Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ (2016-2017)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #1, Ισοδυναμία πινάκων

1. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ με
$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} b+c & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$
Να βρεθούν βάσεις e, g ώστε ο πίνακας $[T]_e^g$ της T να είναι ίσος με $\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Να βρεθούν πίνακες P και Q ώστε $PAQ = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ όταν $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Υποθέτουμε ότι A, B είναι τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες και ότι το γινόμενο AB είναι αντιστρέψιμο. Δείξτε ότι οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι.

4. Δείξτε ότι αν A, B είναι όμοιοι τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες, τότε και οι πίνακες A^k και B^k είναι όμοιοι για κάθε $k \geq 1$.

5. Το ίχνος $tr(A)$ ενός τετραγωνικού $n\times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ ορίζεται ως το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του, δηλαδή $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

   α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $tr : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ είναι γραμμική.

   β) Να δείξετε ότι ισχύει $tr(AB) = tr(BA)$ για καθε $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

   γ) Να δείξετε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος. Επομένως, αν V είναι ένας μη μηδενικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\phi : V \to V$ γραμμική απεικόνιση, τότε ορίζεται το ίχνος της ϕ ως $tr(\phi) = tr([\phi]_e^e) \in \mathbb{F}$, όπου e είναι οποιαδήποτε διατεταγμένη βάση του V. Δείξτε ότι ο ορισμός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή της βάσης e.

6. Έστω $n \geq 1$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ με $T(f(x)) = f(x)'$. Υπολογίστε την βαθμίδα, ορίζουσα και ίχνος της T.

7. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται απο την σχέση $\phi((x, y, z)) = (y + z, x + z, x + y)$. Υπολογίστε την βαθμίδα, ορίζουσα και ίχνος της ϕ.

8. Υποθέτουμε A τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{F}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $T : \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{n\times 1}$ με $T(b) = Ab$ για κάθε $b \in \mathbb{F}^{n\times 1}$. Δείξτε ότι η T είναι γραμμική. Υπολογίστε την βαθμίδα, ορίζουσα και ίχνος της T.

9. Θεωρούμε τον υπόχωρο $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2b + 3c = 0\}$ του $\mathbb{R}^3$ και την απεικόνιση $\phi : V \to \mathbb{R}^2$ που είναι ο περιορισμός στο V της απεικόνισης $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $\psi((x, y, z)) = (x, 4y + 6z)$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις ϕ, ψ είναι γραμμικές και βρείτε τις βαθμίδες τους.

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ (2016-2017)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #2, Ιδιοτιμές

1. Να διαιρέσετε το πολυώνυμο $3x^5 + 2x^4 - 7x + 2$ με το $x^2 + x + 2$.

2. Για καθένα από τα παρακάτω 4 πολυώνυμα βρείτε τις ρίζες και τις αντίστοιχες πολλαπλότητες επί των σωμάτων $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$

$$x^3 - x^2 + 2x - 2, \quad x^2 - 2, \quad x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8, \quad 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2.$$

3. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους των παρακάτω πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ i & 0 & i \\ i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

- Δείξτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος.
- Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.
- Βρείτε την m-στή δύναμη A^m του A, για κάθε ακέραιο $m \geq 1$.

5. Είναι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

διαγωνίσιμος;

6. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και λ ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιόχωρο $V_A(\lambda)$. Ας είναι $\Phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ένα πολυώνυμο. Να αποδειχθεί ότι το $\Phi(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $\Phi(A)$ και ότι

$$V_A(\lambda) \subseteq V_{\Phi(A)}(\Phi(\lambda)).$$

Ως συνέπεια, δείξτε ότι αν ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος τότε και ο $\Phi(A)$ είναι διαγωνίσιμος. Με ένα παράδειγμα δείξτε ότι εν γένει δεν ισχύει η ισότητα

$$V_A(\lambda) = V_{\Phi(A)}(\Phi(\lambda)).$$

7. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Να δείξετε ότι οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

8. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ένας πίνακας τέτοιος ώστε κάθε μη-μηδενικό $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ είναι ιδιοδιάνυσμά του. Να δείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $A = \lambda I_n$.

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ (2016-2017)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #3, Ελάχιστο και χαρακτηριστικό πολυώνυμο

1. Ποιές συνθήκες πρέπει να πληρούν οι αριθμοί a, b, c, d, e, f έτσι ώστε η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ με τύπο

$$T(x, y, z, w) = (3x + ay + bz + cw, 3y + dz + ew, 4z + fw, 4w)$$

να είναι διαγωνίσιμη;

2. Ποιές συνθήκες πρέπει να πληρούν οι a, b ώστε η γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$T(x, y, z) = (2x, 2y + az, 3x + bz)$$

να είναι διαγωνίσιμη;

3. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Με την βοήθεια του Θεωρήματος Cayley-Hamilton, να υπολογίσετε τον πίνακα

$$D = C^{23} - 3C^{22} - 4C^{21} + 10C^{20} - C^6 + 3C^5 + 4C^4 - 11C^3 + 4C^2 + 5C + I_3.$$

4. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

και στη συνέχεια

- με την βοήθεια του θεωρήματος των Cayley-Hamilton δείξτε ότι $E^n = E^{n-2} + E^2 - I_3$ για κάθε φυσικό $n \geq 3$,
- υπολογίστε τον πίνακα E^{100},
- βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα E.

5. Βρείτε πίνακες X και Y τέτοιους ώστε

$$X^2 = Y^3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ (2016-2017)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #4, Ελάχιστο πολυώνυμο - Εσωτερικό γινόμενο

1. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = (-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) \in \mathbb{F}[x]$ και τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

   Ο A λέγεται **συνοδεύων** πίνακας του πολυωνύμου. Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι το $f(x)$.

2. Έστω $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τέτοιος ώστε $A^2 + I_2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$. Να υπολογίσετε το ελάχιστο πολυώνυμο του A και να δείξετε ότι ο A δεν είναι διαγωνίσιμος.

3. Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιος ώστε $A^2 = I_3$. Τί γνωρίζετε για το ελάχιστο πολυώνυμο του A και τί για το χαρακτηριστικό; Είναι ο A διαγώνιος; Είναι ο A διαγωνίσιμος;

4. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και m φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του n. Δείξτε ότι αν $A^m = \mathbb{O}_{n\times n}$ τότε $A^n = \mathbb{O}_{n\times n}$.

5. Βρείτε τον πίνακα e^A, όπου A είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

6. Έστω η απεικόνιση $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2.$$

   - Δείξτε ότι η απεικόνιση αυτή ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$.
   - Βρείτε τα μήκη των διανυσμάτων $(1, 0), (0, 1)$ ως προς αυτό το γινόμενο.

7. Ας είναι $\mathbb{R}_n[x]$ ο διανυσματικός χώρος όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ n και $r_0, r_1, \ldots, r_n$ πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle f, g \rangle = f(r_0)g(r_0) + f(r_1)g(r_1) + \cdots + f(r_n)g(r_n)$$

   ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}_n[x]$.

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ (2016-2017)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #5, Διαδικασία Gram-Schmidt

1. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου V που παράγεται απο τα διανύσματα

$$u_1 = (1, 1, 0, 0), \;\; u_2 = (0, -1, 0, 2)$$

και να την συμπληρώσετε σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.

2. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}_3[x]$, εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx,$$

να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου V που παράγεται απο τα $1, x, x^2$.

3. Έστω

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$$

και

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0, 2x + y - 3z = 0\}$$

υπόχωροι του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$ με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο. Να βρείτε:

   (α) Ορθοκανονικές βάσεις των V και W.

   (β) Την ορθογώνια προβολή του διανύσματος $(1, 1, 1)$ στον υπόχωρο V.

4. Δείξτε ότι οι υπόχωροι

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

και

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$$

του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^4$ με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο είναι ορθοσυμπληρωματικοί.

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ (2016-2017)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #6, Ισομετρίες

1. Συμπληρώστε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

   ώστε να είναι ορθογώνιος.

2. Έστω η απεικόνιση $\langle \cdot\,,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle := 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3.$$

   - Δείξτε ότι η $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.
   - Δείξτε οτι η γραμμική απεικόνιση $T : \left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot\,,\cdot\rangle_{can}\right) \to \left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot\,,\cdot\rangle\right)$ με τύπο

$$T(x,y,z) := \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\right),$$

     όπου $\langle \cdot\,,\cdot\rangle_{can}$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$, είναι ισομετρία.

3. Να ορίσετε μια ισομετρία από τον Ευκλείδειο χώρο $\left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot\,,\cdot\rangle_{can}\right)$ στον Ευκλείδειο χώρο $\left(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot\,,\cdot\rangle\right)$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ 2 με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

4. Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   παριστάνει στροφή κατά γωνία φ περί ενός άξονα $\mathcal{E}$ που περνάει από το σημείο $O = (0,0,0)$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε τον άξονα $\mathcal{E}$ και την γωνία φ.

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φροντιστηριακές ασκήσεις #7, Έτος 2017, Ορθογώνιοι Πίνακες, Συμμετρικοί Πίνακες, Τετραγωνικές Μορφές

1. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ορθογώνιος πίνακας. Δείξτε ότι ο πίνακας $A + 3I_n$ είναι αντιστρέψιμος.

2. Θεωρούμε τον συμμετρικό πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$
Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε: $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

3. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο
$$f(x, y, z) = (ax - y + z, -x + by - z, x - y + 2z),$$
όπου $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και $a, b \in \mathbb{R}$.
   - Να υπολογίσετε τα a, b έτσι ώστε η απεικόνιση f να έχει ιδιοτιμή το 1 με πολλαπλότητα 2.
   - Για τις τιμές των a, b που θα βρείτε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f και στη συνέχεια
   - να βρεθεί πίνακας B έτσι ώστε $B^m = A$, όπου A είναι ο πίνακας της f στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και m φυσικός αριθμός.

4. Να υπολογίσετε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε ο συμμετρικός πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$
να είναι θετικά ορισμένος.

5. Έστω A και B δύο θετικά ορισμένοι συμμετρικοί $n \times n$ πραγματικοί πίνακες. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $aA + bB$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, όπου a, b είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε ένας τουλάχιστον από τους δύο να είναι διάφορος του μηδενός.

6. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^{3 \times 1} \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$q((x, y, z)^t) = 9x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy$$
Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή q στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν. Να δείξετε ότι ο πίνακας A της q είναι θετικά ορισμένος. Να βρεθεί συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας B έτσι ώστε $B^2 = A$.

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ (2016-2017)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #8,
Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Στον $\mathbb{C}^3$ εφοδιασμένο με το συνήθες μιγαδικό Ερμητιανό γινόμενο να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου V που παράγεται απο τα διανύσματα
$$u = (1, 1, i), \;\; w = (0, i, -1).$$

2. Βρείτε $x, y \in \mathbb{C}$ ώστε ο πίνακας
$$\begin{pmatrix} 3i/5 & x \\ -4i/5 & y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$
να είναι μοναδιαίος.

3. Θεωρούμε τον Ερμητιανό πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$
Βρείτε τις ιδιοτιμές του A. Βρείτε μοναδιαίο πίνακα $P \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

4. (α) Θεωρούμε τον πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$
Δείξτε ότι ο A δεν είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$.

   (β) Θεωρούμε τον πίνακα
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$
Δείξτε ότι ο B είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{C}$ με ιδιοτιμές i και $-i$.
Βρείτε αντιστρέψιμο $P \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ώστε ο πίνακας $P^{-1}BP$ να είναι διαγώνιος.

5. Έστω A ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας. Δείξτε ότι ο πίνακας $B = A^t A$ είναι συμμετρικός άρα διαγωνίσιμος. Δείξτε ότι κάθε ιδιοτιμή του B είναι μη αρνητική και ότι ο B είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν ο A είναι αντιστρέψιμος.

6. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακέραιος $m > 0$ ώστε $A^m = \mathbb{O}_{n\times n}$. Δείξτε ότι ο A είναι ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας. Βρείτε μη μηδενικό πίνακα $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ έτσι ώστε $B = B^t$ και $B^2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$.

7. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός. Υποθέτουμε ότι $A^3 = A^2$. Δείξτε ότι $A^2 = A$.

8. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$Q(x, y) = 2xy$$

Να δείξετε ότι ο πίνακας της Q έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Να βρείτε γραμμικά πολυώνυμα

$$P(x, y) = c_1x + c_2y \quad \kappa\alpha\iota \quad R(x, y) = c_3x + c_4y$$

τέτοια ώστε

$$Q(x, y) = \lambda_1\{P(x, y)\}^2 + \lambda_2\{R(x, y)\}^2$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

9. Θεωρούμε έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ για τον οποίο ισχύει

$$A^2 + aA + bI_n = 0,$$

όπου a, b πραγματικοί αριθμοί.

(α) Εάν $a^2 - 4b > 0$, να δείξτε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος.

(β) Εάν $a^2 - 4b < 0$, να δείξετε ότι ο πίνακας A δεν είναι διαγωνίσιμος.

(γ) Εάν $a^2 - 4b = 0$ δείξτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος μόνο εάν $A = -\frac{a}{2}I_n$.

(δ) Δείξτε ότι αν $b \neq 0$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος. Σε αυτή την περίπτωση εκφράστε τον A^{-1} συναρτήσει των πινάκων A και I_n.

10. Έστω A ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας επί ενός σώματος $\mathbb{K}$.

(α) Αποδείξτε ότι αν το λ είναι μια ιδιοτιμή του A, τότε $\lambda \neq 0$ και το λ^{-1} είναι μια ιδιοτιμή του A^{-1}. Επίσης, δείξτε ότι $V_A(\lambda) = V_{A^{-1}}(\lambda^{-1})$.

(β) Δείξτε ότι ο A^{-1} είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν ο A είναι διαγωνίσιμος.

11. Έστω A ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας.

(α) Εάν το 3 είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, δείξτε ότι το 15 είναι ιδιοτιμή του πίνακα $2A^2 - 3I_n$.

(β) Έστω ότι $A^2 = 4I$. Τί γνωρίζετε για το ελάχιστο πολυώνυμο του A και τι για το χαρακτηριστικό; Είναι ο A διαγωνίσιμος;

12. Έστω $\lambda \neq \mu$ δύο ιδιοτιμές μιας γραμμικής απεικόνισης $T : V \to V$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u, v. Δείξτε ότι

(α) τα u, v είναι γραμμικά ανεξάρτητα και

(β) για κάθε $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, το $au + bv$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα της T.

13. Δείξτε ότι το γινόμενο δύο ορθογώνιων $n \times n$ πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας.

14. Δείξτε ότι αν ένας ορθογώνιος πίνακας είναι και τριγωνικός τότε είναι διαγώνιος.

15. Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$T(x, y, z) = (2x + y + 4z, 3x + 3z, 4x + 2y + z).$$

Βρείτε την προσαρτημένη απεικόνιση T^* του T ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$.

16. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι πίνακες. Να δείξετε ότι:

    (α) ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι ο A^{-1} είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος,

    (β) ο πίνακας $xA+yB$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, όπου x, y είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε ένας τουλάχιστον από τους δύο να είναι διάφορος του μηδενός.

    (γ) ο πίνακας $A + I_n$ είναι αντιστρέψιμος.

17. Εξετάστε αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/\sqrt{8} & \sqrt{3}/\sqrt{8} \\ -\sqrt{3}/\sqrt{8} & 3/4 & -1/4 \\ -\sqrt{3}/\sqrt{8} & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

παριστάνει στροφή επιπέδου περί άξονα κάθετο σε αυτό. Αν ναι, να προσδιορίσετε τον άξονα και το συνημίτονο της γωνίας στροφής.

18. Για ποιές τιμές του $b \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο

$$P(x) = (x^{16} - 9x + b)(x - 3)^{2014}$$

μηδενίζεται από τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3};$$

19. Να εξετάσετε αν ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

είναι θετικά ορισμένος.

20. Εξετάστε αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

είναι διαγωνίσιμος.

21. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

όπου k, m, n πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε τις τιμές των k, m, n για τις οποίες ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος.

(β) Για τις παραπάνω τιμές των k, m, n, βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A και χρησιμοποιήστε το για βρείτε τον αντίστροφο του A. Επίσης, να δείξτε ότι

$$A^{2017} + A^{2016} - 10A^{2015} + 8A^{2014} = \mathbb{O}_{3\times 3}.$$

22. Έστω W ο υποχώρος του χώρου $\mathbb{R}_2[x]$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ 2 που παράγετε από τα πολυώνυμα $p_1(x) = x + 1$ και $p_2(x) = x^2 + 1$. Εφοδιάζουμε τον χώρο $\mathbb{R}_2[x]$ με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

(α) Να ορίσετε μια ισομετρία από τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^2$, εφοδιαμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{can}$, στον W.

(β) Βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W στον $\mathbb{R}_2[x]$.

(γ) Βρείτε την ορθογώνια προβολή του $p_3(x) = x^2 + x + 1$ στον W.

23. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε την απεικόνιση $\langle\cdot\,,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3,$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ και $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

(α) Δείξτε ότι η παραπάνω απεικόνιση ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

(β) Να βρεθεί μια ισομετρία $T : (\mathbb{R}^3, \langle\cdot\,,\cdot\rangle) \to (W, \langle\cdot\,,\cdot\rangle_{can})$, όπου με $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{can}$ συμβολίζουμε το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^4$ και W είναι ο υποχώρος

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - 2z + w = 0\}$$

του $\mathbb{R}^4$.

24. Βρείτε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και γράψτε τον A^{-1} ως γραμμικό συνδυασμό των I_3 και A.

25. Δείξτε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

26. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ που πληρούν τις παρακάτω συνθήκες:

    - $A \neq I_2$ και $B \neq -I_2$,
    - $A^3 - A^2 + A - I_2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$,
    - $B^3 + B^2 + B + I_2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$,

    Δείξτε ότι οι πίνακες A, B έχουν τα ίδια ελάχιστα και χαρακτηριστικά πολυώνυμα, δηλαδή ότι $m_A(x) = m_B(x)$ και $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.

27. Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

    (α) Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του A.

    (β) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

    (γ) Δείξτε ότι $A^{593} - 2A^{15} + A = \mathbb{O}_{3\times 3}$.

28. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2z^2.$$
Να βρεθεί ο πίνακας A της Q. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή Q στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.

29. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

    (α) Να βρεθεί ο πίνακας A της Q. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή Q στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.

    (β) Να βρεθεί συμμετρικός και αντιστρέψιμος πίνακας B έτσι ώστε $B^2 = A$.

30. Θεωρούμε τον πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 & 6 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & -7 & 5 \\ 6 & 2 & 5 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$
Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

31. Εξετάστε αν ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
παριστάνει στροφή επιπέδου περί άξονα κάθετο σ' αυτό. Αν ναι, να προσδιορίσετε τον άξονα και το συνημίτονο της γωνίας στροφής.

32. Βρείτε έναν διαγωνίσιμο 3×3 πίνακα A με πραγματικούς συντελεστές ο οποίος να πληροί τις παρακάτω ιδιότητες:

   - βαθμίδα ίση με 2
   - ιδιοτιμές το 0 και το 1
   - ιδιοδιανύσματα τα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A;

33. Συμπληρώστε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ * & * & * \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   ώστε να είναι ορθογώνιος.

34. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A = A^t$. Δείξτε ότι αν u και v είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές τότε $\langle u, v\rangle = 0$.

35. Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$T(x, y, z) = (y, ax + az, y)$$

   για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Βρείτε για ποιές τιμές του a η T δεν διαγωνοποιείται.