

1 Ιουλίου 2014

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΧΩΡΟΙ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙ
ΟΜΑΔΕΣ ΠΛΕΞΙΔΩΝ ΤΟΥ ARTIN

ΧΡΗΣΤΟΣ ΣΑΡΑΚΑΣΙΔΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2014

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, υπο την επίβλεψη του **Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Επαμεινώνδα Κεχαγιά.**

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΚΡΙΣΗΣ

Κεχαγιάς Επαμεινώνδας, Αναπληρωτής Καθηγητής του
Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)

Μπαϊκούσης Χρήστος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Λαμπροπούλου Σοφία, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του
Τμήματος Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών

Εγκρίθηκε την 26η Ιουνίου 2014 από την Τριμελή Επιτροπή Εξέτασης:

Κεχαγιάς Επαμεινώνδας, Αναπληρωτής Καθηγητής του
Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)

Μπαϊκούσης Χρήστος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Λαμπροπούλου Σοφία, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του
Τμήματος Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.»

Χρήστος Σαρακασίδης

Αφιερώνεται στους γονείς μου
Ηλία και Σμαρώ.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ.Επαμεινώνδα Κεχαγιά για την πολύτιμη βοήθεια και την σωστή καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη την διάρκεια της εκπόνησης της μεταπτυχιακής μου διατριβής και για την άριστη συνεργασία που είχαμε όλο αυτό τον καιρό. Επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ στα μέλη της επιτροπής αξιολόγησης καθηγητή κ.Χρήστο Μπαϊκούση και καθηγήτρια κ.Σοφία Λαμπροπούλου για τις χρήσιμες συμβουλές και διορθώσεις που μου υπέδειξαν.

Περίληψη. Στη διατριβή αυτή θα μελετηθούν βασικές ιδιότητες χώρων διαμόρφωσης σε τοπολογικά πολυπύγματα χωρίς σύνορο και η σχέση τους με χώρους Eilenberg-MacLane. Θα αποδείξουμε το θεώρημα των Fadell-Neuwirth το οποίο συνδέει κατάλληλους χώρους διαμόρφωσης μέσω ινώσεων. Με τη βοήθεια αυτού του θεωρήματος θα υπολογίσουμε τις ομοτοπικές ομάδες συγκεκριμένων χώρων διαμόρφωσης και θα δείξουμε ότι αυτοί είναι χώροι Eilenberg-MacLane. Μια άμεση εφαρμογή είναι ότι οι ομάδες πλεξίδων του Artin είναι πρωταρχικές ομάδες συγκεκριμένων χώρων διαμόρφωσης.

Abstract. In this thesis we study basic properties of configuration spaces of topological manifolds without boundary and their relation with Eilenberg-MacLane spaces. The main result is the proof of the important theorem of Fadell and Neuwirth which provides the connection of appropriate configuration spaces and fibrations. Using this theorem we are able to calculate homotopy groups of specific configuration spaces and as a result we prove that these spaces are indeed Eilenberg-MacLane spaces. As an immediate application we get that the braid groups of Artin are fundamental groups of certain configuration spaces.

Περιεχόμενα

1	ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	7
1.1	ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	7
2	ΟΜΑΔΕΣ ΣΑΝ ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ	15
3	ΙΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΝΩΔΕΙΣ ΔΕΣΜΕΣ	23
3.1	ΙΝΩΣΕΙΣ	23
3.2	ΙΝΩΔΕΙΣ ΔΕΣΜΕΣ	32
3.3	ΚΥΡΙΕΣ G -ΔΕΣΜΕΣ	35
4	ΟΜΑΔΕΣ ΠΛΕΞΙΔΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΙ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ	43
4.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	43
4.2	ΟΜΑΔΑ ΠΛΕΞΙΔΩΝ	44
4.3	ΧΩΡΟΙ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ	51
4.4	ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ	52
	Βιβλιογραφία	61

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι χώροι διαμόρφωσης n σημείων ενός πολυπύγματος σχετίζονται με το χώρο των διαφορομορφισμών του πολυπύγματος. Το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα προς αυτήν την κατεύθυνση δόθηκε από τους **Fadell** και **Neuwirth** οι οποίοι κατασκεύασαν μια ίνωση μεταξύ κατάλληλων χώρων διαμόρφωσης. Η ίνωση αυτή μας δίνει εργαλεία για τον υπολογισμό των ομοτοπικών ομάδων κάποιων χώρων διαμόρφωσης. Αν το πολύπτυγμα είναι ο \mathbb{R}^2 , τότε οι ομοτοπικές ομάδες αυτών των χώρων διαμόρφωσης σχετίζονται με τις ομάδες πλεξίδων του **Artin**. Η ομάδα πλεξίδων του Artin ορίστηκε πριν 100 χρόνια και ακόμα παρουσιάζει ερευνητικό ενδιαφέρον λόγω των εφαρμογών σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής. Η μελέτη ξεκίνησε με γεωμετρικά προβλήματα, αλλά γρήγορα έγινε αντιληπτό ότι σημαντικές αλγεβρικές εφαρμογές σχετίζονται με αυτές τις ομάδες.

Είναι γνωστό ότι για κάθε ομάδα G μπορεί να κατασκευασθεί ένας τοπολογικός χώρος X , του οποίου όλες οι ομοτοπικές ομάδες να είναι τριμιμένες εκτός από την πρώτη, η οποία είναι ισόμορφη με την G . Αυτοί οι χώροι καλούνται **Eilenberg-MacLane** τύπου $(G, 1) : K(G, 1)$. Η πρώτη γενική κατασκευή δόθηκε από τον **Milnor**. Η κατασκευή του Milnor δεν είναι εύχρηστη στους υπολογισμούς. Υπάρχουν χώροι διαμόρφωσης οι οποίοι έχουν τις ίδιες τοπολογικές ιδιότητες και είναι αρκετά απλούστεροι. Σκοπός αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής είναι η μελέτη αυτής της συσχέτισης μεταξύ χώρων διαμόρφωσης και Eilenberg-MacLane χώρων τύπου $(G, 1)$ για συγκεκριμένες ομάδες G .

Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο θα δούμε κάποιες βασικές τοπολογικές έννοιες οι οποίες θα μας βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση του κειμένου. Στην συνέχεια στο δεύτερο κεφάλαιο θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ένα θέωρημα το οποίο σχετίζει τυχούσα ομάδα G , με την πρωταρχική ομάδα κάποιου τοπολογικού χώρου X , που προκύπτει ως σφηνοειδές άθροισμα χώρων ομοιομορφικών με την \mathbb{S}^1 σε σταθερό σημείο x_0 . Στο ίδιο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε την ιδέα της κατασκευής του Milnor για τυχούσα

ομάδα G στην οποία θα χρειαστούμε την έννοια του κανονικού n -simplex

$$\sigma^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0\}.$$

Ο χώρος που θα κατασκευάσουμε προκύπτει ως ο χώρος πηλίκου της ξένης ένωσης

$$X = \prod_{n=0}^{\infty} \{G^n \times \sigma^n \times G\}$$

με κατάλληλη σχέση ισοδυναμίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε την έννοια της ίνωσης, απεικονίσεις οι οποίες φέρουν την ιδιότητα ανασηκώματος ομοτοπίας (**homotopy lifting property**). Δηλαδή εάν $p : E \rightarrow B$ είναι συνεχής απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων με την τελευταία ιδιότητα, το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B, \end{array}$$

μπορεί να συμπληρωθεί με μια απεικόνιση \tilde{H} , η οποία το κάνει μεταθετικό. Εδώ ο X είναι τυχαίος τοπολογικός χώρος και f, H τυχούσες απεικονίσεις για τις οποίες $H \circ i_0 = p \circ f$. Δηλαδή

1. $(\tilde{H} \circ i_0)(x, 0) = f(x, 0), \forall (x, 0) \in X \times \{0\},$
2. $(p \circ \tilde{H})(x, t) = H(x, t), \forall (x, t) \in X \times I.$

Επίσης θα δούμε ορισμένες ιδιότητες που φέρουν, με την σημαντικότερη να αναφέρεται στην μακρά ακριβή ακολουθία

$$\dots \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \dots$$

όπου $F = p^{-1}(x_0)$ η ίνα της της p . Η ακολουθία αυτή μας δίνει πληροφορίες για τις ανώτερες ομάδες ομοτοπίας.

Έπειτα ως μια ειδική κατηγορία των ινώσεων θα δούμε τις ινώδεις δέσμες, απεικονίσεις με μεγάλη σημασία στον κλάδο της αλγεβρικής τοπολογίας και όχι μόνο. Αν και ο ορισμός τους είναι ιδιαίτερα απαιτητικός και διαφέρει σε πολλές περιπτώσεις ανάλογα με τον συγγραφέα, πολλές γνωστές απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων είναι ινώδεις δέσμες. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η

$$\pi : TM \rightarrow M,$$

$$\pi(p, u) = u,$$

όπου M διαφορίσιμο πολύπτυγμα και $TM = \coprod_{p \in M} (T_p M \times \{p\})$ η εφαπτόμενη δέσμη του. Στην συνέχεια θα δούμε μια κατηγορία ινωδών δεσμών, τις κύριες G -δέσμες. Εδώ η ομάδα δομής G ταυτίζεται με την ίνα της δέσμης $F = p^{-1}(x_0)$ όπου $x_0 \in B$. Το σύνολο αυτών των δεσμών είναι πλούσιο σε γνωστά παραδείγματα όπως οι κανονικοί καλυπτικοί χώροι, δηλαδή συνεχείς καλυπτικές απεικονίσεις $p : E \rightarrow B$ με

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) \trianglelefteq \pi_1(B, b_0).$$

Αποδεικνύεται πως από κάθε ιώδη δέσμη επάγεται μια κύρια G -δέσμη και αντίστροφα. Οπότε η μελέτη αυτών των δεσμών καθίσταται ιδιαίτερα σημαντική.

Τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο θα αναφερθούμε στο κύριο θέμα της παρούσας εργασίας, τους χώρους διαμόρφωσης και τις ομάδες πλεξίδων του Artin. Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{C} \times [0, 1]$ και επιλέγουμε n διακεκριμένα σημεία $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ στο επίπεδο $\mathbb{C} \times \{1\}$ και τις αντίστοιχες προβολές τους $\{z'_1, z'_2, \dots, z'_n\}$ στο $\mathbb{C} \times \{0\}$. Ενώνουμε τα σημεία αυτά μέσω τροχιών

$$p_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1],$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, οι οποίες ικανοποιούν τα εξής:

1. Κάθε p_i συναντά το επίπεδο $\mathbb{C} \times \{t\}$ σε ακριβώς ένα σημείο, για κάθε $t \in [0, 1]$ και $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Για κάθε $t \in [0, 1]$, το σύνολο των τροχιών (p_1, \dots, p_n) συναντά το $\mathbb{C} \times \{t\}$ σε n ακριβώς **διακεκριμένα** σημεία.

Όταν πληρούνται οι δύο παραπάνω προϋποθέσεις, θα καλούμε την n -άδα $\alpha = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, αμιγή πλεξίδα σε n νήματα.

Πιο γενικά όμως μπορεί να θεωρήσει κανείς τροχιές

$$b_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$$

των οποίων τα αρχικά σημεία είναι τα $z_i \in \mathbb{C} \times \{1\}$ όπως προηγουμένως και πέρας τους τα σημεία $z'_{\tau(i)}$, όπου τ μετάθεση της συμμετρικής ομάδας σε n στοιχεία $\tau \in S_n$. Τότε θα καλούμε το $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ πλεξίδα σε n νήματα με μετάθεση τ , εάν ικανοποιούνται τα εξής:

1. Κάθε b_i συναντά το επίπεδο $\mathbb{C} \times \{t\}$ σε ένα ακριβώς σημείο, για κάθε $t \in [0, 1]$ και για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

2. Για κάθε $t \in [0, 1]$, το σύνολο των τροχιών (b_1, b_2, \dots, b_n) συναντά το $\mathbb{C} \times \{t\}$ σε n **διακεκριμένα** σημεία.

Δύο πλεξίδες β_0, β_1 με την ίδια μετάθεση τ θα καλούνται ισοδύναμες, ή ότι ανήκουν στην ίδια κλάση ομοτοπίας, εάν υπάρχει μια συλλογή από ομοτοπίες $F_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$ τέτοιες ώστε για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ να ισχύει,

$$F_i(t, 0) = b_i(t) \quad , \quad F_i(t, 1) = \tilde{b}_i(t),$$

$$F_i(0, s) = z_i \quad , \quad F_i(1, s) = z_{\tau(i)}.$$

Έχοντας υπόψη την παραπάνω ισοδυναμία, μπορούμε να ορίσουμε στο σύνολο όλων αυτών των κλάσεων μια πράξη $*$ κατά την οποία, εάν β_0, β_1 είναι οι αναπαραστάτες δύο κλάσεων με μεταθέσεις $\sigma, \tau \in S_n$ αντίστοιχα, το $\beta_0 * \beta_1$ θα αναπαριστά μια κλάση ομοτοπίας πλεξίδων σε n νήματα με μετάθεση $\tau \circ \sigma \in S_n$.

Για να γίνει γεωμετρικά αντιληπτή η πράξη που ορίσαμε, μπορούμε να ταυτίσουμε (τοπολογικά) το \mathbb{C} με τον \mathbb{R}^2 , όπου το "γινόμενο" δύο πλεξίδων β_0, β_1 θα είναι το σύνολο των σημείων

$$(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I,$$

για τα οποία

1. $(x, y, 2t) \in \beta_0$, εάν $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$,
2. $(x, y, 2t - 1) \in \beta_1$, εάν $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Είναι εμφανές ότι το προηγούμενο αποτελεί μια πλεξίδα σε n νήματα. Το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας μαζί με την πράξη που μόλις περιγράψαμε περνώντας την στις αντίστοιχες κλάσεις των πλεξίδων, αποτελεί ομάδα την οποία συμβολίζουμε με B_n και την καλούμε *ομάδα πλεξίδων του Artin* σε n νήματα. Το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας των πλεξίδων με μετάθεση $\tau = id_{S_n}$ και πράξη την επαγόμενη από την B_n σχηματίζει μια υποομάδα της B_n την οποία καλούμε *αμιγή ομάδα πλεξίδων* και θα την συμβολίζουμε με P_n .

Στην συνέχεια του ίδιου κεφαλαίου θα περιγράψουμε την παράσταση αυτής της ομάδας, όπου το σύνολο γεννητόρων είναι κάποιες βασικές πλεξίδες (**elementary braids**) με την βοήθεια των οποίων μπορούμε να περιγράψουμε κάθε πλεξίδα σαν μια ακολουθία τους. Ταυτόχρονα ο τρόπος με τον οποίο θα τις ορίσουμε μας δίνει και ένα σύνολο σχέσεων γι' αυτές. Οι σχέσεις αυτές μας δίνουν μια ολοκληρωμένη περιγραφή για την B_n .

Στην τέταρτη ενότητα του κεφαλαίου θα ορίσουμε για τυχαίο τοπολογικό πολύπτυγμα \mathbb{M} τον χώρο διαμόρφωσης του, ο οποίος είναι το σύνολο των n διατεταγμένων σημείων

$$\text{Conf}(\mathbb{M}, n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{M}^n \mid x_i \neq x_j, \text{ όταν } i \neq j\}.$$

Θα δούμε και τον αντίστοιχο σε n μη διατεταγμένα σημεία ως τον χώρο πηλίκου

$$\text{Conf}(\mathbb{M}, n)/S_n,$$

με την δράση της S_n να δίνεται από την

$$\mu : \text{Conf}(\mathbb{C}, n) \times S_n \longrightarrow \text{Conf}(\mathbb{C}, n),$$

$$\mu((z_1, z_2, \dots, z_n), \tau) = (z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}, \dots, z_{\tau(n)}).$$

Τέλος στην τελευταία ενότητα θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε δυο θεωρήματα. Το πρώτο από τα οποία αφορά την πρωταρχική ομάδα του χώρου διαμόρφωσης του \mathbb{C} σε n διατεταγμένα και n μη διατεταγμένα σημεία και την σχέση που έχει με την αμιγή ομάδα και την ομάδα πλεξίδων του Artin σε n νήματα αντίστοιχα. Η πρώτη απόδειξη οφείλεται στους **Fox** και **Neuwirth**.

Θεώρημα 0.0.1. *Η πρωταρχική ομάδα $\pi_1(\text{Conf}(\mathbb{C}, n)/S_n, [\vec{z}])$ του χώρου $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)/S_n$ είναι ισόμορφη με την B_n , ενώ η $\pi_1(\text{Conf}(\mathbb{C}, n), \vec{z})$ του χώρου $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$ με την P_n .*

Ενώ όσον αφορά το δεύτερο θεώρημα :

Θεώρημα 0.0.2. *Έστω ένα τοπολογικό πολύπτυγμα \mathbb{M} χωρίς σύνορο. Η φυσική προβολή $p_i : \text{Conf}(\mathbb{M}, k) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{M}, k-1)$ είναι μια ίνωση με ίνα την $\mathbb{M} - Q_{k-1}$. Εδώ $p_i(m_1, \dots, m_k) = (m_1, \dots, \hat{m}_i, \dots, m_k)$ και $Q_{k-1} = \{q_1, q_2, \dots, q_{k-1}\} \subset \mathbb{M}$.*

Το προηγούμενο θεώρημα αποδείχτηκε από τους **Fadell** και **Neuwirth** και μας δίνει έναν τρόπο υπολογισμού των ανωτέρων ομάδων ομοτοπίας των χώρων διαμόρφωσης ενός διαφορίσιμου πολύπτυγματος \mathbb{M} . Ταυτόχρονα μας βοηθάει στο να αποφανθούμε πότε ο $\text{Conf}(\mathbb{M}, n)$ είναι ένας Eilenberg-MacLane χώρος όταν το πολύπτυγμα φέρει κάποιες ιδιότητες, όπως περιγράφονται στο ακόλουθο θεώρημα, το οποίο θα αποτελέσει και το τελευταίο της παρούσας διατριβής.

Θεώρημα 0.0.3. *Έστω \mathbb{M} συνεκτικό τοπολογικό πολύπτυγμα, ώστε και το υποπολύπτυγμα $\mathbb{M} - Q_k$ να είναι επίσης συνεκτικό με $Q_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{M}$ για $k \geq 1$. Υποθέτουμε ότι $\mathbb{M} - Q_k$ και \mathbb{M} είναι ομοτοπικά ισοδύναμα με Eilenberg-MacLane χώρους τύπων $K(\pi, 1)$ για διάφορες ομάδες π . Τότε και ο χώρος $\text{Conf}(\mathbb{M}, n)$ είναι ένας Eilenberg-MacLane χώρος τύπου $K(\pi', 1)$ για κάποια ομάδα π' .*

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε κάποιες εισαγωγικές έννοιες τις οποίες θα χρειαστούμε για την καλύτερη κατανόηση του κειμένου, ενώ θα διατυπώσουμε και συγκεκριμένα θεωρήματα τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε σε αποδείξεις στην πορεία.

1.1 ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Σε αρκετές περιπτώσεις θα αναφερθούμε σε σύνολα τα οποία επιθυμούμε να εφοδιάσουμε με τοπολογία η οποία καθορίζεται από άλλες, που έχουν απλούστερη περιγραφή.

Σημαντικό ρόλο σ' αυτό παίζουν οι απεικονίσεις πηλίκου (**quotient maps**). Δηλαδή επί απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων:

$$p : X \rightarrow Y ,$$

για τις οποίες ισχύει:

$$U \text{ ανοιχτό υποσύνολο του } Y \Leftrightarrow p^{-1}(U) \text{ ανοιχτό υποσύνολο του } X .$$

Παραδείγματος χάριν οι σφαίρες, οι συμπρέλες, οι προβολικοί χώροι δημιουργούνται με χρήση τέτοιων απεικονίσεων.

Ορισμός 1.1.1. Έστω τοπολογικός χώρος X και A ένα τυχαίο σύνολο. Εάν $p : X \rightarrow A$ είναι μια επί απεικόνιση, τότε υπάρχει ακριβώς μια τοπολογία \mathcal{T} στο A ως προς την οποία η p είναι απεικόνιση πηλίκου. Την καλούμε τοπολογία πηλίκου που επάγεται από την p .

Ο παραπάνω ορισμός είναι ιδιαίτερα σημαντικός όταν θέλουμε να εφοδιάσουμε κάποιο χώρο πηλίκου με μια τοπολογία. Εάν δηλαδή X είναι κάποιος

τοπολογικός χώρος και \sim τυχούσα σχέση ισοδυναμίας, η φυσική προβολή:

$$p : X \rightarrow X/\sim$$

$$x \mapsto [x],$$

επάγει στον χώρο πηλίκο μια τοπολογία πηλίκο η οποία χαρακτηρίζεται από την εξής καθολική ιδιότητα.

Θεώρημα 1.1.2. Έστω $p : X \rightarrow X/\sim$ μια απεικόνιση πηλίκο και Z κάποιος τοπολογικός χώρος, για τον οποίο υπάρχει συνεχής απεικόνιση $g : X \rightarrow Z$ με την ιδιότητα $x \sim y \Rightarrow g(x) = g(y)$. Τότε υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $f : X/\sim \rightarrow Z$ η οποία κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταδετικό:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p \downarrow & \searrow g & \\ X/\sim & \xrightarrow{f} & Z. \end{array}$$

Άμεσο από το παραπάνω είναι το ακόλουθο θεώρημα το οποίο κρίνεται ιδιαίτερα χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις.

Θεώρημα 1.1.3. Έστω X και Z τοπολογικοί χώροι και $g : X \rightarrow Z$ επί απεικόνιση για την οποία ισχύει ότι και στο παραπάνω θεώρημα. Τότε η $f : X/\sim \rightarrow Z$ με τύπο $[x] \mapsto g(x)$ είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. Είναι εμφανές ότι η απεικόνιση $f : X/\sim \rightarrow Z$ είναι ένα προς ένα και επί, ενώ η συνέχεια της εξασφαλίζεται από το προηγούμενο θεώρημα. Μένει να δείξουμε ότι είναι ανοιχτή. Όμως εάν επιλέξουμε U ανοιχτό υποσύνολο του X/\sim τότε $g^{-1}f(U) = p^{-1}(U)$, το οποίο είναι ανοιχτό εφόσον η p είναι συνεχής. Ως εκ τούτου το $f(U)$ είναι ανοιχτό, πράγμα που μας δίνει το ζητούμενο. \square

Ορισμός 1.1.4. Έστω X και Y τοπολογικοί χώροι και f_0, f_1 δύο συνεχείς απεικονίσεις από τον X στον Y , τότε η f_0 είναι ομοτοπική με την f_1 , το οποίο θα συμβολίζουμε με $f_0 \simeq f_1$, εάν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times I \rightarrow Y$ με την ιδιότητα:

$$H(x, 0) = f_0(x) \text{ και } H(x, 1) = f_1(x) \text{ για κάθε } x \in X.$$

Μια τέτοια απεικόνιση καλείται **ομοτοπία**.

Εάν θεωρήσουμε και πάλι δύο απεικονίσεις $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$f_0|_A = f_1|_A,$$

σε κάποιο υποσύνολο του X και ομοτοπία $H : X \times I \rightarrow Y$ για την οποία ισχύει:

$$H(a, t) = f_0(a) = f_1(a) \text{ για κάθε } a \in A \text{ και } t \in I.$$

Αυτή καλείται σχετική ομοτοπία ως προς A (**relative homotopy**). Μπορεί δηλαδή να πει κανείς ότι μια ομοτοπία είναι πάντοτε σχετική εάν θεωρήσουμε ως $A = \emptyset$.

Η ομοτοπία ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των συνεχών απεικονίσεων δύο τοπολογικών χώρων. Κάποιες ομοτοπίες παίζουν ιδιαίτερο ρόλο όπως φαίνεται από τους επόμενους ορισμούς.

Σε πολλές βιβλιογραφίες μια απεικόνιση με τις ιδιότητες του ορισμού καλείται ελεύθερη ομοτοπία (**free homotopy**) για να μην υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης μεταξύ αυτής και της σχετικής ομοτοπίας.

Ορισμός 1.1.5. Ένας υπόχωρος X ενός τοπολογικού χώρου Y καλείται παλινωδία (**retract**) του Y εάν υπάρχει συνεχής απεικόνιση

$$r : Y \rightarrow X,$$

για την οποία ισχύει $r(x) = x$ για όλα τα $x \in X$. Μια τέτοια απεικόνιση καλείται παλινώδηση (**retraction**).

Παράδειγμα 1.1.6. Θεωρούμε την $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 = 1\}$ και τον $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. Εάν ορίσουμε την απεικόνιση με τύπο:

$$r : \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$

$$\vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|},$$

παρατηρούμε ότι $r(\vec{x}) = \vec{x}$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$. Επομένως η \mathbb{S}^{n-1} αποτελεί παλινωδία του $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.

Ορισμός 1.1.7. Έστω A υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου X και $i : A \hookrightarrow X$ η έγκλιση. Τότε ο A καλείται ισχυρή παλινωδία (**strong deformation retract**) του X εάν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times I \rightarrow X$ τέτοια ώστε:

1. $H(x, 0) = x$ για κάθε $x \in X$
2. $H(x, 1) \in A$ για κάθε $x \in X$
3. $H(a, t) = a$ για κάθε $a \in A$ και $t \in I$.

Παράδειγμα 1.1.8. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα θεωρούμε την \mathbb{S}^{n-1} και τον $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. Εάν ορίσουμε ομοτοπία:

$$F : \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\},$$

με τύπο

$$F(\vec{x}, t) = \left((1-t) + \frac{t}{\|\vec{x}\|} \right) \vec{x},$$

παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται και οι τρεις προϋποθέσεις του παραπάνω ορισμού. Πράγματι:

1. $F(\vec{x}, 0) = \vec{x}$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$,
2. $F(\vec{x}, 1) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$,
3. $F(\vec{x}, t) = \vec{x}$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ και $t \in I$.

Επομένως η \mathbb{S}^{n-1} είναι ισχυρή παλινωδία του $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.

Ορισμός 1.1.9. Έστω X και Y δύο τοπολογικοί χώροι. Συμβολίζουμε με $C(X, Y)$ το σύνολο όλων των συνεχών απεικονίσεων από τον X στον Y , δηλαδή:

$$C(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ συνεχής}\}.$$

Πρόταση 1.1.10. Εάν C είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X και U ένα ανοιχτό υποσύνολο του Y , ορίζουμε τα σύνολα:

$$S(C, U) = \{f \mid f \in C(X, Y) \text{ και } f(C) \subset U\}.$$

Αυτά αποτελούν υποβάση για μια τοπολογία στον $C(X, Y)$, η οποία καλείται **συμπαγής-ανοιχτή τοπολογία**.

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathcal{C} = \{S(K, U) \mid K \subset X \text{ συμπαγές}, U \subset Y \text{ ανοιχτό}\}$. Η συλλογή \mathcal{C} ορίζει μια μοναδική βάση για κάποια τοπολογία στον X , τα στοιχεία της οποίας θα είναι τα εξής:

$$\mathcal{B} = \{\cap_{i=1}^n S_i(K, U) \mid S_i(K, U) \in \mathcal{C}\} \cup \{X\}.$$

Η τελευταία πράγματι αποτελεί βάση για κάποια τοπολογία στον $C(X, Y)$ αφού, απο γνωστό κριτήριο (βλέπε στο [6] στην σελίδα 65) γνωρίζουμε ότι μια συλλογή υποσυνόλων \mathcal{B} του $C(X, Y)$ θα είναι βάση αν και μόνο αν:

1. $X = \cup \mathcal{B}$
2. Εάν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ και $x \in B_1 \cap B_2$ τότε υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ με $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Όμως και τα δύο παραπάνω είναι άμεσα. Συνεπώς η συλλογή \mathcal{C} πράγματι ορίζει μια τοπολογία \mathcal{T} στον $C(X, Y)$ κατά μοναδικό τρόπο, την οποία θα καλούμε συμπαγή ανοιχτή τοπολογία. \square

Παράδειγμα 1.1.11. Το σύνολο $C(\mathbb{S}^1, X)$ περιέχει συνεχείς απεικονίσεις από την \mathbb{S}^1 στον X . Δηλαδή βρόγχους. Με αυτήν την τοπολογία, δύο βρόγχοι f και g θα βρίσκονται σχετικά κοντά μεταξύ τους, αν υπάρχει συμπαγές υποσύνολο A της \mathbb{S}^1 και ανοικτό υποσύνολο B του X ώστε $f(A), g(A) \subset B$.

Με $[X, Y]$ συμβολίζουμε τις κλάσεις ομοτοπίας των συνεχών απεικονίσεων

$$f : X \rightarrow Y.$$

Έστω Y τοπολογικός χώρος, τότε θα καλείται τοπικά συμπαγής (**locally compact**) εάν για κάθε $x \in Y$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή του $U \subset Y$ που περιέχει το x και συμπαγές υποσύνολο $W \subset Y$, για το οποίο $U \subset W$.

Μια εφαρμογή είναι η ακόλουθη. Θεωρούμε μια τροχιά

$$H : I \rightarrow C(X, Y)$$

η οποία συνδέει τις απεικονίσεις $H(0)$ και $H(1)$ της $C(X, Y)$. Δηλαδή μια τροχιά θα είναι μια ομοτοπία μεταξύ των συνεχών απεικονίσεων

$$H(0) : X \rightarrow Y \text{ και } H(1) : X \rightarrow Y.$$

Άρα οι τροχιές αυτού του χώρου μας δίνουν τις ομοτοπίες μεταξύ των αντίστοιχων απεικονίσεων. Αν ο X είναι τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff και ο Y είναι Hausdorff, τότε το σύνολο $[X, Y]$ μας δίνει τις τροχιακές συνιστώσες του χώρου $C(X, Y)$. Το τελευταίο όμως σημαίνει ότι οι κλάσεις ομοτοπίας των τροχιών στον $C(X, Y)$ ταυτίζονται με τις κλάσεις ομοτοπίας $[X, Y]$.

Εάν θεωρήσουμε X και Z τοπολογικούς χώρους, Y έναν τοπικά συμπαγή χώρο Hausdorff και εφοδιάσουμε τον χώρο $C(Y, X)$ με την συμπαγή ανοιχτή τοπολογία, τότε ισχύει ότι: μια απεικόνιση $F : Z \times Y \rightarrow X$ είναι συνεχής αν και μόνο αν η απεικόνιση με τύπο:

$$\tilde{F} : Z \rightarrow C(Y, X)$$

$$z \mapsto \tilde{F}(z) = F_z \text{ (όπου } : F_z : y \mapsto F(z, y)),$$

είναι συνεχής. Επίσης μια άλλη χρήσιμη εφαρμογή της συμπαγούς ανοιχτής τοπολογίας έχει να κάνει με την συνέχεια της εκτιμήτριας απεικόνισης, δηλαδή της:

$$e : C(Y, X) \times Y \rightarrow X$$

$$(f, y) \mapsto e(f, y) = f(y).$$

Επιπλέον αυτή είναι και η ελάχιστη τοπολογία για την οποία η τελευταία γίνεται συνεχής, με την έννοια του ότι κάθε άλλη τοπολογία η οποία καθιστά την εκτιμήτρια συνεχή περιέχει την συμπαγή ανοιχτή τοπολογία. (Για την αναλυτική απόδειξη των παραπάνω βλέπε στο [15] στην σελίδα 313.)

Ορισμός 1.1.12. Τα διατεταγμένα σημεία $\{p_0, p_1, \dots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ καλούνται *αφφινικά ανεξάρτητα*, αν και μόνο αν τα $\{p_1 - p_0, p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ορισμός 1.1.13. Έστω το αφφινικά ανεξάρτητο υποσύνολο του \mathbb{R}^n $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$, τότε η κυρτή θήκη αυτού $[p_0, p_1, \dots, p_m]$, καλείται **m-simplex** με κορυφές τα σημεία p_0, p_1, \dots, p_m .

Παρατήρηση 1.1.14. Εάν με Δ^m συμβολίσουμε ένα τυχαίο m-simplex με κορυφές τα σημεία $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ στον \mathbb{R}^n , τότε αυτό έχει την εξής περιγραφή:

$$\Delta^m = \left\{ x = \sum_{i=0}^m t_i p_i \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^m t_i = 1 \text{ και } t_i \geq 0 \ \forall i = 0, 1, \dots, m \right\},$$

όπου τα $\{t_i\}_{i=0}^m$ καλούνται βαρύκεντρες συντεταγμένες του σημείου x . (Για την απόδειξη βλέπε στο [15] στην σελίδα 36.)

Ορισμός 1.1.15. Θα καλούμε **κανονικό n-simplex** το σύνολο:

$$\sigma^n = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ και } t_i \geq 0 \ \forall i = 0, 1, \dots, n \right\}.$$

Δηλαδή εκείνο το n-simplex με κορυφές την κανονική βάση του \mathbb{R}^{n+1} .

Εάν X τοπολογικός χώρος και f τυχούσα τροχιά από το σημείο x_0 στο x_1 και g τροχιά από το x_1 στο x_2 , ορίζουμε την "σύνθεση" $f * g$ να είναι η τροχιά h η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$h(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{όταν } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1), & \text{όταν } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Η τελευταία είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Με την παραπάνω πράξη θεωρήσαμε την h ως μια τροχιά από το σημείο x_0 στο x_2 όπου το πρώτο μισό της είναι η f και το δεύτερο να είναι η g .

Ορισμός 1.1.16. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και x_0 κάποιο στοιχείο του. Μια τροχιά στον X η οποία έχει αρχή και τέλος το x_0 καλείται **βρόγχος** με βασικό σημείο (base point) το x_0 . Το σύνολο των κλάσεων ομοιοπίας των βρόγχων με βασικό σημείο το x_0 και πράξη την $*$, καλείται **πρωταρχική ομάδα** του X ως προς το σημείο x_0 . Την ομάδα αυτή θα την συμβολίζουμε με $\pi_1(X, x_0)$.

Παρατήρηση 1.1.17. Ορίσαμε δηλαδή ως πρωταρχική ομάδα ενός χώρου X , το σύνολο:

$$\pi_1(X, x_0) = \{[f] \mid f : (I, \{0, 1\}) \rightarrow (X, x_0)\}$$

εφοδιασμένο με την πράξη που προαναφέραμε.

Παράδειγμα 1.1.18. Εάν θεωρήσουμε ως $X = \mathbb{S}^1$ και βασικό σημείο το $x_0 = (1, 0)$, τότε $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}$. (Για την ολοκληρωμένη απόδειξη βλέπε στο [13] στην σελίδα 340.)

Ορισμένες φορές η ομάδα αυτή καλείται πρώτη ομάδα ομοτοπίας του X , γεγονός που δηλώνει την ύπαρξη και άλλων ομάδων ομοτοπίας μεγαλύτερης τάξης. Έτσι κατ' αναλογία με την πρωταρχική ομάδα ενός χώρου, μπορούμε να ορίσουμε την n -οστή ομάδα ομοτοπίας του.

Ορισμός 1.1.19. Έστω X τοπολογικός χώρος και x_0 κάποιο στοιχείο του. Με $I^n = [0, 1]^n$ δηλώνουμε τον n -διάστατο κύβο. Το σύνολο:

$$\pi_n(X, x_0) = \{[f] \mid f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)\},$$

με πράξη $*$ στις κλάσεις να δίνεται από την αντίστοιχη κλάση:

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s, s_2, \dots, s_n), & \text{όταν } s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & \text{όταν } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

αποτελεί ομάδα, την οποία καλούμε **n -οστή ομάδα ομοτοπίας** του X στο σημείο x_0 .

Παρατήρηση 1.1.20. Λόγω του ότι $I^n / \partial I^n \cong \mathbb{S}^n$, ισοδύναμα μπορεί κανείς να ορίσει είτε την πρωταρχική ομάδα, είτε την n -οστή ομάδα ομοτοπίας ως:

$$\pi_n(X, x_0) = \{[f] \mid f : (\mathbb{S}^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)\},$$

για τα διάφορα $n \in \mathbb{N}$. (Βλέπε στο [11] στην σελίδα 340.)

Παράδειγμα 1.1.21. Και πάλι εάν θεωρήσουμε ως $X = \mathbb{S}^1$ θα έχουμε:

$$\pi_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n = 1 \\ 0, & \text{όταν } n \geq 1. \end{cases}$$

(Για την απόδειξη βλέπε στο [15] στην σελίδα 343.)

Ο υπολογισμός των ανώτερων ομοτοπικών ομάδων των σφαιρών είναι ιδιαίτερα δύσκολος και αποτελεί το βασικό αντικείμενο μελέτης της αλγεβρικής τοπολογίας.

Κεφάλαιο 2

ΟΜΑΔΕΣ ΣΑΝ ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα δούμε την απόδειξη μιας ενδιαφέρουσας πρότασης, η οποία συνδέει τυχούσα ομάδα G με την πρωταρχική ομάδα συγκεκριμένων χώρων και αποτελεί ειδική περίπτωση μιας πιο γενικής κατασκευής. Για την καλύτερη κατανόηση της απόδειξης θα παραθέσουμε ορισμένες προτάσεις και ορισμούς που θα μας φανούν χρήσιμοι στην συνέχεια.

Ορισμός 2.0.22. Θα καλούμε κλειστό κέλυφος (**closed cell**) διάστασης n έναν τοπολογικό χώρο ομοιομορφικό με τον n -διάστατο δίσκο D^n , ενώ θα καλείται ανοιχτό (**open cell**) εάν είναι ομοιομορφικό με τον $\overset{\circ}{D}^n$. Θα σύμβολίζουμε ένα κλειστό n κέλυφος με e^n ενώ ένα ανοιχτό με $\overset{\circ}{e}^n$.

Παρατήρηση 2.0.23. Εάν θεωρήσουμε τον μηδενοδιάστατο δίσκο D^0 τότε ένα 0-κέλυφος είναι ένα σημείο $e^0 = \{*\}$. Ενώ για $n=1$ θα έχουμε ένα 1-κέλυφος ομοιομορφικό με το διάστημα $[-1, 1]$.

Ορισμός 2.0.24. Έστω ομάδα F, X ένα μη-κενό σύνολο και $\sigma : X \rightarrow F$ μια απεικόνιση. Τότε το ζεύγος (F, σ) θα καλείται ελεύθερο πάνω από το X εάν ικανοποιεί την εξής καθολική ιδιότητα. Για κάθε απεικόνιση α από το X σε τυχούσα ομάδα G υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\beta : F \rightarrow G$ τέτοιος ώστε $\alpha = \beta\sigma$. Διαγραμματικά το παραπάνω μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & F \\ \alpha \downarrow & \searrow \beta & \\ G & & \end{array}$$

Μια ομάδα η οποία είναι ελεύθερη σε κάποιο σύνολο θα καλείται ελεύθερη ομάδα.

Παρατήρηση 2.0.25. Αυτό που αποδεικνύεται και είναι σημαντικό για εμάς στην παρούσα ενότητα είναι ότι εάν X είναι ένα τυχαίο μη-κένος σύνολο, τότε υπάρχει ομάδα F και απεικόνιση $\sigma : X \rightarrow F$ τέτοια ώστε το ζεύγος (F, σ) να είναι ελεύθερο πάνω από το X και $F = \langle im\sigma \rangle$ (βλέπε στο [14] στην σελίδα 45). Σαν συνέπεια αυτού κάθε ομάδα είναι η επιμορφική εικόνα κάποιας ελεύθερης ως εξής: Μπορούμε να διαλέξουμε ως $X = G$, να θεωρήσουμε την ελεύθερη ομάδα που παράγεται απ' αυτήν και ταυτόχρονα επιμορφισμό $\phi : F \rightarrow G$ που κάνει μεταθετικό το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sigma} & F \\ id \downarrow & \swarrow \phi & \\ G & & \end{array}$$

εκμεταλλευόμενοι την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων ομάδων. Επιπλέον από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών θα έχουμε για κάθε ομάδα G :

$$G \cong F/N,$$

όπου $N = \ker\phi$.

Η επόμενη έννοια την οποία θα δούμε μέσω της καθολικής ιδιότητας, είναι αυτή του ελεύθερου γινομένου μεταξύ δύο ομάδων. Υποθέτουμε λοιπόν ότι H και K είναι δύο ομάδες. Η L καλείται **ελεύθερο γινόμενο** των H και K εάν υπάρχουν ομομορφισμοί $i_H : H \rightarrow L$ και $i_K : K \rightarrow L$ οι οποίοι ικανοποιούν την εξής ιδιότητα: για κάθε ζεύγος ομομορφισμών $\alpha : H \rightarrow G$ και $\beta : K \rightarrow G$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\gamma : L \rightarrow G$ τέτοιος ώστε $\alpha = \gamma \circ i_H, \beta = \gamma \circ i_K$. Διαγραμματικά επομένως έχουμε το ακόλουθο:

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{i_H} & L & \xleftarrow{i_K} & K \\ & \searrow \alpha & \downarrow \exists! \gamma & \swarrow \beta & \\ & & G & & \end{array}$$

όπου γ ο μοναδικός ομομορφισμός που μας δίνει την μεταθετικότητα. Από εδώ και πέρα θα συμβολίζουμε την ομάδα L με $H \star K$.

Για να κατασκευάσουμε τους χώρους που αναφέραμε παραπάνω, θα πρέπει να ορίσουμε μια βασική έννοια, αυτήν του σφηνοειδούς αθροίσματος (**wedge sum**).

Ορισμός 2.0.26. Έστω δύο τοπολογικοί χώροι X και Y στους οποίους διαλέξαμε τυχαία $x_0 \in X$ και $y_0 \in Y$, τότε το σφηνοειδές άθροισμα $X \vee Y$ ορίζεται ως το πηλίκο της ξένης ένωσης $X \amalg Y$ μετά την ταύτιση του x_0 και y_0 σε ένα σημείο. Όμοια μπορεί να ορίσει κανείς το σφηνοειδές άθροισμα σε αυθαίρετο πλήθος χώρων $\{X_a\}_{a \in A}$, ξεκινώντας με την ξένη ένωση $\amalg_{a \in A} X_a$ και κάνοντας ταύτιση στοιχείων $x_a \in X_a$ σε ένα μοναδικό.

Και μετά τον τελευταίο ορισμό είμαστε σε θέση να αναφέρουμε μια γενίκευση ενός σημαντικού και γνώστου θεώρηματος του οποίου η απόδειξη οφείλεται στους Herbert Seifert και Egbert van Kampen.

Θεώρημα 2.0.27. (Seifert-Van Kampen) Έστω X τοπολογικός χώρος ο οποίος μπορεί να γραφεί ως ένωση ανοιχτών και τροχιακά συνεκτικών υποσυνόλων του A_a , όπου $a \in I$, ώστε καθ' ένας να περιέχει το σημείο $x_0 \in X$. Τότε εάν κάθε τομή $A_a \cap A_b$ είναι τροχιακά συνεκτική για κάθε a, b στο I ο ομομορφισμός $\Phi : \star_{a \in I} \pi_1(A_a) \rightarrow \pi_1(X)$ είναι επιμορφισμός. Εάν επιπλέον κάθε τομή $A_a \cap A_b \cap A_c$ είναι τροχιακά συνεκτικός χώρος, τότε ο πυρήνας της Φ είναι η κανονική υποομάδα N που γεννιάται από στοιχεία της μορφής $i_{ab}(\omega)i_{ba}(\omega)^{-1}$ όπου $i_{ab} : \pi_1(A_a \cap A_b) \rightarrow \pi_1(A_a)$ και $i_{ba} : \pi_1(A_a \cap A_b) \rightarrow \pi_1(A_b)$. Επομένως η Φ επάγει ισομορφισμό:

$$\pi_1(X) \cong \star_{a \in I} \pi_1(A_a) / N.$$

Απόδειξη. Βλέπε στο [11] στη σελίδα 44. □

Το παραπάνω θεώρημα είναι πολύ σημαντικό για την αποδείξη και θα το χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη πρόταση. Αφού πρώτα όμως θεωρήσουμε τον χώρο $\bigvee_{a \in I} S_a^1$ όπου έχουμε πάρει το σφηνοειδές άθροισμα τυχαίου πλήθους κύκλων σε ένα 0-κέλυφος e^0 , το οποίο ανήκει στην S_a^1 για όλα τα $a \in I$.

Πρόταση 2.0.28. Η πρωταρχική ομάδα του χώρου $X = \bigvee_{a \in I} S_a^1, \pi_1(X, x_0)$, σε σημείο $x_0 \in S_a^1$ για όλα τα $a \in I$ είναι ισόμορφη με την ελεύθερη ομάδα πάνω από σύνολο $\{g_a \mid a \in I\}$.

Απόδειξη. Για κάθε $a \in I$, έστω U_a τυχαία ανοιχτή περιοχή του x_0 στην S_a^1 και $A_a = S_a^1 \vee_{a \neq j} U_j$. Τότε κάθε A_a είναι ανοιχτό και η τομή δύο η και παραπάνω μας δίνει $\bigvee_{a \in I} U_a$, το οποίο είναι τροχιακά συνεκτικό. Ακόμα κάθε θηλιά του x_0 στον $\bigvee_{a \in I} U_a$ είναι μια ισχυρή παλινωδία της σταθερής θηλιάς στο x_0 . Έτσι από το θεώρημα Seifert-Van Kampen τα $i_{ab}(\omega)$ είναι τετριμμένα για κάθε θηλιά $\omega \in \pi_1(A_a \cap A_b)$ επομένως, $N = 0$. Συνεπώς η $\pi_1(X)$ είναι ισόμορφη με την $\star_{a \in I} \pi_1(A_a)$. Αλλά η S_a^1 είναι ισχυρή παλινωδία της A_a , έτσι $\pi_1(A_a) \cong \pi_1(S_a^1) \cong \mathbb{Z}$ και αυτό ισχύει για κάθε $a \in I$. Συνεπώς το ελεύθερο γινόμενο τους μας δίνει την ελεύθερη ομάδα με γεννήτορες τα στοιχεία $\langle g_a \mid a \in I \rangle$ που ήταν και το ζητούμενο. □

Εάν G ομάδα και A κάποιο υποσύνολο της, τότε ορίζουμε ως την υποομάδα της G που γεννιάται από το σύνολο A να είναι η

$$\langle A \rangle = \bigcap_{Y \leq G, A \subset Y} Y.$$

18 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΟΜΑΔΕΣ ΣΑΝ ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Αυτό που αποδεικνύεται (βλέπε στο [7] στην σελίδα 63) είναι πως η τελευταία έχει και μια εναλλακτική περιγραφή η οποία δίνεται από το σύνολο

$$\{\alpha_1^{\epsilon_1} \cdot \alpha_2^{\epsilon_2} \dots \alpha_n^{\epsilon_n} \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in A \text{ και } \epsilon_i = \pm 1 \text{ για όλα τα } i\}.$$

Με βάση το παραπάνω έχουμε τον ακόλουθο ορισμό για την παράσταση μιας τυχούσας ομάδας.

Ορισμός 2.0.29. Έστω μια ομάδα G και A κάποιο υποσύνολό της τέτοιο ώστε $G = \langle A \rangle$. Μια παράσταση για την G είναι ένα ζεύγος $\langle A \mid R \rangle$, όπου το R είναι ένα σύνολο στοιχείων της ελεύθερης ομάδας F που γεννάται από το σύνολο A , του οποίου η υποομάδα που γεννάται στην F είναι ο πυρήνας του επιμορφισμού $\phi : F \rightarrow G$. Τα στοιχεία του συνόλου A καλούνται γεννήτορες (**generators**) ενώ εκείνα της R σχέσεις (**relations**) της G .

Τώρα είμαστε σε θέση να γενικεύσουμε την παραπάνω πρόταση σε τυχούσα ομάδα με παράσταση $\langle g_a \mid r_b \rangle_{a \in I, b \in J}$, όπου θέσαμε $A = \{g_a\}_{a \in I}$ και $R = \{r_b\}_{b \in B}$.

Θεώρημα 2.0.30. Κάθε ομάδα G είναι ισόμορφη με την πρωταρχική ομάδα κάποιου τοπολογικού χώρου.

Απόδειξη. Όπως και στο τελευταίο θεωρούμε τον χώρο $X = \bigvee_{a \in I} S_a^1$ όπου έχουμε θεωρήσει έναν κύκλο σε κάποιο βασικό σημείο x_0 για κάθε γεννήτορα της τυχούσας ομάδας με παράσταση $G = \langle g_a \mid r_b \rangle_{a \in I, b \in J}$. Τότε η ελεύθερη ομάδα που γεννάται από τους γεννήτορες της G είναι ισόμορφη με την πρωταρχική ομάδα του $\bigvee_{a \in I} S_a^1$ όπως δείξαμε στην τελευταία Πρόταση. Ενώ για κάθε ομάδα γνωρίζουμε ότι ισχύει $G \cong F/N$, όπου N η κανονική υποομάδα που γεννάται από το σύνολο $\{r_b\}_{b \in J}$ στην F . Έτσι θεωρούμε τις απεικονίσεις $\phi_b : S_b^1 \rightarrow X$ για να προσαρτήσουμε 2-κελύφη στον X , μία για κάθε σχέση r_b , με αποτέλεσμα να αποκτήσουμε ένα καινούργιο χώρο $Y = X \cup_{\phi_b} e_b^2$. Ο τελευταίος χώρος όμως είναι αυτός που θέλουμε να κατασκευάσουμε, αφού ο εγκλεισμός:

$$i : (X, x_0) \hookrightarrow (Y, x_0),$$

επάγει επιμορφισμό ομάδων:

$$i_* : \pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(Y, x_0).$$

Πράγματι εάν θεωρήσουμε απεικόνιση $\phi_b : S_a^1 \rightarrow Y$ για να προσαρτήσουμε κελύφη, ένα για κάθε σχέση στην παράσταση της ομάδας, τότε η εικόνα αυτής παριστάνει μια θηλιά στον X πριν από την προσάρτηση του κελύφους με βασικό σημείο τυχαίο $x_1 \in X$. Έτσι εφόσον ο X είναι τροχιακά συνεκτικός, θεωρούμε τροχιά ω από το x_0 στο x_1 και θεωρούμε την θηλιά $\omega \phi_b \omega^{-1}$

με βασικό σημείο το x_0 . Η τελευταία πριν την προσάρτηση του κελύφους μέσω της ϕ_b στον χώρο X δεν είναι τετριμμένη. Έπειτα από την προσάρτηση όμως θα έχουμε $\omega \phi_b \omega^{-1} \simeq c_{x_0}$. Συνεπώς θεωρούμε την κανονική υποομάδα N της $\pi_1(X, x_0)$ η οποία γεννάται από το σύνολο:

$$\{ \omega \phi_b \omega^{-1} \mid b \in J \},$$

και είναι ο πυρήνας του επιμορφισμού. Έτσι από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών θα έχουμε:

$$\pi_1(X, x_0)/N \cong \pi_1(Y, x_0),$$

πράγμα που μας δίνει τον ζητούμενο ισομορφισμό:

$$G \cong \pi_1(Y, x_0).$$

□

Στην συνέχεια θα δούμε μια κατασκευή την οποία θα χρησιμοποιήσουμε σε επόμενο κεφάλαιο και οφείλεται στον **J. Milnor** (βλέπε στο [1] στην σελίδα 49). Στο προηγούμενο κεφάλαιο δώσαμε τον ορισμό ενός n -simplex, ενώ πιο συγκεκριμένα ορίσαμε ως το κανονικό n -simplex να είναι το

$$\sigma^n = \{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \}.$$

Για την παρούσα κατασκευή θα δούμε στο επόμενο λήμμα μια εναλλακτική περιγραφή του τελευταίου που θα μας διευκολύνει στην πορεία.

Λήμμα 2.0.31. *Το κανονικό n -simplex είναι ισοδύναμο με το σύνολο:*

$$\{ (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \mid 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n \leq 1 \}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του κανονικού n -simplex, γνωρίζουμε ότι έχει περιγραφή:

$$\sigma^n = \{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \}.$$

Θέτουμε $\tau_i = t_0 + t_1 + \dots + t_{i-1}$, το οποίο μας ορίζει απεικόνιση από τις βαρύκεντρες συντεταγμένες του simplex σ' αυτές του λήμματος. Αντίστροφα, εάν μας δίνονται:

$$0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n \leq 1,$$

ορίζουμε $t_0 = \tau_1, t_{i-1} = \tau_i - \tau_{i-1}$ όπου $1 \leq i \leq n$ και $t_n = 1 - \tau_n$. Αυτό μας δίνει την αντίστροφη απεικόνιση και ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος.

□

20ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΟΜΑΔΕΣ ΣΑΝ ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Θεωρούμε μια τοπολογική ομάδα G και ορίζουμε την ξένη ένωση :

$$X = \prod_{n=0}^{+\infty} (G \times \sigma^n \times G^n).$$

Ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας

$$\begin{aligned} (g, \tau_1, \dots, \tau_n, g_1, \dots, g_n) &\sim (g, \tau_1, \dots, \hat{\tau}_i, \dots, \hat{g}_i, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) \\ &\quad \text{εάν } g_i = e \text{ ή } \tau_i = \tau_{i+1} \\ &\sim (g g_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n, g_2, \dots, g_n) \\ &\quad \text{εάν } \tau_1 = 0 \\ &\sim (g, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}, g_1, \dots, g_{n-1}) \\ &\quad \text{εάν } \tau_n = 1. \end{aligned}$$

Το σύμβολο πάνω από τα τ_i και g_i , σημαίνει ότι απλά διαγράφουμε αυτές τις συντεταγμένες. Έπειτα σχηματίζουμε τον χώρο πηλίκο :

$$E_G = X / \sim .$$

Ο τελευταίος εφοδιασμένος με την τοπολογία πηλίκο που επάγεται από την φυσική προβολή

$$\begin{aligned} p : X &\rightarrow X / \sim \\ x &\mapsto [x], \end{aligned}$$

φέρει πολύ καλές ιδιότητες, αφού όπως παρατηρούμε η G δρά ελεύθερα με τον εξής τρόπο :

$$\begin{aligned} G \times E_G &\longrightarrow E_G \\ (g, [g', \tau_1, \dots, \tau_n, g_1, \dots, g_n]) &\mapsto [g g', \tau_1, \dots, \tau_n, g_1, \dots, g_n]. \end{aligned}$$

Επίσης αποτελεί παράδειγμα συσταλτού τοπολογικού χώρου μέσω ομοτοπίας με τύπο :

$$\begin{aligned} H : E_G \times I &\longrightarrow E_G \\ H([g, \tau_1, \dots, \tau_n, g_1, \dots, g_n], t) &= [e, t, \widetilde{\tau_1 + t}, \dots, \widetilde{\tau_n + t}, g, g_1, \dots, g_n], \end{aligned}$$

όπου $\tilde{t} = \begin{cases} t, & t \leq 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$.

Η τελευταία είναι συνεχής μέσω της απεικόνισης :

$$\hat{H}_t : X \rightarrow X$$

$$(g, \tau_1, \dots, \tau_n, g_1, \dots, g_n) \mapsto (e, t, \widetilde{\tau_1 + t}, \dots, \widetilde{\tau_n + t}, g, g_1, \dots, g_n)$$

η οποία είναι συνεχής και σέβεται την σχέση ισοδυναμίας που ορίσαμε. Επομένως απο γνωστό θεώρημα (βλέπε στο [6] στη σελίδα 17) περνάμε στο πηλίκο μέσω μοναδικής συνεχούς απεικόνισης:

$$H_t : X / \sim \rightarrow X / \sim,$$

το οποίο μας δίνει την ζητούμενη συνέχεια. Επίσης έχουμε ότι:

$$H([g, \tau_1, \dots, \tau_n, g_1, \dots, g_n], 0) = [g, \tau_1, \dots, \tau_n, g_1, \dots, g_n]$$

$$H([g, \tau_1, \dots, \tau_n, g_1, \dots, g_n], 1) = [e, \hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_n, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_n] = c_0$$

χρησιμοποιώντας την ταύτιση που ορίσαμε παραπάνω, για όλα τα $[g, \tau_1, \dots, \tau_n, g_1, \dots, g_n] \in E_G$. Επομένως ο E_G είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με ένα σημείο, άρα συσταλτός. Στην συνέχεια θεωρούμε τον χώρο πηλίκο:

$$B_G = \prod_{n=0}^{+\infty} (\sigma^n \times G^n) / \sim$$

με τις ίδιες σχέσεις όπως και παραπάνω παραλείποντας τον πρώτο όρο, που εδώ τον θεωρούμε ένα σταθερό σημείο. Ισοδύναμα μπορεί κανείς να θεωρήσει τον χώρο αυτό ως τον

$$B_G = E_G / G.$$

Αυτό που είναι ενδιαφέρον είναι πως η απεικόνιση:

$$p : E_G \rightarrow B_G$$

$$[g, \tau_1, \dots, \tau_n, g_1, \dots, g_n] \mapsto [\tau_1, \dots, \tau_n, g_1, \dots, g_n],$$

φέρει πολύ καλές ιδιότητες και αποτελεί παράδειγμα ίνωσης, μια έννοια που θα ορίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Ο χώρος B_G καλείται **χώρος ταξινόμησης** για την ομάδα G και έχει την επόμενη χαρακτηριστική ιδιότητα: Το σύνολο $[X, B_G]$ μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο των ισομόρφων κλάσεων κύριων G -δεσμών πάνω από το X . Η ιδιότητα αυτή καλείται αρχή αναγνώρισης του **Steenrod**.

Αν η G είναι διακριτή ομάδα, τότε η προηγούμενη ίνωση δηλώνει ότι ο χώρος B_G έχει μόνο μια μη-τετριμμένη ομάδα ομοτοπίας. Αυτή είναι η πρωταρχική ομάδα η οποία θα είναι ισόμορφη με την G .

Παράδειγμα 2.0.32. Για την ομάδα \mathbb{Z} μπορούμε να πάρουμε $E_{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$ και $B_{\mathbb{Z}} = \mathbb{S}^1$.

Η κατασκευή του Milnor είναι γενική αλλά όχι εύχρηστη στους υπολογισμούς. Θα δούμε στο τελευταίο κεφάλαιο ότι για κάποιες ομάδες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους χώρους διαμόρφωσης.

22ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΟΜΑΔΕΣ ΣΑΝ ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Κεφάλαιο 3

ΙΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΝΩΔΕΙΣ ΔΕΣΜΕΣ

3.1 ΙΝΩΣΕΙΣ

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε μια κλάση απεικονίσεων, τις ινώσεις (**fi-brations**). Θα αναλύσουμε την ιδιότητα ανασηκώματος ομοτοπίας (**homo-topology lifting property-HLP**) η οποία χαρακτηρίζει τις παραπάνω απεικονίσεις και θα αναφέρουμε ιδιότητες τις οποίες φέρουν. Παράλληλα θα δούμε και κάποιους ειδικούς τύπους ινώσεων.

Ορισμός 3.1.1. Έστω ότι $p : E \rightarrow B$ συνεχής απεικόνιση και συμβολίζουμε με \mathcal{C} μια τυχούσα κατηγορία τοπολογικών χώρων. Τότε η p έχει την ιδιότητα ανασηκώματος ομοτοπίας ως προς την \mathcal{C} , την οποία θα συμβολίζουμε με $\mathcal{C} - HLP$, εάν για κάθε $X \in ob \mathcal{C}$ κάθε απεικόνιση $f : X \rightarrow E$ και ομοτοπία $H : X \times I \rightarrow B$, για την οποία ισχύει $H(x, 0) = (p \circ f)(x)$, ορίζεται ομοτοπία $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$ ώστε $p \circ \tilde{H} = H$. Δηλαδή έχουμε το ανασήκωμα της H μέσω των p και f . Καλούμε τον χώρο B βασικό χώρο (**base space**) και τον E ολικό (**total space**). Εάν $b_0 \in B$, ίνα (**fiber**) καλείται το σύνολο $p^{-1}(b_0)$ το οποίο συμβολίζουμε με F .

Παρατήρηση 3.1.2. Θεωρώντας τον παραπάνω ορισμό σε διαγραμματική μορφή, έχουμε ότι η p έχει την $\mathcal{C} - HLP$ αν και μόνο αν για κάθε μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & \tilde{H} \nearrow & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B, \end{array}$$

υπάρχει απεικόνιση \tilde{H} , όπως φαίνεται στο διάγραμμα, η οποία κάνει μεταθετικά τα δύο τρίγωνα. Εδώ $X \in ob \mathcal{C}$ και $i_0 : X \rightarrow X \times I$ είναι η έγκλειση $i_0(x) = (x, 0)$.

Ένα αρκετά οικείο παράδειγμα ινώσεων αποτελούν οι καλυπτικές απεικονίσεις, αφού ικανοποιούν την ιδιότητα ανασηκώματος τροχιάς όπως μας λέει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.3. Έστω

$$p : E \rightarrow B,$$

καλυπτική απεικόνιση ενός τροχιακά συνεκτικού τοπολογικού χώρου X και έστω Y ένας τοπολογικός χώρος. Θεωρούμε το διάγραμμα των συνεχών απεικονίσεων:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & \tilde{H} \nearrow & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{H} & B, \end{array}$$

όπου $i_0(y) = (y, 0)$ για κάθε $y \in Y$. Τότε υπάρχει συνεχής απεικόνιση

$$\tilde{H} : Y \times I \rightarrow X,$$

η οποία κάνει το διάγραμμα μεταθετικό. Επιπλέον εάν ο Y είναι συνεκτικός, η \tilde{H} είναι μοναδική.

Απόδειξη. Βλέπε στο [15] στη σελίδα 277. □

Απ' όλες τις ινώσεις ξεχωρίζουν οι ινώσεις του Hurewicz και του Serre.

Ορισμός 3.1.4. Έστω $p : E \rightarrow B$, τότε αυτή καλείται **ίνωση του Hurewicz** εάν είναι ίνωση για κάθε αντικείμενο της τυχούσας κατηγορίας τοπολογικών χώρων \mathcal{C} . Εάν η p είναι ίνωση ως προς κάθε CW-Complex τότε θα καλείται **ίνωση του Serre**.

Στην συνέχεια θα δούμε μια πολύ χρήσιμη κατασκευή όταν μας δίνεται μια ίνωση $p : E \rightarrow B$ και τυχούσα απεικόνιση $f : \tilde{B} \rightarrow B$. Θέλουμε να ορίσουμε κατάλληλο χώρο \tilde{E} και απεικονίσεις $\tilde{f} : \tilde{E} \rightarrow E$ και $\tilde{p} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{B}$ ώστε να έχουμε μεταθετικότητα στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \tilde{p} \downarrow & & \downarrow p \\ \tilde{B} & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Έτσι λοιπόν εάν θεωρήσουμε ως τον ζητούμενο χώρο:

$$\tilde{E} = \{(\tilde{b}, e) \in \tilde{B} \times E / f(\tilde{b}) = p(e)\}$$

και τις απεικονίσεις $\tilde{f}(\tilde{b}, e) = e, \tilde{p}(\tilde{b}, e) = \tilde{b}$, έχουμε την ζητούμενη μεταθετικότητα στο διάγραμμα. Η \tilde{p} καλείται η επαγόμενη απο την p μέσω της \tilde{f} ενώ ο χώρος \tilde{E} συμβολίζεται με $f^*(E)$ και καλείται χώρος ανάσχυσης (**pull-back space**).

Αυτό που είναι σημαντικό στην παραπάνω κατασκευή, είναι πως για οποιαδήποτε ίνωση του Hurewicz $p : E \rightarrow B$ και απεικόνιση $f : \tilde{B} \rightarrow B$ η επαγόμενη απ' αυτές θα είναι και αυτή ίνωση του Hurewicz. Το τελευταίο όμως είναι ισοδύναμο με την μεταθετικότητα στο παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{H} & \downarrow \tilde{p} & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & \tilde{B} & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Εδώ X τυχαίος τοπολογικός χώρος, \tilde{g} και H τυχούσες απεικονίσεις που δίνουν μεταθετικότητα στο αριστερό τετράγωνο του διαγράμματος και \tilde{H} η ζητούμενη ομοτοπία που κάνει μεταθετικά τα δύο τρίγωνα. Συνεπώς η ομοτοπία που ζητάμε πρέπει να ικανοποιεί τα εξής:

1. $\tilde{H} \circ i_x = \tilde{g}$,
2. $\tilde{p} \circ \tilde{H} = H$.

Έτσι έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.1.5. Έστω $p : E \rightarrow B$ τυχούσα ίνωση του Hurewicz και συνεχή απεικόνιση $f : \tilde{B} \rightarrow B$, τότε η επαγόμενη από αυτές θα είναι και αυτή ίνωση του Hurewicz.

Απόδειξη. Εφ' όσον όμως από την υπόθεση έχουμε ότι η p είναι ίνωση του Hurewicz αρκεί να ορίσουμε $\tilde{H}(x, t) = (H(x, t), \tilde{G}(x, t))$, όπου στην δεύτερη συνιστώσα έχουμε την ομοτοπία απο το ανασήκωμα της $f \circ H$ μέσω των p και $\tilde{f} \circ \tilde{g}$. Τότε εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις και επομένως η \tilde{p} είναι ίνωση του Hurewicz. \square

Στην συνέχεια θα δούμε μια άλλη έννοια που χαρακτηρίζει τις ινώσεις, αυτήν της απεικόνισης ανασηκώματος τροχιάς (**path lifting map**). Θεωρούμε τον χώρο

$$C(I, B) = \{ f : I \rightarrow B \mid f \text{ συνεχής} \}$$

και τον αντίστοιχο $C(I, E)$. Εάν έχουμε μια ίνωση του Hurewicz $p : E \rightarrow B$ τότε υπάρχει απεικόνιση (βλέπε στο [2] στην σελίδα 104):

$$\Gamma : E \times_B C(I, B) \rightarrow C(I, E),$$

όπου,

$$E \times_B C(I, B) = \{(e, a) \in E \times C(I, B) \mid p(e) = a(0)\}$$

και η Γ ικανοποιεί:

$$\Gamma(e, a)(0) = e, \quad p \circ \Gamma(e, a)(t) = a(t),$$

για όλα τα $(e, a) \in E \times_B C(I, B)$ και $t \in I$. Αντίστροφα εάν μας έχει δοθεί συνεχής απεικόνιση $p : E \rightarrow B$ και υπάρχει απεικόνιση Γ με τις παραπάνω ιδιότητες, τότε η p είναι ίνωση του Hurewicz.

Υπάρχουν ινώσεις οι οποίες φέρουν συγκεκριμένο χαρακτηρισμό, ανάλογα με τον τύπο τους ή κάποια ιδιότητα που φέρει ο ολικός χώρος. Έτσι εάν $p : E \rightarrow B$ τύχουσα ίνωση, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Θα καλείται τετριμμένη ίνωση (**trivial fibration**), εάν $E \cong B \times F \xrightarrow{\pi} B$ όπου π η προβολή στην πρώτη συνιστώσα.
2. Μια ίνωση θα την καλούμε ομοτοπικά τετριμμένη (**homotopically trivial**), εάν $E \simeq B \times F$.
3. Θα την καλούμε τοπικά τετριμμένη ίνωση (**locally trivial**), εάν ικανοποιείται το εξής: υπάρχει ανοιχτό κάλυμμα \mathcal{U} του B ώστε $p^{-1}(U) \cong U \times F$ για κάθε $U \in \mathcal{U}$.
4. Ενώ, εάν υπάρχει ανοιχτό κάλυμμα \mathcal{U} του B ώστε $p^{-1}(U) \simeq U \times F$, θα καλείται ομοτοπικά τοπικά τετριμμένη ίνωση (**homotopically locally trivial**).

Στην συνέχεια θα δούμε ορισμένα παραδείγματα μη-τετριμμένων ινώσεων του Hurewicz.

1. Έστω τοπολογικός χώρος B και σημείο του $x_0 \in B$ το οποίο και θεωρούμε ως βασικό σημείο. Ορίζουμε $PB = \{\omega : I \rightarrow B \mid \omega(0) = x_0\}$ να είναι ο χώρος τροχιών (**path space**) του B στο σημείο x_0 . Ο PB εφοδιασμένος με την συμπαγή ανοιχτή τοπολογία αποκτά δομή τοπολογικού χώρου. Εάν ορίσουμε την απεικόνιση $q : PB \rightarrow B$ με τύπο $q(\omega) = \omega(1)$, τότε αυτή είναι ίνωση του Hurewicz (βλέπε στο [16] στην σελίδα 53) της οποίας η ίνα είναι ο υπόχωρος (με την επαγόμενη τοπολογία) $\Omega B = \{\omega : I \rightarrow B \mid \omega(0) = \omega(1) = x_0\}$ ο οποίος καλείται χώρος βρόγχων (**loop space**). Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο PB είναι συσταλτός τοπολογικός χώρος, δηλαδή υπάρχει ομοτοπική ισοδυναμία από τον PB σε κάποιο σταθερό σημείο του:

$$f : PB \rightarrow \{*\}$$

με τύπο $\gamma \mapsto \gamma(0) = *$. Η τελευταία έχει ομοτοπική αντίστροφο την απεικόνιση:

$$g : \{*\} \rightarrow PB$$

με τύπο $* \mapsto \gamma_*$, όπου γ_* η σταθερή θηλιά στο σημείο $*$. Παρατηρούμε ότι $f \circ g = id_*$. Ενώ η ομοτοπία για την οποία $g \circ f \simeq id_{PB}$ είναι η απεικόνιση

$$H : PB \times I \rightarrow PB$$

$$(\gamma, t) \mapsto H(\gamma, t) = \lambda(t'),$$

όπου η $\lambda \in PB$, είναι η τροχιά με τύπο $\lambda(t') = \gamma(t'(1-t))$. Πράγματι

$$(α) \quad H(\gamma, 0) = \gamma = id_{PB},$$

$$(β) \quad H(\gamma, 1) = \gamma(0) = * = \gamma_* = g \circ f.$$

Το επόμενο παράδειγμα αποτελεί ένα από τα πρώτα μη-τετριμμένα παραδείγματα ινώσεων και οφείλεται στον Heinz Hopf (1931) του οποίου το όνομα φέρει.

2. **(Hopf Fibration)** Θεωρούμε την

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^4$$

και την

$$S^2 \cong \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \amalg \{\infty\},$$

(σφαίρα του Riemann) ως την συμπαγοποίηση ενός σημείου του μιγαδικού επιπέδου. Η συνεχής απεικόνιση $p : S^3 \rightarrow S^2$ με τύπο:

$$p(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{z_1}{z_2} & , \quad z_2 \neq 0, \\ \infty & , \quad \text{όταν } z_2 = 0, \end{cases}$$

αποτελεί ίνωση με ίνα την S^1 . Πράγματι εάν ορίσουμε την απεικόνιση:

$$p_1 : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \longrightarrow S^2$$

$$[z_1 : z_2] \mapsto \frac{z_1}{z_2},$$

τότε αυτή είναι ομοιομορφισμός. Συνεπώς μπορούμε να ταυτίσουμε τους δύο τοπολογικούς χώρους και να θεωρήσουμε την απεικόνιση του Hopf ως την:

$$p : S^3 \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$$

$$(z_1, z_2) \mapsto [z_1 : z_2].$$

Έτσι εάν:

$$p(w_1, w_2) = p(z_1, z_2),$$

θα έχουμε

$$[w_1, w_2] = [z_1, z_2],$$

επομένως $(w_1, w_2) = \lambda(z_1, z_2)$, έπειτα από την ταύτιση που κάνουμε στην μιγαδική προβολική ευθεία. Διαλέγουμε τυχαίο $m \in S^2$ και η ίνα είναι το σύνολο:

$$p^{-1}(m) = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid p(z_1, z_2) = m\}.$$

Εάν $(w_1, w_2) \in p^{-1}(m)$ κάποιο άλλο στοιχείο, θα έχουμε

$$(w_1, w_2) = \lambda(z_1, z_2).$$

Άρα,

$$1 = w_1 \bar{w}_1 + w_2 \bar{w}_2 = (\lambda z_1) (\bar{\lambda} \bar{z}_1) + (\lambda z_2) (\bar{\lambda} \bar{z}_2) = \lambda \bar{\lambda} \cdot 1 = \lambda \bar{\lambda},$$

αφού τα ζεύγη (w_1, w_2) και (z_1, z_2) ανήκουν στην S^3 . Επομένως $\lambda \in S^1$ που σημαίνει ότι είναι της μορφής $\lambda = e^{i\theta}$ με $\theta \in [0, 2\pi]$. Δηλαδή η ίνα είναι το σύνολο $p^{-1}(m) = \{e^{i\theta} (z_1, z_2) \in S^3 \mid p(e^{i\theta} (z_1, z_2)) = m\}$ το οποίο είναι ομοιομορφικό με την S^1 . Που ήταν και το ζητούμενο.

Τα παραπάνω συμβολικά γράφονται ως εξής:

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{p} S^2.$$

3. Θεωρούμε την απεικόνιση $p : C(I, Y) \rightarrow Y$ με τύπο $p(a) = a(1)$, τότε αυτή είναι μια ίνωση του Hurewicz, αφού για το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} A \times \{0\} & \xrightarrow{g} & C(I, Y) \\ j_0 \downarrow & \tilde{H} \nearrow & \downarrow p \\ A \times I & \xrightarrow{H} & Y \end{array},$$

όπου A τυχαίο στοιχείο της κατηγορίας. Εδώ αρκεί να θεωρήσουμε ως την ζητούμενη ομοιοπία \tilde{H} την συνεχή απεικόνιση με τύπο

$$\tilde{H}(a, s)(t) = \begin{cases} g(a)((1+s)t), & \text{όταν } 0 \leq t \leq \frac{1}{(1+s)}, \\ H(a, ((1+s)t - 1)), & \text{όταν } \frac{1}{(1+s)} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα δύο τρίγωνα του παραπάνω διαγράμματος είναι μεταθετικά.

4. Έστω μια συνεχής απεικόνιση $f : Y \rightarrow B$ μεταξύ τοπολογικών χώρων όπου Y τροχιακά συνεκτικός και έστω ο χώρος:

$$E_f = \{(y, \omega) \in Y \times C(I, B) \mid \omega(1) = f(y)\},$$

τον οποίο θα καλούμε τροχιακό χώρο της f (**mapping path space of f**). Τότε η απεικόνιση:

$$p : E_f \rightarrow B,$$

με τύπο $p(y, \omega) = \omega(1)$, είναι ίνωση του Hurewicz. (Βλέπε στο [5] στην σελίδα 124.)

Η χρησιμότητα των ινώσεων με μια πρώτη ματιά δεν είναι προφανής. Φέρουν όμως πολύ καλές ιδιότητες οι οποίες αποδεικνύονται θεμελιώδους σημασίας στην αλγεβρική τοπολογία. Κάποιες απ' αυτές θα αναφέρουμε στις ακόλουθες προτάσεις.

Πρόταση 3.1.6. *Εάν $p : E \rightarrow B$ είναι μια απεικόνιση του Hurewicz και ο B είναι τροχιακά συνεκτικός, τότε για κάθε $b_1, b_2 \in B$ ισχύει ότι $p^{-1}(b_1)$ και $p^{-1}(b_2)$ έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο.*

Απόδειξη. Έστω α τροχιά από το b_0 στο b_1 . Μέσω της α ορίζεται η $f : p^{-1}(b_0) \rightarrow p^{-1}(b_1)$ με $f(e) = \hat{\alpha}_e(1)$. Από την ίνωση $p : E \rightarrow B$ υπάρχει τροχιά από το σημείο $e \in p^{-1}(b_0)$ στο σημείο $\hat{\alpha}_e(1) \in p^{-1}(b_1)$. Εδώ με $\hat{\alpha}_e$ συμβολίζουμε το ανασήκωμα της α από το e . Αντίστοιχα ορίζεται η $g : p^{-1}(b_1) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ με $g(e') = \hat{\alpha}_{e'}^{-1}(1)$. Η $\hat{\alpha}_{e'}^{-1}$ είναι το ανασήκωμα της α^{-1} από το e' . Ισχύει ότι $gf \simeq 1$ και $fg \simeq 1$ αντίστοιχα. \square

Πρόταση 3.1.7. *Έστω $p : E \rightarrow B$ ίνωση, με B συσταλτός χώρος. Τότε υπάρχει ομοτοπική ισοδυναμία $\phi : E \rightarrow B \times F$ με $F = p^{-1}(b_0)$.*

Απόδειξη. Επειδή από την υπόθεση ο B είναι συσταλτός, υπάρχει ομοτοπία μεταξύ της ταυτοτικής απεικόνισης id_B και της σταθερής c_{x_0} . Ορίζουμε την

$$\tilde{H} : B \rightarrow C(I, B),$$

με τύπο $\tilde{H}(b)(t) = H(b, t)$. Επίσης από την υπόθεση η p είναι ίνωση του Hurewicz, συνεπώς υπάρχει απεικόνιση ανασηκώματος τροχιάς

$$\Gamma : E \times_B C(I, B) \rightarrow C(I, E).$$

Από τα δύο παραπάνω προκύπτει η ζητούμενη ομοτοπική ισοδυναμία με τύπο $\phi(e) = (p(e), \Gamma(e, \tilde{H}(p(e))(1)))$. \square

Παρατήρηση 3.1.8. Στην παραπάνω απόδειξη φαίνεται η σημασία του χαρακτηρισμού μιας ίνωσης, μέσα από την απείκονιση ανασηκώματος τροχιάς.

Πόρισμα 3.1.9. Έστω $p : E \rightarrow B$ ίνωση της οποίας ο βασικός χώρος έχει ανοιχτό κάλυμμα \mathcal{U} αποτελούμενο από συστατικά υποσύνολα. Τότε για κάθε $U \in \mathcal{U}$ ισχύει ότι η επαγόμενη ίνωση $p_U : p^{-1}(U) \rightarrow U$ είναι ομοτοπικά τοπικά τετριμμένη (δηλαδή $p^{-1}(U) \simeq U \times F$).

Στην συνέχεια θα δούμε μια ακόμα ιδιότητα των ινώσεων. Έαν θεωρήσουμε τυχούσα συνεχή απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ τότε αυτή είναι υπό μια έννοια ισοδύναμη με μια ίνωση. Προηγουμένως (παράδειγμα 4) ορίσαμε τον τροχιακό χώρο μιας απεικόνισης ως τον:

$$E_f = \{(x, \omega) \in X \times C(I, Y) \mid \omega(1) = f(x)\}$$

και αναφέραμε πως η απεικόνιση $p : E_f \rightarrow Y$ είναι μια ίνωση του Hurewicz. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} & C(I, Y) & \\ & \downarrow p' & \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

και έπειτα κατασκευάζουμε το χώρο ανάστροφης, απ' όπου προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} f^*(C(I, Y)) = E_f^q & \longrightarrow & C(I, Y) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

στο οποίο βλέπουμε ότι ταυτίζεται με τον E_f , ενώ οι απεικονίσεις p_1 και q είναι οι προβολές στην πρώτη και δεύτερη συνιστώσα αντίστοιχα. Επίσης απο προηγούμενη πρόταση γωρίζουμε ότι η p_1 είναι και αυτή ίνωση (Πρόταση 3.1.5). Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει ομοτοπική ισοδυναμία $h : X \rightarrow E_f$ η οποία κάνει μεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & E_f \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & & Y, \end{array}$$

δηλαδή $p \circ h = f$ και οι χώροι X και E_f έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο. Πράγματι, εάν ορίσουμε την $h(x) = (x, c_f(x))$ όπου $c_f(x)$ είναι η σταθερή

τροχιά στο $f(x)$, έχουμε άμεσα την μεταθετικότητα $f = p \circ h$, ενώ ο ομοτοπικός αντίστροφος για την h είναι η p_1 αφού έχουμε ότι $p_1 \circ h = id_X$. Από την άλλη, η ομοτοπία που συνδέει τις $h \circ p_1$ και id_{E_f} δίνεται από τον τύπο :

$$F((x, a), s) = (x, a_s),$$

όπου η δεύτερη συνιστώσα είναι η τροχιά $s \mapsto \alpha(st)$. Έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την f μέσω της h με την ίνωση p .

Δοθείσας μιας συνεχούς απεικόνισης $p : E \rightarrow B$, το ερώτημα που γεννάται πολλές φορές είναι το πότε αυτή αποτελεί ίνωση. Ένα θεώρημα του οποίου η απόδειξη οφείλεται στον Hurewicz μας δίνει απάντηση σ' αυτό αφού πρώτα θεωρήσουμε κατάλληλο κάλυμμα για τον βασικό χώρο B .

Θεώρημα 3.1.10. (Hurewicz) Έστω συνεχής απεικόνιση:

$$p : E \rightarrow B,$$

και κάλυμμα $\mathcal{C} = \{U_a\}_{a \in A}$ του B στο οποίο επάγεται διαμέριση της μονάδας. Τότε η p είναι ίνωση αν και μόνο αν, η:

$$p|_U : p^{-1}(U) \rightarrow U$$

είναι ίνωση για κάθε στοιχείο του καλύμματος $U \in \mathcal{C}$.

Απόδειξη. Βλέπε στο [12] στην σελίδα 51. □

Παρατήρηση 3.1.11. Το προηγούμενο θεώρημα παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη μιας πρότασης με μεγάλη σημασία (βλέπε στο [12] στην σελίδα 51) στην οποία αποδεικνύεται ότι η κατηγορία των ινώσεων είναι αρκετά πλούσια σε απεικονίσεις όταν ο βασικός χώρος είναι παρασυμπαγής.

Η σημαντικότερη ιδιότητα των ινώσεων είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 3.1.12. Έστω $p : E \rightarrow B$ ίνωση του Serre και $F = p^{-1}(b)$ με $b \in B$. Τότε η επόμενη ακολουθία είναι ακριβής.

$$\dots \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \dots$$

Απόδειξη. Βλέπε στο [12] στην σελίδα 66. □

3.2 ΙΝΩΔΕΙΣ ΔΕΣΜΕΣ

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σε μια κλάση απεικονίσεων μεταξύ τοπολογικών χώρων, τις ινώδεις δέσμες (**fiber bundles**). Όπως θα δούμε, πολλές απεικονίσεις ανήκουν σ' αυτήν την κλάση, ενώ σαν συνέπεια του θεωρήματος του Hurewicz που αναφέραμε παραπάνω γνωρίζουμε ότι κάθε ινώδης δέσμη είναι ίνωση όταν ο βασικός χώρος είναι παρασυμπαγής, συνεπώς μπορούμε να τις δούμε σαν μια ειδική περίπτωση των ινώσεων.

Έστω G μια τοπολογική ομάδα. Αυτό σημαίνει ότι G είναι ένας τοπολογικός χώρος με δομή ομάδας, ενώ οι απεικονίσεις του "πολλαπλασιασμού" $\mu : G \times G \rightarrow G$, $\mu(g, h) = gh$ και της αντιστροφής $i : G \rightarrow G$, $i(g) = g^{-1}$ είναι συνεχείς ως προς την τοπολογία του χώρου.

Ορισμός 3.2.1. Έστω G μια τοπολογική ομάδα. Τότε αυτή δρά πάνω σε χώρο X , όταν η απεικόνιση

$$G \times X \rightarrow X$$

$$(g, h) \mapsto gh,$$

είναι συνεχής, $e_G x = x$ και $(g_1 g_2) x = g_1 (g_2 x)$. Η δράση θα καλείται αποτελεσματική (**effective**) όταν, για κάθε $g \in G$, υπάρχει $x \in X$ για το οποίο $g \cdot x \neq x$. Ένω θα λέμε ότι η G δρά κυρίως ασυνεχώς (**properly discontinuous**) εάν, για κάθε $x \in X$, υπάρχει U ανοιχτή περιοχή του x για την οποία:

$$gU \cap g'U = \emptyset.$$

Τέλος θα καλούμε μια δράση ελεύθερη (**free**) όταν $g \cdot x = x \Rightarrow g = e_G$.

Παρατήρηση 3.2.2. Όπως παρατηρούμε η παραπάνω απεικόνιση ορίζει μονομορφισμό από την ομάδα G στην ομάδα ομοιομορφισμών του X την οποία θα συμβολίσουμε με **Top(X)**. Δηλαδή η G είναι ισόμορφη με κάποια υποομάδα της **Top(X)**.

Μετά από τα παραπάνω είμαστε σε θέση να δώσουμε τον ορισμό μιας ινώδους δέσμης.

Ορισμός 3.2.3. Έστω G μια τοπολογική ομάδα, η οποία δρά αποτελεσματικά σε έναν χώρο F . Μια ινώδης δέσμη E πάνω από τον B με ομάδα δομής G , είναι μια επί απεικόνιση $p : E \rightarrow B$ μαζί με μια συλλογή ομοιομορφισμών $\{\phi_U : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)\}$ (οι ϕ καλούνται χάρτες πάνω από τα U), όπου η συλλογή των συνόλων $\mathcal{U} = \{U\}$ ορίζει ένα ανοιχτό κάλυμμα του B και η συλλογή των ζευγών $\{(\phi_U, U)\}$ είναι μεγιστική ως προς τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow[\quad U]{\phi} & p^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U & \swarrow p \\ & & U \end{array}$$

2. Αν (ϕ_U, U) είναι χάρτης και $V \subset U$ ανοιχτό τότε και ο $(\phi_U|_V, V)$ είναι επίσης χάρτης.

3. Αν $\phi_{U,b} : F \rightarrow p^{-1}(b)$ ορίζεται από $\phi_{U,b}(f) = \phi_U(b, f)$, τότε για κάθε $b \in U \cap U'$ ο ομοιομορφισμός $\phi_{U',b}^{-1} \phi_{U,b} : F \rightarrow F$ συμπίπτει με κάποιο στοιχείο της G .

4. Για κάθε δύο χάρτες ϕ_U και ϕ'_U πάνω απο το U υπάρχει απεικόνιση:

$$\theta_{\phi, \phi'} : U \rightarrow G,$$

για την οποία $\phi'(x, u) = \phi(x, \theta_{\phi, \phi'}(x)(u))$.

Εάν δεν ισχύει το 3, τότε η p καλείται τοπικά τειριμμένη δέσμη (**locally trivial bundle**). Μια ινώδης δέσμη θα συμβολίζεται με (E, B, F, p, G) . Η διαφορά των ινωδών δεσμών απο τις τελευταίες, στις οποίες δεν έχει δοθεί μια ομάδα δομής είναι ουσιαστική. Πράγματι έστω ότι έχουμε τυχούσα τοπικά τειριμμένη δέσμη

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\phi} & p^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U & \swarrow p \\ & & U \end{array}$$

και

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\phi'} & p^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U & \swarrow p \\ & & U, \end{array}$$

δύο τοπικές τειριμμενοποιήσεις, τότε η μεταθετικότητα του παρακάτω διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccccc} U \times F & \xrightarrow{\phi'} & p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi^{-1}} & U \times F \\ & \searrow \pi_U & \downarrow p & & \swarrow \pi_U \\ & & U & & \end{array}$$

μας δίνει απεικόνιση $\psi_{\phi, \phi'} : U \times F \rightarrow F$ τέτοια ώστε η σύνθεση $\phi^{-1} \circ \phi' : U \times F \rightarrow U \times F$ να έχει τύπο:

$$(u, f) \mapsto (u, \psi_{\phi, \phi'}(u, f)) .$$

Τότε όμως για κάθε $u \in U$ η απεικόνιση $\psi_{\phi, \phi'}(u, -) : F \rightarrow F$ είναι ομοιομορφισμός.

Σε μια ινώδη δέσμη, η απεικόνιση $\psi_{\phi, \phi'}$ έχει πολύ συγκεκριμένη μορφή η οποία δίνεται από την δράση ενός στοιχείου της G . Δηλαδή έχουμε ότι $\psi_{\phi, \phi'}(u, f) = g \cdot f$, όπου g στοιχείο της ομάδας δομής ανεξάρτητο του f και συμβολίζεται με $\theta_{\phi, \phi'}(u)$. Ενώ η τοπολογία της G μας εξασφαλίζει την συνέχεια της $\theta_{\phi, \phi'}$.

Επίσης στον ορισμό της ινώδους δέσμης απαιτήσαμε η δράση της G στην F να είναι αποτελεσματική. Αυτό μας εξασφαλίζει την μοναδικότητα της απεικόνισης $\theta_{\phi, \phi'}(u) : U \rightarrow G$.

Στην συνέχεια θα δούμε ορισμένα παραδείγματα ινώδων δεσμών.

1. Η τετριμμένη ινώδης δέσμη, όπου $E = B \times F$, F η ίνα και ομάδα δομής την $G = \{id_F\}$.
2. Η λωρίδα του **Mobius**, $E = I \times I / \sim$, όπου έχουμε κάνει την ταύτιση $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ με βασικό χώρο την $B = S^1$, ομάδα δομής την $G = \{id, \phi\} \cong \mathbb{Z}_2$ (όπου ϕ η ανάκλαση στην μέση της $I \times I$) και ίνα το ευθύγραμμο τμήμα I .
3. Ένα άλλο παράδειγμα αποτελεί η φιάλη του **Klein**. Ο χώρος πηλίκου δηλαδή $E = I \times I / \sim$ με την ταύτιση $(0, y) \sim (1, y)$ και $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$, $\forall 0 \leq x, y \leq 1$, πάνω από τον $B = S^1 \cong I / \sim$ με ταύτιση $0 \sim 1$, ομάδα δομής την $G = \{id, \phi\} \cong \mathbb{Z}_2$. Εδώ η ϕ παριστάνει ανάκλαση ως προς την διάμετρο του κυλίνδρου που σχηματίζεται στην πρώτη ταύτιση και η ίνα είναι ομοιομορφική με την S^1 . Θεωρήσαμε ως απεικόνιση της δέσμης την $p([x, y]) = [y]$.
4. Θεωρούμε κανονική καλυπτική απεικόνιση $p : E \rightarrow B$. Δηλαδή ισχύει ότι $p_*(\pi_1(E, e_0)) \trianglelefteq \pi_1(B, b_0)$. Τότε η ίνα είναι πάντοτε τοπολογικός χώρος εφοδιασμένος με την διακριτή τοπολογία και η παραπάνω καλυπτική αποτελεί παράδειγμα ινώδους δέσμης με ομάδα δομής ισόμορφη με την $G = \pi_1(B, b_0) / p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Όπως αναφέραμε και στο τέλος της προηγούμενης ενότητας, εάν θεωρήσουμε έναν τοπολογικό χώρο B , Hausdorff και παρασυμπαγή και γνωρίζουμε ότι μια συνεχής απεικόνιση

$$p : E \rightarrow B$$

είναι ίνωση, τότε αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι:

$$p|_U : p^{-1}(U) \rightarrow U$$

είναι ίνωση για κάθε στοιχείο του τυχόντος καλύμματος $\mathcal{C} = \{U_a\}_{a \in A}$ του B . Έχοντας υπ' όψιν αυτό θέλουμε να αποδείξουμε ότι εάν η απεικόνιση p είναι μια ινώδης δέσμη τότε αυτή θα είναι ίνωση.

Θεώρημα 3.2.4. *Εάν $p : E \rightarrow B$ είναι μια ινώδης δέσμη με τον B παρασυμπαγή και Hausdorff, τότε αυτή είναι ίνωση.*

Απόδειξη. Εφ' όσον η $p : E \rightarrow B$ είναι ινώδης δέσμη, σημαίνει ότι υπάρχει ένα κάλυμμα τετριμμενοποίησης $\mathcal{C} = \{U_a\}_{a \in A}$ του B , το οποίο θα δέχεται διαμέριση της μονάδος, αφού ο B είναι παρασυμπαγής και χώρος Hausdorff. Επίσης εύκολα παρατηρεί κανείς ότι οι προβολές:

$$\pi_U : U \times F \rightarrow U,$$

είναι ινώσεις για κάθε $U \in \mathcal{C}$. Αφού για τυχούσες f, H και για κάθε τοπολογικό χώρο X , το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & p^{-1}(U) \\ i_0 \downarrow & \tilde{H} \nearrow & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & U, \end{array}$$

γίνεται μεταθετικό για $\tilde{H}(x, t) = (H(x, t), \pi_2(f(x, 0)))$, όπου $\pi_2 : U \times F \rightarrow F$ η προβολή στην δεύτερη συνιστώσα. Αυτό όμως μας εξασφαλίζει πως και η p είναι τοπικά μια ίνωση για κάθε $U \in \mathcal{C}$, γιατί από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\phi} & p^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U & \swarrow p \\ & U & \end{array}$$

Έτσι από το θεώρημα του Hurewicz (Θεώρημα 3.1.10) έπεται το ζητούμενο. □

3.3 ΚΥΡΙΕΣ G -ΔΕΣΜΕΣ

Μια σημαντική κατηγορία ινωδών δεσμών που αξίζει να αναφέρουμε αποτελούν οι κύριες G -δέσμες. Πρόκειται για μια ειδική περίπτωση ινωδών δεσμών, ωστόσο μπορεί να την χρησιμοποιήσει κανείς για να κατασκευάσει ινώδεις δέσμες. Αντίστροφα κάθε ινώδης δέσμη ορίζει μια κύρια G -δέσμη. Μια

τέτοια δέσμη τεχνικά είναι απλούστερη, αφού η ίνα F ταυτίζεται με την ομάδα δομής G . Επίσης η αριστερή δράση η οποία ορίζεται είναι αυτή που προκύπτει κατά φυσικό τρόπο (**left translation**) και έχει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} * : G \times F &\longrightarrow F \\ (g, f) &\longrightarrow *(g, f) = gf. \end{aligned}$$

Στο δεξί μέλος της ισότητας έχουμε την πράξη της G .

Ορισμός 3.3.1. Μια κύρια G -δέσμη $p : E \rightarrow B$, είναι μια ιώδης δέσμη με την ίνα F να ταυτίζεται με την ομάδα δομής G , η οποία δρα στην ίνα με τον τρόπο που ορίσαμε παραπάνω.

Η χρησιμότητα αυτών των δέσμων φαίνεται στην επόμενη πρόταση, αφού όπως θα δούμε φέρουν πολύ καλές ιδιότητες.

Πρόταση 3.3.2. Εάν $p : E \rightarrow B$ μια κύρια G -δέσμη, τότε η G δρα ελεύθερα στον E από τα δεξιά με τον χώρο τροχιών να είναι ομοιομορφικός με τον B .

Απόδειξη. Έστω $p : E \rightarrow B$ μια κύρια G -δέσμη. Παρατηρούμε πρώτα ότι η G δρα πάνω στις τετριμμενοποιήσεις από τα δεξιά μέσω της δράσης:

$$\begin{aligned} (U \times G) \times G &\longrightarrow U \times G \\ ((u, g), g') &\longmapsto (u, g \cdot g') \end{aligned}$$

όπου στα δεξιά έχουμε το γινόμενο της ομάδας. Επίσης από την μεταθετικότητα του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow[\pi_U]{} & p^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U & \swarrow p \\ & & U \end{array}$$

μπορούμε μέσω της ϕ_U να ορίσουμε δράση στον E ως εξής: $\phi_U(u, g) * g' = \phi_U(u, g \cdot g')$. Η τελευταία όμως είναι ελεύθερη αφού εάν $\phi_U(u, g) = \phi_U(u, g) * g' = \phi_U(u, g \cdot g')$, θα έχουμε $g = g \cdot g'$ εφ' όσον ϕ_U ομοιομορφισμός. Άρα $g' = e_G$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\sigma : E/G \rightarrow B$ με τύπο $[e] \longmapsto \sigma([e]) = p(e)$. Η σ είναι καλά ορισμένη: εάν διαλέξουμε τυχαία στοιχεία $[e] = [e'] \in E/G$ θα ισχύει ότι $e, e' \in p^{-1}(U)$, αφού από την υπόθεση η G δρα αποτελεσματικά στην ίνα. Συνεπώς εάν έχουμε $e \in p^{-1}(x)$ για κάποιο $x \in B$ τότε και $ew \in p^{-1}(x)$, λόγω κλειστότητας της δράσης, όπου $w \in G$ τέτοιο ώστε

$e' = ew$. Άρα $e' \in p^{-1}(x)$, ενώ διάλεξαμε U κάποια περιοχή του x . Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε τυχούσα απεικόνιση τετριμμενοποίησης:

$$\phi_U : U \times G \rightarrow p^{-1}(U),$$

όπου θα υπάρχουν στοιχεία $(u, g), (u', g') \in U \times G$ για τα οποία:

$$\phi_U(u, g) = e \text{ και } \phi_U(u', g') = e'.$$

Τώρα, εάν υποθέσουμε ότι $[e] = [e']$ θα υπάρχει στοιχείο $w \in G$ τέτοιο ώστε $e = e'w$. Άρα από την δράση που ορίσαμε παραπάνω έχουμε:

$$\phi_U(u, g) = \phi_U(u', g')w = \phi_U(u', g'w).$$

Το τελευταίο όμως ισχύει αν και μόνο αν $u = u'$ και $g = g'w$. Άρα έχουμε ότι

$$p \circ \phi_U(u, g) = p \circ \phi_U(u, g'),$$

απ' όπου παίρνουμε $p(e) = p(e')$. Όσον αφορά την συνέχεια, ο χώρος τροχιών E/G είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία πηλίκου που επάγεται από την απεικόνιση $q : E \rightarrow E/G$, ενώ από την καθολική ιδιότητα των χώρων πηλίκου έχουμε το εξής διάγραμμα :

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ q \downarrow & \searrow p & \\ E/G & \xrightarrow{\sigma} & B. \end{array}$$

στο οποίο η σ θα είναι συνεχής αν και μόνο αν η $\sigma \circ \pi(e) = p(e)$ είναι συνεχής. Αυτό όμως είναι αληθές από την υπόθεση. Επίσης η σ είναι επί. Μένει να δείξουμε ότι είναι ένα-πρός-ένα. Πράγματι όμως, εάν $\sigma([e]) = \sigma([e'])$, έχουμε $p(e) = p(e') \in U$ (όπου η U είναι στοιχείο του καλύμματος του B), ενώ $e, e' \in p^{-1}(U)$. Τότε όμως υπάρχουν $(u, g), (u', g') \in U \times G$ τέτοια ώστε $\phi_U(u, g) = e$ και $\phi_U(u', g') = e'$ και από την μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος ισχύει:

$$(p \circ \phi_U)(u, g) = p(e)$$

$$(p \circ \phi_U)(u', g') = p(e').$$

Εάν όμως επιτρέψουμε στο στοιχείο $g(g')^{-1}$ να δράσει στο $\phi_U(u, g') = e'$ θα έχουμε $\phi_U(u, g'(g')^{-1}g) = e'(g')^{-1}g = \phi_U(u, g)$. Δηλαδή $e = e'(g')^{-1}g$. Συνεπώς $[e] = [e']$. Άρα $E/G \cong B$.

□

Ένα οικείο παράδειγμα κύριας G -δέσμης αποτελεί κάθε κανονικός καλυπτικός χώρος. Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη ενότητα (παράδειγμα 4 στην σελίδα 22) η απεικόνιση $p : E \rightarrow B$ με $G = \pi_1(B)/p_*(\pi_1(E))$, είναι μια ινώδης δέσμη όπου στην G έχει δοθεί η διακριτή τοπολογία. Από τους καλυπτικούς χώρους γνωρίζουμε (βλέπε στο [15] στην σελίδα 281) ότι:

$$|p^{-1}(b_0)| = [\pi_1(B, b_0) : p_*(\pi_1(E, e_0))].$$

Εάν δώσουμε στην $\pi_1(B, b_0)$ την διακριτή τοπολογία, η ομάδα πηλίκου

$$\pi_1(B, b_0) / p_*(\pi_1(E, e_0)),$$

έχει την τοπολογία πηλίκου που επάγεται από την φυσική προβολή, η οποία είναι η διακριτή επίσης. Τότε όμως θα έχουμε δύο διακριτούς τοπολογικούς χώρους με την ίδια πληθικότητα και ως εκ τούτου ομοιομορφικούς. Άρα η \tilde{B} ταυτίζεται με την ομάδα δομής. Ειδικότερα κάθε καθολικός καλυπτικός χώρος $\tilde{B} \rightarrow B$ ενός χώρου είναι μια κύρια $\pi_1(B)$ -δέσμη. Ενώ ένας μη-κανονικός καλυπτικός χώρος δεν αποτελεί κύρια G -δέσμη.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω υπάρχει στενή σχέση μεταξύ των ινώδων δέσμων και των κυρίων, αφού από κάθε ινώδη δέσμη επάγεται μια κύρια και αντίστροφα.

Έστω ότι $p : E \rightarrow B$ είναι μια κύρια G -δέσμη. Εξ' ορισμού η G δρα από τα αριστερά στον F , δηλαδή μια δράση $G \times F \rightarrow F$ μας δίνεται. Ορίζουμε τον χώρο:

$$E \times_G F,$$

να είναι ο χώρος πηλίκου $E \times F / \sim$, όπου έχουμε κάνει την ταύτιση

$$(x, f) \sim (xg, g^{-1}f).$$

Η παραπάνω κατασκευή αναφέρεται συχνά στην βιβλιογραφία ως κατασκευή του *Borel*. (Συνεχίζουμε να υποθέτουμε ότι η G δρα στον F από τα αριστερά ενώ από την Πρόταση 3.2.4 γνωρίζουμε ότι δρα ελεύθερα στον E από τα δεξιά.)

Έστω η κλάση ισοδυναμίας $[x, f] \in E \times_G F$ του στοιχείου (x, f) . Ορίζουμε την απεικόνιση:

$$q : E \times_G F \rightarrow B,$$

με τύπο $[x, f] \mapsto p(x)$. Τότε η q αποτελεί μια ινώδη δέσμη με \tilde{B} την F και ομάδα δομής την G , την οποία καλούμε ινώδη δέσμη που συνδέεται με την κύρια G -δέσμη $p : E \rightarrow B$ μέσω της δράσης της G πάνω στην F . Για να δείξουμε το παραπάνω θα πρέπει να ορίσουμε ένα κάλυμμα τετριμμενοποίησης για τον B και να ορίσουμε ομοιομορφισμούς $\tilde{\phi}_{U_\alpha}$ οι οποίοι μας δίνουν

μεταθετικότητα στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} U_a \times F & \xrightarrow{\tilde{\phi}_{U_a}} & q^{-1}(U_a) \\ & \searrow \tilde{\pi}_{U_a} & \swarrow q \\ & & U_a. \end{array}$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι η $p : E \rightarrow B$ είναι μια κύρια G -δέσμη. Συνεπώς θεωρούμε ως το ζητούμενο κάλυμμα για τον B το ήδη υπάρχον στην κύρια δέσμη, $\{U_a\}_{a \in A}$ και θεωρούμε απεικόνιση $s_a : U_a \rightarrow p^{-1}(U_a)$ με τύπο $s_a(u_a) = \phi_a^{-1}(u_a, e)$, όπου ϕ_a η απεικόνιση τετριμμενοποίησης της κύριας δέσμης. Δηλαδή ο ομοιομορφισμός που μας δίνει μεταθετικότητα στο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_a) & \xrightarrow{\phi_{U_a}} & U_a \times F \\ & \searrow \pi_{U_a} & \swarrow p \\ & & U_a. \end{array}$$

Έτσι ορίζουμε οι ζητούμενες απεικονίσεις τετριμμενοποίησης για την ινώδη δέσμη να είναι οι ομοιομορφισμοί με τύπο $\tilde{\phi}_{U_a}(u_a, f) = [s_a(u_a), f]$. Αυτές πράγματι μας δίνουν μεταθετικότητα, αφού $(q \circ \tilde{\phi}_{U_a})(u_a, f) = q([s_a(u_a), f]) = (p \circ s_a)(u_a) = (p \circ \phi_a^{-1})(u_a, e) = \pi_{U_a}(u_a, e) = u_a = \tilde{\pi}_{U_a}(u_a, f)$. Βλέπουμε ότι η απεικόνιση

$$(\tilde{\phi}_{U_a})^{-1} : q^{-1}(U_a) \rightarrow U_a \times F,$$

με τύπο $(\tilde{\phi}_{U_a})^{-1}([x, f]) = (p(x), f)$, είναι η αντίστροφη της $\tilde{\phi}_{U_a}$. Μπορεί κανείς εύκολα να ελέγξει ότι ισχύει $\tilde{\phi}_{U_a} \circ (\tilde{\phi}_{U_a})^{-1} = id_{q^{-1}(U_a)}$ και $(\tilde{\phi}_{U_a})^{-1} \circ \tilde{\phi}_{U_a} = id_{U_a \times F}$.

Αντίστροφα τώρα, εάν ξεκινήσουμε με μια ινώδη δέσμη $p : E \rightarrow B$. Υπάρχει κάλυμμα τετριμμενοποίησης για τον βασικό χώρο B έστω $\{U_a\}_{a \in A}$, μια ίνα F και μια ομάδα δομής G η οποία δρα πάνω στην ίνα αποτελεσματικά. Ορίζουμε τον χώρο $X = \bigcup_{a \in A} U_a \times F$ και έπειτα για στοιχεία $(u, f) \in U_a \times F$, $(v, f') \in U_b \times F$ όπου $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, κάνουμε την ταύτιση

$$(u, f) \sim (v, f') \Leftrightarrow u = v \text{ και } f' = \theta_{ab}(u) \cdot f,$$

όπου $\theta_{ab} : U_a \cap U_b \rightarrow G$ απεικόνιση μετάβασης. Θέτουμε $E' = X / \sim$ και ορίζουμε την απεικόνιση:

$$\pi : E' \longrightarrow B$$

$$[u, f] \longmapsto u.$$

Αυτή είναι καλά ορισμένη και συνεχής αφού από την καθολική ιδιότητα των χώρων πηλίκου γνωρίζουμε ότι η π είναι συνεχής αν και μόνο αν η απεικόνιση με τύπο :

$$g = \pi \circ q : X \rightarrow B$$

$$(u_a, f) \mapsto u_a,$$

είναι συνεχής. Η τελευταία όμως είναι συνεχής, επειδή είναι η προβολή στην πρώτη συνιστώσα. Εάν θεωρήσουμε ως τις ζητούμενες απεικονίσεις τριτομενοποίησης τις $\phi_a(u_a, f) = [u_a, f]$, τότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό :

$$\begin{array}{ccc} U_a \times F & \xrightarrow{\phi_a} & \pi^{-1}(U_a) \\ & \searrow \text{pr} \cdot U_a & \swarrow \pi \\ & & U_a. \end{array}$$

Έτσι αυτό που καταφεραμε είναι να κατασκευάσουμε μια ινώδη δέσμη από μια ήδη υπάρχουσα, η οποία έχει την ίδια ίνα F και ομάδα δομής G με την αρχική. Εάν υποθέσουμε τώρα ότι η ομάδα δομής δρα και σε έναν άλλο χώρο F' αποτελεσματικά τότε αντικαθιστώντας στην παραπάνω κατασκευή την F με την F' θα πάρουμε και πάλι μια ινώδη δέσμη, μόνο που τώρα οι δυο δέσμες θα διαφέρουν ως προς τις ίνες τους. Ξεκινήσαμε όμως από μια τοπολογική ομάδα G , η οποία δρα αποτελεσματικά πάντοτε πάνω στον εαυτό της με την φυσική δράση που επάγεται από την πράξη της, επομένως μπορούμε να ταυτίσουμε την F' με την G και να αποκτήσουμε μια κύρια G -δέσμη (E, π, B, F', G) , όπου η π έχει τύπο όπως στην παραπάνω κατασκευή και $F' = G$.

Όσον αφορά τις ϕ_a , αυτές είναι συνεχείς και επί. Αξίζει να αναφέρουμε ότι είναι και ένα-προς-ένα αφού από τον ορισμό της ινώδους δέσμης έχουμε ότι εάν θεωρήσουμε χάρτη πάνω από ένα στοιχείο της κάλυψης, τότε και ο περιορισμός του σε οποιοδήποτε ανοιχτό υποσύνολο συνεχίζει να αποτελεί χάρτη. Συνεπώς εάν επιλέξουμε $U_a \cap U_b \subset U_a$, το οποίο είναι ανοιχτό υποσύνολο του U_a εφοδιασμένο με την τοπολογία του υποχώρου, θα έχουμε μεταθετικότητα στο παρακάτω διάγραμμα :

$$\begin{array}{ccc} U_a \cap U_b \times F & \xrightarrow{\phi_a} & \pi^{-1}(U_a \cap U_b) \\ & \searrow \text{pr} \cdot U_a \cap U_b & \swarrow \pi \\ & & U_a \cap U_b. \end{array}$$

Ενώ εάν θεωρήσουμε $U_a \cap U_b \subset U_b$ και διαλέξουμε άλλο χάρτη ϕ_b πάνω από το U_b τότε και πάλι ο περιορισμός του θα αποτελεί χάρτη πάνω από το $U_a \cap U_b$, ενώ οι δύο χάρτες θα συνδέονται μέσω απεικόνισης μετάβασης

$\theta_{ab} : U_a \cap U_b \rightarrow G$. Ισχύει ότι ο $\phi_b \circ \phi_a^{-1} : U_a \cap U_b \times F \rightarrow U_a \cap U_b \times F$ είναι ομοιομορφισμός και μάλιστα

$$\phi_b \circ \phi_a^{-1}(u, f) = (u, \theta_{ab}(u) \cdot f).$$

Έτσι εάν $a = b$ θα έχουμε ταυτότητα στο αριστερό μέλος της ισότητας. Άρα $\theta_{aa} = e_G$. Αυτό μας εξασφαλίζει ότι εάν $\phi_a(u, f) = \phi_a(u', f')$ τότε $u = u'$ και $f = \theta_{aa}(u) \cdot f' = f'$ για τυχαία στοιχεία $(u, f), (u', f') \in U_a \times F$. Το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Μια άλλη χρήσιμη ιδιότητα που φέρουν οι κύριες G -δέσμες είναι αυτή της κατασκευής νέων από ήδη υπάρχουσες με διαφορετική ομάδα δομής. Έστω μια κύρια δέσμη $p : E \rightarrow B$ με ομάδα δομής την H , την οποία μπορούμε να δούμε ως τοπολογική υποομάδα κάποιας τοπολογικής ομάδας G . Εάν η G δρα με φυσικό τρόπο που επάγεται από την πράξη της G , τότε η απεικόνιση

$$q : E \times_H G \rightarrow B$$

είναι μια κύρια G -δέσμη. Ο χώρος $E \times_H G$ είναι η κατασκευή του *Borel* που αναφέραμε παραπάνω.

Κεφάλαιο 4

ΟΜΑΔΕΣ ΠΛΕΞΙΔΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΙ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν κεφάλαιο θα μιλήσουμε για ομάδες πλεξίδων και την σχέση τους με πρωταρχικές ομάδες χώρων διαμόρφωσης. Οι ομάδες αυτές εμφανίζονται για πρώτη φορά σε μια εργασία του **Emil Artin** τον περασμένο αιώνα (1926) και από εκεί και έπειτα, η θεωρία πλεξίδων αποτέλεσε μια σημαντική περιοχή των μαθηματικών, με εφαρμογές στην συνδυαστική τοπολογία, άλγεβρα, συνδυαστική αλλά και σε άλλους κλάδους, όπως η θεωρητική φυσική. Η θεωρία αυτή επεκτείνεται σε πολλά διαφορετικά πεδία, αφού υπάρχουν αρκετοί διαφορετικοί τρόποι να "δει" κανείς γεωμετρικά μια πλεξίδα. Αυτές οι ενδιαφέρουσες και διαφορετικές οπτικές του αντικειμένου αυτού αναφέρονται αναλυτικά σε μια εργασία του **Roger Fenn** (βλέπε στο [8]). Στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε τις πλεξίδες από τοπολογική σκοπιά, αφού θα δούμε μια ομάδα πλεξίδων ως πρωταρχική ομάδα χώρων διαμόρφωσης. Η ιδέα αυτή αναπτύχθηκε σε μια εργασία των **Fox, Fadell** και **Neuwirth** το 1962 (βλέπε στο [9] και [7]). Θα ξεκινήσουμε δίνοντας έναν ορισμό της ομάδας πλεξίδων έτσι όπως ορίστηκαν από τον Artin. Στην συνέχεια θα ορίσουμε έναν χώρο διαμόρφωσης και στο τέλος αυτού του κεφαλαίου θα αποδείξουμε ότι η πρωταρχική ομάδα συγκεκριμένων χώρων διαμόρφωσης είναι ισόμορφη με μια ομάδα πλεξίδων. Σαν εφαρμογή θα δώσουμε απλούστερη περιγραφή χώρων Eilenberg-MacLane που σχετίζονται με επιφάνειες.

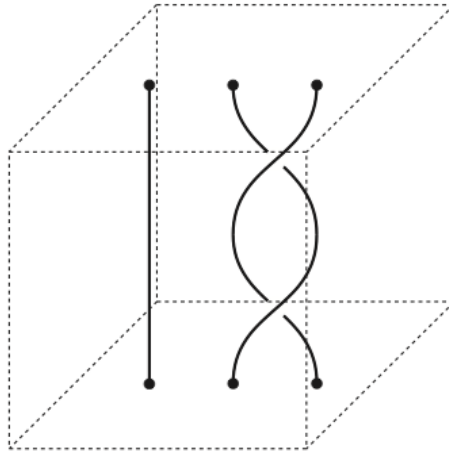
4.2 ΟΜΑΔΑ ΠΛΕΞΙΔΩΝ

Γεωμετρικά μια πλεξίδα μπορεί να θεωρηθεί ως αντικείμενο το οποίο βρίσκεται στον \mathbb{R}^3 . Επειδή μας είναι χρήσιμο να δούμε μια πλεξίδα σαν μια τροχιά, όπως θα δούμε στην συνέχεια, διευκολύνει περισσότερο εάν αντιμετωπίσουμε τις πλεξίδες ως αντικείμενα εμβαπτισμένα στον χώρο $\mathbb{C} \times [0, 1]$.

Για την κατασκευή των πλεξίδων, θα ορίσουμε ως **floor plane** το σύνολο $\mathbb{C} \times \{0\}$, ενώ θα καλούμε **ceiling plane** τον χώρο $\mathbb{C} \times \{1\}$. Σταθεροποιούμε n διακεκριμένα σημεία $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ στον ceiling plane και θεωρούμε τις προβολές αυτών στον floor plane τις οποίες θα συμβολίσουμε με $\{z'_1, z'_2, \dots, z'_n\}$. Ορίζουμε τις τροχιές $p_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$ οι οποίες έχουν αρχικό σημείο $z_i \in \mathbb{C} \times \{1\}$ και πέρασ την αντίστοιχη προβολή $z'_i \in \mathbb{C} \times \{0\}$ όπου $i = 1, 2, \dots, n$.

Ορισμός 4.2.1. Μια αμιγής πλεξίδα σε n νήματα (**pure braid on n -strands**) είναι μια συλλογή απο τροχιές (p_1, \dots, p_n) όπως παραπάνω η οποία ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

1. Κάθε p_i συναντά το επίπεδο $\mathbb{C} \times \{t\}$ σε ακριβώς ένα σημείο, για κάθε $t \in [0, 1]$ και $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Για κάθε $t \in [0, 1]$, το σύνολο των τροχιών (p_1, \dots, p_n) συναντά το $\mathbb{C} \times \{t\}$ σε n ακριβώς **διακεκριμένα σημεία**.



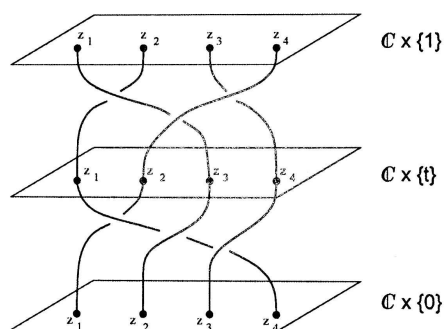
Σχήμα 4.1: Παράδειγμα μιας αμιγούς πλεξίδας σε 3-νήματα

Πιο γενικά όμως, μπορεί κανείς να ορίσει τροχιές $b_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$ των οποίων τα αρχικά σημεία είναι τα $z_i \in \mathbb{C} \times \{1\}$, αλλά το πέρασ τους είναι

το σημείο $z_{\tau(i)} \in \mathbb{C} \times \{0\}$ για $i = 1, 2, \dots, n$, όπου τ είναι μια μετάθεση της συμμετρικής ομάδας S_n σε n στοιχεία.

Ορισμός 4.2.2. Μια τυχούσα πλεξίδα σε n νήματα (**arbitrary braid on n -strands**) είναι μια συλλογή από τροχιές (b_1, b_2, \dots, b_n) όπως τις περιγράψαμε προηγουμένως, οι οποίες ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

1. Κάθε b_i συναντά το επίπεδο $\mathbb{C} \times \{t\}$ σε ένα ακριβώς σημείο, για κάθε $t \in [0, 1]$ και για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Για κάθε $t \in [0, 1]$, το σύνολο των τροχιών (b_1, b_2, \dots, b_n) συναντά το $\mathbb{C} \times \{t\}$ σε n **διακεκριμένα** σημεία.



Σχήμα 4.2: Παράδειγμα μιας πλεξίδας σε 4-νήματα με μετάθεση $\tau=(1\ 2\ 4)$.

Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς συγκρίνοντας τους δυο τελευταίους ορισμούς, ότι οι αμιγείς πλεξίδες είναι ένα υποσύνολο των πιο γενικών, αφού μια αμιγής πλεξίδα αποτελεί μια τυχούσα, όπου έχουμε επιλέξει ως μετάθεση την ταυτοτική της S_n .

Δύο πλεξίδες $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ και $\tilde{\beta} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)$ με την ίδια μετάθεση $\tau \in S_n$ θα καλούνται ισοδύναμες, ή ότι ανήκουν στην ίδια κλάση ομοτοπίας, εάν υπάρχει μια συλλογή από ομοτοπίες $F_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$ τέτοιες ώστε για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ να ισχύει,

$$F_i(t, 0) = b_i(t) \quad , \quad F_i(t, 1) = \tilde{b}_i(t),$$

$$F_i(0, s) = z_i \quad , \quad F_i(1, s) = z_{\tau(i)}.$$

Επιπλέον, για κάθε s που ανήκει στο διάστημα $[0, 1]$, η συλλογή:

$$(F_1(t, s), F_2(t, s), \dots, F_n(t, s)),$$

πρέπει να είναι μια πλεξίδα σε n νήματα με μετάθεση τ .

Ορισμός 4.2.3. Το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας των πλεξίδων σε n νήματα καλείται ομάδα του Artin και συμβολίζεται με B_n . Επίσης, θα καλούμε αμιγή ομάδα πλεξίδων σε n νήματα, το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας πλεξίδων όπου κάθε τροχιά τους p_i , ενώνει το σημείο z_i με την αντίστοιχη προβολή του για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ και το συμβολίζουμε με P_n .

Στον προηγούμενο ορισμό κάναμε αναφορά στην ομάδα του Artin, χωρίς όμως να έχουμε προσδιορίσει την πράξη η οποία καθιστά το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας των πλεξίδων σε n νήματα ομάδα. Στην επόμενη πρόταση θα αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό, θεωρώντας την ζητούμενη πράξη ως μια αλληλουχία, όπου κάποιος "κολλάει" τροχιές μεταξύ τους. Ωστόσο θα πρέπει να προσέξει κανείς, αφού το αποτέλεσμα μετά από την εφαρμογή της πράξης σε δύο τυχαίες πλεξίδες, θα βρίσκεται στον χώρο $\mathbb{C} \times [0, 2]$ και όχι στον αρχικό μας χώρο $\mathbb{C} \times [0, 1]$. Για να αποφύγουμε αυτό, μαζί με την αλληλουχία των πλεξίδων που ορίζει η πράξη, κάνουμε και ένα τελευταίο βήμα, το οποίο διαισθητικά μπορεί να αντιληφθεί κανείς σαν την πίεση της καινούργιας πλεξίδα στο αρχικό μας χώρο.

Πρόταση 4.2.4. Η B_n μαζί με την πράξη που περιγράψαμε προηγουμένως αποτελεί ομάδα. Ενώ η P_n είναι κανονική της υποομάδα.

Απόδειξη. Καθ' όλη την διάρκεια της απόδειξης θα εργαστούμε με τους αναπαραστάτες των κλάσεων χάριν ευκολίας. Πρώτα απ' όλα, πρέπει να εξετάσουμε, εάν η πράξη έτσι όπως ορίστηκε είναι καλά ορισμένη. Για τον λόγο αυτό θεωρούμε β_1 να ανήκει στην ίδια κλάση ομοτοπίας με το $\tilde{\beta}_1$ και β_2 να ανήκει στην ίδια κλάση ομοτοπίας με την $\tilde{\beta}_2$ όπου επιλέξαμε τυχαία $\beta_1, \tilde{\beta}_1, \beta_2, \tilde{\beta}_2 \in B_n$. Έστω ότι με \star συμβολίζουμε την πράξη μας. Εφ' όσον η β_1 βρίσκεται στην ίδια κλάση ομοτοπίας με την $\tilde{\beta}_1$ έχουμε ότι $\beta_1 \star \beta_2$ ανήκει στην ίδια κλάση με την $\tilde{\beta}_1 \star \beta_2$. Με τον ίδιο τρόπο εφ' όσον η β_2 ανήκει στην ίδια κλάση με την $\tilde{\beta}_2$, έχουμε ότι $\tilde{\beta}_1 \star \beta_2$ ανήκει στην ίδια κλάση ομοτοπίας με την $\tilde{\beta}_1 \star \tilde{\beta}_2$ και έτσι θα έχουμε ότι το $\beta_1 \star \beta_2$ βρίσκεται στην ίδια κλάση ομοτοπίας με την πλεξίδα $\tilde{\beta}_1 \star \tilde{\beta}_2$.

Έπειτα πρέπει να εξετάσουμε εάν ισχύουν οι τρεις ιδιότητες που απαιτούνται στον ορισμό της ομάδας. Έτσι λοιπόν έχουμε τα εξής:

1. Προσεταιριστικότητα :

Διαλέγουμε τυχαία στοιχεία της B_n με αναπαραστάτες β_1, β_2 και β_3 . Τότε

ισχύει ότι $(\beta_1 \star \beta_2) \star \beta_3 \simeq \beta_1 \star (\beta_2 \star \beta_3)$ μέσω ομοτοπίας με τύπο:

$$H(t, s) = \begin{cases} \beta_1\left(\frac{t}{\frac{1}{2}(1-s) + \frac{1}{4}s}\right), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}(1-s) + \frac{1}{4}s \\ \beta_2\left(\frac{t - [\frac{1}{2}(1-s) + \frac{1}{4}s]}{\frac{1}{4}(1-s) + \frac{1}{4}s}\right), & \frac{1}{2}(1-s) + \frac{1}{4}s \leq t \leq \frac{3}{4}(1-s) + \frac{1}{2}s \\ \beta_3\left(\frac{t - [\frac{3}{4}(1-s) + \frac{1}{2}s]}{1 - [\frac{3}{4}(1-s) + \frac{1}{2}s]}\right), & \frac{3}{4}(1-s) \leq t \leq 1. \end{cases}$$

2. Ουδέτερο στοιχείο:

Το ζητούμενο στοιχείο είναι η τετριμμένη πλεξίδα σε n νήματα, την οποία θα συμβολίσουμε με ω που αποτελείται από n διακεκριμένα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία συνδέουν τα στοιχεία $z_i \in \mathbb{C} \times \{1\}$ με τις αντίστοιχες προβολές τους $z_i \in \mathbb{C} \times \{0\}$. Εάν επιλέξουμε τυχαίο στοιχείο $[\beta_1] \in B_n$ τότε έχουμε ότι $\beta_1 \omega \simeq \omega \beta_1 \simeq \beta_1$.

3. Ύπαρξη αντιστρόφου στοιχείου:

Εάν επιλέξουμε τυχαίο στοιχείο $[\beta] \in B_n$ τότε μπορούμε να αποκτήσουμε το αντίστροφο, μέσω της ανάκλασης του στο $\mathbb{C} \times \{0\}$, το οποίο και θα συμβολίσουμε με $[\beta]^{-1}$.

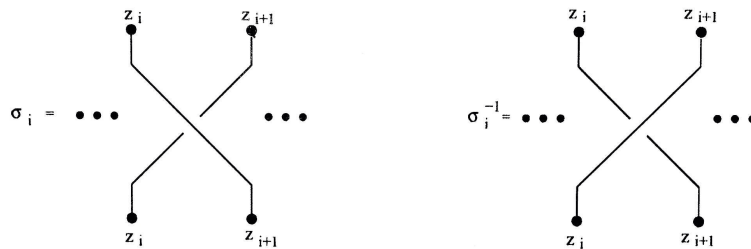
Συνεπώς δείξαμε τις τρεις ιδιότητες που θέλαμε και το μόνο που μένει, είναι να δείξουμε την κανονικότητα της P_n . Είναι εμφανές ότι η τελευταία αποτελεί υποσύνολο της ομάδας του Artin. Για κάθε στοιχείο της υπάρχει αντίστροφος, του οποίου η ύπαρξη εξασφαλίζεται όπως και στην γενική περίπτωση από την κλάση που δίνεται μέσω της ανάκλασης της πλεξίδας δια του χώρου $\mathbb{C} \times \{0\}$. Επίσης το ουδέτερο στοιχείο ανήκει στην P_n , αφού ταυτίσαμε τα στοιχεία της με εκείνα της B_n των οποίων η μετάθεση είναι η ταυτοτική της S_n . Τέλος η "αλληλουχία" δύο τυχαίων στοιχείων της είναι και πάλι μια αμιγής πλεξίδα σε n νήματα. Συνεπώς αποδείξαμε πως είναι υποομάδα. Τέλος, θα δείξουμε την κανονικότητα. Έστω στοιχείο $[\beta] \in B_n$ με μετάθεση τ . Τότε για κάθε $[p] \in P_n$, η πλεξίδα $[\beta \star p \star \beta^{-1}]$ έχει μετάθεση $\tau^{-1}e\tau$, η οποία είναι η e , δηλαδή η ταυτοτική μετάθεση της S_n . Έτσι, $[\beta^{-1} \star p \star \beta] \in P_n$ για κάθε $[p] \in P_n$. Άρα αποδείξαμε ότι $P_n \trianglelefteq B_n$ και μ' αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη μας. \square

Παρατήρηση 4.2.5. Σε κάθε πλεξίδα αντιστοιχεί μια μετάθεση σύμφωνα με τον ορισμό. Επομένως επάγεται ένας φυσικός επιμορφισμός $\varphi : B_n \rightarrow S_n$ του οποίου ο πυρήνας είναι η ομάδα P_n . Έτσι από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε ότι $B_n/P_n \cong S_n$. Αυτός είναι και ο λόγος που η ομάδα του Artin θεωρείται γενίκευση της συμμετρικής ομάδας, πράγμα που θα γίνει

καλύτερα αντιληπτό στην συνέχεια όπου θα δώσουμε μια παράσταση ικανή για την περιγραφή της.

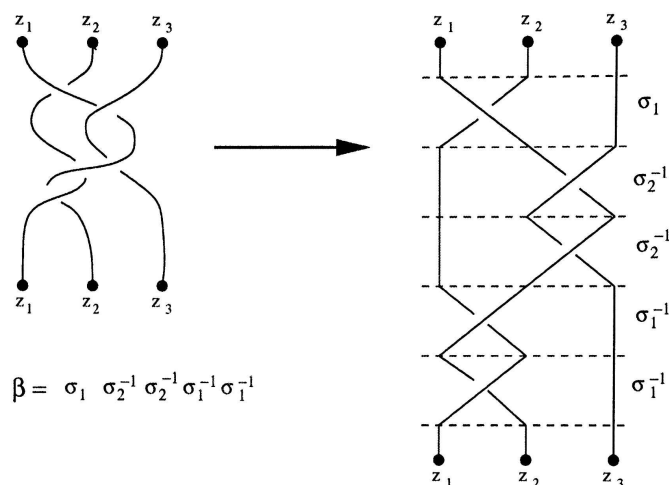
Εφόσον αποδείξαμε ότι η B_n είναι ομάδα, ο επόμενος στόχος μας είναι να βρούμε μια παράσταση γι' αυτήν. Πρώτο βήμα γι' αυτό αποτελεί η παρατήρηση ότι κάθε στοιχείο της B_n μπορεί να θεωρηθεί ως μια ακολουθία από βασικές πλεξίδες (elementary braids) τις οποίες και θα συμβολίζουμε με σ_i και σ_i^{-1} και έχουν την παρακάτω μορφή:

Ορίζουμε ως σ_i να είναι η πλεξίδα με το i -οστό νήμα να βρίσκεται πάνω από το $(i+1)$ -οστό και σε όλα τα υπόλοιπα νήματα απλές ευθείες γραμμές. Και με όμοιο τρόπο θα ορίσουμε την αντίστροφη αυτής της πλεξίδας μέσω της ανάκλασης της στο floor plane. Δηλαδή μια πλεξίδα όπου το i -οστό νήμα αυτή την φορά να βρίσκεται κάτω από το $(i+1)$ -οστό και ευθείες γραμμές σε όλα τα υπόλοιπα νήματα και συμβολισμό σ_i^{-1} .



Σχήμα 4.3: Οι βασικές πλεξίδες σ_i και σ_i^{-1} όπως τις περιγράψαμε παραπάνω.

Μέσω αυτής της διαδικασίας, μπορούμε να μετατρέψουμε κάθε $[\beta] \in B_n$ μέσω ομοτοπίας σε πλεξίδα που προκύπτει από το γινόμενο βασικών πλεξίδων. Από τα παραπάνω έχουμε ότι το σύνολο $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ αποτελεί σύνολο γεννητόρων για την B_n . Παράδειγμα πλεξίδας η οποία γράφεται ως ακολουθία βασικών, αποτελεί το επόμενο σχήμα:

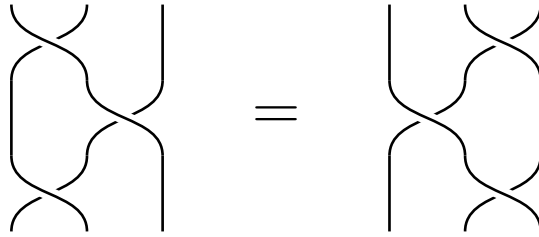


Σχήμα 4.4: Μια πλεξίδα σε 3-νήματα την οποία γράψαμε ως ακολουθία των βασικών της.

Επίσης ο ίδιος ο Artin απέδειξε ότι υπάρχουν και δύο σχέσεις μεταξύ των γεννητόρων, οι οποίες μας δίνουν ένα σύνολο οριζουσών σχέσεων για την B_n και έχουν την εξής μορφή:

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ όταν $|i - j| \geq 2$, $1 \leq i, j \leq n - 1$,
2. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ όταν $1 \leq i \leq n - 2$.

Η πρώτη σχέση ισχύει αφού οι σ_i και σ_j δρούν μόνο στα ζεύγη των νημάτων $(i, i + 1)$ και $(j, j + 1)$ αντίστοιχα και λόγω του περιορισμού των δεικτών που έχουμε το σ_i δεν δρά στα ζεύγη $(j, j + 1)$ και η σ_j στα $(i, i + 1)$. Έτσι η σειρά με την οποία τα πολλαπλασιάζουμε δεν επηρεάζεται. Για την δεύτερη σχέση πρέπει να παρατηρήσει κανείς ότι οι πλεξίδες που προκύπτουν από τις $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ και $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ είναι ισοδύναμες. Αυτό διασθητικά μπορεί να γίνει αντιληπτό σχεδιάζοντας την μια από τις δύο πλεξίδες πάνω σε ένα γυαλί και περιστρέφοντας το αυτό που θα δεί είναι η δεύτερη. Αυτό φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Με αυτές τις δύο σχέσεις έχουμε μια παράσταση ικανή να περιγράψουμε την ομάδα του Artin:

$$B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ όταν } |i - j| \geq 2, 1 \leq i, j \leq n - 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ όταν } 1 \leq i \leq n - 2 \rangle.$$

Θα περιγράψουμε μια οικογένεια στοιχείων της αμιγούς ομάδας πλεξίδων της οποίας ο ρόλος είναι σημαντικός στη διάσπαση αυτών των ομάδων σε απλούστερες.

Για $1 \leq i < j \leq n$ συμβολίζουμε με $a_{i,j}$ το στοιχείο

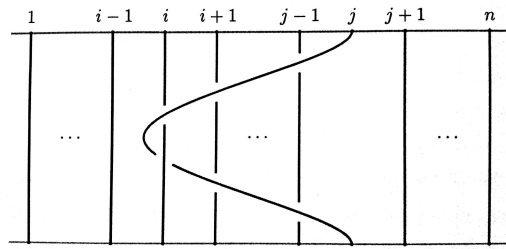
$$a_{i,j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_i.$$

Παρατηρούμε ότι $\sigma_i = a_{1,i+1} a_{1,i}^{-1}$.

Ορίζουμε τώρα το στοιχείο $A_{i,j}$ ως εξής

$$A_{i,j} = a_{i+1,j} (a_{1,i+1} a_{1,i}^{-1})^2 a_{i+1,j}^{-1}.$$

Η εικόνα $A_{i,j}$ δίνεται στο επόμενο σχήμα



Σχήμα 4.5: Η πλεξίδα σε n νήματα $A_{i,j}$ όπου $1 \leq i < j \leq n$.

Ας δούμε τις ιδιότητες του $A_{i,n}$ για όλα τα $i < n$. Αν από την πλεξίδα $A_{i,n}$ αφαιρέσουμε το n -οστό νήμα, τότε έχουμε την ταυτοτική πλεξίδα σε $n - 1$ νήματα.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$f_n : P_n \rightarrow P_{n-1},$$

η οποία από μια πλεξίδα σε n νήματα αφαιρεί το n -οστό, τότε έχουμε μια πλεξίδα σε $n - 1$ νήματα.

Ο πυρήνας της f_n είναι μια κανονική υποομάδα της P_n η οποία συμβολίζεται με U_n . Παρατηρούμε ότι $A_{i,n} \in U_n$ για όλα τα $i < n$. Αποδεικνύεται ότι η U_n είναι μια ελεύθερη ομάδα σε $n - 1$ γεννήτορες $\{A_{i,n} \mid 1 < i < n\}$ (Θεώρημα 1.16, βλέπε στο [17] στην σελίδα 20).

Επίσης μπορούμε να δείξουμε ότι η απεικόνιση $f_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$ έχει την ιδιότητα να περιγράφει την P_n σαν το ημιευθύ γινόμενο μεταξύ της P_{n-1} και U_n (βλέπε στο [17] στην σελίδα 20). Επαγωγικά λοιπόν μπορούμε να δούμε ότι η P_n είναι ημιευθύ γινόμενο ελεύθερων ομάδων. Η περιγραφή μιας τυχαίας αμιγούς πλεξίδας με την βοήθεια των γεννητόρων των προηγούμενων ελεύθερων ομάδων είναι γνωστή σαν το "**χτένισμα του Artin**".

Μέχρι στιγμής έχουμε θεωρήσει μια πλεξίδα ως μια συλλογή από τροχιές στον χώρο $\mathbb{C} \times [0, 1]$ η οποία απαιτείται να ικανοποιεί συγκεκριμένους κανόνες. Στην συνέχεια θα δούμε τις πλεξίδες σε n νήματα ως τροχιές σε χώρους $2n$ -διάστασης γνωστούς ως χώρους διαμόρφωσης (**configuration spaces**). Αυτό θα γίνει καλύτερα αντιληπτό αφού δώσουμε τον ορισμό ενός τέτοιου χώρου και αναφέρουμε συγκεκριμένες ιδιότητες τους.

Παρατήρηση 4.2.6. Όπως αναφέραμε και παραπάνω η B_n αποτελεί μια γενίκευση της S_n και αυτό γίνεται ακόμα πιο εμφανές μέσα από την παράσταση της, αφού εάν θεωρήσουμε και μια τρίτη σχέση όπου $\sigma_i^2 = e$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ τότε αποκτούμε παράσταση και για την S_n σε n στοιχεία.

4.3 ΧΩΡΟΙ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Έστω $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ μια συλλογή από n διατεταγμένα σημεία σε ένα τοπολογικό πολύπτυγμα \mathbb{M} διάστασης $n \geq 2$. Το σύνολο

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{M}^n \mid x_i \neq x_j, \text{ όταν } i \neq j\}$$

καλείται **χώρος διαμόρφωσης** σε n διατεταγμένα στοιχεία του \mathbb{M} και θα τον συμβολίζουμε με $Conf(\mathbb{M}, n)$. Το πολύπτυγμα που θα μελετήσουμε όμως στην παρούσα ενότητα είναι το \mathbb{C} και ο χώρος διαμόρφωσης του συγκεκριμένου πολυπύγματος είναι ο:

$$Conf(\mathbb{C}, n) = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j, \text{ όταν } i \neq j\}$$

n διατεταγμένων σημείων του \mathbb{C} .

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε και τον χώρο διαμόρφωσης n μη διατεταγμένων σημείων για τοπολογικό πολύπτυγμα \mathbb{M} ως τον χώρο πηλίκου

$$\text{Conf}(\mathbb{M}, n)/S_n.$$

Εδώ η δράση της S_n στον χώρο διαμόρφωσης του \mathbb{C} ορίζεται να είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \mu : \text{Conf}(\mathbb{C}, n) \times S_n &\longrightarrow \text{Conf}(\mathbb{C}, n), \\ \mu((z_1, z_2, \dots, z_n), \tau) &= (z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}, \dots, z_{\tau(n)}). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, εφ' όσον από τον ορισμό του ο χώρος $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$ έχει διακεκριμένα στοιχεία, η S_n δρά ελεύθερα πάνω του. Επίσης αυτό που έχουμε μετά από την συγκεκριμένη δράση είναι ένας χώρος πηλίκου όπου ταυτίσαμε όλα του τα σημεία που διαφέρουν κατά μια μετάθεση της S_n . Παραδείγματος χάριν το σημείο (z_1, z_2, z_3) θα είναι ισοδύναμο με το (z_2, z_1, z_3) στον χώρο $\text{Conf}(\mathbb{C}, 3)/S_3$. Έτσι όταν θα αναφερόμαστε σε στοιχεία του $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)/S_n$ θα μιλάμε για κλάσεις ισοδυναμίας σημείων. Ενώ για να ξεχωρίζουμε τα σημεία των χώρων διαμόρφωσης σε n διατεταγμένα και σε n μη διατεταγμένα σημεία θα τα συμβολίζουμε με \vec{z} και $[z]$ αντίστοιχα.

Η φυσική προβολή

$$\text{Conf}(\mathbb{M}, n) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{M}, n)/S_n,$$

αποτελεί καλυπτική απεικόνιση με n σημεία. Επειδή όμως κάθε καλυπτική απεικόνιση είναι n -πώση και η n είναι διακριτός χώρος, έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \pi_1(\text{Conf}(\mathbb{M}, n)) \longrightarrow \pi_1(\text{Conf}(\mathbb{M}, n)/S_n) \longrightarrow S_n \longrightarrow 0.$$

4.4 ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Στην παρούσα ενότητα θα αναφερθούμε και θα αποδείξουμε ένα θεώρημα του οποίου η απόδειξη οφείλεται στους Fadell και Neuwirth (βλέπε στο [7]), το οποίο αφορά τις προβολές των χώρων διαμόρφωσης ενός τυχαίου τοπολογικού πολύπτυγματος \mathbb{M} . Με αυτό τον τρόπο θα δημιουργήσουμε συγκεκριμένα μοντέλα για Eilenberg-MacLane χώρους. Τα μοντέλα αυτά περιγράφονται απλούστερα από την κατασκευή του Milnor. Πριν απ' αυτό όμως, θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ένα ενδιαφέρον θεώρημα που αποδείχθηκε από τους Fox και Neuwirth (βλέπε στο [9]) το οποίο συνδέει την πρωταρχική ομάδα του χώρου διαμόρφωσης του \mathbb{C} σε n μη διατεταγμένα σημεία, με την ομάδα

πλεξίδων του Artin. Αποτελεί μια πρώτη εφάρμογη της B_n στην αλγεβρική τοπολογία. Χάριν ευκολίας, εφεξής όταν εργαζόμαστε με στοιχεία της ομάδας του Artin θα το κάνουμε με τους αναπαραστάτες των κλάσεων ομοτοπίας των πλεξίδων.

Θεώρημα 4.4.1. *Η πρωταρχική ομάδα $\pi_1(\text{Conf}(\mathbb{C}, n)/S_n, [\vec{z}])$ του χώρου $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)/S_n$ είναι ισόμορφη με την B_n , ενώ η $\pi_1(\text{Conf}(\mathbb{C}, n), \vec{z})$ του χώρου $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$ με την P_n .*

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι ένα στοιχείο $[\beta] \in B_n$ με μετάθεση τ μπορεί να θεωρηθεί ως τροχιά στον $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$. Τα στοιχεία του β είναι οι τροχιές b_1, b_2, \dots, b_n οι οποίες ενώνουν τα σημεία $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C} \times \{1\}$ με τα αντίστοιχα σημεία $z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}, \dots, z_{\tau(n)} \in \mathbb{C} \times \{0\}$ ανάλογα με την μετάθεση της πλεξίδας. Αυτές οι τροχιές όμως είναι ακριβώς οι συντεταγμένες της τροχιάς

$$\gamma(t) = (b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)) \subset \text{Conf}(\mathbb{C}, n),$$

με αρχικό σημείο (z_1, z_2, \dots, z_n) και πέρας $(z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}, \dots, z_{\tau(n)})$. Εάν θυμηθούμε τον ορισμό μιας πλεξίδας που δώσαμε αρχικά παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες της γ τέμνουν για κάθε $t \in [0, 1]$ το επίπεδο $\mathbb{C} \times \{k\}$ σε ένα σημείο ακριβώς. Συνεπώς η εικόνα της έχει διακεκριμένα σημεία άρα πράγματι βρίσκεται στον $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$. Ενώ αντίστροφα οι συνιστώσες της γ για κάθε $k \in [0, 1]$ μας δίνουν τα n διακεκριμένα σημεία της β με το επίπεδο $\mathbb{C} \times \{k\}$.

Έπειτα παρατηρούμε ότι δύο πλεξίδες β και $\tilde{\beta}$ ανήκουν στην ίδια κλάση ομοτοπίας αν και μόνο αν οι αντίστοιχες τροχιές που αναπαριστούν στον $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$ συνδέονται μέσω ομοτοπίας. Πράγματι εάν οι β και $\tilde{\beta}$ είναι ισοδύναμες σημαίνει ότι υπάρχουν ομοτοπίες μεταξύ των $b_i(t)$ και $\tilde{b}_i(t)$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε όμως η συλλογή $(F_1(t, s), F_2(t, s), \dots, F_n(t, s))$ θα ικανοποιεί τα εξής:

$$\begin{aligned} F_i &: [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \times [0, 1] \text{ και} \\ (F_1(t, 0), F_2(t, 0), \dots, F_n(t, 0)) &= (b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)) \\ (F_1(t, 1), F_2(t, 1), \dots, F_n(t, 1)) &= (\tilde{b}_1(t), \tilde{b}_2(t), \dots, \tilde{b}_n(t)) \\ (F_1(0, s), F_2(0, s), \dots, F_n(0, s)) &= (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ (F_1(1, s), F_2(1, s), \dots, F_n(1, s)) &= (z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}, \dots, z_{\tau(n)}). \end{aligned}$$

Έτσι η ζητούμενη ομοτοπία μεταξύ των τροχιών που αναπαριστούν οι πλεξίδες γ και $\tilde{\gamma}$ αντίστοιχα είναι η απεικόνιση με τύπο

$$H(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s), \dots, F_n(t, s))$$

η οποία είναι συνεχής αφού οι συνιστώσες της είναι συνεχείς. Επιπλέον ισχύει

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \text{Conf}(\mathbb{C}, n)$$

$$H(t, 0) = (F_1(t, 0), \dots, F_n(t, 0)) = (b_1(t), \dots, b_n(t)) = \gamma(t),$$

$$H(t, 1) = (F_1(t, 1), \dots, F_n(t, 1)) = (\tilde{b}_1(t), \dots, \tilde{b}_n(t)) = \tilde{\gamma}(t).$$

Αντίστροφα τώρα, εάν ξεκινήσουμε με δυο τροχιές γ και $\tilde{\gamma}$ στον $Conf(\mathbb{C}, n)$, των οποίων οι συνιστώσες γνωρίζουμε ότι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, αυτές θα έχουν την μορφή:

$$\gamma(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t)), \quad \tilde{\gamma}(t) = (\tilde{b}_1(t), \dots, \tilde{b}_n(t)).$$

Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε τις ομοτοπίες:

$$F_i : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \times [0, 1],$$

$$F_i(t, 0) = b_i(t), \quad F_i(t, 1) = \tilde{b}_i(t), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Αυτές συνδέουν τις τροχιές στις συνιστώσες τους ως τις ομοτοπίες που μας δίνουν την ισοδυναμία στις πλεξίδες που σχηματίζονται απ' αυτές. Δηλαδή εκείνα τα στοιχεία της ομάδας του Artin που έχουν την μορφή:

$$\beta = (b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)), \quad \tilde{\beta} = (\tilde{b}_1(t), \dots, \tilde{b}_n(t)).$$

Οι αμιγείς πλεξίδες σε n νήματα αντιστοιχούν στις κλειστές τροχιές του χώρου διαμόρφωσης $Conf(\mathbb{C}, n)$. Από τον ορισμό τους τα στοιχεία της P_n είναι τροχιές οι οποίες απεικονίζουν στοιχεία $z_i \in \mathbb{C} \times \{1\}$ στις αντίστοιχες προβολές τους $z_i \in \mathbb{C} \times \{0\}$. Έτσι εάν θεωρήσουμε ένα στοιχείο της $p \in P_n$ και πάρουμε την αντίστοιχη τροχιά του στον $Conf(\mathbb{C}, n)$, τότε αυτή θα έχει αρχή και πέρασ το σημείο (z_1, z_2, \dots, z_n) . Έτσι η τροχιά που επάγεται από την p παριστάνει βρόγχο στον $Conf(\mathbb{C}, n)$.

Δείξαμε δηλαδή ότι οι κλάσεις ομοτοπίας των τροχιών στον $Conf(\mathbb{C}, n)$ συμπίπτουν με τις αντίστοιχες κλάσεις των πλεξίδων στην P_n . Με άλλα λόγια δηλαδή δείξαμε ότι τα στοιχεία της $\pi_1(Conf(\mathbb{C}, n), \vec{z})$ βρίσκονται σε ένα-πρός-ένα και επί αντιστοιχία με τα στοιχεία της P_n . Επομένως είναι ισόμορφες.

Εάν μια πλεξίδα β έχει μετάθεση τ διάφορη της ταυτοτικής, τότε γνωρίζουμε ότι η διάταξη των στοιχείων στο ceiling plane διαφέρει απ' αυτήν στον floor plane. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα εάν β τυχούσα πλεξίδα, η αντίστοιχη τροχιά της στον $Conf(\mathbb{C}, n)$ να έχει διαφορετική αρχή και πέρασ. Συνεπώς δεν παριστάνει μια τροχιά κλειστή σ' αυτόν για κάθε μη-τετριμμένη μετάθεση $\tau \in S_n$. Όμως αν θεωρήσουμε τον χώρο $Conf(\mathbb{C}, n)/S_n$ όπου έχουμε ταυτίσει όλα τα σημεία που διαφέρουν κατά τ , τότε το αποτέλεσμα είναι ότι κάθε πλεξίδα θα επάγει μια τροχιά στον χώρο πηλίκου της οποίας η αρχή και το πέρασ θα ανήκουν στην ίδια κλάση. Δηλαδή θα ταυτίζονται σ' αυτόν. Δείξαμε λοιπόν ξανά ότι τα στοιχεία της B_n βρίσκονται σε μια ένα-προς-ένα και επί αντιστοιχία με τις κλάσεις ομοτοπίας του χώρου πηλίκου. Άρα η ομάδα του

Artin είναι ισομορφή με την $\pi_1(\text{Conf}(\mathbb{C}, n)/S_n, [\vec{z}])$, που ήταν και το ζητούμενο. \square

Παρατήρηση 4.4.2. Αξίζει να σημειώσουμε ότι εφ' όσον σε κάθε πλεξίδα αντιστοιχεί μια ακριβώς μετάθεση, στην παραπάνω απόδειξη ορίσαμε τον ομομορφισμό

$$\begin{aligned}\phi : B_n &\longrightarrow \pi_1(\text{Conf}(\mathbb{C}, n)/S_n) \\ [\beta] &\longmapsto \phi([\beta]) := [\gamma]\end{aligned}$$

για τον οποίο δείξαμε ότι είναι καλά ορισμένος στο πρώτο σκέλος της απόδειξης, ενώ είναι προφανώς ένα-προς-ένα και επί.

Ο επόμενος στόχος μας είναι να συσχετίσουμε χώρους διαμόρφωσης ενός τοπολογικού πολυπύγματος. Αυτό θα γίνει μέσω των προβολών.

Θεώρημα 4.4.3. (Fadell-Neuwirth) Έστω ένα τοπολογικό πολύπτυγμα \mathbb{M} χωρίς σύνορο, η φυσική προβολή $p_i : \text{Conf}(\mathbb{M}, k) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{M}, k-1)$ είναι μια ίνωση με ίνα την $\mathbb{M} - Q_{k-1}$. Όπου $p_i(q_1, \dots, q_k) = (q_1, \dots, \hat{q}_i, \dots, q_k)$ και $Q_{k-1} = \{q_1, \dots, \hat{q}_i, \dots, q_k\} \subset \mathbb{M}$.

Σχόλιο 4.4.4. Το σύμβολο πάνω από την i -οστή συντεταγμένη για τα διάφορα $i = 1, 2, \dots, k$, σημαίνει ότι απλά την παραλείπουμε.

Πρωτού όμως παραθέσουμε την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, θα διατυπώσουμε μια πρόταση η οποία θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στην πορεία.

Πρόταση 4.4.5. Έστω D^n μοναδιαίος δίσκος στον \mathbb{R}^n και \mathring{D}^n το εσωτερικό του. Υπάρχει συνεχής απεικόνιση:

$$\theta : \mathring{D}^n \times D^n \rightarrow D^n,$$

ώστε,

1. $\theta(x, y) = y$, $\forall y \in \partial D^n = S^{n-1}$,
2. $\theta(x, x) = \vec{0}$, $\forall x \in \mathring{D}^n$.

Απόδειξη. Ορίζουμε ομομορφισμό:

$$\begin{aligned}\alpha : \mathring{D}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \frac{x}{1 - \|x\|},\end{aligned}$$

με αντίστροφο τον $\alpha^{-1}(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι $\alpha \circ \alpha^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$ και $\alpha^{-1} \circ \alpha = id_{D^n}$. Θεωρούμε επίσης την απεικόνιση

$$\gamma_q(y) = \begin{cases} y, & \text{όταν } y \in \partial D^n, \\ \alpha^{-1}\left(\frac{y}{1-\|y\|} - \frac{q}{(1-\|q\|)}\right), & \text{όταν } y \in \mathring{D}^n, \end{cases}$$

όπου το $q \in \mathring{D}^n$. Παρατηρούμε ότι η γ_q είναι μια συνεχής, ένα-πρός-ένα και επί απεικόνιση από έναν συμπαγή χώρο σε χώρο Hausdorff. Συνεπώς κλειστή, άρα ομοιομορφισμός. Όσον αφορά την συνέχεια στο σύνορο του D^n , αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι για τυχούσα ακολουθία $x_n \rightarrow y$ όπου $(x_n) \in \mathring{D}^n$, έχουμε $\gamma_q(y) \rightarrow \gamma_q(y) = y$. Έτσι ορίζουμε η ζητούμενη απεικόνιση να είναι εκείνη με τύπο $\theta(x, y) = \gamma_x(y)$. Πράγματι, τότε θα έχουμε $\theta(x, y) = \gamma_q(y) = y$ για $y \in \partial D^n$, ενώ $\theta(x, x) = \gamma(x, x) = \vec{0}$ για $x \in \mathring{D}^n$. \square

Αυτό που είναι σημαντικό στην παραπάνω πρόταση, είναι ότι μπορούμε να την γενικεύσουμε σε τυχαίο τοπολογικό πολύπτυγμα. Εάν δηλαδή \mathbb{M} ένα τοπολογικό πολύπτυγμα χωρίς σύνορο με άτλαντα το σύνολο $\{(U_a, \phi_{U_a})\}_{a \in A}$, τότε υπάρχει συνεχής απεικόνιση:

$$\theta_a : U_a \times \bar{U}_a \longrightarrow \bar{U}_a$$

με την ιδιότητα ότι:

1. $\theta_a(x, y) = y$, όταν $y \in \partial U_a$,
2. $\theta_a(x, x) = p_0$, όταν $x \in U_a$,

όπου p_0 στοιχείο του χάρτη U_a . Εκμεταλλευόμενοι την παραπάνω πρόταση θεώρουμε την περιοχή U τέτοια ώστε:

1. $\phi_{U_a}(U_a) \cong \mathring{D}^n$,
2. $\phi_{U_a}(\bar{U}_a) \cong D^n$,
3. $\phi_{U_a}(p_0) = \vec{0}$,

Ορίζουμε όμοια με πρίν την απεικόνιση:

$$\gamma_q(y) = \begin{cases} y, & \text{όταν } y \in \partial U_a, \\ (\phi_{U_a}^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ \lambda \circ \phi_{U_a})(y), & \text{όταν } y \in U_a. \end{cases}$$

Η α^{-1} είναι η αντίστροφη του ομοιομορφισμού που ορίσαμε στην παραπάνω πρόταση και λ η απεικόνιση με τύπο:

$$\lambda : \mathring{D}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$

$$\phi_{U_a}(y) \longmapsto \lambda(\phi_{U_a}(y)) = \alpha(\phi_{U_a}(y)) - \alpha(\phi_{U_a}(q)) .$$

Όπως παρατηρούμε η τελευταία αποτελεί ομοιομορφισμό. Συνεπώς

$$\alpha^{-1} \circ \lambda \in \mathbf{Top}(\mathring{D}^n) .$$

Ο δεύτερος κλάδος της γ_q είναι ομοιομορφισμός από το U στον εαυτό του. Έτσι όμοια με παραπάνω μπορούμε να θέσουμε την ζητούμενη απεικόνιση να είναι εκείνη με τύπο $\theta(x, y) = \gamma_x(y)$, αφού και πάλι ισχύουν οι ιδιότητες που θέλουμε.

Μετά απ' αυτό είμαστε σε θέση να δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος των Fadell και Neuwirth.

Απόδειξη. Έστω \mathbb{M} ένα τοπολογικό πολύπτυγμα χωρίς σύνορο. Τότε γνωρίζουμε εξ' ορισμού ότι είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff, δεύτερης αριθμησιμότητας τοπικά Ευκλείδειος. Ως εκ τούτου από γνωστή πρόταση είναι παρασυμπαγής. Επίσης από το Θεώρημα 3.2.4 γνωρίζουμε ότι για να είναι η p_i ίνωση αρκεί να δείξουμε ότι είναι τοπικά τριτοκλάδα. Συνεπώς θα δείξουμε το τελευταίο για $i = k$. Θεωρούμε επομένως την συνεχή απεικόνιση:

$$p_k : \mathit{Conf}(\mathbb{M}, k) \rightarrow \mathit{Conf}(\mathbb{M}, k-1) .$$

Έστω $(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}) \in \mathit{Conf}(\mathbb{M}, k-1)$. Τότε

$$p_k^{-1}(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}) = \{(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, x) \mid x \in \mathbb{M} - Q_{k-1}\} .$$

Συνεπώς έχουμε $p_k^{-1}(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}) \cong \mathbb{M} - Q_{k-1}$. Έστω το σημείο $(q_1, q_2, \dots, q_{k-1})$ και (U_i, ϕ_i) χάρτης του q_i τέτοιος ώστε:

1. $U_i \cap U_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
2. $\phi_i(U_i) \cong \mathring{D}^n$.

Τότε $\phi_i(q_i) = v_i \in \phi_i(U_i) \cong \mathring{D}^n$. Ορίζουμε:

$$U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_{k-1} \subset \mathit{Conf}(\mathbb{M}, k-1) ,$$

με το $(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}) \in U$ και ζητάμε ομοιομορφισμό

$$\phi'_U : U \times \mathbb{M} - Q_{k-1} \rightarrow p_k^{-1}(U) ,$$

για τον οποίο ισχύει:

$$(p_k \circ \phi')((q_1, q_2, \dots, q_{k-1}), x) = (q_1, q_2, \dots, q_{k-1}).$$

Έτσι ορίζουμε την απεικόνιση:

$$\phi'_U((q_1, q_2, \dots, q_{k-1}), x) = \begin{cases} (q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, x), & \text{όταν } x \in M - \bigcup_{i=1}^{k-1} U_i, \\ (q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, (\phi^{-1} \circ \alpha^{-1})\left(\frac{\phi_i(x)}{1 - \|\phi_i(x)\|} - \frac{\phi_i(q_i)}{1 - \|\phi_i(q_i)\|}\right)), & \text{όταν } x \in U_i. \end{cases}$$

Η τελευταία αποτελεί ομοιομορφισμό, που μας δίνει μεταθετικότητα στο επόμενο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{M} - Q_{k-1} & \xrightarrow{\phi'_U} & p_k^{-1}(U) \\ & \searrow p_{r,U} & \swarrow p_k \\ & & U. \end{array}$$

Συνεπώς ορίσαμε μ' αυτόν τον τρόπο ένα κάλυμμα τετριμμενοποίησης $\{U\}$ για τον βασικό χώρο $Conf(\mathbb{M}, k-1)$, με απεικονίσεις τετριμμενοποίησης ϕ'_U όπως ορίσθηκαν παραπάνω. Άρα η p είναι μια τοπικά τετριμμένη δέσμη με τον βασικό της χώρο παρασυμπαγή και ως εκ τούτου ίνωση, πράγμα το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. \square

Αποτέλεσμα του προηγούμενου θεωρήματος είναι το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.4.6. Έστω \mathbb{M} συνεκτικό τοπολογικό πολύπτυγμα χωρίς σύνορο, ώστε και το υποπολύπτυγμα $\mathbb{M} - Q_k$ να είναι επίσης συνεκτικό με $Q_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{M}$ για $k \geq 0$. Υποθέτουμε ότι $\mathbb{M} - Q_k$ και \mathbb{M} είναι ομοτοπικά ισοδύναμα με Eilenberg-MacLane χώρους τύπων $K(\pi, 1)$ για διάφορες ομάδες π . Τότε και ο χώρος $Conf(\mathbb{M}, k)$ είναι ένας Eilenberg-MacLane χώρος τύπου $K(\pi', 1)$ για κάποια ομάδα π' .

Απόδειξη. Από την ίνωση

$$\mathbb{M} - Q_k \hookrightarrow Conf(\mathbb{M}, k+1) \rightarrow Conf(\mathbb{M}, k),$$

έχουμε την μακρά ακριβή ακολουθία:

$$\dots \rightarrow \pi_n(\mathbb{M} - Q_k) \rightarrow \pi_n(Conf(\mathbb{M}, k+1)) \rightarrow \pi_n(Conf(\mathbb{M}, k)) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{M} - Q_k) \rightarrow \dots$$

Εφαρμόζουμε επαγωγή στο k .

Για $k = 1$:

$$\dots \rightarrow \pi_n(\mathbb{M} - \{x_1\}) \rightarrow \pi_n(\text{Conf}(\mathbb{M}, 2)) \rightarrow \pi_n(\mathbb{M}) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{M} - \{x_1\}) \rightarrow \dots$$

Για $n \geq 2$ έχουμε : $\pi_n(\mathbb{M} - \{x_1\}) = \pi_n(\mathbb{M}) = 0$. Άρα $\pi_n(\text{Conf}(\mathbb{M}, 2)) = 0$.

Για $n=1$ έχουμε:

$$0 \rightarrow \pi_1(\mathbb{M} - \{x_1\}) \rightarrow \pi_1(\text{Conf}(\mathbb{M}, 2)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{M}) \rightarrow 0.$$

Τώρα εξετάζουμε $k > 1$. Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι ο χώρος $\text{Conf}(\mathbb{M}, k)$ είναι τύπου $K(\pi', 1)$ για κάποια ομάδα π' .

Από την μακρά ακριβή ακολουθία :

$$\dots \rightarrow \pi_n(\mathbb{M} - Q_k) \rightarrow \pi_n(\text{Conf}(\mathbb{M}, k+1)) \rightarrow \pi_n(\text{Conf}(\mathbb{M}, k)) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{M} - Q_k) \rightarrow \dots$$

έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 4.4.7. 1. Για $\mathbb{M} = \mathbb{C}$ έχουμε ότι οι χώροι $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$ είναι χώροι Eilenberg-MacLane τύπου $K(P_n, 1)$ με P_n την αμιγή ομάδα πλεξίδων σε n νήματα.

2. Οι χώροι $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)/S_n$ είναι χώροι Eilenberg-MacLane τύπου $K(B_n, 1)$ με B_n την ομάδα πλεξίδων του Artin σε n νήματα.

Βιβλιογραφία

- [1] **A. Adem, R. J. Milgram.** *Cohomology of Finite Groups.* Springer-Verlag, 1994.
- [2] **M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto.** *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint.* Springer, 2000.
- [3] **E. Artin.** *Theory of Braids.* Annals of Math. **48**, 1946, 101-126.
- [4] **F. Cohen and J. Pakianathan.** *Configuration Spaces and Braid Groups.* Online notes, www.math.rochester.edu/people/faculty/jonpak.
- [5] **J. F. Davis and P. Kirk.** *Lecture notes in Algebraic Topology.* American Mathematical Society, Vol. **35**, 2001.
- [6] **J. Dugundji.** *Topology, second edition.* Allyn and Bacon, Inc., 1966.
- [7] **E. Fadell and L. Neuwirth.** *Configuration Spaces.* Math. Scand. **10**, 1962, 111-118.
- [8] **R. Fenn.** *An elementary introduction to the theory of braids, notes by B. Gemein, available on author's website: www.maths.sussex.ac.uk/Staff/RAF/Maths/braids.ps, (1999), 1-4.*
- [9] **R. Fox and L. Neuwirth.** *The braid groups.* Math. Scand. **10**, 1962, 119-126.
- [10] **M. J. Greenberg and J. R. Harper.** *Algebraic Topology A First Course.* The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1989.
- [11] **A. Hatcher.** *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.
- [12] **J. P. May.** *A Concise Course in Algebraic Topology.* Chicago Lectures in Mathematics Series, 1999.

- [13] **J. R. Munkres.** *Topology a first course, second edition.* Prentice Hall, Inc., 2000.
- [14] **D. J. S. Robinson.** *A course in the theory of groups.* Springer, 1995.
- [15] **J. Rotman.** *An Introduction to Algebraic Topology.* Springer-Verlag, 1998.
- [16] **R. M. Switzer.** *Algebraic Topology-Homotopy and Homology.* Springer-Verlag, 1973.
- [17] **V. Turaev, C. Kassel, O. Dodge.** *Braid Groups.* Springer-Verlag, 2000.