ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Η αλγεβρική τοπολογία αποτελεί ένα από τα κύρια και βασικά κομμάτια των μαθηματικών. Απόδειξη του αληθούς αποτελεί ο αριθμός των **Μεταλλίων** **Fields** που έχει απονεμηθεί σε τοπολόγους και η επίδραση αυτών στη μαθηματική επιστήμη. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε: Atiyah, Donaldson, Freedman, Jones, Milnor, Mumford, Novikov, Perelman, Quillen, Serre, Smale, Thom, Thurston, Voevodsky.

Αναφέρουμε κάποιες εφαρμογές της τοπολογίας σε συγγενείς επιστήμες.

- **Οικονομικές Επιστήμες**. Τα θεωρήματα σταθερού σημείου παίζουν σημαντικό ρόλο στα θεωρητικά οικονομικά. Το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer αποτελεί το κύριο εργαλείο για την απόδειξη της ύπαρξης ισορροπίας του Nash (Βραβείο Nobel στα οικονομικά).
- **Επιστήμες Ηλεκτρονικών Υπολογιστών**. Την τελευταία δεκαετία τοπολογικές έννοιες και μέθοδοι χρησιμοποιούνται σε προβλήματα θεωρητικής πληροφορικής. Η τοπολογική παραμόρφωση χρησιμοποιείται σε ποιοτικά προβλήματα (Concurrency). Επίσης η χαρακτηριστική του Euler εφαρμόζεται σε αναλογικές εικόνες και δίκτυα αισθητήρων (Target enumeration via Euler characteristic integrals).
- **Ρομποτική**. Οι έννοιες της συνεχούς παραμόρφωσης παίζουν ουσιώδη ρόλο στη διαμόρφωση της κίνησης ενός ρομπότ.

Τα κυριότερα προβλήματα που πραγματεύεται ο κλάδος της Αλγεβρικής Τοπολογίας μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

1) Πότε μια απεικόνιση ορισμένη στον κύκλο μπορεί να επεκταθεί σε όλο το δίσκο;

2) Υπάρχει συνεχής απεικόνιση από τη μοναδιαία μπάλα στο σύνορό της (στη σφαίρα);

3) Υπάρχει συνεχής απεικόνιση από το μοναδιαίο δίσκο στο σύνορό του (στον κύκλο) η οποία περιορισμένη στο σύνορο να είναι η ταυτοτική;

4) Κάθε πολυώνυμο n βαθμού με μιγαδικούς συντελεστές έχει n ρίζες.

5) Το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer: κάθε συνεχής απεικόνιση από τη μοναδιαία μπάλα στον εαυτό της έχει σταθερό σημείο.

6) Σε κάποιες σφαίρες, S^n, υπάρχουν μη-τετριμμένα διανυσματικά πεδία.

7) Οι πιο ενδιαφέροντες χώροι από την γεωμετρία και φυσική επιδέχονται μια «καλή» αναπαράσταση από χώρους που δημιουργούνται από σφαίρες, S^n, ώστε να χαρακτηρίζονται από τις λεγόμενες ομοτοπικές ομάδες.

8) Hopf. Υπάρχουν μη-τετριμμένες απεικονίσεις από τη σφαίρα, S^3 στη σφαίρα, S^2.

9) Ο τύπος ομοτοπίας των ομάδων Lie μπορεί να υπολογισθεί.

10) Οι Ευκλείδειοι χώροι διαφορετικής διάστασης δεν είναι ομοιομορφικοί μεταξύ τους.

11) Hopf. Κάθε συνεχής απεικόνιση από τη σφαίρα, S^n, στον εαυτό της καθορίζεται από το βαθμό της.

12) Borsuk-Ulam. Κάθε συνεχής απεικόνιση από τη σφαίρα, S^n, στον $\mathbb{R}^n$ ταυτίζει αντιποδικά σημεία. Εφαρμογή αυτού: α) υπάρχουν δύο σημεία πάνω στη Γη με τον ίδιο καιρό. β) Πόσο χαρτί χρειάζεται για να τυλίξουμε μια σφαίρα.

13) Lusternik-Schnirelmann. Αν η σφαίρα καλυφθεί με τρία κλειστά σύνολα τότε ένα από αυτά περιέχει αντίποδα σημεία.

14) Lefschetz. Πότε μια απεικόνιση έχει σταθερά σημεία.

15) Πόσες ομάδες δρουν ελεύθερα στις σφαίρες;

16) Ποιες κλειστές επιφάνειες δέχονται απεικονίσεις που δεν διατηρούν αναλλοίωτα σημεία και είναι ομοτοπικές με την ταυτοτική;

17) Σχέσεις ομοτοπίας, ομολογίας, και συνομολογίας.

18) Θεωρήματα: Euler-Poincare, Hopf Trace, Lefschetz.

19) Stoke. De Rham συνομολογία και διαφορικές μορφές.

20) Configuration spaces στη Μαθηματική Φυσική.

21) Φασματικές ακολουθίες και γραφειοκρατία.

22) Steenrod. Διανυσματικές δέσμες, gauge in quantum field theories και spacetime.

23) Όλες οι πολλαπλότητες δέχονται μετρικές Riemann;

24) Leray-Serre. Χαρακτηρισμός των δεσμών.

25) Chern. Χαρακτηριστικές κλάσεις. Πότε μια πολλαπλότητα είναι προσανατολίσιμη;

26) Γενική σχετικότητα. Πότε μια 3-πολλαπλότητα ή 4-πολλαπλότητα είναι παραλληλοποιήσιμη;

27) Τι υπάρχει μεταξύ τοπολογικών και διαφορικών πολλαπλοτήτων;

28) Διάσταση 4 (η πιο ενδιαφέρουσα). Πότε μια πολλαπλότητα είναι λεία;

29) Πότε μια πολλαπλότητα είναι μιγαδική;

30) Πότε μια πολλαπλότητα έχει μεταγραμμική δομή;

31) Hopf, Euler. Πότε μια πολλαπλότητα δέχεται διανυσματικό πεδίο;