δράση της $O(n)$ στην S^{n-1}

   $$O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}.$$

   Να βρεθούν τα στοιχεία της $O(n)$ τα οποία αφήνουν το $(0, \cdots, 0, 1)$ αναλλοίωτο. Δείξτε ότι είναι υποομάδα.

   γ) Δείξτε ότι το προηγούμενο σύνολο είναι ισόμορφο με την $O(n-1)$.

   δ) Δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$.

4. Δείξτε ότι οι ομάδες $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^+$ δεν έχουν υποομάδες τάξης 3.

5. Δείξτε ότι η ομάδα $B_+(2, \mathbb{R})$ που αποτελείται από τους 2×2 άνω τριγωνικούς πίνακες με θετική ορίζουσα δεν έχει υποομάδα τάξης 3.

6. Δείξτε ότι η ομάδα $O(2) \times B_+(2, \mathbb{R})$ έχει μόνο μια υποομάδα τάξης 3.

7. Δείξτε ότι η ομάδα $GL_2(\mathbb{R})$ έχει άπειρες υποομάδες τάξης 3.

8. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ισομορφισμός ομάδων
$$GL_2(\mathbb{R}) \cong O(2) \times \mathbb{R}^3$$

9. α) Με
$$B_+(n, \mathbb{R}) = \{A = (a_{i,j}) \in GL_n(\mathbb{R}) \mid a_{i,i} > 0, a_{i,j} = 0, i > j\}$$
συμβολίζουμε τη θετική υποομάδα του Borel. Δηλαδή τους άνω τριγωνικούς πίνακες με θετικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο. Δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός
$$B_+(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}.$$
β) Έστω $SB_+(n, \mathbb{R}) = B_+(n, \mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός
$$SB_+(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(n^2+n-2)/2}.$$
γ) $B_+(n, \mathbb{R}) \cap O(n) = \{\pm I\}$.

10. Δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός
$$GL_n(\mathbb{R}) \cong O(n) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$
τοπολογικών χώρων αλλά όχι ομάδων.

Κεφάλαιο 5

Εφαπτόμενος χώρος

5.1 Καμπύλες, Διάσταση εφαπτόμενου χώρου

Σ' αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε σε διαφορίσιμες καμπύλες στο σύνολο των πινάκων. Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης πραγματικός διανυσματικός χώρος. Υπενθυμίζουμε ότι ο V είναι τοπολογική ομάδα. Μια **καμπύλη** α στον V είναι μια συνεχής απεικόνιση

$$\alpha : (a, b) \to V.$$

Εδώ θεωρούμε ότι $0 \in (a, b)$.

Η α είναι **διαφορίσιμη** στο $c \in (a, b)$ αν υπάρχει το επόμενο όριο.

$$\underrightarrow{\lim} \frac{\alpha(c+h) - \alpha(c)}{h}.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση το όριο είναι ένα διάνυσμα στον V το οποίο συμβολίζουμε με $\alpha^{'}(c)$. Γνωρίζουμε ότι $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \cdots \alpha_n(t))$ και οι επιμέρους συναρτήσεις $\alpha_i(t)$ είναι παραγωσίμες. Αν επιλέξουμε μια βάση για τον V, τότε το διάνυσμα $\alpha^{'}(c)$ συμβολίζεται με $(\alpha_1^{'}(c), \cdots, \alpha_n^{'}(c))$.

Οι διανυσματικοί χώροι $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$ και $M_n(\mathbb{H})$ είναι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι διάστασης n^2, $2n^2$ και $4n^2$ αντίστοιχα. Μια ομάδα $G \subseteq M_n(\Bbbk)$ είναι τοπολογικός υπόχωρος του τοπολογικού χώρου $M_n(\Bbbk) \cong \mathbb{R}^m$. Εφόσον οι ομάδες πινάκων τις οποίες μελετάμε είναι υποσύνολα κάποιου διανυσματικού χώρου $V = \mathbb{R}^m$ για κάποιο m και ο V είναι διανυσματικός χώρος με νόρμα, δηλαδή μετρικός χώρος, οι ομάδες αυτές είναι τοπολογικοί υπόχωροι. Επίσης οι πράξεις αυτών των ομάδων, πρόσθεση ή πολλαπλασιασμός πινάκων, είναι συνεχείς απεικονίσεις.

Όταν θα λέμε μια καμπύλη α στην G θα εννοούμε στην G σαν υπόχωρο του $M_n(\Bbbk)$.

Το πλεονέκτημα σ' αυτήν την περίπτωση είναι ότι ορίζεται το γινόμενο δύο καμπύλων α και γ και είναι επίσης καμπύλη

$$(\alpha\gamma)(t) = \alpha(t)\gamma(t).$$

Πρόταση 5.1.0.1. *Αν οι καμπύλες α και γ είναι διαφορίσιμες, τότε και το γινόμενο $\alpha\gamma$ είναι επίσης διαφορίσιμο και ισχύει*

$$(\alpha\gamma)^{'}(c) = \alpha^{'}(c)\gamma(c) + \alpha(c)\gamma^{'}(c).$$

Πρόταση 5.1.0.2. *Έστω G μια ομάδα πινάκων στον $M_n(\mathbb{k})$. Η G είναι τοπολογική ομάδα.*

Ορισμός 5.1.0.3. *Έστω G μια ομάδα πινάκων στον $M_n(\mathbb{k})$. Με T_G συμβολίζουμε το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων $\alpha^{'}(0)$ για όλες τις καμπύλες α με $\alpha(0) = I$ να είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Ο T_G καλείται ο εφαπτόμενος χώρος της G στο ταυτοτικό στοιχείο.*

Πρόταση 5.1.0.4. *Έστω G μια ομάδα πινάκων στον $M_n(\mathbb{k})$. Το T_G είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{k})$.*

Ορισμός 5.1.0.5. *Έστω G μια ομάδα πινάκων στον $M_n(\mathbb{k})$. Η* ***διάστασή*** *της ορίζεται ως η διάσταση του υποχώρου T_G.*

Παράδειγμα 5.1.0.6. *Η $U(1) = S^1$ έχει διάσταση 1.*

Παράδειγμα 5.1.0.7. *Η $Sp(1) = S^3$ έχει διάσταση 3.*

Παράδειγμα 5.1.0.8. *Η $GL(n, \mathbb{R})$ έχει διάσταση n^2.*

Παράδειγμα 5.1.0.9. *Η $GL(n, \mathbb{C})$ έχει διάσταση $2n^2$.*

Ορισμός 5.1.0.10. *Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ καλείται* ***αντιθετοσυμμετρικός****, αν*

$$A + A^t = \mathbf{0}.$$

Ο πίνακας $B \in M_n(\mathbb{C})$ καλείται ***αντιθετοερμιτιανός****, αν $B + \overline{B}^t = \mathbf{0}$.*
Ο πίνακας $C \in M_n(\mathbb{H})$ καλείται ***αντιθετοσυμπλεκτικός****, αν $C + \overline{C}^t = \mathbf{0}$.*

Η πρώτη συνθήκη δίνει ότι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι μηδέν και για τα υπόλοιπα ισχύει $a_{ij} = -a_{ji}$.
Η δεύτερη συνθήκη δίνει ότι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι καθαροί μιγαδικοί αριθμοί και για τα υπόλοιπα ισχύει $b_{ij} = c + di$ και $b_{ji} = -c + di$.

Ορισμός 5.1.0.11. *Με $so(n)$ συμβολίζουμε τους αντιθετοσυμμετρικούς πίνακες.*
Με $su(n)$ συμβολίζουμε τους αντιθετοερμιτιανούς πίνακες.
Με $sp(n)$ συμβολίζουμε τους αντιθετοσυμπλεκτικούς πίνακες.

Πρόταση 5.1.0.12. *Το σύνολο $so(n)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $M_n(\mathbb{R})$ και έχει διάσταση $\frac{n(n-1)}{2}$.*
Το σύνολο $su(n) \subset M_n(\mathbb{C})$ είναι ***πραγματικός*** *διανυσματικός χώρος και έχει διάσταση n^2.*
Το σύνολο $sp(n) \subset M_n(\mathbb{H})$ είναι ***πραγματικός*** *διανυσματικός χώρος και έχει διάσταση $n(2n+1)$.*

5.2 Διαφορίσιμοι ομομορφισμοί

Όπως αναφέραμε εφόσον οι ομάδες πινάκων τις οποίες μελετάμε είναι υποσύνολα κάποιου διανυσματικού χώρου $V = \mathbb{R}^m$ για κάποιο m και ο V είναι διανυσματικός χώρος με νόρμα, δηλαδή μετρικός χώρος, οι ομάδες αυτές είναι τοπολογικοί υπόχωροι. Επίσης οι πράξεις αυτών των ομάδων, πρόσθεση ή πολλαπλασιασμός πινάκων, είναι συνεχείς απεικονίσεις. Οι ομομορφισμοί ομάδων $\phi : G \to H$ τους οποίους θα μελετάμε θα θεωρούμε ότι είναι συνεχείς απεικονίσεις. Θα εξηγήσουμε τώρα τί θα εννοούμε λέγοντας ότι είναι διαφορίσιμοι ομομορφισμοί.

Αν α είναι μια συνεχής καμπύλη, τότε και η σύνθεση $\phi\alpha$ είναι συνεχής καμπύλη.

Ορισμός 5.2.0.1. *Ο συνεχής ομομορφισμός $\phi : G \to H$ θα είναι **διαφορίσιμος**, αν για κάθε διαφορίσιμη καμπύλη α και η $\phi\alpha$ είναι επίσης διαφορίσιμη.*

Ορισμός 5.2.0.2. *Έστω $\phi : G \to H$ ένας διαφορίσιμος ομομορφισμός, αν $\alpha'(0)$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο ταυτοτικό στοιχείο I της G ορίζουμε το **εφαπτόμενο διάνυσμα** $d\phi(\alpha'(0))$ στην H στο ταυτοτικό της στοιχείο με*

$$d\phi(\alpha'(0)) = (\phi \circ \alpha)'(0)).$$

*Η επαγόμενη απεικόνιση $d\phi : T_G \to T_H$ καλείται το **διαφορικό** της ϕ.*

Πρόταση 5.2.0.3. *Η απεικόνιση $d\phi : T_G \to T_H$ είναι γραμμική.*

Πρόταση 5.2.0.4. *Έστω $\phi : G \to H$ και $\psi : H \to K$ διαφορίσιμοι ομομορφισμοί ομάδων, τότε*

$$d(\psi\phi) = d\psi \circ d\phi.$$

Πόρισμα 5.2.0.5. *Αν $\phi : G \to H$ ένας διαφορίσιμος ισομορφισμός, τότε ο $d\phi : T_G \to T_H$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων και $dimG = dimH$.*

5.3 Εκθετική απεικόνιση

Για τις ομάδες πινάκων που μελετάμε έχουμε ορίσει τον εφαπτόμενο χώρο μιας τοπολογικής ομάδας στο μοναδιαίο στοιχείο. Τώρα θα μελετήσουμε μια απεικόνιση από τον εφαπτόμενο χώρο στην ομάδα.

Ορισμός 5.3.0.1. *Έστω ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, ορίζουμε την* ***εκθετική του δύναμη***

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

Θα λέμε ότι η προηγούμενη σειρά συγκλίνει αν συγκλίνει για κάθε (i, j) θέση του πίνακα

$$(I)_{ij} + (A)_{ij} + (\frac{A^2}{2!})_{ij} + (\frac{A^3}{3!})_{ij} + \cdots$$

Πρόταση 5.3.0.2. *Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ η σειρά*

$$I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

συγκλίνει.

Ορισμός 5.3.0.3. *Ορίζεται λοιπόν η* ***εκθετική απεικόνιση***

$$exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}).$$

Λήμμα 5.3.0.4. *Αν οι πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ αντιμετατίθενται, τότε*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Πόρισμα 5.3.0.5. *Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ ισχύει ότι $det(e^A) \neq 0$. Η απεικόνιση 5.3.0.3 γίνεται*

$$exp : M_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}).$$

Πόρισμα 5.3.0.6. *Για κάθε αντιθετοσυμμετρικό πίνακα $A \in so(n)$ η απεικόνιση 5.3.0.3 γίνεται*

$$exp : so(n) \to O(n).$$

Παράδειγμα 5.3.0.7. *Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε*

$$so(2) = \{\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \parallel x \in \mathbb{R}\}.$$

Ας υπολογίσουμε τον e^A υπολογίζοντας τις πρώτες δυνάμεις του A.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -x^3 \\ x^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{pmatrix},\ A^5 = \begin{pmatrix} 0 & x^5 \\ -x^5 & 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε λοιπόν

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -x^3 \\ x^3 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{1}{4!}\begin{pmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{pmatrix} + \frac{1}{5!}\begin{pmatrix} 0 & x^5 \\ -x^5 & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

Γνωρίζουμε ότι $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots$ *και αντίστοιχα για το ημίτονο. Άρα έχουμε*

$$e^A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

και $e^A \in SO(2)$. *Η τελευταία διαπίστωση δίνει ότι δεν υπάρχει πίνακας* B *ώστε* $e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Σημειώνουμε επίσης ότι αν $A = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}$, *τότε* $e^A = I$.

Τώρα θα ορίσουμε την αντίστροφη απεικόνιση της εκθετικής, δηλαδή τον λογάριθμο ενός πίνακα.

Ορισμός 5.3.0.8. *Έστω ο πίνακας* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *ώστε ο* A *να βρίσκεται σε ¨μικρή¨ ανοικτή περιοχή του μοναδιαίου πίνακα, ορίζουμε τον* ***λογάριθμό*** *του*

$$logA = (A - I) - \frac{(A-I)^2}{2} + \frac{(A-I)^3}{3} - \cdots$$

Θα λέμε ότι η προηγούμενη σειρά συγκλίνει αν συγκλίνει για κάθε (i, j) *θέση του πίνακα*

$$(A - I)_{ij} - (\frac{(A-I)^2}{2})_{ij} + (\frac{(A-I)^3}{3})_{ij} - \cdots$$

Πρόταση 5.3.0.9. *Για κάθε πίνακα* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *¨κοντά¨ στον μοναδιαίο η σειρά*

$$(A - I) - \frac{(A-I)^2}{2} + \frac{(A-I)^3}{3} - \cdots$$

συγκλίνει.

Λήμμα 5.3.0.10. *Αν οι πίνακες* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *και* $B \in M_n(\mathbb{R})$ *βρίσκονται ¨κοντά¨ στον μοναδιαίο και οι πίνακες* $logA$ *και* $logB$ *αντιμετατίθενται, τότε*

$$logAB = logA + logB.$$

Πόρισμα 5.3.0.11. *Αν ο πίνακας* A *είναι ορθογώνιος και βρίσκεται ¨κοντά¨ στον μοναδιαίο, τότε ο* $logA$ *είναι αντιθετο-συμμετρικός.*

Λήμμα 5.3.0.12. *Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $AA^t = A^tA$ τότε*

$$(A-I)^k(A^t-I)^m = (A^t-I)^m(A-I)^k.$$

Λήμμα 5.3.0.13. *Έστω $A \in GL_n(\mathbb{R})$ με A να βρίσκεται ¨κοντά¨ στον μοναδιαίο και $AA^t = A^tA$, τότε*

$$logAlogA^t = logA^tlogA.$$

Πρόταση 5.3.0.14. *Για κάθε πίνακα $A \in O_n(\mathbb{R})$ ¨κοντά¨ στον μοναδιαίο ο $logA$ είναι αντιθετοσυμμετρικός.*

5.4 Μονοπαραμετρικές υποομάδες

Ορισμός 5.4.0.1. *Μια* ***μονοπαραμετρική υποομάδα*** α *στην ομάδα* G *είναι ένας διαφορίσιμος ομομορφισμός*

$$\alpha : \mathbb{R} \to G.$$

Γνωρίζουμε ότι αρκεί να ορισθεί η α σε μια ανοικτή περιοχή του μηδενός.

Παράδειγμα 5.4.0.2. *Έστω* $A \in M_n(\Bbbk)$, *η* $\alpha(t) = e^{tA}$ *είναι μια μονοπαραμετρική υποομάδα της* $GL(n, \Bbbk)$ *και* $\alpha'(0) = A$.

Πρόταση 5.4.0.3. *Έστω μια μονοπαραμετρική υποομάδα* α *στην ομάδα* $GL(n, \Bbbk)$, *τότε υπάρχει* $A \in M_n(\Bbbk)$ *ώστε* $\alpha(t) = e^{tA}$.

Γνωρίζουμε ότι $T_{GL(n,\Bbbk)} = M_n(\Bbbk)$, άρα η προηγούμενη πρόταση δηλώνει ότι κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα στην $GL(n, \Bbbk)$ είναι η παράγωγος στο μηδέν κάποιας μονοπαραμετρικής υποομάδας. Το ίδιο ισχύει και για τις ορθογώνιες ομάδες.

Πρόταση 5.4.0.4. *Έστω ένα εφαπτόμενο διάνυσμα* A *στην ομάδα* $O(n, \Bbbk)$, *τότε υπάρχει μοναδική μονοπαραμετρική υποομάδα* $\alpha(t)$ *με* $\alpha'(0) = A$ *και* $A + \overline{A}^t = 0$.

Υπάρχει λοιπόν μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των εφαπτομένων διανυσμάτων της $GL(n, \Bbbk)$ ($O(n, \Bbbk)$) και τις μονοπαραμετρικές υποομάδες.

Πρόταση 5.4.0.5. *Ο εφαπτόμενος χώρος της* $O(n, \mathbb{R})$ *είναι ο διανυσματικός χώρος* $so(n)$ *και έχει διάσταση*

$$dimO(n) = dimso(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Πρόταση 5.4.0.6. *Ο εφαπτόμενος χώρος της* $U(n, \mathbb{C})$ *είναι ο διανυσματικός χώρος* $su(n)$ *και έχει διάσταση*

$$dimU(n) = dimsu(n) = n^2.$$

Πρόταση 5.4.0.7. *Ο εφαπτόμενος χώρος της* $Sp(n, \mathbb{H})$ *είναι ο διανυσματικός χώρος* $sp(n)$ *και έχει διάσταση*

$$dimSp(n) = dimsp(n) = n(2n+1).$$

Για να υπολογίσουμε τη διάσταση της $SU(n)$ θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.4.0.8. *Αν* A *είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός πίνακας, τότε*

$$e^{tr(A)} = det(e^A).$$

Θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα στην απεικόνιση

$$tr : su(n) \to \mathbb{C}.$$

Γνωρίζουμε ότι αν $A \in su(n)$, τότε $trA = ir$ για κάποιον πραγματικό r. Άρα $Im(tr) \cong \mathbb{R}$ και $dimIm(tr) = 1$. Από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι $su(n) \cong Im(tr) \oplus ker(tr)$. Δηλαδή

$$dimsu(n) = 1 + dimker(tr).$$

Από τη σχέση $ker(tr) = tr^{-1}(0)$ θα δείξουμε ότι

$$ker(tr) = T_{SU(n)}.$$

Τότε θα έχουμε ότι

$$dimSU(n) = dimT_{SU(n)} = n^2 - 1.$$

Αν τώρα $C \in su(n)$ με $trC = 0$ θα έχουμε ότι $e^{trC} = e^0 = 1$. Άρα από το προηγούμενο Θεώρημα $dete^C = 1$. Επειδή $e^C(\overline{e^C})^t = e^{C+\overline{C}^t} = I$ θα πάρουμε ότι $e^C \in SU(n)$. Θεωρώντας τη μονοπαραμετρική υποομάδα e^{tC} καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Πόρισμα 5.4.0.9. *Ο εφαπτόμενος χώρος της $SU(n,\mathbb{C})$ είναι ο διανυσματικός χώρος $T_{SU(n)}$ και έχει διάσταση $n^2 - 1$.*

5.5 Ασκήσεις

1. Έστω η καμπύλη $\alpha : (-1, 1) \to M_3(\mathbb{R})$ η οποία δίνεται από

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} cost & sint & 0 \\ -sint & cost & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι η α είναι καμπύλη στην $SO(3)$ και βρείτε την $\alpha'(0)$.

2. Έστω η καμπύλη $\beta : (-1, 1) \to M_3(\mathbb{R})$ με τύπο

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cost & sint \\ 0 & sint & cost \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την $\beta'(0)$ και δείξτε ότι $(\alpha\beta)' = \alpha'(0) + \beta'(0)$.

3. Έστω A ένας 3×3 αντιθετοσυμμετρικός πίνακας. Δείξτε ότι η ορίζουσά του είναι μηδέν. Δείξτε ότι ο A^2 είναι συμμετρικός αλλά ο A^3 μπορεί να μην είναι.

4. Έστω $B \in O(3) - SO(3)$. Δείξτε ότι η σειρά $logB$ μπορεί να μην συγκλίνει.

5. Έστω η καμπύλη $\alpha : (-1, 1) \to M_3(\mathbb{R})$ η οποία δίνεται από

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} cost & sint & 0 \\ -sint & cost & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι η α είναι μονοπαραμετρική υποομάδα.

6. Δείξτε ότι το κέντρο της $U(n)$ είναι η υποομάδα

$$C(U(n)) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{it} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{it} \end{pmatrix}.$$

Εδώ $t \in [0, 2\pi]$.

Ενώ το κέντρο της $SU(n)$ είναι η υποομάδα

$$C(SU(n)) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{it} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{it} \end{pmatrix}.$$

Εδώ $t = \dfrac{2\pi}{n}$.

Κεφάλαιο 6

Άλγεβρες Lie

6.1 Ορισμοί

Οι διανυσματικοί χώροι $so(n)$, $su(n)$ και $sp(n)$ δεν είναι κλειστοί ως προς το γινόμενο των πινάκων όπως φαίνεται και από το επόμενο παράδειγμα.

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix}$$

Ορισμός 6.1.0.1. *Έστω $A,\ B \in M_n(\mathbb{k})$ ορίζουμε την πράξη $M_n(\mathbb{k}) \times M_n(\mathbb{k}) \to M_n(\mathbb{k})$ με*

$$[A, B] = AB - BA.$$

Πρόταση 6.1.0.2. *Οι διανυσματικοί χώροι $so(n)$, $su(n)$ και $sp(n)$ είναι κλειστοί ως προς το προηγούμενο γινόμενο και γίνονται πραγματικές άλγεβρες.*

Ιδιότητες του προηγουμένου γινομένου.
1) $[A, B] = -[B, A]$.
2) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$.
3) $[cA, B] = c[A, B]$ για $c \in \mathbb{R}$.
4) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$. Η ιδιότητα αυτή καλείται η ιδιότητα του Jacobi.

Ορισμός 6.1.0.3. *Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με γινόμενο το οποίο ικανοποιεί τις προηγούμενες ιδιότητες καλείται **άλγεβρα Lie**.*

Παράδειγμα 6.1.0.4. *Ας βρούμε τις άλγεβρες Lie διάστασης ένα. $[a, b] = a[1, b] = -ab[1, 1] = 0$ από την πρώτη ιδιότητα.*

Ας βρούμε τις άλγεβρες Lie διάστασης δύο με βάση (e_1, e_2). Έχουμε $[e_i, e_i] = 0$ και $[e_1, e_2] = -[e_2, e_1]$. Έστω $[e_1, e_2] = ae_1 + be_2$, τότε

$$[e_1, [e_1, e_2]] = [e_1, ae_1 + be_2] = b[e1, e_2] = b(ae_1 + be_2).$$

Άρα για κάθε a και b έχουμε μια άλγεβρα Lie. Αυτές τελικά είναι ισόμορφες.

Ορισμός 6.1.0.5. *Έστω ℓ και $\hbar$ δύο άλγεβρες Lie. Ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων $\phi : \ell \to \hbar$ θα είναι ισομορφισμός αλγεβρών Lie αν ισχύει $\phi[u, v] = [\phi(u), \phi(v)]$.*

Γιά την ταξινόμηση των τρισδιάστατων αλγεβρών Lie βλέπε A. Fowler-Wright.

Παράδειγμα 6.1.0.6. *Ο διανυσματικός χώρος*

$$so(n) = \{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

έχει διάσταση τρία. Ας είναι μια βάση του το i, j, k με γινόμενο $[i, j] = k$, $[j, k] = i$ και $[k, i] = j$, τότε γίνεται μια τρισδιάστατη άλγεβρα Lie.

Κεφάλαιο 7

Ομάδες Lie

Μία ομάδα Lie περικλείει τρεις διαφορετικές μαθηματικές δομές. Αποτελεί αλγεβρική ομάδα, τοπολογικό χώρο και διαφορίσιμη πολλαπλότητα.

Μία ομάδα Lie μπορεί να περιγραφεί ισοδύναμα με διαφορετικούς τρόπους εξαρτώμενους από τη δομή στην οποία θέλουμε να δώσουμε έμφαση. Μπορεί να ορισθεί σαν τοπολογική ομάδα με επιπρόσθετες ιδιότητες διαφορισιμότητας κατά τον Pontryagin ή σαν διαφορίσιμη πολλαπλότητα με επιπρόσθετες αλγεβρικές ιδιότητες κατά τους Chevalley και Adams.

Οι ομάδες Lie οι οποίες υπεισέρχονται σε φυσικά προβλήματα είναι οι καλούμενες γραμμικές ομάδες Lie για τις οποίες μπορεί να δοθεί ένας πιο άμεσος ορισμός. Οι συγκεκριμένες ομάδες δέχονται μία τουλάχιστον πιστή αναπαράσταση σε πεπερασμένο διανυσματικό χώρο. Δεν θα επεκταθούμε προς αυτήν την κατεύθυνση σ' αυτές τις σημειώσεις.

Η βασική ιδιότητα μίας ομάδας Lie είναι ότι έχει ένα υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων *κοντά* στο ταυτοτικό στοιχείο και η δομή αυτής της περιοχής ουσιαστικά καθορίζει τη δομή ολόκληρης της ομάδας και καθορίζεται από την αντίστοιχη άλγεβρα Lie. Αυτό επιτυγχάνεται με την παραμετρικοποίηση των στοιχείων αυτής της περιοχής με ένα τρόπο ο οποίος καθορίζεται από τη διαφορισιμότητα. Με τη λέξη *κοντά* υπονοείται ότι υπάρχει απόσταση μεταξύ των στοιχείων της.

Ορισμός 7.0.0.1. *Με τη λέξη χώρος θα εννοούμε κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με την τοπολογία του υποχώρου. Κάθε χώρος λοιπόν έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών και είναι Hausdorff.*

Ορισμός 7.0.0.2. *Ένας χώρος X καλείται n-διάστατη **τοπολογική πολλαπλότητα**, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U_x του X, ανοικτή μπάλα $B(\mathbf{0}, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ και ομοιομορφισμός $\varphi_x : U_x \to B(\mathbf{0}, r)$.*
Το ζεύγος (U_x, φ_x) καλείται χάρτης. Το σύνολο $\{(U_x, \varphi_x) \mid x \in X\}$ καλείται άτλας της X.

Πρόταση 7.0.0.3. *Για κάθε n-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα υπάρχει μέγιστος άτλαντας.*

Πρόταση 7.0.0.4. *Μια ομάδα πινάκων G διάστασης n είναι μια n-διάστατη πολλαπλότητα.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $dimT_G = n$, άρα ο εφαπτόμενος χώρος T_G είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$. Θα χρησιμοποιήσουμε την εκθετική απεικόνιση (5.3.0.1) exp από τον T_G στην G η οποία είναι συνεχής. Αρκεί να δείξουμε ότι τοπικά είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή μεταξύ ανοικτών περιοχών. Η απεικόνιση του λογαρίθμου (5.3.0.8) log ορίζεται μεταξύ ανοικτής περιοχής του μηδενικού διανύσματος του $\mathbf{0}$ και ανοικτής περιοχής του ταυτοτικού στοιχείου της G. Ο λογάριθμος είναι επίσης συνεχής απεικόνιση και αντίστροφη της εκθετικής απεικόνισης. Καταλήγουμε ότι τοπικά, σε μία ανοικτή περιοχή του I, υπάρχει ομοιομορφισμός όπως απαιτεί ο ορισμός.

Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση της μεταφοράς, $L_A : G \to G$, η οποία είναι ομοιομορφισμός σε σημείο A της G, έχουμε τον ομοιομορφισμό

$$L_A \circ exp : B(\mathbf{0}, r) \to G.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η G είναι πολλαπλότητα διάστασης n.

□

Ορισμός 7.0.0.5. *Μια πολλαπλότητα καλείται* ***κλειστή*** *αν είναι συμπαγής.*

Από την άσκηση 1 του Κεφαλαίου 4 έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 7.0.0.6. *Η $GL(n, \mathbb{K})$ δεν είναι κλειστή ενώ η $O(n, \mathbb{K})$ είναι.*

Πρόταση 7.0.0.7. *Έστωσαν N και M κλειστές n-διάστατες πολλαπλότητες με $N \subseteq M$. Αν η M είναι τροχιακά συνεκτική, τότε $N = M$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $M - N = \varnothing$. Έστω $x \in N$ και $y \in M - N$. Επειδή η M είναι τροχιακά συνεκτική υπάρχει τροχιά $\gamma : [0, 1] \to M$ που συνδέει τα σημεία $x = \gamma(0)$ και $y = \gamma(1)$. Το $M - N$ είναι ανοικτό, οπότε και η $\gamma^{-1}(M - N)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $[0, 1]$. Άρα το $[0, 1] - \gamma^{-1}(M - N)$ είναι κλειστό οπότε θα έχει μέγιστο. Ας είναι αυτό το t_0. Τότε $\gamma(t_0) \in N$. Εφόσον η N είναι πολλαπλότητα θα υπάρχει ανοικτή περιοχή U του $\gamma(t_0)$ και ανοικτή περιοχή $B_\varepsilon(t_0)$ του t_0 ώστε $\gamma(B_\varepsilon(t_0)) \subseteq U$. Για το σημείο $t_0 + \frac{1}{2}\varepsilon$ έχουμε ότι $\gamma(t_0 + \frac{1}{2}\varepsilon) \in M - N)$ και $\gamma(t_0 + \frac{1}{2}\varepsilon) \in N$. Οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

□

Ορισμός 7.0.0.8. *Έστω ανοικτό υποσύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και συνεχής απεικόνιση $f : U \to \mathbb{R}^m$. Η f θα καλείται λεία-**διαφορίσιμη** στο U, αν όλες οι ανώτερες μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς.*

Ορισμός 7.0.0.9. *Έστω ότι οι χάρτες μιας πολλαπλότητας X είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ των αντίστοιχων ανοικτών συνόλων U_x και $\varphi_x(U_x)$ Η X θα καλείται* ***λεία-διαφορίσιμη πολλαπλότητα*** *αν ισχύει*
για κάθε δύο χάρτες $\varphi_x : U_x \to \varphi_x(U_x)$ και $\psi_x : V_x \to \psi_x(V_x)$ με $U_x \cap V_x \neq \varnothing$, η απεικόνιση $\psi_x^{-1}\varphi_x : U_x \cap V_x \to U_x \cap V_x$ είναι διαφορίσιμη.

Ορισμός 7.0.0.10. *Έστωσαν X, Y διαφορίσιμες πολλαπλότητες και απεικόνιση $f : X \to Y$. Η f θα καλείται διαφορίσιμη αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε $x \in X$. Δηλαδή αν (U_x, φ_x) είναι χάρτης του $x \in X$ και $(V_{f(x)}, {}_{f(x)})$ είναι χάρτης του $f(x) \in Y$, η απεικόνιση ${}_{f(x)} f \varphi_x^{-1}$ είναι διαφορίσιμη εκεί που ορίζεται.*

Ορισμός 7.0.0.11. *Έστωσαν X, Y διαφορίσιμες πολλαπλότητες και απεικόνιση $f : X \to Y$ διαφορίσιμη. Η f θα καλείται διαφορομορφισμός αν είναι 1-1, επί και η αντίστροφη $f^{-1} : Y \to X$ είναι επίσης διαφορίσιμη. Τότε γράφουμε $X \cong_D Y$.*

Παράδειγμα 7.0.0.12. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(t) = t^3$. Η f είναι διαφορίσιμη 1-1 και επί αλλά η f^{-1} δεν είναι διαφορίσιμη στο 0.*

Ορισμός 7.0.0.13. *Έστω X διαφορίσιμη πολλαπλότητα η οποία είναι επίσης και ομάδα. Θα καλείται **ομάδα Lie** , αν οι απεικονίσεις του γινομένου $\mu : X \times X \to X$ και της αντίστροφης $\lambda : X \to X$ με $\lambda(x) = x^{-1}$ είναι διαφορίσιμες.*

Ορισμός 7.0.0.14. *Έστωσαν X και Y ομάδες Lie, τότε ένας ομομορφισμός ομάδων $\varphi : X \to Y$ θα καλείται ομομορφισμός ομάδων Lie αν είναι και διαφορίσιμη απεικόνιση.*

Παράδειγμα 7.0.0.15. *Οι ομάδες $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$, και $\mathbb{H}^m$ με τις αντίστοιχες πράξεις είναι ομάδες Lie.*

Παράδειγμα 7.0.0.16. *Η ομάδα $\mathbb{R}$ ταυτίζεται με την ομάδα των 1×1 πινάκων (e^x).*

Θεώρημα 7.0.0.17. *Οι ομάδες των πινάκων είναι ομάδες Lie.*

Το αντίστροφο του προηγουμένου θεωρήματος δεν είναι αληθές, αλλά κάθε ομάδα Lie είναι τοπικά ισόμορφη με κάποια ομάδα πινάκων. Δηλαδή τοπικά μια ομάδα Lie συμπεριφέρεται σαν ομάδα πινάκων.

Ορισμός 7.0.0.18. *Έστωσαν X και Y ομάδες Lie. Θα καλούνται **τοπικά ισόμορφες**, αν υπάρχουν ανοικτές περιοχές των ταυτοτικών στοιχείων U_1, V_1 αντίστοιχα και ομομορφισμός $\varphi : U_1 \to V_1$.*

Παράδειγμα 7.0.0.19. *Η ομάδα $\mathbb{R}$ είναι τοπικά ισόμορφη με την ομάδα S^1 μέσω της $\varphi(x) = (e^{ix})$ για $|x| < \pi/2$.*

Πρόταση 7.0.0.20. *Έστωσαν X και Y ομάδες Lie. Τότε και η $X \times Y$ είναι ομάδα Lie.*

Παράδειγμα 7.0.0.21. *Το γινόμενο $S^1 \times S^1$ είναι ομάδα Lie.*

Πρόταση 7.0.0.22. *Έστω G μία συνεκτική ομάδα Lie και H μία υποομάδα Lie η οποία περιέχει ένα ανοικτό σύνολο U του μοναδιαίου στοιχείου e. Τότε $H = G$.*

Απόδειξη. Εφόσον $U \in H$ και H είναι υποομάδα έχουμε ότι $U^2 \in H$ και γενικά $U^k \in H$. Άρα αν $W = U \cup U^2 \cup U^3 \cup \cdots \in H$ και κάθε U^k είναι ένα ανοικτό υποσύνολο. Άρα και το W είναι επίσης ανοικτό. Θα δείξουμε ότι είναι ταυτόχρονα και κλειστό οπότε θα είναι και συνεκτικό. Δηλαδή θα είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο ενός συνεκτικού συνόλου, οπότε θα ταυτίζεται με αυτό, $W = G$ Ας θεωρήσουμε ότι το w είναι σημείο συσσώρευσης του W. Δηλαδή κάθε ανοικτό υποσύνολο V του w περιέχει κάποιο στοιχείο του W. Επειδή το U είναι ανοικτή περιοχή του ταυτοτικού στοιχείου, το wU είναι ανοικτή περιοχή του w και θα περιέχει κάποιο στοιχείο του W. Ας είναι αυτό το

$$wu = u_1 u_2 \cdots u_m$$

για κάποια $u_1, u_2, \cdots, u_m \in U$. Αλλά τότε $w = u_1 u_2 \cdots u_m u^{-1} \in W$ και το W είναι και κλειστό. □

Πόρισμα 7.0.0.23. *Έστωσαν X και Y ομάδες Lie και $\varphi : X \to Y$ ομομορφισμός ομάδων Lie ώστε η Y να είναι τροχιακά συνεκτική. Αν το $\varphi(X)$ περιέχει μια ανοικτή περιοχή του ταυτοτικού στοιχείου της Y, τότε ο φ είναι επιμορφισμός ομάδων.*

Ήδη έχουμε μελετήσει τις άλγεβρες Lie των αντίστοιχων ομάδων Lie πινάκων. Η βασική ιδέα είναι να μελετήσει κανείς ένα διανυσματικό χώρο αντί για την ομάδα η οποία μπορεί να είναι πολύπλοκη. Η σύνδεση μεταξύ ομάδων και αλγεβρών δίνεται ως ακολούθως.

Πρόταση 7.0.0.24. *Έστωσαν X και Y ομάδες Lie και $\varphi : X \to Y$ ομομορφισμός ομάδων Lie. Τότε η $d\varphi : T_X \to T_Y$ είναι απεικόνιση αλγεβρών Lie.*

Όταν έχουμε μια ομάδα Lie, τότε όπως είδαμε ορίζεται η αντίστοιχη άλγεβρα Lie. Αλλά ισχύει και το ανάποδο. Ισχύει ότι αν οι άλγεβρες Lie δύο ομάδων Lie είναι ισόμορφες, τότε οι ομάδες είναι τοπικά ισόμορφες.

Παράδειγμα 7.0.0.25. *Έχουμε δείξει τους ισομορφισμούς $Sp(1) \cong S^3 \cong SU(2)$ στην Πρόταση 3.3.0.2. Επίσης γνωρίζουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός $\rho : S^3 \to O(3)$ με πυρήνα $\{1, -1\}$, Πρόταση 3.3.0.5. Επειδή η ρ είναι συνεχής και η S^3 συνεκτική, το $\rho(S^3)$ είναι επίσης συνεκτικός υπόχωρος της $O(3)$. Αλλά η $O(3)$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες και η μία είναι η $SO(3)$. Άρα η $\rho : S^3 \to SO(3)$ είναι επιμορφισμός ομάδων.*

Οι άλγεβρες Lie $su(2)$ και $so(3)$ έχουν διάσταση τρία και είναι ισόμορφες σαν άλγεβρες Lie, αλλά οι ομάδες Lie $SU(2)$ και $SO(3)$ δεν είναι ισόμορφες μεταξύ τους διότι έχουν μη ισόμορφα κέντρα. Είναι όμως τοπικά διαφορομορφικές και μάλιστα δύο προς ένα. Δηλαδή υπάρχει καλυπτική απεικόνιση διπλής αναδίπλωσης.
Το ίδιο συμβαίνει μεταξύ των $su(2) \times su(2)$ και $so(4)$.

Κεφάλαιο 8

Μεγιστικές Σπείρες - Τόροι

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε σπείρες στις ομάδες πινάκων. Στο σύγγραμμα του Carter ο αναγνώστης μπορεί να εμβαθύνει περισσότερο στη διάσπαση της $GL_n(\mathbb{K})$ και να μελετήσει εφαρμογές.

Ορισμός 8.0.0.1. *Μία k σπείρα - τόρος G είναι το καρτεσιανό γινόμενο k κύκλων S^1,*

$$G = S^1 \times \cdots S^1.$$

Μία υποομάδα H μίας ομάδας πινάκων G είναι μια σπείρα, αν είναι ισόμορφη με μια k σπείρα για κάποιον φυσικό k.

$$H \cong S^1 \times \cdots S^1.$$

Η σπείρα H θα καλείται μέγιστη, αν δεν υπάρχει μεγαλύτερη σπείρα H' στην G η οποία να την περιέχει.

Λήμμα 8.0.0.2. *Μία σπείρα είναι μία αβελιανή υποομάδα.*

Γνωρίζουμε ότι $S^1 = \left\{ e^{it}, t \in [0, 2\pi] \right\} \cong SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} cost & sint \\ -sint & cost \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi] \right\}$.
Άρα μπορούμε να αναπαραστήσουμε μία k σπείρα με την υποομάδα πινάκων

$$T^k = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{it_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{it_k} \end{pmatrix}, t_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Υπενθυμίζουμε την εκθετική απεικόνιση $exp : M_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ για την οποία ισχύει ότι αν οι πίνακες A, $B \in M_n(\mathbb{R})$ αντιμετατίθενται, τότε

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Τώρα θα περιορίσουμε την εκθετική απεικόνιση σε κάποιο υπόχωρο ο οποίος θα είναι εφοδιασμένος και με αβελιανό γινόμενο ώστε η εκθετική να γίνει ομομορφισμός ομάδων. Ο χώρος αυτός θα είναι ο εφαπτόμενος χώρος - άλγεβρα Lie κάποιας ομάδας Lie.

Υπενθυμίζουμε ότι μία μονοπαραμετρική υποομάδα α στην ομάδα G είναι ένας διαφορίσιμος ομομορφισμός $\alpha : \mathbb{R} \to G$ ώστε $\alpha(0) = e_G$.

Πόρισμα 8.0.0.3. *Αν G είναι μία αβελιανή ομάδα πινάκων και α και β δύο μονοπαραμετρικές υποομάδες, τότε η $\alpha\beta$ είναι επίσης μονοπαραμετρική υποομάδα.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $(\alpha\beta)(s+t) = \alpha(s+t)\beta(s+t) = \alpha(s)\alpha(t)\beta(s)\beta(t) = \alpha(s)\beta(s)\alpha(t)\beta(t) = (\alpha\beta)(s)(\alpha\beta)(t)$. □

Πόρισμα 8.0.0.4. *Αν G είναι μία αβελιανή ομάδα πινάκων τότε η $exp : T_G \to G$ είναι ομομορφισμός ομάδων.*

Απόδειξη. Έστω α και β δύο μονοπαραμετρικές υποομάδες με $\alpha'(0) = u \in T_G$ και $\beta'(0) = v \in T_G$. Τότε $\alpha(t) = e^{t\alpha'(0)}$. Άρα $exp(u) = \alpha(1)$ και $exp(v) = \beta(1)$. Επίσης $(\alpha\beta)'(0) = \alpha'(0) + \beta'(0) = u + v$. Έχουμε ότι

$$exp(u + v) = (\alpha\beta)(1) = \alpha(1)\beta(1) = exp(u)exp(v)$$

□

Έχουμε αποδείξει ότι αν η απεικόνιση exp περιοριστεί σε μία περιοχή του μηδενικού στοιχείου του T_G τότε αυτή γίνεται ένα προς ένα. Εφόσον λοιπόν η G είναι αβελιανή ο πυρήνας θα είναι μία διακριτή υποομάδα D. Δηλαδή για κάθε στοιχείο του v θα υπάρχει ανοικτή περιοχή V η οποία θα περιέχει το v αλλά κανένα άλλο στοιχείο του πυρήνα.

Γνωρίζουμε ότι ο T_G είναι υπόχωρος κάποιου $\mathbb{R}^n$. Θα δείξουμε ότι στον $\mathbb{R}^n$ μία διακριτή υποομάδα είναι μία υποομάδα πλέγμα.

Ορισμός 8.0.0.5. *Μία υποομάδα πλέγμα L του $\mathbb{R}^n$ αποτελείται από όλους τους ακέραιους συνδυασμούς κάποιου υποσυνόλου γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Αν $\{v_1, \cdots v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, τότε το πλέγμα που δημιουργείται από αυτό το σύνολο είναι το*

$$L = \{a_1 v_1 + \cdots a_k v_k | a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Το σύνολο $\{v_1, \cdots v_k\}$ καλείται μία βάση του πλέγματος.

Πρόταση 8.0.0.6. *Στον $\mathbb{R}^n$ μία διακριτή υποομάδα L είναι μία υποομάδα πλέγμα.*

Απόδειξη. Ας επιλέξουμε ένα διάνυσμα v_1 ώστε $\{tv_1, t \in [0, 1)\} \cap L = \{\overline{0}\}$. Από τον ορισμό του v_1 έχουμε ότι $\mathbb{R}v_1 \cap L = \mathbb{Z}v_1$. Επιλέγουμε το επόμενο διάνυσμα v_2 ώστε $v_2 \in L - \mathbb{R}v_1$ και να είναι ελάχιστο. Δηλαδή $\{tv_2, t \in [0, 1)\} \cap L = \{\overline{0}\}$. Τα v_1 και v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επίσης ο υπόχωρος που γεννάται από αυτά τα δύο έχει την ιδιότητα $< v_1, v_2 > \cap L = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 | a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε τη βάση του πλέγματος. □

Τώρα θα αποδείξουμε ένα σημαντικό Θεώρημα.

Θεώρημα 8.0.0.7. *Έστω μία διακριτή υποομάδα L στον $\mathbb{R}^n$ με βάση $\{v_1, \cdots v_k\}$. Τότε το πηλίκο $\mathbb{R}^n/L$ είναι ισόμορφο με το γινόμενο k κύκλων S^1 και το $\mathbb{R}^{n-k}$. Ουσιαστικά ο προηγούμενος ισομορφισμός είναι και ομοιομορφισμός, αν θεωρήσουμε τη συνηθισμένη τοπολογία του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Επεκτείνουμε τη βάση $\{v_1, \cdots v_k\}$ του πλέγματος σε βάση όλου του χώρου $\{v_1, \cdots v_k, v_{k+1}, \cdots v_n\}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^n \to (S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ με τύπο

$$\phi(r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n) = (r_1 mod \mathbb{Z}, \cdots, r_k mod \mathbb{Z}, r_{k+1} v_{k+1}, \cdots, r_n v_n).$$

Γνωρίζοντας ότι $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ έχουμε το αποτέλεσμα. □

Επανερχόμαστε τώρα στην εκθετική απεικόνιση και θα μελετήσουμε πότε γίνεται επιμορφισμός. Γνωρίζουμε την επόμενη πρόταση από τις ομάδες Lie.

Πρόταση 8.0.0.8. *Έστω G μία συνεκτική ομάδα πινάκων και H μία υποομάδα η οποία περιέχει ένα ανοικτό σύνολο U του μοναδιαίου στοιχείου e. Τότε $H = G$.*

Πόρισμα 8.0.0.9. *Έστω G μία συνεκτική αβελιανή ομάδα πινάκων, τότε η εκθετική απεικόνιση $exp : T_G \to G$ είναι επιμορφισμός με διακριτό πυρήνα.*

Απόδειξη. Η εικόνα $exp(T_G)$ είναι υποομάδα της συνεκτικής ομάδας G. Από το προηγούμενο ταυτίζεται με τη G. Την ιδιότητα του πυρήνα την έχουμε αποδείξει. □

Από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8.0.0.10. *Έστω G μία συνεκτική αβελιανή ομάδα πινάκων, τότε $G \cong (S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ για κάποιο φυσικό k.*

Θεώρημα 8.0.0.11. *Έστω G μία συμπαγής συνεκτική αβελιανή ομάδα πινάκων, τότε $G \cong (S^1)^k$ για κάποιο φυσικό k.*

8.1 Ασκήσεις

1. Δίνεται ο επιμορφισμός $\phi : U(n) \twoheadrightarrow SU(n)$ με τύπο

$$\phi(A) = \frac{1}{det(A)}A$$

   Να δείξετε ότι ο πυρήνας είναι το κέντρο της $SU(n)$. Αν $C(U(n))$ και $C(SU(n))$ είναι αντίστοιχα τα κέντρα των $U(n)$ και $SU(n)$, να δείξετε ότι

$$U(n)/C(U(n)) \cong SU(n)/C(SU(n)).$$

2. Το κέντρο της $U(n)$ είναι η υποομάδα

$$C(U(n)) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{it} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{it} \end{pmatrix} \right\}.$$

   Εδώ $t \in [0, 2\pi]$. Δηλαδή $C(U(n)) \cong S^1$.

3. Το κέντρο της $SU(n)$ είναι η υποομάδα

$$C(SU(n)) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{it} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{it} \end{pmatrix} \right\}.$$

   Εδώ $t = \dfrac{2\pi}{n}$. Δηλαδή $C(SU(n)) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Κεφάλαιο 9

Μεγιστικές σπείρες στις $U(n)$ και $SO(n)$

Έστω G μία συνεκτική ομάδα πινάκων και T μία μέγιστη σπείρα της. Γνωρίζουμε ότι η T είναι ισόμορφη με το γινόμενο $(S^1)^k$ γιά κάποιο φυσικό αριθμό k.

Λήμμα 9.0.0.1. *Μια μέγιστη σπείρα για την $U(n)$ δίνεται από*

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \mid \lambda_i \in S^1,\ i = 1, \cdots, n \right\}.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η T περιέχεται σε μεγαλύτερη σπείρα. Τότε θα υπάρχει $g \in U(n) - T$ ώστε $gh = hg$, $\forall h \in T$. Για $h = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ έχουμε ότι η δράση του $hg = gh$ στο διάνυσμα $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$ είναι το $g(e_1)$. Άρα το h αφήνει το $g(e_1)$ αναλλοίωτο, ενώ δεν αφήνει αναλλοίωτο κανένα διάνυσμα $u \neq te_1$. Θα πρέπει λοιπόν να έχουμε $g(e_1) = \lambda_1 e_1$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $g(e_k =)\lambda_k e_k$ για $k = 1, \cdots, n$. Άρα $g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Τελικά έχουμε ότι $g \in T$ και η T είναι μέγιστη σπείρα στην $U(n)$. $\square$

Σαν πόρισμα έχουμε το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 9.0.0.2. *Μια μέγιστη σπείρα για την $SU(n)$ δίνεται από*

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \mid \lambda_i \in S^1,\ i = 1, \cdots, n,\ \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Θα μελετήσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα στις πραγματικές ορθογώνιες ομάδες.

Λήμμα 9.0.0.3. *Μια μέγιστη σπείρα για την* $SO(3)$ *δίνεται από*

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \theta_1 \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Απόδειξη. Η T είναι ισόμορφη με την S^1. Ας υποθέσουμε ότι η T περιέχεται σε μεγαλύτερη σπείρα. Τότε θα υπάρχει $g \in SO(3) - T$ ώστε $gh = hg$, $\forall h \in T$. Θα δείξουμε ότι $ge_3 = \pm e_3$, για e_3 το στοιχείο της κανονικής βάσης. Για $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $ge_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$ θα έχουμε ότι η δράση του $hg = gh$ στο διάνυσμα e_3 είναι το $ae_2 - be_1 + ce_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$. Άρα $a = 0 = b$ και $c = \pm 1$. Επειδή $g \in SO(3)$ έχουμε ότι $c = 1$. Τελικά $g \in T$. Άτοπο.

$\square$

Λήμμα 9.0.0.4. *Μια μέγιστη σπείρα για την* $SO(4)$ *δίνεται από*

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \mid \theta_i \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Απόδειξη. Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη υποθέτουμε ότι υπάρχει $g \in SO(3) - T$ ώστε $gh = hg$, $\forall h \in T$. Έστω $V =< e_1, e_2 >$ και $W =< e_3, e_4 >$ οι αντίστοιχοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$. Τα στοιχεία της T δίνουν στροφές στα επίπεδα V και W αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι $ge_1 \in V$.

Έστω $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$ και $ge_1 = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ θα έχουμε ότι η δράση του $hg = gh$ στο διάνυσμα e_1 είναι το $ae_1 + be_2 + c'e_3 + d'e_4 = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$. Άρα $c = 0 = d$ και $ge_1 \in V$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $ge_2 \in V$ και $ge_3, e_4 \in W$. Αρκεί να αποκλείσουμε την περίπτωση

$$g = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix}.$$

Εφόσων $gh = hg$, $\forall h \in T$ έχουμε ότι και το g θα ανήκει στην T. ·Ατοπο.

$\square$

Ακολουθούν οι γενικεύσεις.

Λήμμα 9.0.0.5. *Για την $SO(2n)$ μια μέγιστη σπείρα δίνεται από*

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \begin{pmatrix} \cos\theta_n & \sin\theta_n \\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} \mid \theta_i \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Λήμμα 9.0.0.6. *Για την $SO(2n+1)$ από*

$$T \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & \begin{pmatrix} \cos\theta_n & \sin\theta_n \\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} \mid \theta_i \in [0, 2\pi] \right\}$$

η οποία είναι ισόμορφη με την προηγούμενη.

Στο υπόλοιπο της ενότητας θα δείξουμε ότι

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}.$$

Δηλαδή ότι κάθε στοιχείο της G είναι συζυγές με ένα στοιχείο της μέγιστης σπείρας. Γνωρίζουμε επίσης ότι και οι υποομάδες gTg^{-1} είναι ισόμορφες με την $(S^1)^k$. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι κάθε στοιχείο $h \in G$ ορίζει ένα άλλο g ώστε $ghg^{-1} \in T$. Οι υποομάδες gTg^{-1} είναι όλες συνεκτικές αφού είναι και η T. Επίσης όλες έχουν κοινό στοιχείο τον ταυτοτικό πίνακα. Άρα η ένωση gTg^{-1} είναι επίσης συνεκτική.

9.0.1 $SU(n)$

Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε για να αποδείξουμε τον προηγούμενο ισχυρισμό είναι μέσω των ιδιοχώρων του πίνακα που μας ενδιαφέρει. Η αναπαράσταση $ghg^{-1} \in T$ που ζητάμε είναι ισοδύναμη με

$$ghg^{-1} \in T = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \mid \lambda_i \in S^1,\ i = 1, \cdots, n \right\}.$$

Δηλαδή εφαρμόζουμε διαγωνοποίηση πινάκων. Το αρχικό πρόβλημα λοιπόν ανάγεται σε πρόβλημα γραμμικής άλγεβρας.

Υπενθυμίζουμε βασικά στοιχεία από τη γραμμική άλγεβρα. Με V θα συμβολίζουμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{k}^n$ με την κανονική βάση και με $\phi : V \to V$ έναν ενδομορφισμό. Άρα σε κάθε ενδομορφισμό αντιστοιχεί ένας πίνακας και ανάποδα.

Ορισμός 9.0.1.1. *Ένας υπόχωρος $W \leqslant V$ καλείται ϕ αναλλοίωτος, αν $\phi(W) \leqslant W$. Ορίζεται λοιπόν ο περιορισμός $\phi : W \to W$.*

Παράδειγμα 9.0.1.2. *Αν $\phi : V^3 \to V^3$ με πίνακα ως προς την κανονική βάση $< e_1, e_2, e_3 >$*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

τότε ο υπόχωρος $< e_1, e_2 >$ είναι ϕ αναλλοίωτος.

Λήμμα 9.0.1.3. *Αν $W(\lambda_1)$ είναι ο ιδιόχωρος μιάς ιδιοτιμής λ_1 της ϕ, τότε ο $W(\lambda_1)$ είναι ϕ αναλλοίωτος υπόχωρος. Γνωρίζουμε ότι ο ιδιόχωρος $W(\lambda_i)$ δίνεται από τον πυρήνα $ker(\phi - \lambda_i I)$.*

Παράδειγμα 9.0.1.4. *Ο πυρήνας της ϕ είναι ϕ αναλλοίωτος υπόχωρος.*

Θεωρούμε τώρα ότι $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

Λήμμα 9.0.1.5. *Αν $A \in U(n)$ και ο $W \leqslant \mathbb{C}^n$ είναι A αναλλοίωτος υπόχωρος, τότε $A \in U(k)$ και ο $W^\perp = \{w' \in \mathbb{C}^n | < w, w' >= 0, w \in W\}$ είναι επίσης A αναλλοίωτος υπόχωρος.*

Πρόταση 9.0.1.6. *Αν $A \in U(n)$, τότε ο A διαγωνοποιήται. Δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^n$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A διασπάται πλήρως στο $\mathbb{C}$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα v_1 και έστω W ο ιδιόχωρος που δημιουργείται από αυτό. Τότε ο $W^\perp$ είναι A αναλλοίωτος υπόχωρος και θα έχει και άλλο ιδιοδιάνυσμα. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 9.0.1.7. *Αν $A \in U(n)$, τότε υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in S^1$ και πίνακας $B \in U(n)$ ώστε*

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \in T$$

Εδώ T είναι μία μέγιστη σπείρα της $U(n)$.

Απόδειξη. Ο πίνακας B είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την βάση των ορθοκανονικοποιημένων ιδιοδιανυσμάτων στην κανονική. □

Πόρισμα 9.0.1.8.

$$U(n) = \bigcup_{A \in U(n)} ATA^{-1}.$$

Εδώ T είναι μία μέγιστη σπείρα της $U(n)$.

Πόρισμα 9.0.1.9.
$$SU(n) = \bigcup_{A \in SU(n)} ATA^{-1}.$$

Εδώ T είναι μία μέγιστη σπείρα της $SU(n)$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\forall A \in SU(n)$ $\exists C \in U(n)$ ώστε $CAC^{-1} \in T'$. Εδώ T' είναι μία μέγιστη σπείρα της $U(n)$. Αλλά $det(CAC^{-1}) = 1$. Άρα $CAC^{-1} \in T$ με T μέγιστη σπείρα της $SU(n)$. Αν επιλέξουμε $\lambda \in S^1$ με $\lambda^n = detC$, τότε ο $B = \lambda C$ ικανοποιεί το ζητούμενο $BAB^{-1} = CAC^{-1}$ και $B \in SU(n)$. □

9.0.2 $SO(n)$

Γνωρίζουμε ότι η $O(n)$ δεν είναι συνεκτικός χώρος, οπότε δεν αναμένουμε να είναι ένωση συζυγών μέγιστων σπειρών. Θα δείξουμε όμως ότι ισχύει για την $SO(n)$.

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ δεν διαγωνοποιείται πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς. Αυτό φυσικά είναι αναμενόμενο διότι μια στροφή δεν μπορεί να έχει αναλλοίωτο ιδιόχωρο διάστασης ένα εκτός από τον τετριμμένο. Θα δείξουμε ότι για τα στοιχεία της $SO(n)$ μπορούμε να βρούμε αναλλοίωτους υπόχωρους διάστασης δύο.

Αν $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας ως προς την κανονική βάση, τότε γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα ότι ο A διαγωνοποιείται και οι ιδιόχωροί του είναι κάθετοι μεταξύ τους. Μάλιστα υπάρχει ορθογώνιος πίνακας B ώστε
$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Εδώ $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 9.0.2.1. *Αν $A \in O(n)$, τότε υπάρχει $W \leqslant \mathbb{R}^n$ ώστε ο W να είναι A αναλλοίωτος και $dimW \in \{1, 2\}$.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι πίνακας $C = A + A^t$ είναι συμμετρικός και έστω u ένα ιδιοδιάνυσμά του $uA + uA^t = \lambda u \Rightarrow uA + uA^{-1} = \lambda u$. Θεωρούμε τα διανύσματα u και uA.

Αν $uA = \mu u$, τότε $W = \{tu|t \in \mathbb{R}\}$ είναι διάστασης ένα και A αναλλοίωτος
$$(ru)A = ruA = r\mu u \in W.$$

Αν $uA \neq \mu u$ για $\mu \in \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε $W =< u, uA >$ και θα δείξουμε ότι είναι A αναλλοίωτος.
$$(\kappa u + \kappa' uA)A = \kappa uA + \kappa' uA^{-1}A = \kappa uA + \kappa' u \in W.$$

Έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 9.0.2.2.

$$SO(n) = \bigcup_{A \in SO(n)} ATA^{-1}.$$

Εδώ T *είναι μία μέγιστη σπείρα της* $SO(n)$.

Απόδειξη. Αν ο $A \in SO(n)$ έχει αναλλοίωτο υπόχωρο $W =< u >$, θεωρούμε ότι $\|u\| = 1$.

Αν ο $W =< u >$ είναι A αναλλοίωτος, το ίδιο ισχύει και για τον $W^{\perp}$ και προχωρούμε με τον ίδιο τρόπο ώστε να βρούμε όλους τους A αναλλοίωτους υπόχωρους διάστασης ένα. Ας δίνονται αυτοί από τα ορθοκανονικά διανύσματα $\{u_1, \cdots, u_k\}$ και έστω $V =< u_1, \cdots, u_k >^{\perp}$.

Γνωρίζουμε ότι ο V είναι A αναλλοίωτος και θα υπάρχει ένας A αναλλοίωτος υπόχωρος $Y \leqslant V$ διάστασης δύο. Έστω V_1 ένας τέτοιος υπόχωρος, $V_1 =< u_{k+1}, u_{k+2} >$ με $\{u_{k+1}, u_{k+2}\}$ ορθοκανονικά διανύσματα. Θεωρούμε τον A αναλλοίωτο υπόχωρο $< u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, u_{k+2} >$ και συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο μέχρι να δημιουργήσουμε μια ορθοκανονική βάση $\{u_1, \cdots, u_n\}$.

Ας είναι B ο πίνακας μετάβασης από τη συνήθη βάση στην $\{u_1, \cdots, u_n\}$. Τότε $BAB^{-1} \in T$. Εξετάζουμε αν $B \in SO(n)$.

Αν $detB = 1$, δηλαδή $B \in SO(n)$, έχουμε το ζητούμενο.

Αν $detB = -1$, δηλαδή $B \in O(n) - SO(n)$, τότε βρίσκουμε $C \in O(n) - SO(n)$ και θεωρούμε τον $CBAB^{-1}C^{-1} \in T$. Εδώ $CB \in SO(n)$. Γιά C θεωρούμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Κεφάλαιο 10

Η $O(n)$ και ανακλάσεις ως προς υπερεπίπεδα

Στο σύγγραμμα του Elmer Rees ο αναγνώστης μπορεί να εμβαθύνει περισσότερο στις ανακλάσεις στον $\mathbb{R}^n$ και να μελετήσει εφαρμογές.

Γνωρίζουμε ότι οι ορθογώνιοι πίνακες στο επίπεδο είναι είτε στροφές $\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$ κατά γωνία θ_1 είτε ανακλάσεις $\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix}$ ως προς άξονα ο οποίος σχηματίζει γωνία $\theta_1/2$ με τον άξονα x_1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

Ο πρώτος λοιπόν είναι γινόμενο ανακλάσεων.

Θα μελετήσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα στον $\mathbb{R}^n$ και θα περιγράψουμε τα στοιχεία της $O(n)$ σαν γινόμενα ανακλάσεων.

Αν u είναι μοναδιαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με $u^\perp$ θα συμβολίζουμε το ορθογώνιο συμπλήρωμά του

$$u^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n | < u, v >= 0\}.$$

Η προβολή ενός διανύσματος v πάνω στο υπερεπίπεδο $u^\perp$ δίνεται από το διάνυσμα $v - ru$, $r \in \mathbb{R}^n$ και $v - ru \in u^\perp$. Δηλαδή

$$< u, v - ru >= 0 \Leftrightarrow < u, v >= r.$$

Με $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ θα συμβολίζουμε την ανάκλαση ενός διανύσματος ως προς το υπερεπίπεδο $u^\perp$. Δηλαδή

$$\varphi(v) = v - 2ru = v - 2 < u, v > u.$$

Θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $< u_1 = u, u_2, \cdots, u_n >$ του $\mathbb{R}^n$. Σύμφωνα με αυτήν την βάση ο πίνακας της φ δίνεται από τον

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

.

Έστω A ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική στην $< u_1 = u, \cdots, u_n >$. Ο πίνακας της φ ως προς την κανονική βάση δίνεται από

$$A \begin{pmatrix} -1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{pmatrix} A^{-1}.$$

Για κάθε ορθογώνιο πίνακα A, ο προηγούμενος πίνακας αναπαριστά μια ανάκλαση ως προς το υπερεπίπεδο που είναι κάθετο στο διάνυσμα $e_1 A$.

Πρόταση 10.0.0.1. *Αν $A \in O(n)$ αναπαριστά μία ανάκλαση ως προς κάποιο υπερεπίπεδο W και $W = w^{\perp}$ με $\|w\| = 1$, τότε αν $B \in O(n)$ ο πίνακας BAB^{-1} αναπαριστά ανάκλαση ως προς το υπερεπίπεδο WB^{-1}.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι υπάρχει w με $w^{\perp} = W$, και $\forall w' \in W$ έχουμε $w'A = w'$, $wA = -w$.

$$< w'B^{-1}, wB^{-1} >=< w'B^t, wB^{-1} >=< w', wB^{-1}B >= 0 =< w', w >= 0.$$

Δηλαδή $WB^{-1} = (wB^{-1})^{\perp}$. Θα δείξουμε ότι ο BAB^{-1} είναι ανάκλαση ως προς το υπερεπίπεδο $WB^{-1} =< wB^{-1} >^{\perp}$.

$$w'B^{-1}BAB^{-1} = w'AB^{-1} = w'B^{-1}$$

και

$$wB^{-1}BAB^{-1} = wAB^{-1} = -wB^{-1}.$$

□

Θεώρημα 10.0.0.2. *Η $O(n)$ γεννάται από ανακλάσεις.*

Θα δείξουμε ότι κάθε στοιχείο της $O(n)$ δίνεται από πεπερασμένο γινόμενο ανακλάσεων. Υπενθυμίζουμε ότι για την $SO(2n)$ μια μέγιστη σπείρα δίνεται από

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \begin{pmatrix} \cos\theta_n & \sin\theta_n \\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} \mid \theta_i \in [0, 2\pi] \right\}$$

ενώ για την $SO(2n+1)$ από

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & \begin{pmatrix} \cos\theta_n & \sin\theta_n \\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} \mid \theta_i \in [0, 2\pi] \right\}$$

η οποία είναι ισόμορφη με την προηγούμενη.

Έστω $A \in T$ και ο

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\theta_m & \sin\theta_m \\ -\sin\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

περιέχει m τετράγωνα. Έστω

$$A(i) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \in T$$

με ένα μόνο τετράγωνο στην $2i-1$ και $2i$ θέση της διαγωνίου. Τότε ο $A(i)$ αφήνει αναλλοίωτες όλες τις συντεταγμένες x_j με $j \neq 2i-1, 2i$ και δίνει στροφή κατά γωνία θ_i στο επίπεδο $< x_{2i-1}, x_{2i} >$.

$$(x_1, \cdots, x_n)A(i) =$$

$$(x_1, \cdots, x_{2i-2}, x_{2i-1}\cos\theta_i - x_{2i}\sin\theta_i, x_{2i-1}\sin\theta_i + x_{2i}\cos\theta_i, x_{2i+1}, \cdots x_n).$$

Άρα $A = A(1)\cdots A(m)$ και θα δείξουμε ότι κάθε $A(i)$ είναι γινόμενο ανακλάσεων.

Θεωρούμε τον $B(i) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$ ο οποίος αφήνει όλες τις συντεταγμένες αναλλοίωτες εκτός από τη x_{2i} :

$$(x_1, \cdots, x_n)B(i) = (x_1, \cdots, x_{2i-2}, x_{2i-1}, -x_{2i}, x_{2i+1}, \cdots x_n).$$

Έστω ο πίνακας $C(i)$ ο οποίος αφήνει όλες τις συντεταγμένες αναλλοίωτες εκτός από τις x_j με $j = 2i-1, 2i$ όπου δημιουργεί ανάκλαση σ' αυτό το επίπεδο ως προς τον άξονα ο οποίος βρίσκεται σε γωνία $\theta_i/2$ ως προς τον άξονα x_{2i-1}.

$$(x_1, \cdots, x_n)C(i) =$$

$$(x_1, \cdots, x_{2i-2}, x_{2i-1}\cos\theta_i + x_{2i}\sin\theta_i, x_{2i-1}\sin\theta_i - x_{2i}\cos\theta_i, x_{2i+1}, \cdots x_n).$$

Άρα $B(i)C(i) = A(i)$ και έχουμε το ζητούμενο για τα στοιχεία της T.

Γνωρίζουμε ότι $SO(n) = \bigcup_{B\in SO(n)} BTB^{-1}$. Άρα $\forall A \in SO(n)$ $\exists B \in O(n)$ με $BAB^{-1} \in T$. Δηλαδή ο BAB^{-1} είναι γινόμενο ανακλάσεων. Η προηγούμενη πρόταση που αποδείξαμε δηλώνει ότι και ο $A \in SO(n)$ είναι γινόμενο ανακλάσεων. Αν $C \in O(n)$, τότε $C = AD$ με $A \in SO(n)$ και ο D είναι πίνακας ανάκλασης. Τελικά ο $C \in O(n)$ είναι γινόμενο ανακλάσεων και έχουμε το ζητούμενο.

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

Παραθέτουμε σύντομη εισαγωγική βιβλιογραφία.

J. F. Adams, Lectures on Lie groups, University of Chicago Press, 1969.
A. Baker, An introduction to matrix groups and their applications, 2001.
R. W. Carter, Finite groups of Lie type, Wiley, 1989.
M. L. Curtis, Matrix Groups, Springer-Verlag, 1979.
A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge Press, 2002.
R. Howe, Very basic Lie theory, American math. monthly,90, 1983.
T. W. Hungerford, Algebra, Springer-Verlag, 1974.
J. R. Munkres, Topology a first course, Printice-Hall.
E. Rees, Notes on geometry, Universitext, 1983.
S. Sternberg, Group theory in physics, Cambridge Univ. Press, 1994.
A. Fowler-Wright http://homepages.warwick.ac.uk/ masdf/research/y4$_{fowlerwright.pdf}$