

Αλγεβρικές Δομές I (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #1

1. Θεωρούμε το σύνολο $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ των μη μηδενικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε την πράξη $*$: $S \times S \rightarrow S$ στο S ως εξής

$$a * b = |a|b.$$

- (α') Ναδειχθεί ότι η πράξη $*$ είναι καλά ορισμένη και προσεταιριστική.
(β') Ναδειχθεί ότι υπάρχει $e \in S$ ώστε $e * b = b$ για κάθε $b \in S$. Επίσης ναδειχθεί ότι αν $a \in S$ τότε υπάρχει $b \in S$ με $a * b = e$.
(γ') Έχει η S ουδέτερο στοιχείο; Είναι η S ομάδα;

2. Ναδειχθεί ότι το ανοικτό διάστημα $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$ αποτελεί αβελιανή ομάδα με πράξη

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

3. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e . Αν το σύνολο G είναι πεπερασμένο με άρτιο πλήθος στοιχείων ναδειχθεί ότι υπάρχει στοιχείο $a \in G$ με $a \neq e$ τέτοιο ώστε $a * a = e$.

4. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e . Αν ισχύει

$$x * x = e$$

για κάθε $x \in G$ δείξτε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή.

5. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e και $a, b, c \in G$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

$$(\alpha') a * b * c = e$$

$$(\beta') b * c * a = e$$

$$(\gamma') c * a * b = e$$

6. Έστω $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Στο σύνολο \mathbb{C} ορίζουμε δύο πράξεις $+$, \cdot ως εξής:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

- (α') Δείξτε ότι τα ζεύγη $(\mathbb{C}, +)$ και $(\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ είναι αβελιανές ομάδες, και ότι η πράξη \cdot είναι επιμεριστική επί της πράξης $+$.

- (β') Θέτουμε $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ και αν $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε $\tilde{a} = (a, 0) \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι αν $z \in \mathbb{C}$ τότε υπάρχουν μοναδικά $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $z = \tilde{a} + \tilde{b} \cdot i$. Επιπλέον δείξτε ότι $i \cdot i = (-1)$.

Αλγεβρικές Δομές I (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #2

1. Για κάθε μια από τις παρακάτω ομάδες να βρεθούν τουλάχιστον δύο μη-τετριμμένες γνήσιες υποομάδες

$$(\mathbb{Z}, +), \quad (\mathbb{Q}, +), \quad (S_3, \circ), \quad (8\mathbb{Z}, +), \quad (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot).$$

2. Να προσδιορισθεί η κυκλική υποομάδα $\langle A \rangle$ της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ η οποία παράγεται από τον πίνακα A , όπου A είναι ένας εκ των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Δείξτε ότι αν H και K είναι δύο υποομάδες μιας αβελιανής ομάδας $(G, *)$, τότε το υποσύνολο

$$H * K = \{h * k : h \in H, k \in K\}$$

είναι υποομάδα της G . Επίσης να αποδείξετε με την βοήθεια αντιπαραδείγματος ότι ο ισχυρισμός δεν αληθεύει όταν η ομάδα G δεν είναι αβελιανή.

4. (α') Αν H, K είναι υποομάδες μιας ομάδας G δείξτε ότι η ένωση $H \cup K$ είναι υποομάδα αν και μόνο αν είτε $H \subseteq K$ είτε $K \subseteq H$.

(β') Δείξτε ότι δεν υπάρχει ομάδα που να είναι ένωση δύο γνήσιων υποομάδων της.

(γ') Δείξτε ότι η ομάδα $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ είναι ένωση τριών γνήσιων υποομάδων της.

5. (α') Συμβολίζουμε με T το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με μέτρο ίσο με 1, δηλαδή

$$T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Να δειχθεί ότι το T αποτελεί υποομάδα του (\mathbb{C}^*, \cdot) .

(β') Συμβολίζουμε με U το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z με την ιδιότητα να υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε $z^n = 1$. Δείξτε ότι το U είναι υποομάδα της (T, \cdot) .

(γ') Έστω m θετικός ακέραιος. Θέτουμε

$$U_m = \{z \in \mathbb{C} : z^m = 1\}.$$

Η U_m ονομάζεται ομάδα των m -στων ριζών της μονάδος στο \mathbb{C} . Δείξτε ότι η U_m είναι υποομάδα της (U, \cdot) .

(δ') Δείξτε ότι $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$. Επιπλέον, δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο m η ομάδα U_m είναι κυκλική και ότι η ομάδα U δεν είναι κυκλική.

Αλγεβρικές Δομές I (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #3

1. Έστω n, m δύο θετικοί ακέραιοι, και

$$H_1 = n\mathbb{Z} = \langle n \rangle, \quad H_2 = m\mathbb{Z} = \langle m \rangle$$

οι κυκλικές υποομάδες της ομάδας $(\mathbb{Z}, +)$ οι οποίες παράγονται από τους φυσικούς αριθμούς n, m αντίστοιχα. Να προσδιορισθεί η ομάδα $H_1 \cap H_2$.

2. Έστω G πεπερασμένη κυκλική ομάδα με τάξη $|G| \geq 3$. Δείξτε ότι το πλήθος των γεννητόρων της G είναι άρτιο.

3. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα και $a, b, x \in G$. Δείξτε ότι

$$\text{ord}(x^{-1} * a * x) = \text{ord}(a) = \text{ord}(x * a * x^{-1}), \quad \text{ord}(a * b) = \text{ord}(b * a).$$

Επίσης δείξτε ότι $\text{ord}(a^{-1}) = \text{ord}(a)$.

4. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα, H μια υποομάδα της G και $x \in G$. Θέτουμε

$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} : h \in H\}.$$

Δείξτε ότι η xHx^{-1} είναι υποομάδα της G και ότι $\#(xHx^{-1}) = \#H$.

5. Να ευρεθεί η τάξη του στοιχείου a της ομάδος $(G, *)$, όπου

$$\begin{array}{ll} a = [2]_3, & (G, *) = (\mathbb{Z}_3, +), \\ a = i, & (G, *) = (\mathbb{C}^*, \cdot), \\ a = -1 + i\sqrt{3}, & (G, *) = (\mathbb{C}^*, \cdot), \end{array} \quad \begin{array}{ll} a = [6]_{10}, & (G, *) = (\mathbb{Z}_{10}, +), \\ a = -i, & (G, *) = (\mathbb{C}^*, \cdot), \\ a = (-1 + i\sqrt{3})/2, & (G, *) = (\mathbb{C}^*, \cdot). \end{array}$$

6. Να ευρεθεί η τάξη όλων των στοιχείων της ομάδος $G = (U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot)$ των αντιστρεψίμων ακεραίων modulo 14. Είναι η ομάδα G κυκλική;

7. Βρείτε το πλήθος των γεννητόρων μιας κυκλικής ομάδας με τάξη n , όταν $n = 5$, $n = 8$, $n = 12$, $n = 60$.

8. Βρείτε όλους τους γεννήτορες της ομάδος U_m των m -στων ριζών της μονάδας στο \mathbb{C} όταν $m = 4$, $m = 17$, $m = 24$, $m = 31$.

9. Βρείτε όλους τους γεννήτορες των ομάδων $(\mathbb{Z}_{10}, +)$, $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, $(\mathbb{Z}_{15}, +)$.

10. Ποιές είναι οι δυνατές τάξεις για τις υποομάδες των επόμενων κυκλικών ομάδων

$$(\mathbb{Z}, +), \quad (\mathbb{Z}_6, +), \quad (\mathbb{Z}_8, +), \quad (\mathbb{Z}_{12}, +), \quad (\mathbb{Z}_{60}, +), \quad (\mathbb{Z}_{17}, +);$$

Αλγεβρικές Δομές I (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #4

1. Δείξτε ότι μια ομάδα G έχει πεπερασμένο πλήθος υποομάδων αν και μόνο αν η ομάδα G είναι πεπερασμένη.
2. Ναδειχθεί ότι μια ομάδα G έχει ακριβώς δύο υποομάδες αν και μόνο αν η G είναι κυκλική τάξης p , όπου p πρώτος.
3. Έστω ότι η G είναι κυκλική ομάδα τάξης n . Έστω m ένας θετικός διαιρέτης του n . Δείξτε ότι η G έχει ακριβώς $\phi(m)$ στοιχεία τάξης m , όπου ϕ είναι η συνάρτηση ϕ του Euler.

4. Να βρεθούν οι αριστερές πλευρικές κλάσεις της υποομάδας H στην ομάδα G όταν:

$$H = \langle 5 \rangle = 5\mathbb{Z}, G = \mathbb{Z}, \quad H = \langle 9 \rangle = 9\mathbb{Z}, G = \mathbb{Z}$$

5. Να βρεθούν οι αριστερές πλευρικές κλάσεις της υποομάδας $\langle [6]_{12} \rangle$ στην ομάδα $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ και της $\langle [6]_{12} \rangle$ στην (υπο)ομάδα $\langle [2]_{12} \rangle$ της $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.
6. Θεωρούμε τις ακόλουθες (κυκλικές) υποομάδες της S_3

$$H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad K = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Να βρεθούν οι δεξιές και αριστερές πλευρικές κλάσεις (δεξιά και αριστερά σύμπλοκα) των υποομάδων H, K στην S_3 .

7. Θεωρούμε την διεδρική ομάδα D_4 τάξης 8. Για κάθε στοιχείο $a \in D_4$ να υπολογίσετε την τάξη της κυκλικής ομάδας $\langle a \rangle$ που παράγεται από το a και τις δεξιές πλευρικές κλάσεις της υποομάδας $\langle a \rangle$ στην D_4 .
8. Θεωρούμε την ομάδα $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, και την ομάδα ευθύ γινόμενο $G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$. Έστω H το ακόλουθο υποσύνολο της G :

$$H = \{ ([a]_{12}, [b]_{12}) \in G : 3 \mid a, 3 \mid b \}.$$

Δείξτε ότι το σύνολο H είναι υποομάδα της G και υπολογίστε τον δείκτη $[G : H]$.

9. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα και ότι $H \leq G$ είναι μια υποομάδα της. Ναδειχθεί ότι το πλήθος των αριστερών συμπλόκων (πλευρικών κλάσεων) της H στην G ισούται με το πλήθος των δεξιών συμπλόκων (πλευρικών κλάσεων) της H στην G .
10. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα, H, K δύο υποομάδες της G και $a, b \in G$. Αν $a * H = b * K$ δείξτε ότι $H = K$.

Αλγεβρικές Δομές I (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #5

1. Βρείτε τον δείκτη $[G : H]$ της υποομάδας $H \leq G$ όταν $H = n\mathbb{Z}$ και $G = \mathbb{Z}$.
2. Βρείτε τον δείκτη $[G : H]$ της υποομάδας $H \leq G$ όταν $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\}.$$

3. Έστω ότι $(G, *)$ είναι πεπερασμένη ομάδα, και H, K δύο υποομάδες της G .
 - (α') Υποθέτουμε ότι η τάξη της H είναι πρώτος αριθμός p που δεν διαιρεί την τάξη της K . Δείξτε ότι $H \cap K = \{e\}$.
 - (β') Υποθέτουμε ότι οι ομάδες H, K έχουν τάξη τον ίδιο πρώτο αριθμό p και $H \neq K$. Δείξτε ότι $H \cap K = \{e\}$.
4. Βρείτε υποομάδα H της πολλαπλασιαστικής ομάδας (\mathbb{R}^*, \cdot) έτσι ώστε $[\mathbb{R}^* : H] = 2$.
5. Έστω G ομάδα με τάξη $\#G < 300$ η οποία έχει δύο υποομάδες H, K με τάξεις $\#H = 24$ και $\#K = 54$. Βρείτε την τάξη της G .
6. Έστω $(G, *)$ ομάδα και $a, b \in G$ στοιχεία πεπερασμένης τάξης με την ιδιότητα $a * b = b * a$. Υποθέτουμε ότι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των $\text{ord}(a)$ και $\text{ord}(b)$ είναι 1. Δείξτε ότι

$$\text{ord}(a * b) = \text{ord}(a) \cdot \text{ord}(b).$$

7. Έστω G πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. Θέτουμε

$$M = \{ \text{ord}(a) : a \in G \}.$$

Έστω m το μέγιστο στοιχείο του M . Δείξτε ότι $a^m = e_G$ για κάθε $a \in G$. Επιπλέον, δείξτε ότι το αποτέλεσμα δεν ισχύει αν $G = S_3$.

8. Έστω ότι p, q είναι πρώτοι αριθμοί, και $(G, *)$ μια ομάδα. Ναδειχθεί ότι:
 - (α') Αν η τάξη της G είναι pq , τότε κάθε γνήσια υποομάδα H της G είναι κυκλική.
 - (β') Αν η G είναι αβελιανή με τάξη pq και $p \neq q$, τότε η G είναι κυκλική.
 - (γ') Υπάρχουν αβελιανές ομάδες τάξης p^2 που δεν είναι κυκλικές.
9. Έστω G μια (όχι απαραίτητα πεπερασμένη) ομάδα και H, K δύο υποομάδες της G με $K \leq H$. Αν ο δείκτης $[G : K]$ είναι πεπερασμένος, τότε ναδειχθεί ότι οι δείκτες $[G : H]$ και $[H : K]$ είναι πεπερασμένοι και ισχύει ότι

$$[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$$

Αλγεβρικές Δομές I (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #6

1. Σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις να εξεταστεί αν η απεικόνιση που ορίζεται είναι ομομορφισμός ομάδων και αν είναι να υπολογιστεί ο πυρήνας της:

(1) $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \phi(k) = k - 1.$

(2) $\phi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot), \phi(a) = |a|.$

(3) $\phi : S_3 \rightarrow S_3, \phi(a) = a^{-1}.$

(4) $\phi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2, \phi([a]_6) = [a]_2.$

2. Έστω G ομάδα. Ναδειχθεί ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) Η G είναι αβελιανή.

(2) Η απεικόνιση $f : G \rightarrow G, f(a) = a^{-1}$ είναι ομομορφισμός.

(3) Η απεικόνιση $h : G \rightarrow G, h(a) = a^2$ είναι ομομορφισμός.

(4) Η απεικόνιση $r : G \times G \rightarrow G, r(a, b) = ab$ είναι ομομορφισμός.

3. (1) Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(a) = 2a$ είναι μονομορφισμός που δεν είναι επί.

(2) Δείξτε ότι η απεικόνιση $h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, h(a) = a^2$ είναι επιμορφισμός που δεν είναι ένα προς ένα.

4. Δώστε παράδειγμα μη-τετριμμένου ομομορφισμού ή δικαιολογήστε γιατί δεν υπάρχει μη-τετριμμένος ομομορφισμός $f : G \rightarrow H$ όταν

$$f : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_5,$$

$$f : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_4,$$

$$f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z},$$

$$f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow S_3,$$

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow S_3,$$

$$f : S_3 \rightarrow S_4$$

5. (1) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}.$

(2) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6.$

(3) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}.$

(4) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z}_{25} \rightarrow \mathbb{Z}_{15}.$

(5) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}.$

(6) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}.$

6. Έστω ότι G είναι μια άπειρη ομάδα. Δείξτε ότι η G είναι κυκλική αν και μόνο αν κάθε υποομάδα $H \neq \{e\}$ της G είναι ισόμορφη με την G .

Αλγεβρικές Δομές I (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #7

1. Βρείτε όλες τις υποομάδες των παρακάτω ομάδων και σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της.

$$(1) \mathbb{Z}_3, \quad (2) \mathbb{Z}_9, \quad (3) \mathbb{Z}_{27}, \quad (4) \mathbb{Z}_{15}, \quad (5) \mathbb{Z}_{45}, \quad (6) \mathbb{Z}_{30}, \quad (7) \mathbb{Z}_{36}.$$

2. Θεωρούμε τα ακόλουθα στοιχεία της S_6 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- (1) Να προσδιορισθούν οι τροχιές της χ στις οποίες διαμερίζεται το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, όταν $\chi = \sigma, \tau$ και μ .
- (2) Να προσδιορισθεί η ανάλυση σε ξένους κύκλους των $\tau, \mu, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6$.
- (3) Να προσδιορισθούν οι τάξεις $\text{ord}(\sigma)$, $\text{ord}(\tau)$, και $\text{ord}(\mu)$.
- (4) Να υπολογιστεί η μετάθεση σ^{2018} .
- (5) Να υπολογιστούν τα στοιχεία:

$$\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}, \quad \sigma^{-1} \circ \tau \circ \sigma, \quad \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}, \quad \mu \circ \tau \circ \mu^{-1}.$$

- (6) Να επιλυθεί ως προς $x \in S_6$ η εξίσωση: $x \circ \sigma \circ x^{-1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$.
- (7) Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει $x \in S_6$ ώστε: $x \circ \sigma \circ x^{-1} = \tau$.

3. Ναδειχθεί ότι το πρόσημο μιας μετάθεσης σ της S_n είναι ίσο με το πρόσημο της αντίστροφης μετάθεσης σ^{-1} .

4. Έστω ότι $\sigma, \tau \in S_n, n \geq 2$. Ναδειχθεί ότι:

- (1) Ισχύει $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1} \in A_n$.
- (2) Ισχύει $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \in A_n$ αν και μόνο αν $\tau \in A_n$.

5. Να δείξετε ότι κάθε στοιχείο $\sigma \in A_n, n \geq 3$, μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο 3-κύκλων.

6. Να δείξετε ότι αν $n \geq 4$ η εναλλάσσουσα ομάδα A_n δεν είναι αβελιανή.

7. Να δείξετε ότι η εναλλάσσουσα ομάδα A_4 έχει υποομάδες τάξεις 1, 2, 3, 4 και 12, αλλά δεν έχει υποομάδα τάξης 6.

8. Να βρεθεί το διάγραμμα Hasse της εναλλάσσουσας ομάδας A_4 .

Αλγεβρικές Δομές I (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #8

1. Έστω G μια ομάδα και H μια πεπερασμένη υποομάδα της G με την ιδιότητα ότι η H είναι η μοναδική υποομάδα της G με τάξη $\#H$. Να δείξετε ότι η H είναι κανονική.
2. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα και H μια κανονική υποομάδα της G . Έστω $a, b \in G$ με $a * b \in H$. Δείξτε ότι $b * a \in H$. Επίσης, βρείτε υποομάδα H της S_3 και $a, b \in S_3$ ώστε $a \circ b \in H$, ενώ $b \circ a \notin H$.
3. Έστω G ομάδα. Δείξτε ότι η τομή οποιουδήποτε πλήθους κανονικών υποομάδων της G είναι κανονική υποομάδα της G .
4. Έστω $f : G_1 \rightarrow G_2$ ένας ομομορφισμός ομάδων.
 - (1) Αν H είναι μια κανονική υποομάδα της G_1 , να δείξετε ότι η $f(H)$ είναι κανονική υποομάδα της ομάδας $f(G_1)$. Βρείτε παράδειγμα, όπου η υποομάδα $f(H)$ δεν είναι κανονική υποομάδα της ομάδας G_2 .
 - (2) Αν K είναι μια κανονική υποομάδα της G_2 , να δείξετε ότι η $f^{-1}(K)$ είναι κανονική υποομάδα της ομάδας G_1 .
5. Θεωρούμε την υποομάδα \mathbb{Z} της προσθετικής ομάδας \mathbb{R} . Δείξτε ότι είναι κανονική υποομάδα και να βρεθούν όλα τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης της ομάδας πηλίκο \mathbb{R}/\mathbb{Z} .
6. Θεωρούμε την υποομάδα T της ομάδας (\mathbb{C}^*, \cdot) , όπου
$$T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$
Δείξτε ότι η υποομάδα T είναι κανονική και ότι η ομάδα πηλίκο \mathbb{C}^*/T είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα των θετικών πραγματικών αριθμών.
7. Βρείτε τις τάξεις των ομάδων πηλίκο
$$\mathbb{Z}_6/(\langle [3]_6 \rangle), \quad \mathbb{Z}_{60}/(\langle [12]_{60} \rangle), \quad \mathbb{Z}_{60}/(\langle [39]_{60} \rangle).$$
8. Βρείτε την τάξη του στοιχείου:
 - (1) $[5]_{12} + H$ στην ομάδα πηλίκο \mathbb{Z}_{12}/H , όπου $H = \langle [4]_{12} \rangle$.
 - (2) $[26]_{60} + H$ στην ομάδα πηλίκο \mathbb{Z}_{60}/H , όπου $H = \langle [12]_{60} \rangle$.
9. Να δειχθεί ότι υπάρχουν ισομορφισμοί ομάδων:
 - (1) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/H$ με την ομάδα $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$, όπου $H = \langle (2, 2) \rangle$.
 - (2) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/H$ με την ομάδα \mathbb{Z}_2 , όπου $H = \langle ([0]_2, [1]_4) \rangle$
 - (3) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/H$ με την ομάδα $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, όπου $H = \langle ([0]_2, [2]_4) \rangle$.

Αλγεβρικές Δομές I (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #9

1. Δείξτε ότι τα επόμενα σύνολα μαζί με τις αναφερόμενες πράξεις αποτελούν δακτυλίους:

- (1) $R = \{m/n \in \mathbb{Q} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \text{ περιττός}\}$ μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των ρητών αριθμών.
- (2) $R = \{m/2^k \in \mathbb{Q} \mid m, k \in \mathbb{Z}\}$ μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των ρητών αριθμών.
- (3) $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών.
- (4) $R = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{2}\sqrt{3} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών.
- (5) $R = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ όπου $i^2 = -1$, μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των μιγαδικών αριθμών.

2. Ναδειχθεί ότι το σύνολο μιγαδικών 2×2 πινάκων

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{C} \right\}$$

με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πινάκων αποτελεί ένα δακτύλιο διαίρεσης. Ο δακτύλιος \mathbb{H} καλείται ο δακτύλιος διαίρεσης των τετρανίων του Hamilton.

3. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος. Να δείξετε ότι το υποσύνολο

$$Z(R) = \{r \in R \mid r \cdot x = x \cdot r, \forall x \in R\}$$

είναι ένας υποδακτύλιος του R . Ο υποδακτύλιος $Z(R)$ καλείται κέντρο του δακτυλίου R . Για $n \geq 2$ βρείτε το κέντρο του δακτυλίου $\mathbb{R}^{n \times n}$ των $n \times n$ πραγματικών πινάκων.

4. Να προσδιοριστούν όλοι οι διαιρέτες του μηδενός των επόμενων δακτυλίων:

$$(1) \mathbb{Z}_4, \quad (2) \mathbb{Z}_5, \quad (3) \mathbb{Z}_6, \quad (4) \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \quad (5) \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

5. Να προσδιοριστούν τα αντιστρέψιμα στοιχεία των επόμενων δακτυλίων:

$$(1) \mathbb{Z}_{10}, \quad (2) \mathbb{Z}_{11}, \quad (3) \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \quad (4) \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad (5) \mathbb{H}.$$

6. Έστω R πεπερασμένος δακτύλιος με μονάδα 1_R και τουλάχιστον δύο στοιχεία. Υποθέτουμε ότι αν $a, b \in R \setminus \{0\}$ τότε $a \cdot b \neq 0$. Δείξτε ότι ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης.

7. Έστω R πεπερασμένη ακέραια περιοχή. Δείξτε ότι ο R είναι σώμα.

Αλγεβρικές Δομές I (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #10

- Έστω R, S δακτύλιοι με μονάδα και έστω $f : R \rightarrow S$ ένας μη μηδενικός ομομορφισμός δακτυλίων. Να δείξετε ότι $f(1_R) = 1_S$, σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:
 - Ο ομομορφισμός f είναι επιμορφισμός.
 - Ο δακτύλιος S δεν έχει διαιρέτες του μηδενός.
- Έστω R, S δακτύλιοι με μονάδα και έστω $f : R \rightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων με την ιδιότητα $f(1_R) = 1_S$. Δείξτε ότι για κάθε αντιστρέψιμο στοιχείο $x \in R$ το στοιχείο $f(x) \in S$ είναι αντιστρέψιμο και ισχύει $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.
- Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $1_R \neq 0_R$. Δείξτε ότι ο R είναι σώμα αν και μόνο αν ο R έχει ακριβώς δύο ιδεώδη.
- Έστω $f : R \rightarrow S$ ομομορφισμός μεταθετικών δακτυλίων με μονάδα με την ιδιότητα $f(1_R) = 1_S$.
 - Δείξτε ότι αν J ιδεώδες του S τότε το $f^{-1}(J)$ είναι ιδεώδες του R . Επιπλέον δείξτε ότι αν το J είναι πρώτο ιδεώδες του S τότε και το $f^{-1}(J)$ είναι πρώτο ιδεώδες του R .
 - Δείξτε ότι αν f επιμορφισμός και J μεγιστοτικό (maximal) ιδεώδες του S τότε το $f^{-1}(J)$ είναι μεγιστοτικό ιδεώδες του R .
 - Έστω $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ η ένθεση. Δείξτε ότι η f είναι μονομορφισμός δακτυλίων. Βρείτε μεγιστοτικό ιδεώδες J του δακτυλίου \mathbb{Q} ώστε το $f^{-1}(J)$ να μην είναι μεγιστοτικό ιδεώδες του \mathbb{Z} . Επίσης δείξτε ότι αν $n \geq 2$ ακέραιος και $I = n\mathbb{Z}$, τότε το I είναι ιδεώδες του \mathbb{Z} , αλλά το $f(I)$ δεν είναι ιδεώδες του \mathbb{Q} .
- Να βρεθεί, για $n \geq 2$, η χαρακτηριστική των δακτυλίων
$$\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{10}, \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{15}, \quad \mathbb{Z}_n[x], \quad \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad (\mathbb{Z}_2)^{2 \times 2}.$$
- Έστω S υποδακτύλιος του δακτυλίου των ακεραίων \mathbb{Z} . Δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ με $S = n\mathbb{Z}$. Άρα το S είναι ιδεώδες του \mathbb{Z} .
 - Βρείτε παράδειγμα υποδακτυλίου του δακτυλίου $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ο οποίος να μην είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- Έστω $n \geq 2$. Να βρεθούν όλα τα πρώτα και όλα τα μεγιστοτικά (maximal) ιδεώδη του δακτυλίου \mathbb{Z}_n .
- Βρείτε όλα τα ιδεώδη I του δακτυλίου \mathbb{Z}_{12} . Για καθένα από αυτά να περιγράψετε τον δακτύλιο πηλίκο \mathbb{Z}_{12}/I , δηλαδή βρείτε γνωστό δακτύλιο με τον οποίο να είναι ισόμορφος ο δακτύλιος πηλίκο \mathbb{Z}_{12}/I .