Γραμμική Άλγεβρα Ι (2016-2017)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #1. Πράξεις πινάκων.

1. Δείξτε ότι για κάθε $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ισχύει ότι
$$2(A - B + 3C) + 3(2A + 6B - 6C) - 4(2A + 4B - 3C) = \mathbb{O}_{m\times n}.$$

2. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, και $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   Να υπολογίσετε, όταν ορίζονται, τα γινόμενα AB, BA, BC, CB, ABC.

3. Έστω
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Να δείξετε ότι $A^2 = A$, $B^3 = \mathbb{O}_{3\times 3}$, ο C αντιστρέφεται και $C^{-1} = C$.

4. Να βρείτε τον αντίστροφο του $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ και τον πίνακα $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ώστε
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. Να υπολογίσετε όλους τους 2×2 πίνακες που μετατίθενται με τον πίνακα
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Αν
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   να δείξετε ότι $A^4 = I_3$ και να βρείτε τον αντίστροφο του A. Βρείτε και τον πίνακα A^{2015}.

7. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας τέτοιος ώστε $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = \mathbb{O}_{n\times n}$. Δείξτε ότι A αντιστρέψιμος και $A^{-1} = -A^4$.

8. Να βρείτε έναν 2×2 πίνακα A έτσι ώστε: $A^2 = A$ με $A \neq \mathbb{O}_{2\times 2}$ και $A \neq I_2$. Βρείτε και έναν δεύτερο πίνακα B με τις ίδιες ιδιότητες.

9. Έστω A, B και $A + B$ αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες. Δείξτε ότι και ο $A^{-1} + B^{-1}$ είναι επίσης αντιστρέψιμος και
$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B.$$

Γραμμική Άλγεβρα Ι (2016-2017)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #2

Θέμα: Γραμμοπράξεις, Στοιχειώδεις Πίνακες, Συστήματα

1. Να βρεθεί ένας 4×3 πίνακας Α με βαθμίδα ίση με 2 ώστε κάθε στοιχείο του να είναι μη μηδενικό.

2. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 11 \\ 4 & -2 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

   α) Να βρεθούν οι αντίστοιχοι κλιμακωτοί πίνακες και οι βαθμίδες τους.
   β) Να βρεθούν οι αντίστοιχοι ισχυρά κλιμακωτοί πίνακες.
   γ) Να γραφούν όλοι οι στοιχειώδεις πίνακες που χρησιμοποιούνται.

3. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

   Εκφράστε τον αντίστροφο του A σαν γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

4. Βρείτε τους αντιστρόφους των πινάκων A και B και γράψτε τους σαν γινόμενο στοιχειωδών πινάκων, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Να βρεθεί ο πίνακας X ώστε $AX = B$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

6. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$x_1 + ax_2 + x_3 + ax_4 = 1$$
$$x_1 + ax_2 - x_3 - ax_4 = -1$$
$$ax_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1$$

   για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

7. Να λύσετε τα επόμενα δύο συστήματα.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Γραμμική Άλγεβρα Ι (2016-2017)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #3, Θέμα: Ορίζουσες

1. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε να δείξετε ότι
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta).$$

4. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}$.

5. Θεωρούμε ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ που ικανοποιεί την σχέση $A^2 + 2A = O$. Να δείξετε ότι ο πίνακας $A + I_3$ είναι αντιστρέψιμος, να βρείτε τον $(A + I_3)^{-1}$, και να υπολογίσετε την ορίζουσα του A.

6. Να λυθεί η εξίσωση $\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$

7. Να δείξετε ότι η ορίζουσα του πίνακα $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ g & i & j & k & l \\ m & n & p & q & r \end{pmatrix}$ είναι μηδέν.

8. Να υπολογίσετε την $n \times n$ ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Γραμμική Άλγεβρα Ι (2016-2017)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #4, Θέμα: Διαν. Χώροι

1. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$ είναι υποχώροι του $\mathbb{R}^4$:
   - $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\}$
   - $B = \{(a, b, a + 2b, a - 7b) | a, b \in \mathbb{R}\}$
   - $C = \{(ab, 2b, a, -a) | a, b \in \mathbb{R}\}$
   - $D = \{(a, 2b, b, 4) | a, b \in \mathbb{R}\}$
   - $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 x_2 = x_3 x_4\}$

2. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^{n\times n}$ εξετάστε αν το επόμενα υποσύνολα είναι υποχώροι. α) Το σύνολο των συμμετρικών πινάκων. β) Το σύνολο των άνω τριγωνικών πινάκων. γ) Το σύνολο των αντιστρεψίμων πινάκων. δ) Το σύνολο των πινάκων με βαθμίδα ίση με n-1.

3. Έστω $\mathbb{F}$ σώμα και U, W υποχώροι του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V. Δείξτε ότι αν $U \cup W$ είναι υποχώρος τότε $U \subseteq W$ ή $W \subseteq U$.

4. Δείξτε ότι το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικός συνδιασμός των $\{(2, 4, 0), (1, 3, -1), (3, 7, -1)\}$.

5. Ανήκει το στοιχείο $1 + x - 2x^2 + 3x^3$ στον υποχώρο
$$V =< 1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3 >$$
του $\mathbb{R}_3[x]$;

6. Είναι το υποσύνολο $\{(2, 4, 0), (1, 3, -1), (3, 7, -1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ γραμμικά ανεξάρτητο;

7. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_3[\mathrm{x}]$ των πολυωνύμων βαθμού ≤ 3 με πραγματικούς συντελεστές δίνεται το σύνολο $\{\mathrm{x}^2 - 1, \mathrm{x} + 2, \mathrm{x}^2 - \mathrm{x}\}$. Να εξετάσετε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

8. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^{2\times 2}$ των 2×2 πινάκων να εξετάσετε αν το σύνολο $\{A, B, C, D\}$ των επομένων διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αν όχι να βρείτε ένα μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$.

9. Αν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δείξτε ότι και τα επόμενα διανύσματα είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα
$$v_1,\ v_1 + v_2,\ v_1 + v_2 + v_3,\ \ldots,\ v_1 + \ldots + v_n.$$

Γραμμική Άλγεβρα I (2016-2017)
Φροντιστηρ. ασκήσεις #5, Θέμα: Διαν. Χώροι, II

1. Να προσδιοριστούν όλες οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύνολο διανυσμάτων
$$\{x = (a^2, 0, 1), \;\; y = (0, a, 2), \;\; z = (1, 0, 1)\}$$
αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$.

2. Να αποδειχτεί ότι το σύνολο των 3×3 διαγωνίων πινάκων με πραγματικούς συντελεστές είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{3\times 3}$ και να προσδιοριστεί μια βάση του.

3. Να προσδιοριστεί μιά βάση και η διάσταση του υποχώρου V του $\mathbb{R}^4$, όπου
$$V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : \; c = a - b, \; d = a + b\}$$

4. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ο $\mathbb{R}$-υποχώρος V του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα
$$\overrightarrow{\varepsilon_1} = (1, 2, 3, 4), \; \overrightarrow{\varepsilon_2} = (-2, 1, \lambda, 2), \; \overrightarrow{\varepsilon_3} = (3, 1, 1, 2)$$
έχει τη μικρότερη διάσταση.

5. Βρείτε μια βάση και ένα ευθύ συμπλήρωμα των επομένων υποχώρων του $\mathbb{R}_3[x]$
$V = \{f(x) \mid f(0) = 0\}$.
$W = \left\{f(x) \mid f(x)' = 0\right\}$.
$T = \{f(x) \mid f(x) = f(-x)\}$.

6. Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί και ποιοι λανθασμένοι. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Η διάσταση του υποχώρου
   $$V = \{(x, y, z) | x + 2y + z = 0, x + y + 2z = 0, 2x + y + z = 0\}$$
   του $\mathbb{R}^3$ είναι 2.

   (β′) Αν A είναι ένας 5×3 πραγματικός πίνακας τότε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ που αντιστοιχούν στις γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

7. Στον $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τους υποχώρους του
$$V =< (1, 2, 1), (2, 2, -2), (1, 3, 3) >$$
$$W =< (1, 2, 2), (2, 2, -6), (2, 3, -1) > .$$
Να προσδιοριστούν βάσεις και οι διαστάσεις των υποχώρων $V, W, V \cap W, V + W$. Ισχύει ότι $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$;

Γραμμική Άλγεβρα Ι (2016-2017)
Φροντ. ασκήσεις #6, Θέμα: Γραμμικές Απεικονίσεις

1. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την σχέση
$$\phi((x,y,z)) = (x+2y, y-z, 2x+4y)$$
είναι γραμμική. Να υπολογιστεί μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας της ϕ.

2. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ που ορίζεται από την σχέση
$$\phi((x,y)) = (x+2y, y-x, x+4y, x+y, y)$$
είναι γραμμική. Να υπολογιστεί μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας της ϕ.

3. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται απο την σχέση
$$\phi((x,y,z)) = (y+z, x+z, x+y)$$
είναι ισομορφισμός.

4. Να ορίσετε ένα ισομορφισμό από τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_3[x]$ στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

5. Βρείτε τον πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ με $T(x,y,z) = (x-y+2z, y-3z, 2x+y, z)$ από την βάση $\alpha = \{(1,0,2),(1,1,1),(0,0,1)\}$ στην βάση $\beta = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$.

6. Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την βάση $\gamma = \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ στην κανονική βάση ϵ του $\mathbb{R}^3$. Επίσης βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την ϵ στην γ.

7. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ και το γραμμικό μετασχηματισμό: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, που ορίζεται ώς εξής:
$$T(1,0,0) = (1,1,0)$$
$$T(1,1,0) = (0,3,1)$$
$$T(1,1,1) = (0,4,-1)$$
   (α′) Να υπολογίσετε την τιμή $T(x,y,z)$ για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   (β′) Να βρείτε μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας του T.

   (γ′) Να βρείτε τον πίνακα $[T]_\alpha^\alpha$ από τη βάση $\alpha = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ στην ίδια βάση α του $\mathbb{R}^3$.

Γραμμική Άλγεβρα Ι (2016-2017)

Φροντιστηρ. ασκήσεις #7-8, Θέμα: Επαναληπτικές

1. Να υπολογίσετε, με χρήση οριζουσών, για ποιές τιμές των a, b η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a+2 \\ a & 3 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

   είναι 2.

2. Για τον ακόλουθο πραγματικό πίνακα A να υπολογίσετε μια βάση του χώρου γραμμών, μια βάση του χώρου στηλών, καθώς και τις αντίστοιχες διαστάσεις

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$x + ty - z = t$$

$$x - y - z = 3$$

$$x + y - tz = 1$$

   όπου $t \in \mathbb{R}$.

5. Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε το γραμμικό σύστημα

$$x - 4y + az = a + b$$

$$ax + y + z = 4$$

$$x - y + z = b$$

   $i)$ να έχει μοναδική λύση, $ii)$ να μήν έχει λύση, $iii)$ να έχει άπειρες λύσεις.

6. Στον $\mathbb{R}^4$ θεωρούμε τους υποχώρους του

$$V = \{(x, y, z, w) | x - y + z - w = 0\}$$

$$W =< (1, 2, 4, 8), (1, 1, 1, 1), (3, 5, 9, 17) > .$$

Να προσδιοριστούν βάσεις και οι διαστάσεις των υποχώρων $V, W, V \cap W$ και $V + W$. Βρείτε υποχώρους V', W' τέτοιους ώστε $\mathbb{R}^4 = V \oplus V'$ και $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$.

7. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$$

που ορίζεται απο τη σχέση

$$T(f(x)) = \begin{pmatrix} 2f'(0) & f(1) \\ f''(2) & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall f(x) \in \mathbb{R}_2[x].$$

(α′) Να δείξετε ότι η T είναι γραμμική.

(β′) Να βρείτε μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας της T.

(γ′) Είναι η T ένα προς ένα; Είναι η T επί;

8. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως εξής:

$$T(x, y, z) = (y, z, -x - y - z) \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Είναι η T αντιστρέψιμη; Αν ναι, να υπολογίσετε την T^{-1}.

9. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως εξής:

$$T(x, y, z) = (\frac{19}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{13}{4}z, \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}y - \frac{11}{4}z, 3x + y - 4z) \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(α′) Να βρείτε τον πίνακα A της T στη βάση α$= \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

(β′) Να βρείτε τον πίνακα B της T στη βάση $\{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

10. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$. Αν μια βάση του πυρήνα της T είναι η $\{x_1, \ldots, x_s\}$, μια βάση της εικόνας της T είναι η $\{y_1, \ldots, y_r\}$, και τα διανύσματα $\{z_1, \ldots, z_r\}$ του V έχουν την ιδιότητα $T(z_i) = y_i$, $1 \leq i \leq r$, τότε δείξτε ότι το σύνολο $\{x_1, \ldots, x_s, z_1, \ldots, z_r\}$ αποτελεί βάση του V.

11. Έστω A και B δύο $n \times n$ πίνακες πραγματικών αριθμών και έστω $adj(A)$ και $adj(B)$ οι προσαρτημένοι πίνακες των A, B αντίστοιχα. Αν A, B είναι αντιστρέψιμοι, να δείξετε ότι και ο πίνακας $adj(AB)$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει

$$(adj(AB))^{-1} = adj(A)^{-1}adj(B)^{-1}.$$

12. Έστω A, B δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες πραγματικών αριθμών τέτοιοι ώστε $A^t = A^{-1}$, $B^t = B^{-1}$ και οι πίνακες $A + B$, $A - B$ είναι αντιστρέψιμοι. Να δείξετε ότι και ο πίνακας $A^tB - B^tA$ είναι αντιστρέψιμος.