Αλγεβρικές Δομές II (2018-2019)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #1

1. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και I γνήσιο ιδεώδες του R. Δείξτε (ή βρείτε σε κάποιο βιβλίο την απόδειξη) ότι υπάρχει maximal ιδεώδες P του R με $I \subseteq P$.

2. Έστω $R \neq 0$ μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $a \in R$. Δείξτε ότι το a είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο εάν δεν ανήκει σε κανένα maximal ιδεώδες του R.

3. Έστω D Ακέραια Περιοχή. Υποθέτουμε ότι το σύνολο των ιδεωδών της D είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι το D είναι σώμα. Επίσης δειξτε ότι για $m \geq 4$ σύνθετο ακέραιο ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_m$ των ακεραίων modulo m έχει πεπερασμένο πλήθος ιδεωδών αλλά δεν είναι σώμα.

4. Έστω D Περιοχή Κυρίων Ιδεωδών και $0 \neq I$ πρώτο ιδεώδες του D. Δείξτε ότι το ιδεώδες I είναι maximal.

5. Έστω D Περιοχή Κυρίων Ιδεωδών και $(I_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ιδεωδών της D με την ιδιότητα ότι
$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$
Δείξτε ότι το $I = \cup_{n\geq 1} I_n$ είναι ιδεώδες του D και ότι υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με την ιδιότητα $I_n = I_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$.

6. Θεωρούμε τον δακτύλιο $D = \mathbb{Z}[x]$ των πολυωνύμων σε μια μεταβλητή με ακέραιους συντελεστές και τα υποσύνολα του
$$I = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : \ n \geq 0, \ a_i \in \mathbb{Z}, \ a_0 = 0\}$$
και
$$J = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : \ n \geq 0, \ a_i \in \mathbb{Z}, \ 2 \mid a_0\}.$$
   (α′) Δείξτε ότι τα I και J είναι ιδεώδη του D.
   (β′) Δείξτε ότι ο δακτύλιος πηλίκο D/I είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων. Επομένως το I είναι πρώτο αλλά όχι maximal ιδεώδες του D.
   (γ′) Δείξτε ότι το J δεν είναι κύριο ιδεώδες του D. Επίσης δείξτε ότι ο δακτύλιος πηλίκο D/J είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο $\mathbb{Z}_2$ των ακεραίων modulo 2, άρα είναι σώμα. Συνεπώς το J είναι maximal ιδεώδες του D.

7. Έστω $R \neq 0$ μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Δείξτε ότι ο πολυωνυμικός δακτύλιος $R[x]$ είναι Περιοχή Κυρίων Ιδεωδών εάν και μόνο εάν ο R είναι σώμα.

Αλγεβρικές Δομές II (2018-2019)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #2

1. Δείξτε ότι αν $\mathbb{F}$ σώμα, τότε το σύνολο των αναγώγων στοιχείων του πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbb{F}[x]$ είναι άπειρο. Σαν συμπέρασμα, αν $\mathbb{F}$ πεπερασμένο σώμα, το σύνολο $A \subseteq \mathbb{Z}$ που έχει στοιχεία τους βαθμούς αναγώγων πολυωνύμων του $\mathbb{F}[x]$ είναι άπειρο. (Μπορεί να αποδειχθεί ότι το A είναι ίσο με το σύνολο των θετικών ακεραίων.)

2. Έστω $\mathbb{K}$ υπόσωμα του $\mathbb{F}$ και $g \in \mathbb{F}[x]$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μη μηδενικό $h \in \mathbb{K}[x]$ με $g \cdot h \in \mathbb{K}[x]$. Δείξτε ότι $g \in \mathbb{K}[x]$. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα αν υποθέσουμε $\mathbb{K}, \mathbb{F}$ μόνο Ακέραιες Περιοχές.

3. Υποθέτουμε ότι τα $f \in \mathbb{Z}[x]$ και $g \in \mathbb{Q}[x]$ είναι μονικά πολυώνυμα. Αν το g διαιρεί το f στο $\mathbb{Q}[x]$ δείξτε ότι $g \in \mathbb{Z}[x]$.

4. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, $a, b \in R$ και $n \geq 1$ ακέραιος. Δείξτε ότι
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

5. Έστω D Ακέραια Περιοχή χαρακτηριστικής p, όπου p πρώτος, και $n \geq 1$ ακέραιος. Θέτουμε $q = p^n$. Δείξτε ότι
$$(a+b)^q = a^q + b^q$$
για κάθε $a, b \in D$.

6. Έστω p πρώτος, και
$$f = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 \ \in \mathbb{Q}[x]$$
το p-τάξεως κυκλοτομικό πολυώνυμο. Χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό δακτυλίων
$$T_{x+1} : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x], \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i (x+1)^i$$
που διατηρεί βαθμούς, δείξτε με το κριτήριο Eisenstein ότι το $T_{x+1}(f)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$. Σαν συμπέρασμα έχουμε ότι το f είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

7. Έστω $n \geq 3$ ακέραιος. Δείξτε ότι το πολυώνυμο
$$f = x^n + 11x^3 - 33x + 22$$
είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

8. Έστω
$$f = x^4 - 6x^3 + kx^2 + 3x + 4$$
με $k \in \mathbb{Z}$. Για ποιες τιμές του k είναι το f ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$;

Αλγεβρικές Δομές ΙΙ (2018-2019)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #3

1. Έστω $v \in \mathbb{C}$ με ελάχιστο πολυώνυμο $x^2 + x + 1$ επί του $\mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $v^2 - 1 \neq 0$, και εκφράστε το στοιχείο $(v^2 + 1)/(v^2 - 1)$ του $\mathbb{Q}(v)$ στην μορφή $a_0 + a_1 v$ με συντελεστές $a_0, a_1 \in \mathbb{Q}$.

2. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $p = x^3 + x + 1$ είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}$. Έστω $v \in \mathbb{C}$ μια ρίζα του p. Εκφράστε τα στοιχεία $1/v$ και $1/(v + 2)$ του $\mathbb{Q}(v)$ στην μορφή $a_0 + a_1 v + a_2 v^2$ με συντελεστές $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$.

3. (1) Δείξτε ότι $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ και ότι $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
   (2) Έστω $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Δείξτε ότι $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
   (3) Δείξτε ότι το σύνολο
   $$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}$$
   είναι μια βάση του $\mathbb{K}$ σαν διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{Q}$. Συνεπώς $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = 4$.
   (4) Γράψτε τον αντίστροφο ως προς τον πολλαπλασιασμό του στοιχείου
   $$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$
   του $\mathbb{K}$ ως προς την παραπάνω βάση.
   (5) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ επί των $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.

4. Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο επί του $\mathbb{Q}$ για καθένα από τα στοιχεία
$$1 + \sqrt{3}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \qquad \sqrt{3} + \sqrt{5}, \qquad (1 + i)\sqrt{3}, \qquad \sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

5. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $p = x^2 + x + 1$ είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Z}_2$. Θέτουμε $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2[x]/(p)$. Δείξτε ότι το σώμα $\mathbb{K}$ έχει 4 στοιχεία, τα εξής:
$$0 + (p), \qquad 1 + (p), \qquad x + (p), \qquad 1 + x + (p).$$
Γράψτε τους πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{K}$.

6. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $p = x^3 + x + 1$ είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Z}_2$. Θέτουμε $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2[x]/(p)$. Γράψτε τα 8 στοιχεία του σώματος $\mathbb{K}$ και τους πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{K}$. Έστω $v = x + (p) \in \mathbb{K}$. Υπολογίστε τις δυνάμεις v^m, για $m \in \mathbb{Z}$. Σαν πόρισμα, έχουμε ότι η ομάδα $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ είναι κυκλική ομάδα τάξης 7 με γεννήτορα το v.

7. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $p = x^4 - 2$ είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}$. Υπολογίστε (σαν υπόσωμα του $\mathbb{C}$) το σώμα ριζών $\mathbb{K}$ του p επί του $\mathbb{Q}$ και βρείτε τον βαθμό $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.