



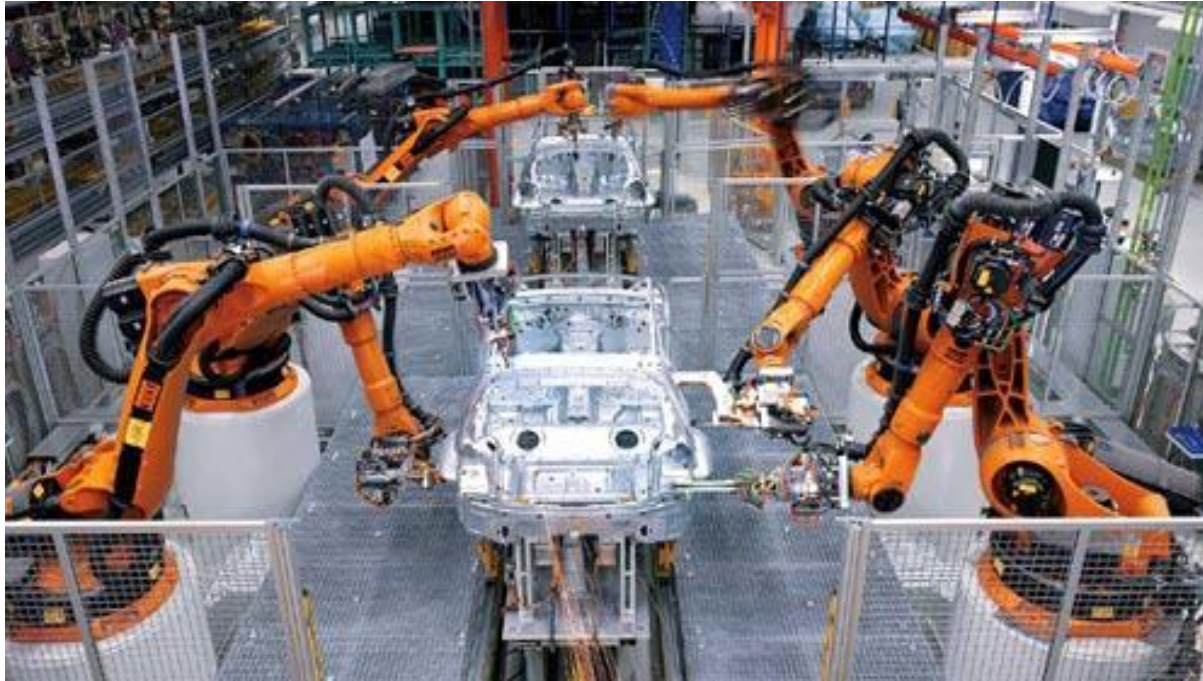
Λειτουργία - Διδασκαλία - Έρευνα

- ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
- ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Configuration Space

Χώρος Διαμόρφωσης της κίνησης ενός
ρομπότ και Αλγεβρική Τοπολογία

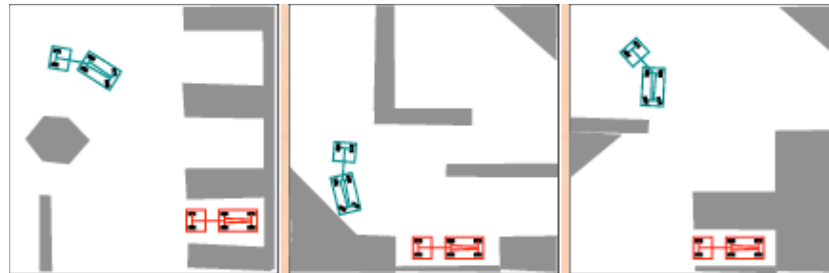
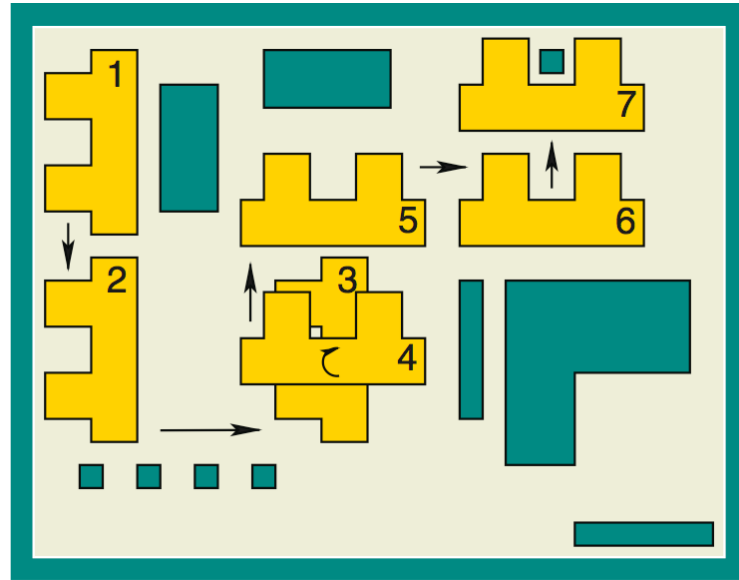
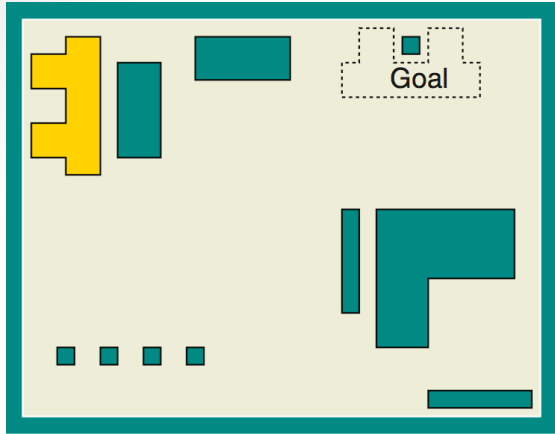
Ε. ΚΕΧΑΓΙΑΣ



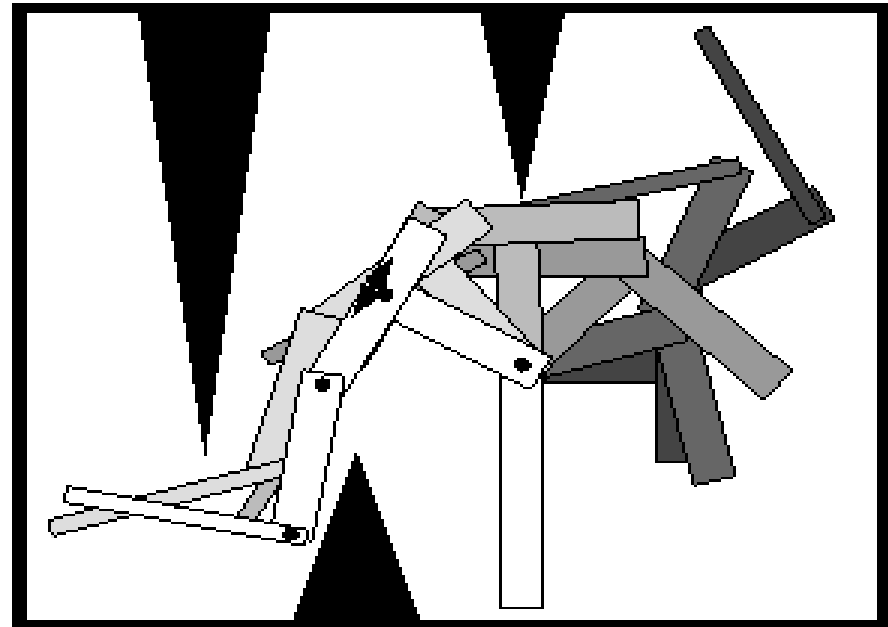
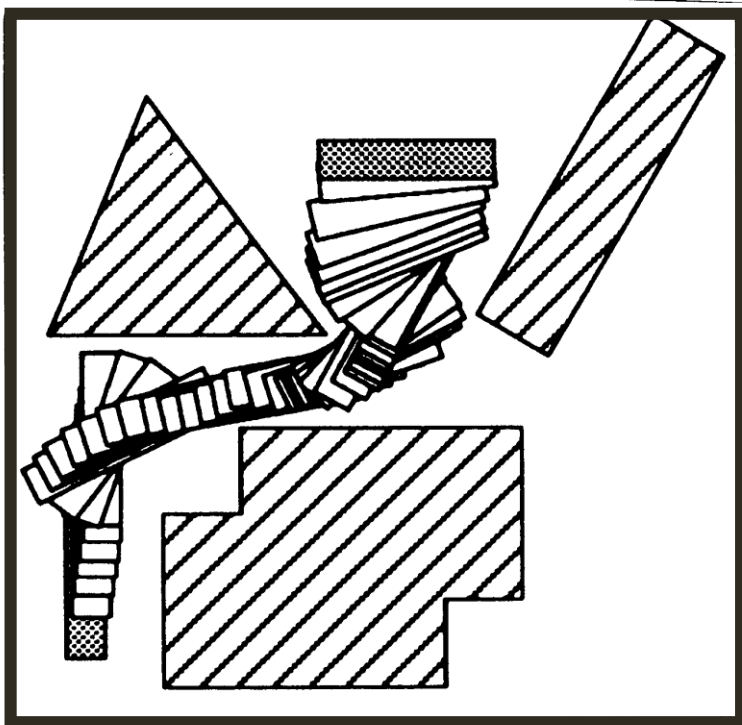
<https://www.youtube.com/watch?v=sjAZGUcjrP8>

Βασικές έννοιες

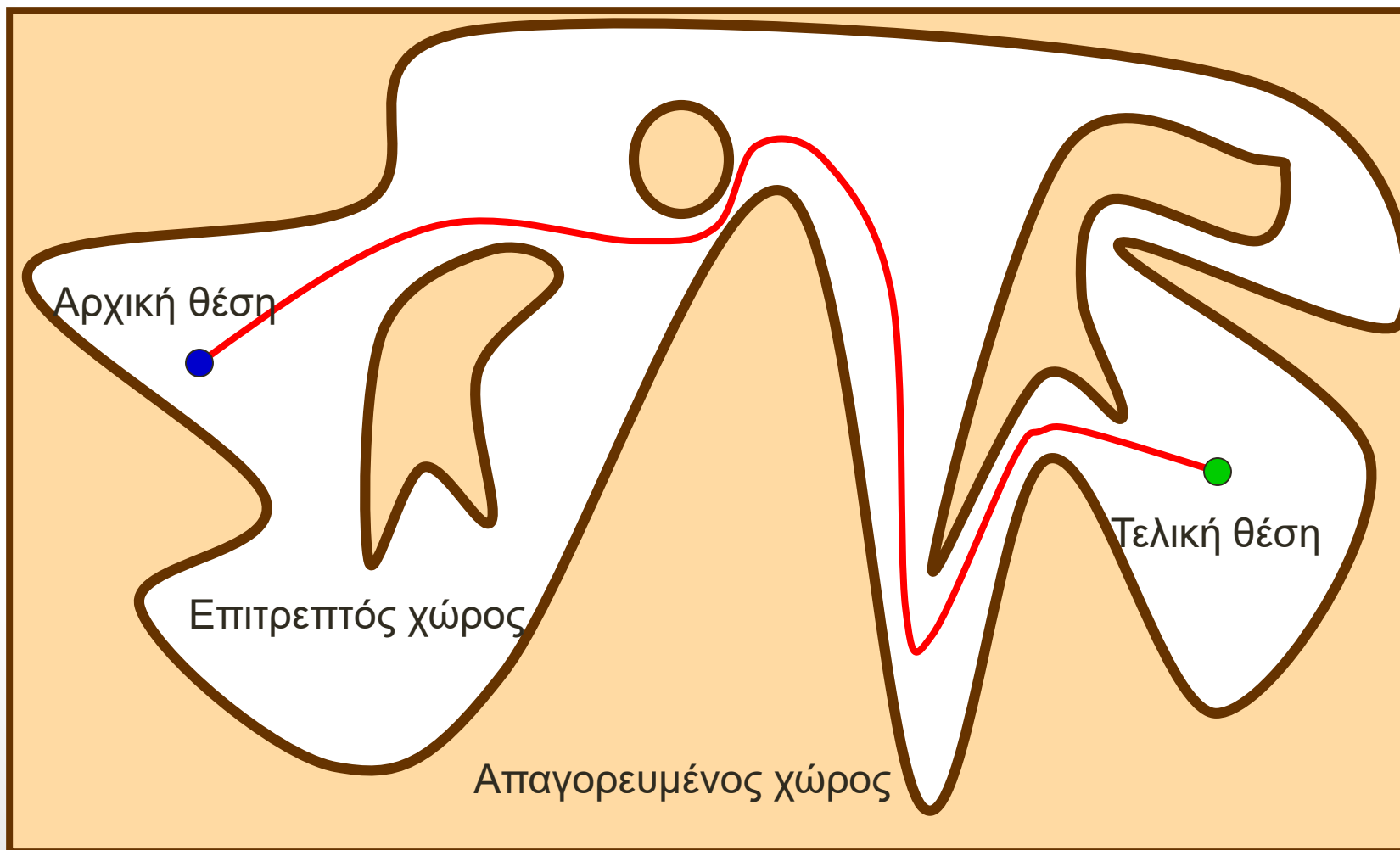
- Workspace - Χώρος εργασίας:
 - The world in which a robot lives and occupies space
 - Ο χώρος μέσα στον οποίο κινείται και εργάζεται ένα ρομπότ.
 - Usually 2D (mobile robots) or 3D (most other robots)
 - Συνήθως στο επίπεδο ή στον χώρο που ζούμε.
 - Η κίνηση πρέπει να γίνεται χωρίς συγκρούσεις.
 - Το ρομπότ πρέπει να φθάσει στον προορισμό του από τον συντομότερο δρόμο.
 - Βρείτε μια τροχιά την οποία θα ακολουθήσει το ρομπότ από την αρχική στην τελική θέση χωρίς να συγκρουσθεί με άλλα αντικείμενα.



Τα ρομπότ έχουν διάφορα
σχήματα και ικανότητες κίνησης

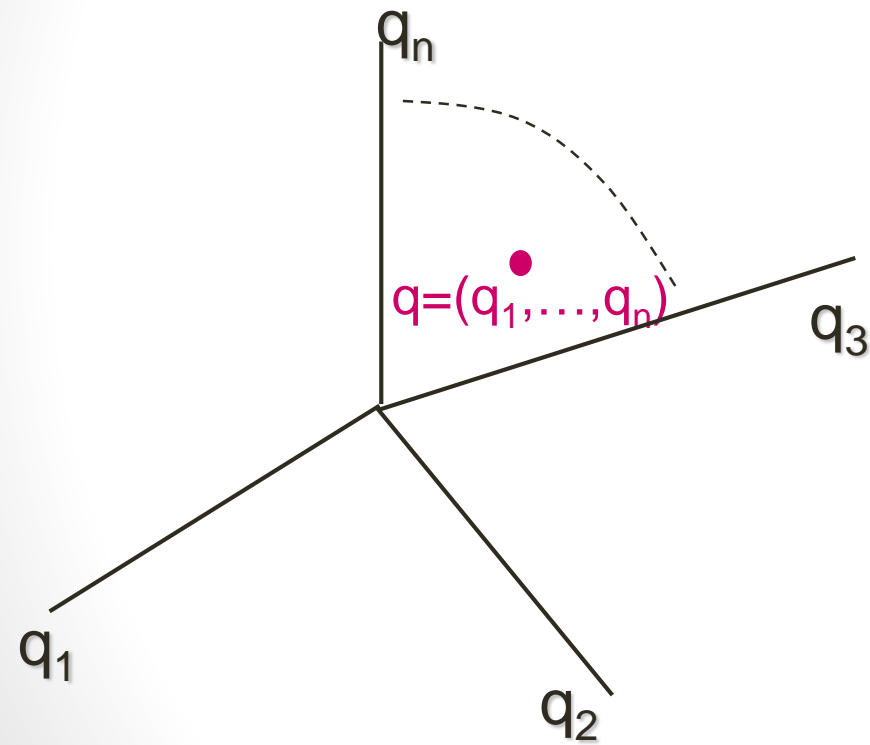


Ας υποθέσουμε ότι το ρομπότ είναι ένα σημείο.
Χώρος διαμόρφωσης είναι ο χώρος στον
οποίο κινείται.



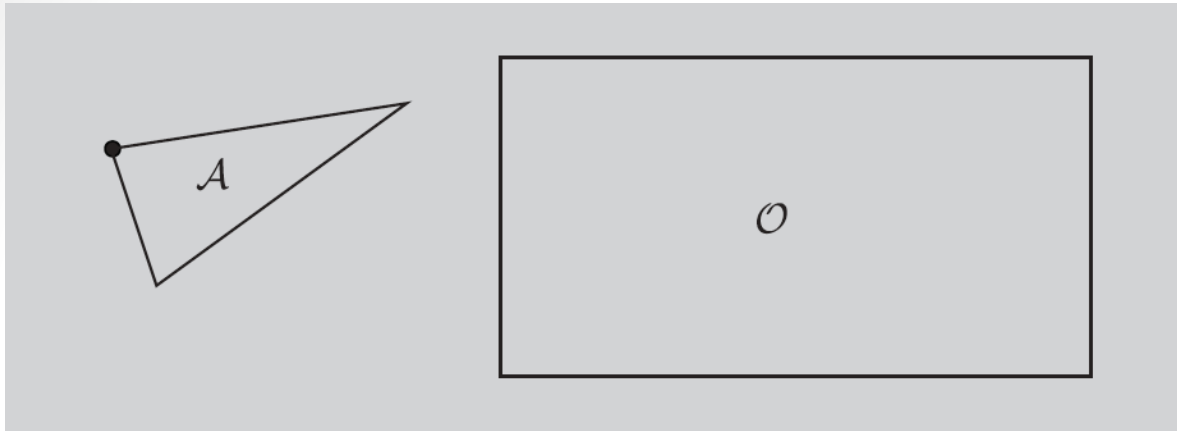
- Χώρος εργασίας: W
- Ρομπότ: A
- Διαμόρφωση θέση : q
- Χώρος διαμόρφωσης: C
- Χώρος ο οποίος καταλαμβάνεται από το A όταν βρίσκεται στη θέση q : $A(q)$
- Απαγορευμένη περιοχή: B
- Minkowski sum $CB = \{q \mid A(q) \cap B \neq \emptyset\}$

Configuration Space

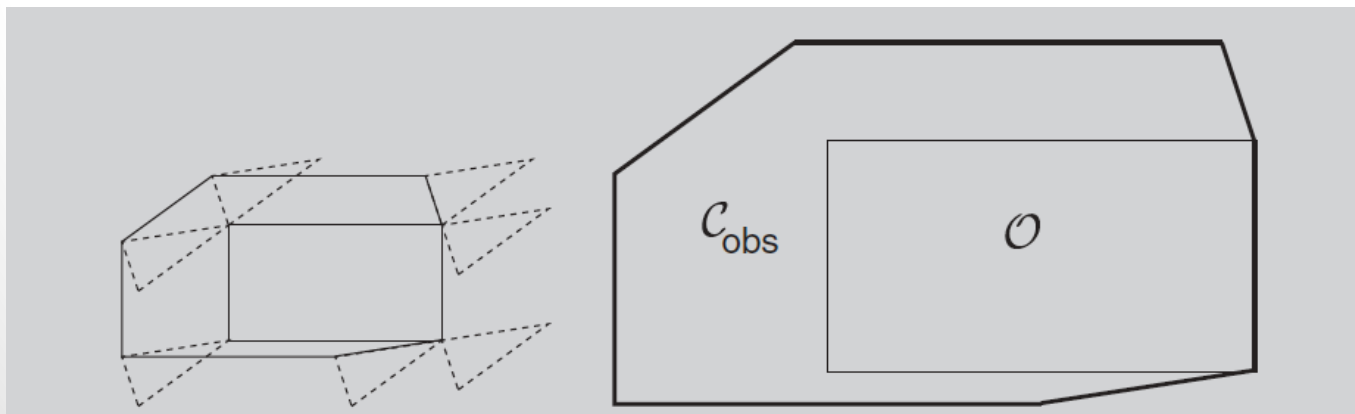


- Ο χώρος διαμόρφωσης καθορίζεται από ένα συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων.
- Μία θέση εκφράζεται σαν ένα διάνυσμα παραμέτρων.

Πολυγωνικό ρομπότ με μεταφορά μόνο

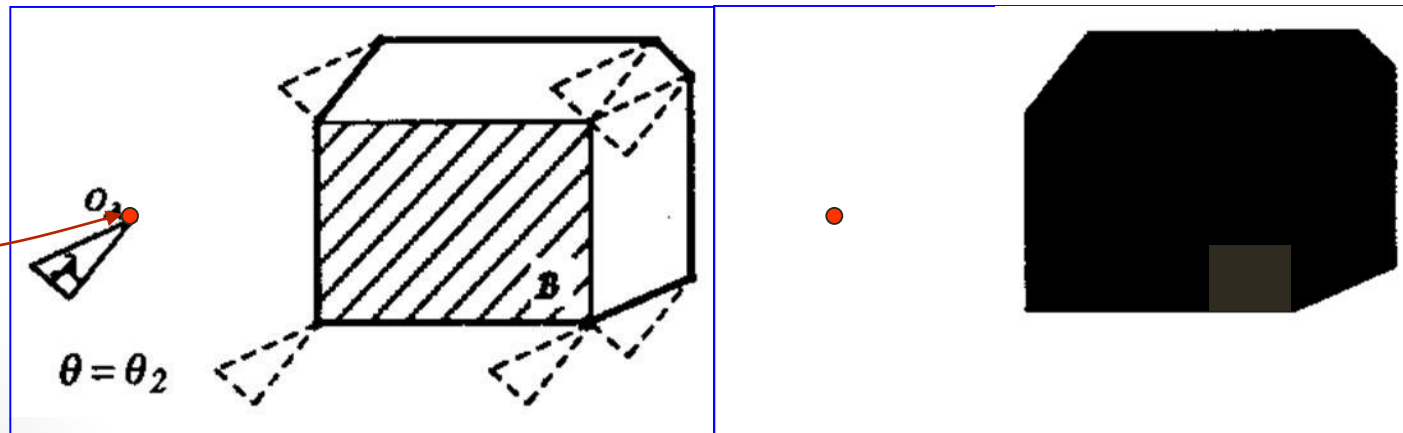
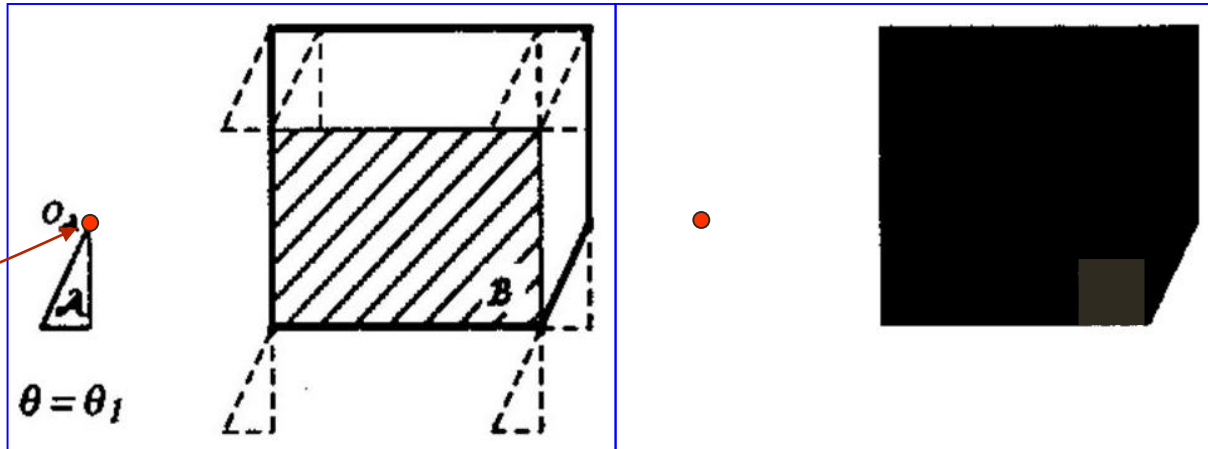


Ο χώρος διαμόρφωσης δημιουργείται από την κύλιση του ρομπότ κατά μήκος της περιφέρειας του απαγορευμένου χώρου.

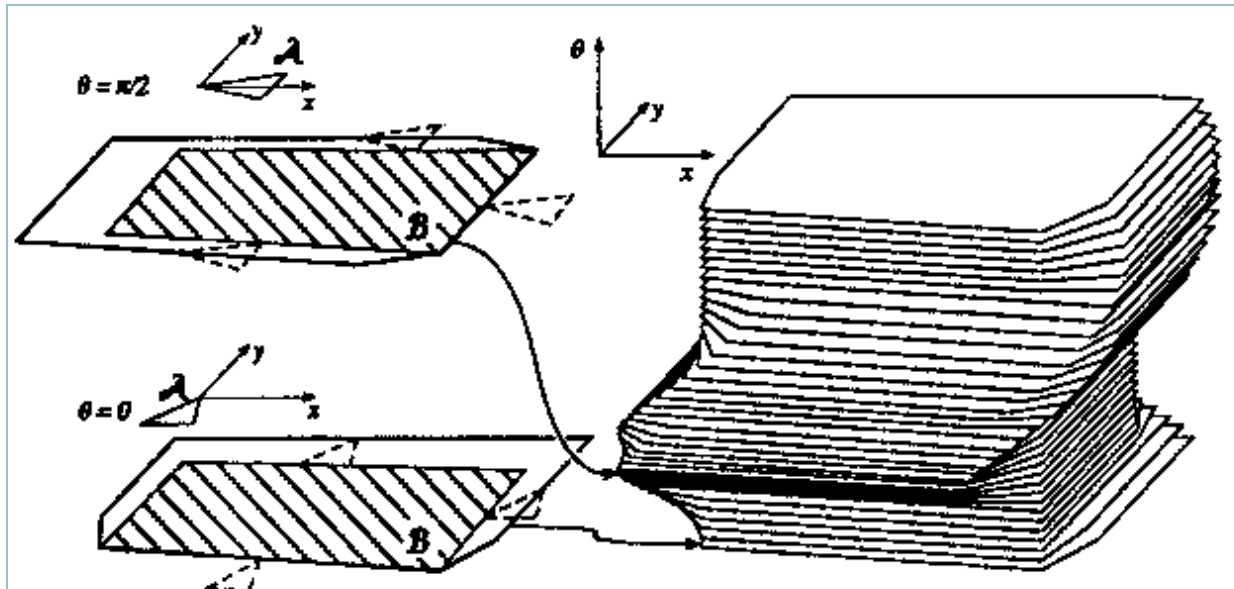
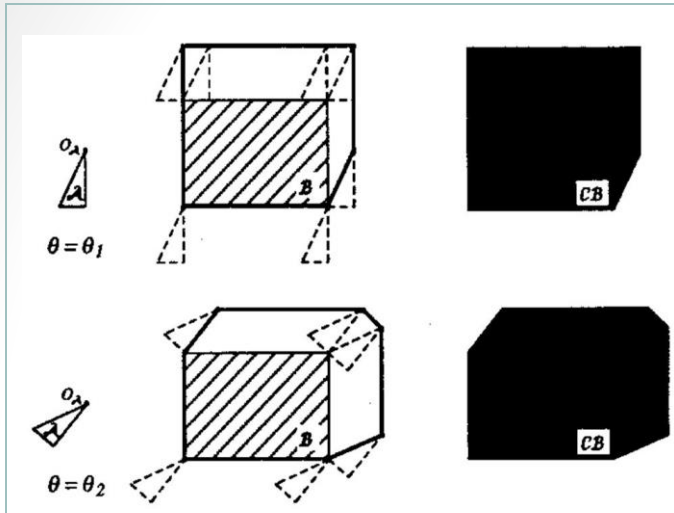


Μεταφορά σε 2-D

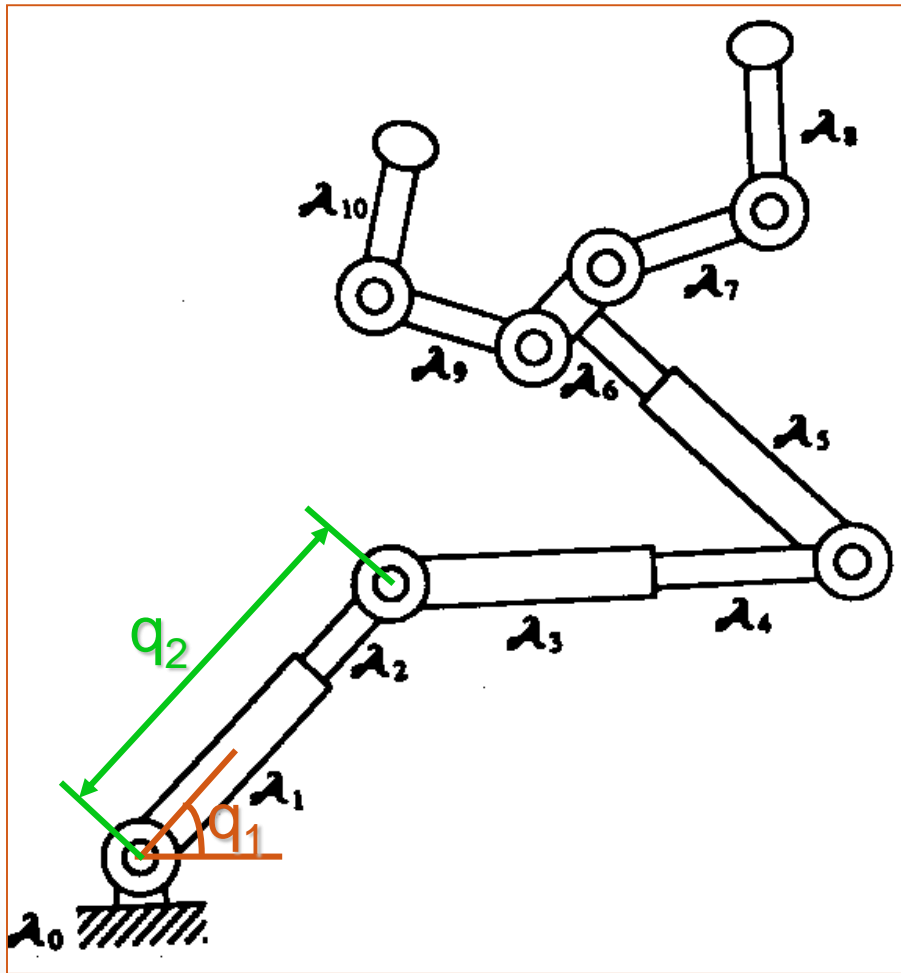
reference
point



Μεταφορά και περιστροφή πολυγώνου σε 2-D χώρο εργασίας

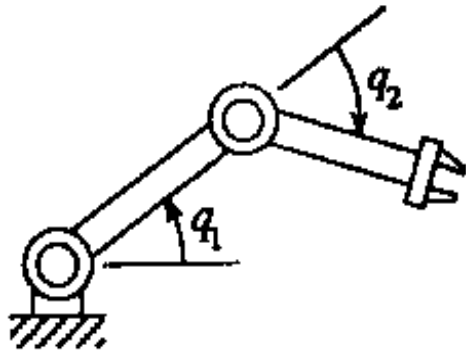


Αρθρωτό Robot



$$q = (q_1, q_2, \dots, q_{10})$$

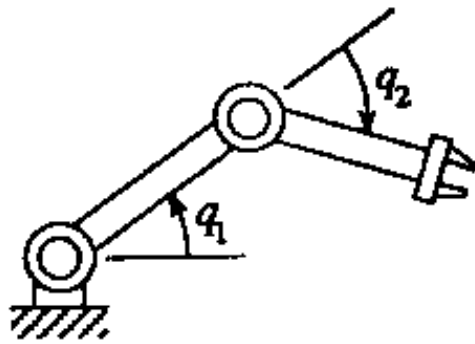
Configuration Space Visualization of 2-D Robotic Manipulator



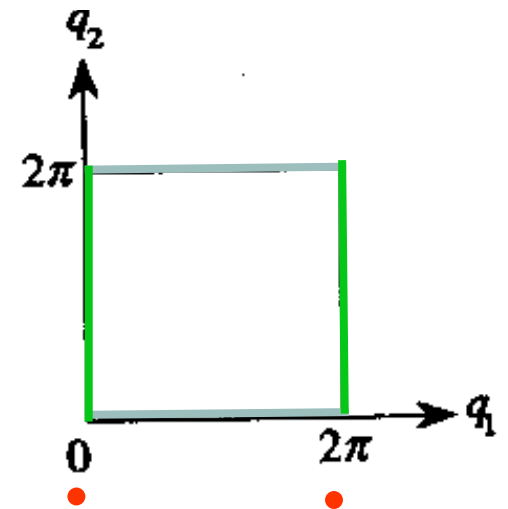
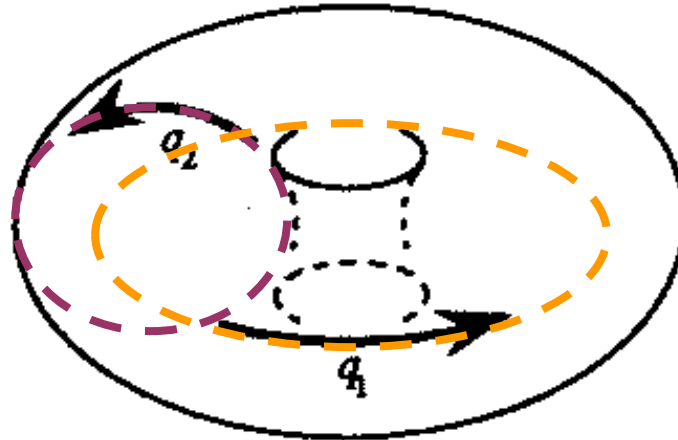
<https://www.coursera.org/learn/robotics-motion-planning/lecture/mNhWs/2-2-rr-arm>

<https://www.cs.unc.edu/~jeffi/c-space/robot.xhtml>

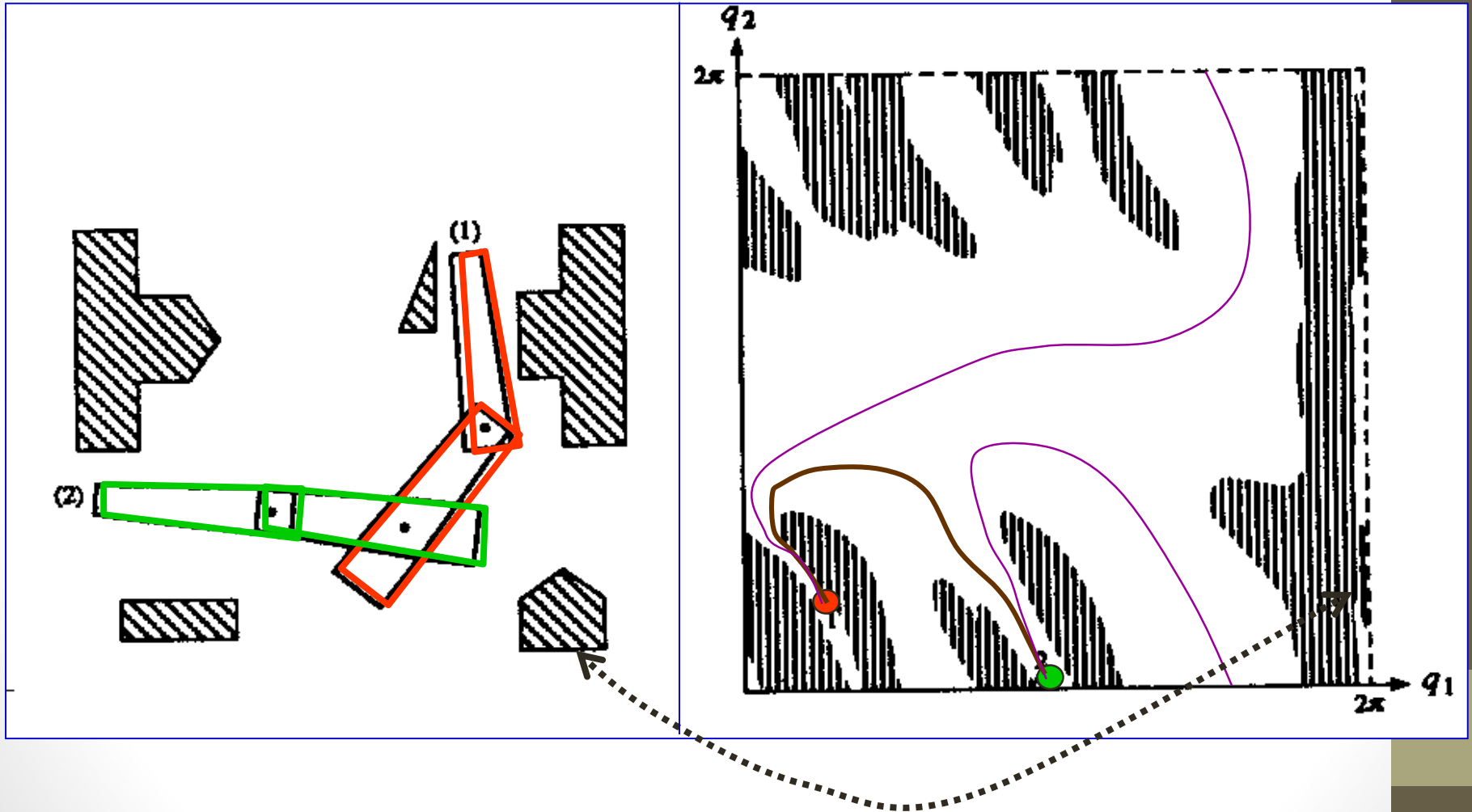
- Με δύο αρθρώσεις



$$C = S^1 \times S^1$$

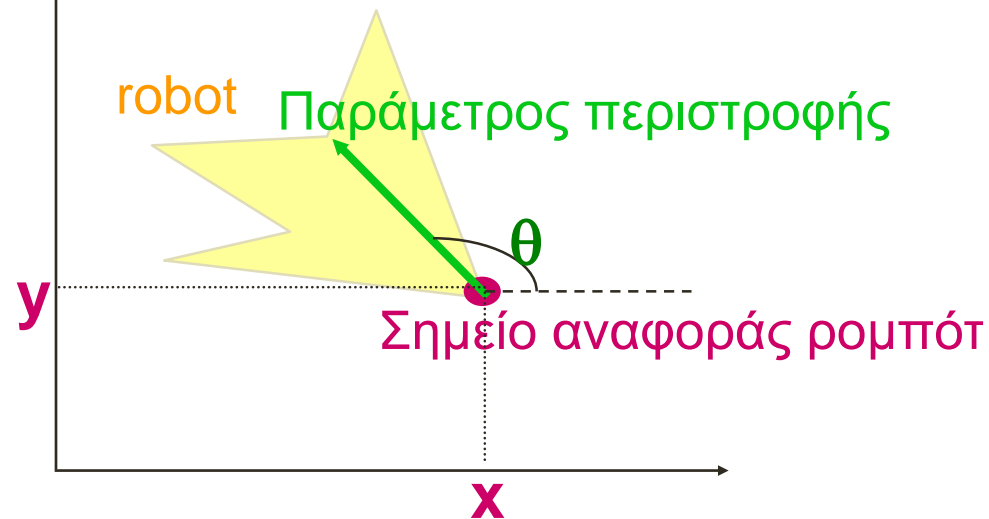


Αρθρωτό Robot 2 αρθρώσεων



Άκαμπτο Robot μεταφορά & περιστροφή

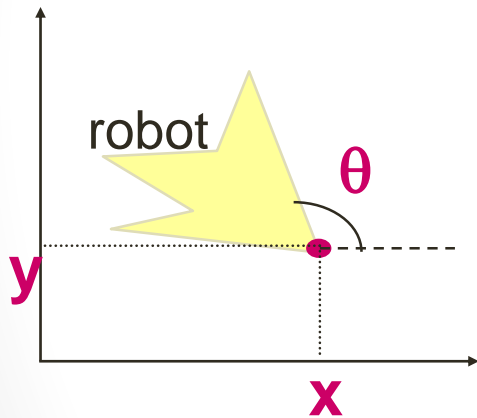
Χώρος εργασίας



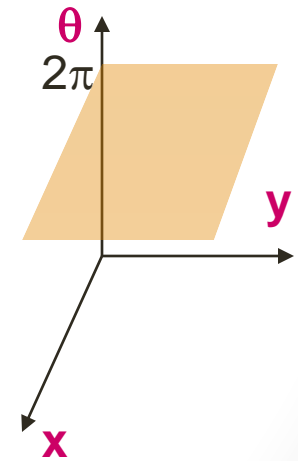
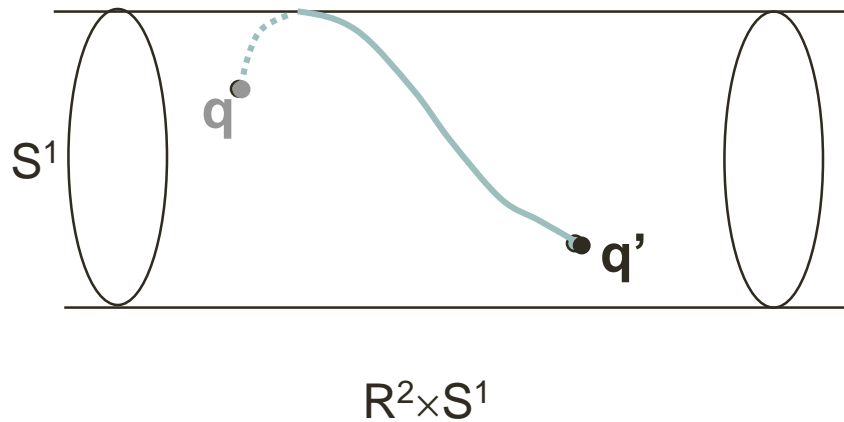
- Αναπαράσταση 3 παραμέτρων: $q = (x, y, \theta)$
- Σε 3-διάστατο χώρο $q = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$

Configuration Space

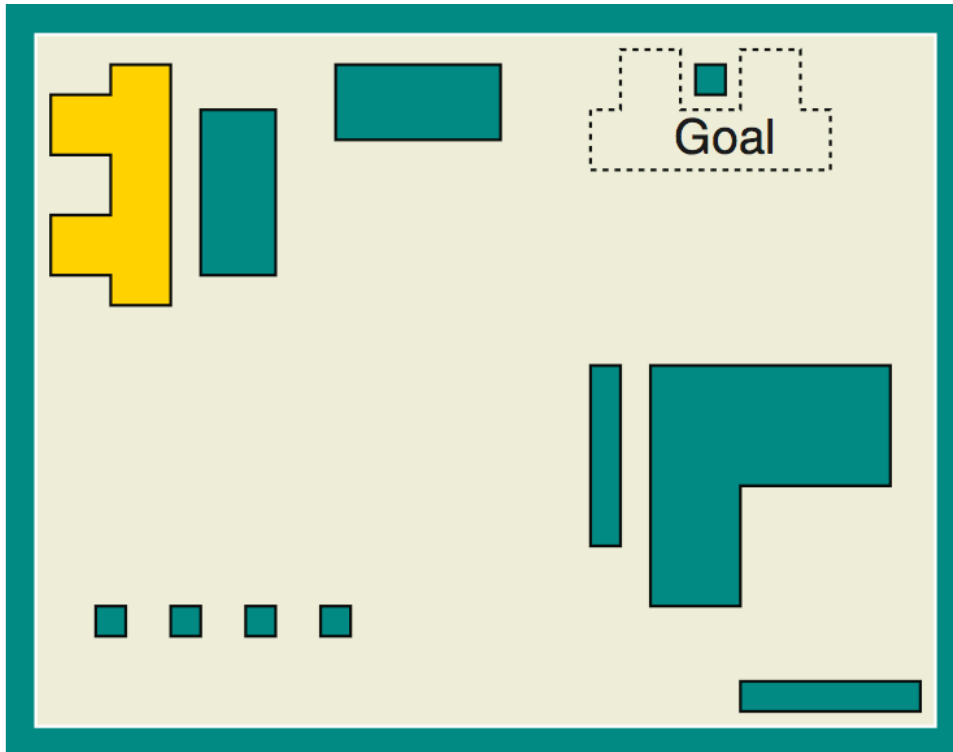
- Η τοπολογία ενός τέτοιου χώρου συνήθως διαφέρει από την τοπολογία του Καρτεσιανού γινομένου.



3-D κύλινδρος εμβαπτισμένος σε 4-D χώρο

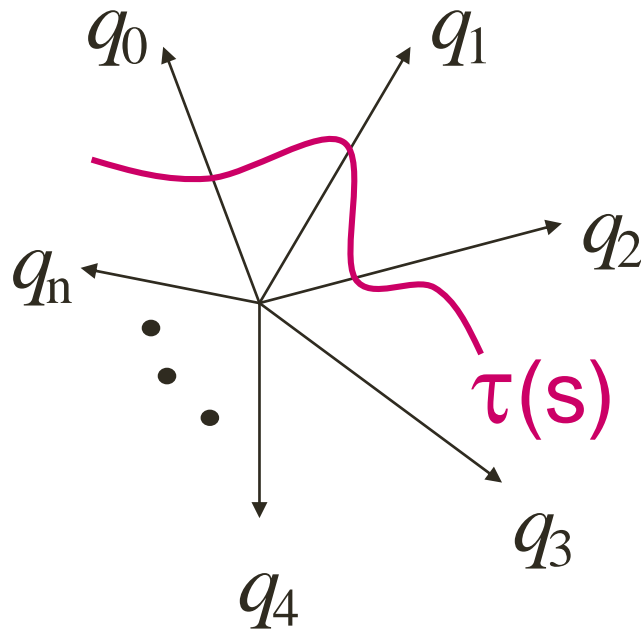


Μεταφορά του πιάνου



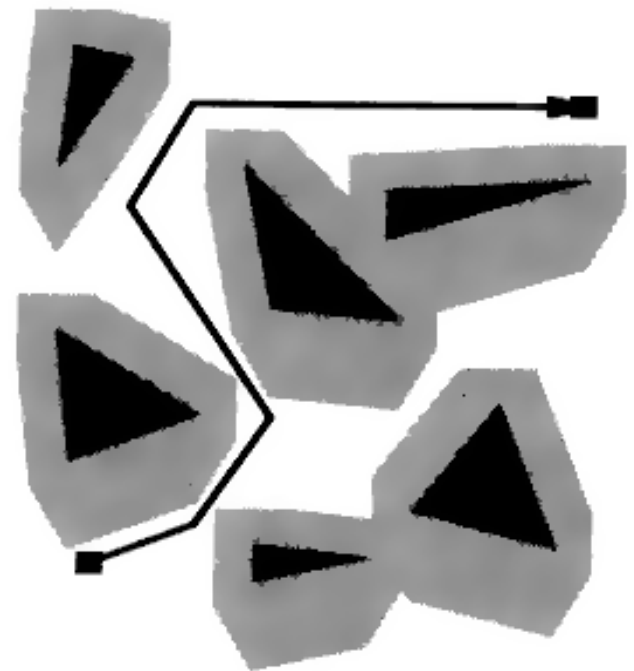
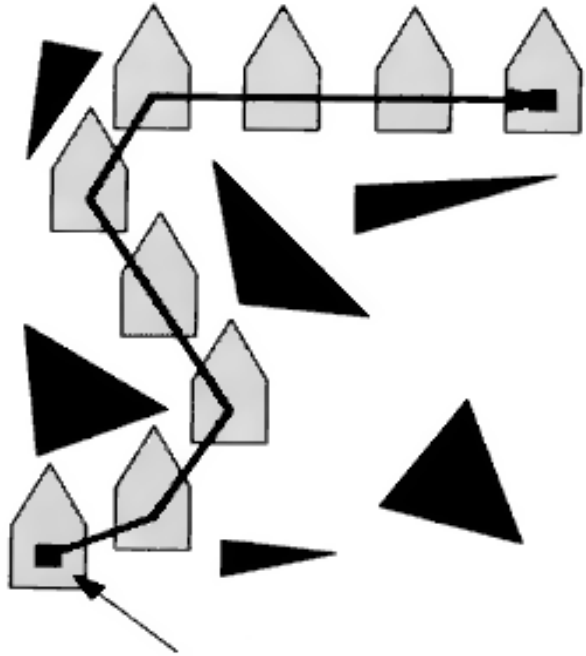
<https://www.coursera.org/learn/robotics-motion-planning/lecture/Yh5fc/2-3-piano-movers-problem>

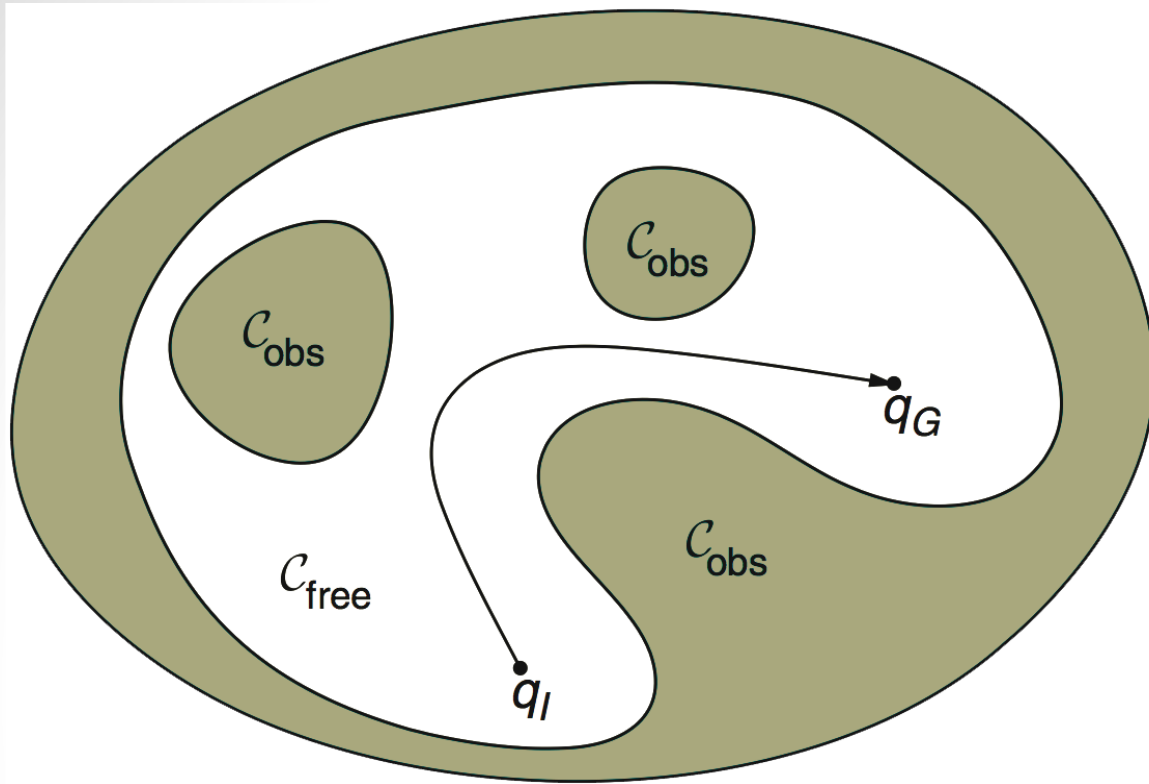
Η έννοια της συνεχούς τροχιάς



- Μια τροχιά στον C συνδέει δύο θέσεις q και q' :

$$\tau : s \in [0,1] \rightarrow \tau(s) \in C$$





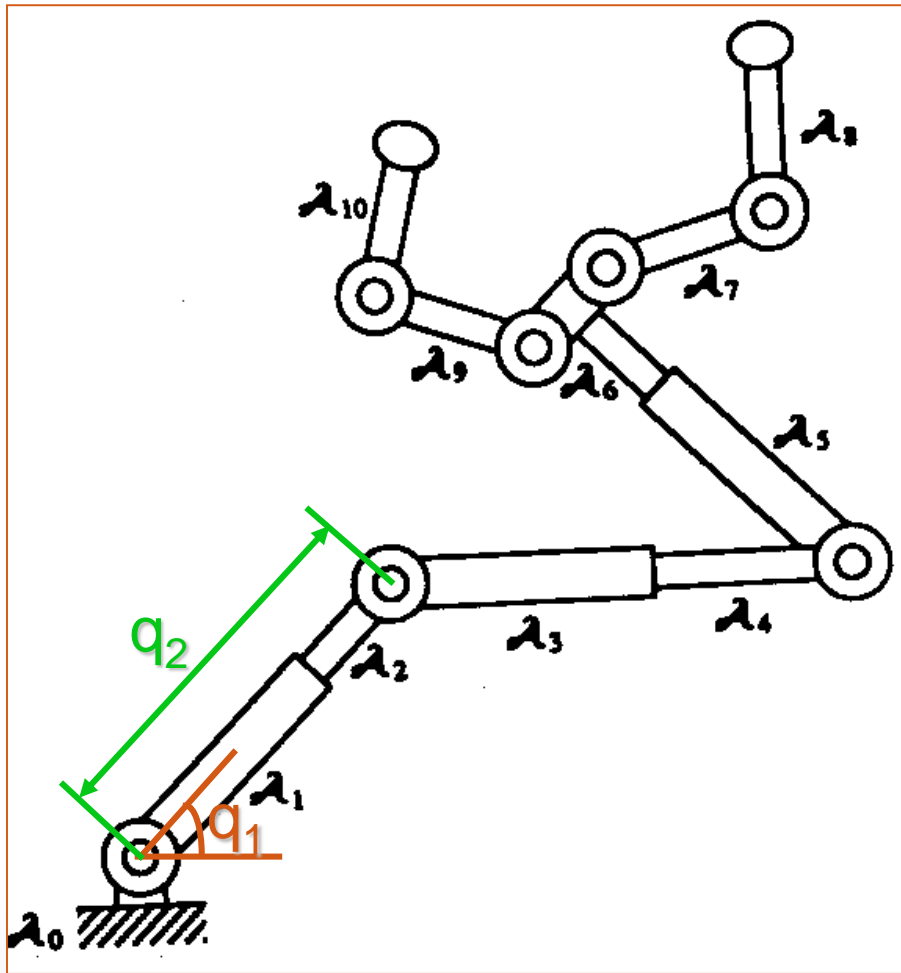
Βρείτε συνεχή τροχιά από το αρχικό στο τελικό σημείο

$$\tau : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_{free} \quad \tau(0) = q_I, \tau(1) = q_G$$

Κάποιοι σημαντικοί τοπολογικοί χώροι

- \mathbb{R} : πραγματική ευθεία
- \mathbb{R}^n
- S^1 : κύκλος, 2D
- S^2 : σφαίρα, 3D
- $SO(2)$, $SO(3)$: (special orthogonal group)
- $SE(2)$, $SE(3)$: set of rigid 2D, 3D translations and rotations (special Euclidean group)
- Ομοιομορφισμός \sim
 - Κύβος $\sim S^2$
 - $SO(2) \sim S^1$
 - $SE(3) \sim SO(3) \times \mathbb{R}^3$

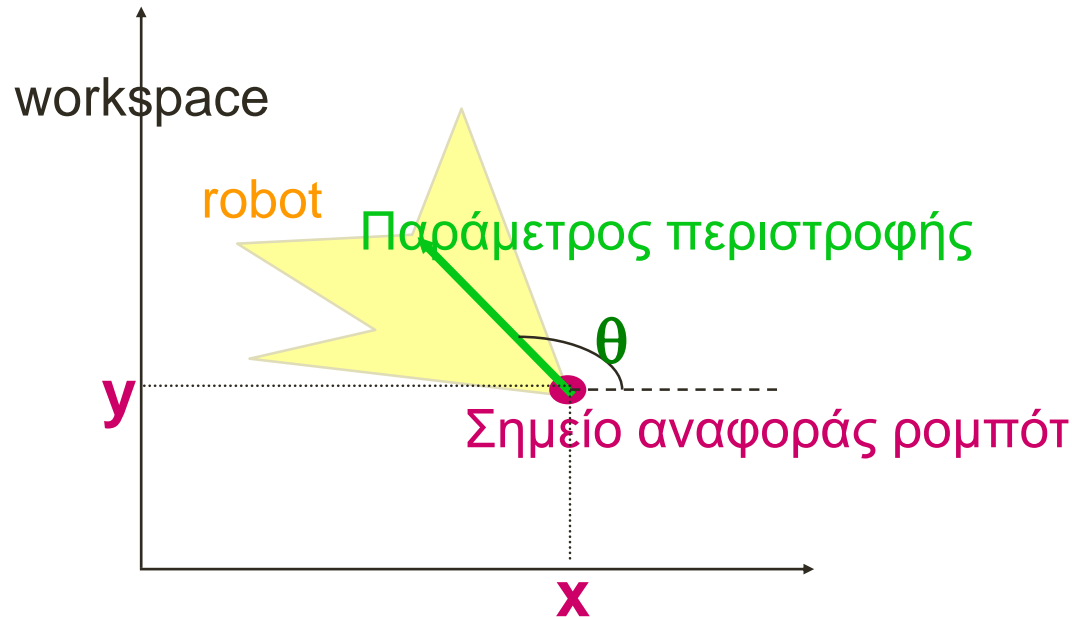
Ας δούμε την τοπολογία



$$(S^1)^7 \times I^3$$

(I: Interval of reals)

Στερεό Robot σε 2-D



- 3-διάστατη αναπαράσταση: $q = (x, y, \theta)$
με $\theta \in [0, 2\pi)$. Δύο χάρτες είναι απαραίτητοι.
- Άλλη αναπαράσταση: $q = (x, y, \cos\theta, \sin\theta)$
→ **C-space** είναι ένας 3-D κύλινδρος $\mathbf{R}^2 \times S^1$
εμφυτευμένος σ' έναν 4-D χώρο.

Στερεό Robot σε 3-D

- $q = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$
- Άλλη αναπαράσταση: $q = (x, y, z, r_{11}, r_{12}, \dots, r_{33})$, τα $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{33}$ είναι στοιχεία του πίνακα περιστροφής R:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

ώστε:

- $r_{i1}^2 + r_{i2}^2 + r_{i3}^2 = 1$
- $r_{i1}r_{j1} + r_{i2}r_{j2} + r_{i3}r_{j3} = 0$
- $\det(R) = +1$

Στερεό Robot σε 3-D

- $q = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$

Ο χώρος C είναι 6-D (manifold) εμβαπτισμένη σε έναν 12-D Καρτεσιανό χώρο. Συμβολίζεται με

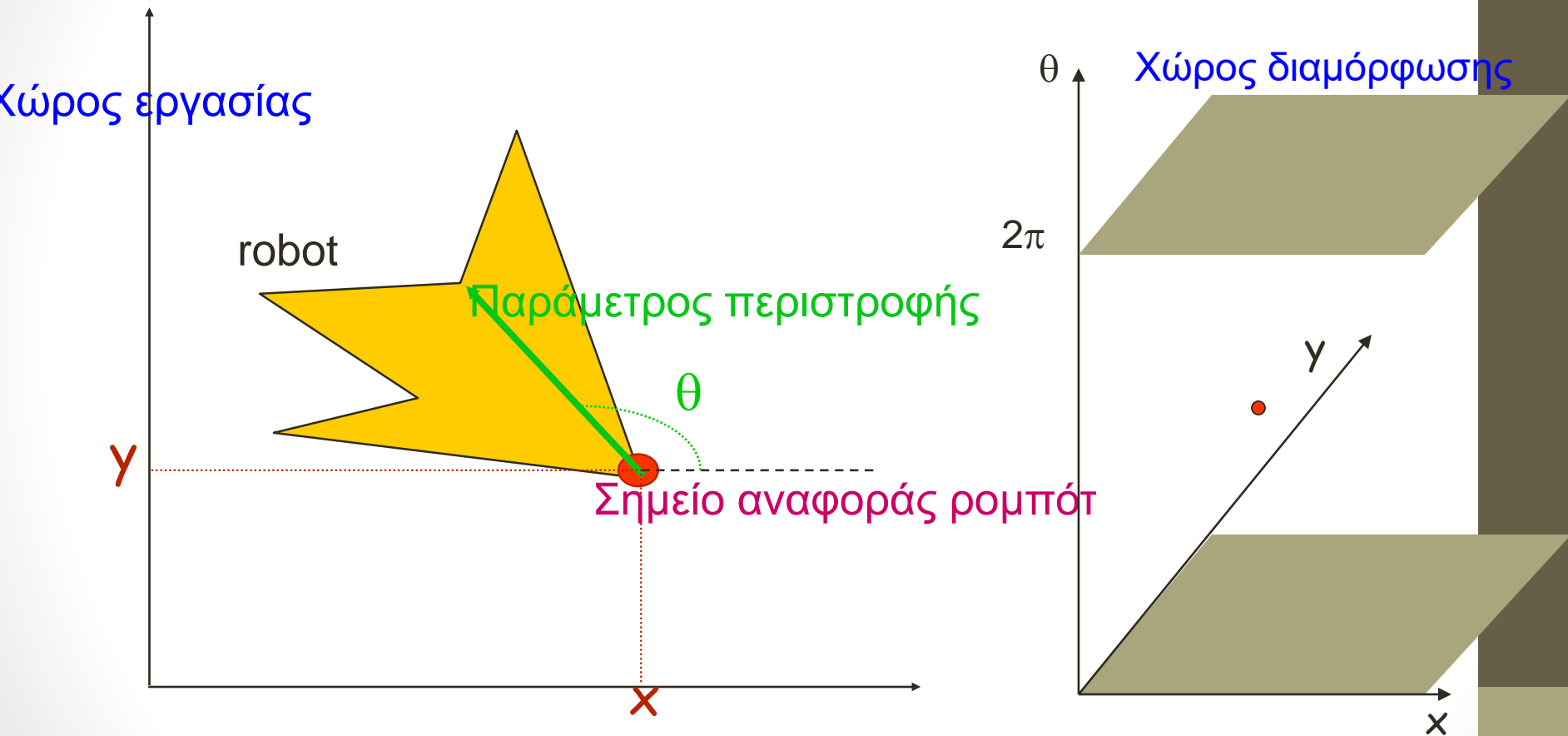
$$SE(3) = R^3 \times SO(3)$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

ώστε:

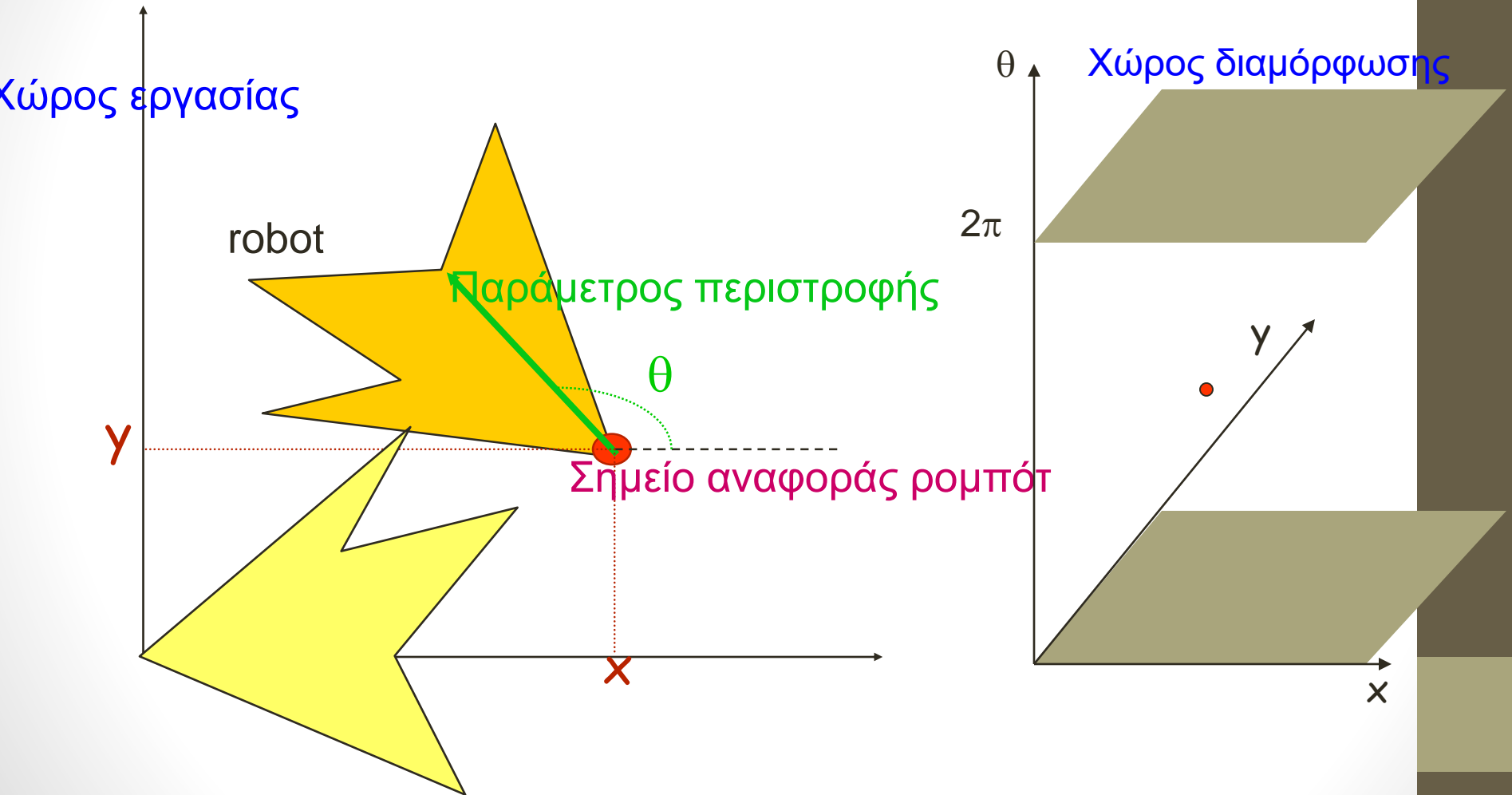
- $r_{i1}^2 + r_{i2}^2 + r_{i3}^2 = 1$
- $r_{i1}r_{j1} + r_{i2}r_{j2} + r_{i3}r_{j3} = 0$
- $\det(R) = +1$

Μεταφορά και στροφή Robot σε 2-D



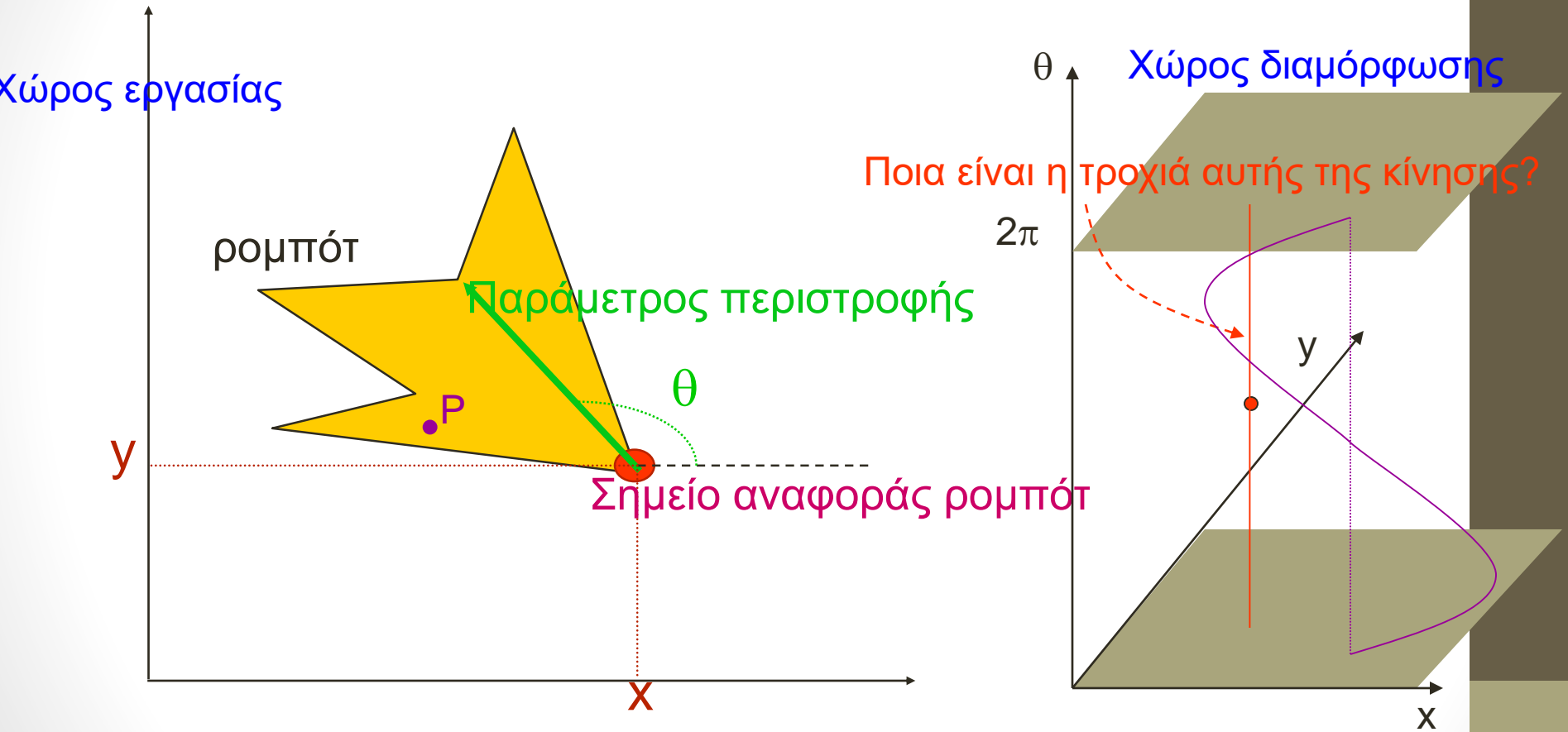
Ποια είναι η θέση του ρομπότ στο χώρο εργασίας στη διαμόρφωση $(0,0,0)$?

Μεταφορά και στροφή Robot σε 2-D

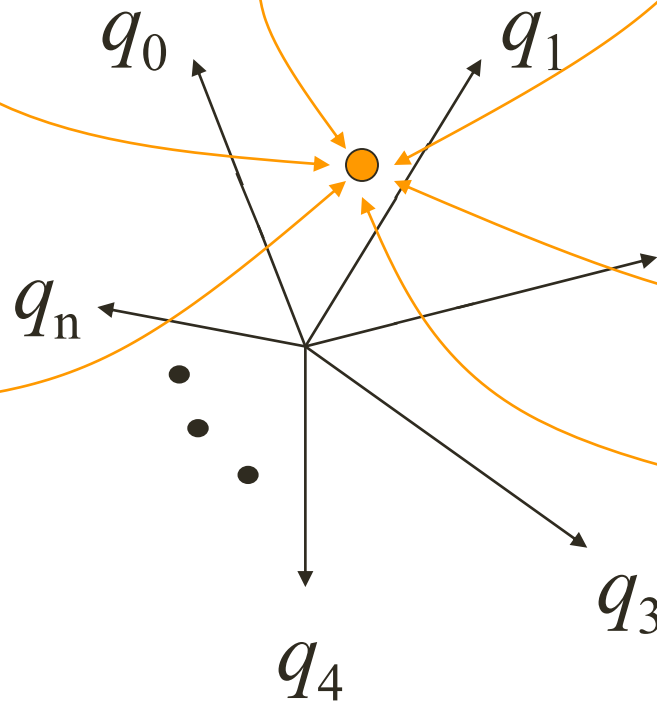
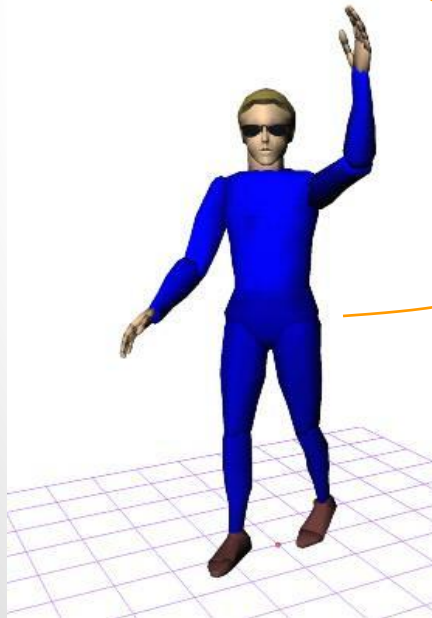
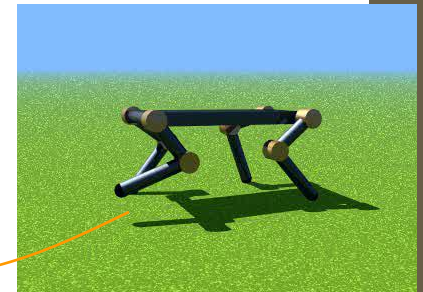
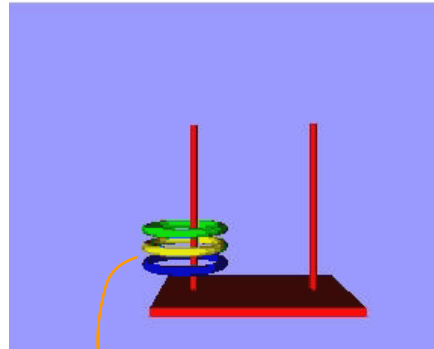
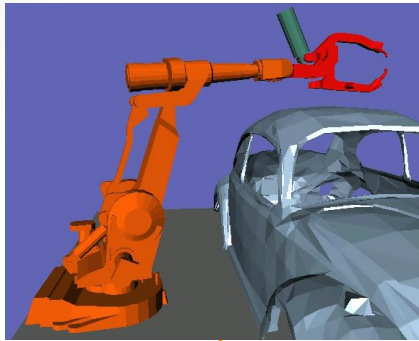


Ποια είναι η θέση του ρομπότ στο χώρο εργασίας στη διαμόρφωση $(0,0,0)$?

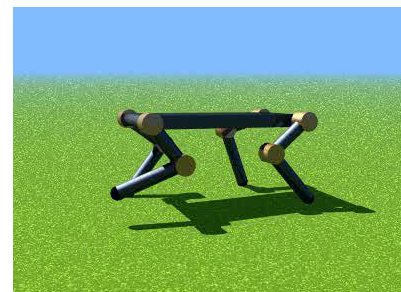
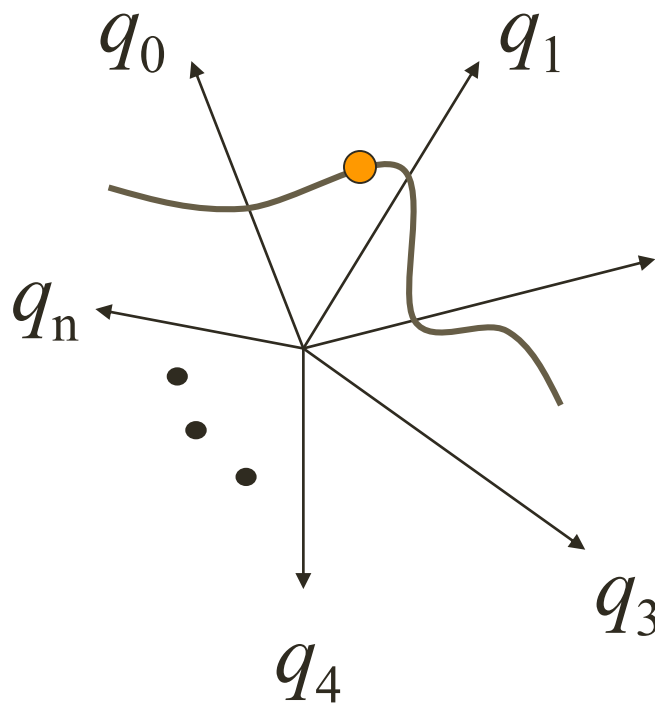
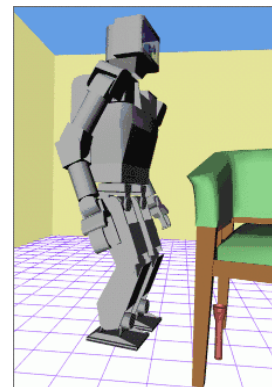
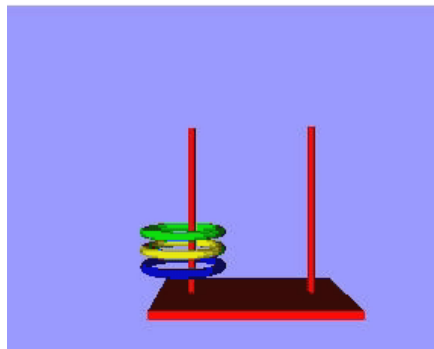
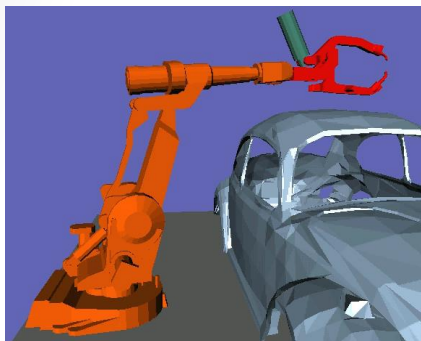
Μεταφορά και στροφή Robot σε 2-D



Κάθε ρομπότ απεικονίζεται σε ένα σημείο στο χώρο διαμόρφωσης...

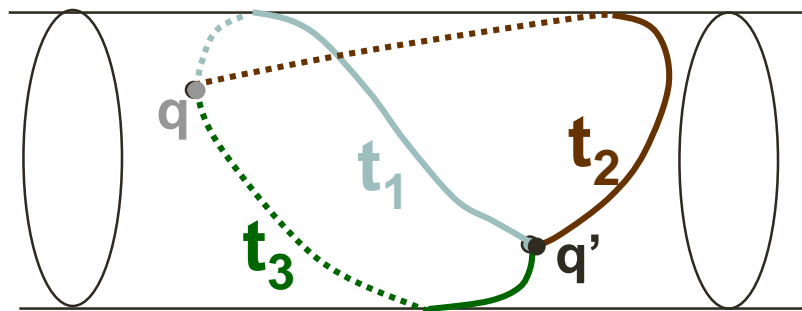


... και κάθε τροχιά ρομπότ δημιουργεί μια τροχιά στο χώρο διαμόρφωσης



Ομοτοπικές τροχιές

- Δυο τροχιές με τα ίδια αρχικά και τελικά σημεία καλούνται **ομοτοπικές**, αν η μια μπορεί με **συνεχή** τρόπο να μετασχηματισθεί στην άλλη.
- $R \times S^1$ παράδειγμα:



- t_1 και t_2 είναι ομοτοπικές.
- t_1 και t_3 δεν είναι ομοτοπικές.
- Μας ενδιαφέρουν οι κλάσεις ισοδυναμίας ως προς ομοτοπία.

Συνεκτικότητα ενός C-Χώρου

- Ο C είναι **συνεκτικός**, αν κάθε δυο σημεία διαμόρφωσης μπορούν να ενωθούν με τροχιά.
- Ο C is **απλά συνεκτικός**, αν κάθε δυο τροχιές με τα ίδια αρχικά και τελικά σημεία είναι ομοτοπικές.
Παράδειγμα: \mathbb{R}^2 και \mathbb{R}^3 .
- S^1 και $SO(3)$ δεν είναι απλά συνεκτικοί:
 - Ο S^1 έχει άπειρες κλάσεις ομοτοπίας.
 - Ο $SO(3)$ έχει δύο κλάσεις ομοτοπίας.

- Σας ευχαριστώ
- πολύ