# Θεωρία Αριθμών (2017-2018)
## Φροντιστηριακές ασκήσεις #1, Μιγαδικοί αριθμοί

1. Στο μιγαδικό επίπεδο να σημειώσετε τις εικόνες και τις διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών αριθμών: $1+i, \quad 1, \quad i, \quad -2i, \quad 3+4i, \quad 3-4i, \quad 5, \quad 0.$

2. Ποιος είναι ο $\bar{z}$ όταν

$$z=-5+7i, \qquad z=-4+9i, \qquad z=4i \qquad z=11, \qquad z=-i.$$

3. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών

$$1+i, \qquad -5i, \qquad 0, \qquad -4, \qquad (1-i)^2(1+i)^4, \qquad (3+i)/(4-3i).$$

4. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή $\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

   - $(-4+6i)+(7-2i)$, $\qquad (4+4i)+(-8-7i)+(5+3i)$
   - $(3-2i)-(6+4i)$, $\qquad (3+2i)(4+5i)$
   - $3i(6+i)$, $\qquad (4+3i)(4-3i)$
   - $1/(1+i)$, $\qquad i^6$
   - $i^2+2i+1$, $\qquad (1+i\sqrt{3})^2$
   - $(3+i)/(2-i)$, $\qquad (6-i\sqrt{2})/(1+i\sqrt{2})$

5. Για έναν μιγαδικό αριθμό $z$ να αποδείξετε ότι:

   - Ο $z$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z=\bar{z}$.
   - Ο $z$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z=-\bar{z}$.

6. Αν $z_1=(5-9i)/(7+4i)$ και $z_2=(5+9i)/(7-4i)$ να δείξετε ότι ο $z_1+z_2$ είναι πραγματικός αριθμός, ενώ ο $z_1-z_2$ είναι φανταστικός αριθμός.

7. Να βρείτε τους $x,y\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει

   - $(x+y)+(x-y)i=3-i$
   - $(3-2i)^2-(x+yi)=x-yi$
   - $((1+i)/(1-i))^2+1/(x+yi)=1+i$

8. Να λύσετε, για $z$ μιγαδικό αριθμό, τις εξισώσεις

   - $\bar{z}=z^2$
   - $\bar{z}=z^3$

# Θεωρία Αριθμών (2017-2018)

## Φροντιστηριακές ασκήσεις #2, Μιγαδικοί αριθμοί (Συνέχεια)

1. Να λύσετε, για $z$ μιγαδικό αριθμό, τις εξισώσεις:
$$z^2 - 3z + 2 = 0, \qquad z^2 - 2z + 3 = 0, \qquad z + 1/z = 1.$$

2. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$ (με $x, y \in \mathbb{R}$) για τους οποίους ισχύει:
$$|z^2| = z^2, \qquad |z - 1| = z, \qquad |z + i| = 2\bar{z}.$$

3. Να βρείτε πού ανήκουν οι μιγαδικοί $z$ για τους οποίους
$$|z| = 1, \qquad |z - i| = 1, \qquad 1 < |z| < 2, \qquad |z| \geq 2.$$

4. Αν για τους μιγαδικούς $z$ ισχύει $|z| = 1$, να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών $w$ με $w = 2z + 1$. Με άλλα λόγια, περιγράψτε το σύνολο
$$A = \{2z + 1 : z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

5. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς:
$$1 + \sqrt{3}i, \qquad 1 - \sqrt{3}i, \qquad -1 - \sqrt{3}i, \qquad -1 + \sqrt{3}i, \qquad 4, \qquad -4.$$

6. Να υπολογίσετε την παράσταση $((1 + i)/(\sqrt{2}))^6$.

7. Αν $z = (1 + i\sqrt{3})/2$ να υπολογίσετε τον $z^{2017}$.

8. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη διαίρεση ενός μιγαδικού $z$ με $i$.

9. Αν $\theta \in \mathbb{R}$ και $z = \cos\theta + i\sin\theta$ να αποδείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει
$$z^n + (1/z)^n = 2\cos(n\theta), \qquad z^n - (1/z)^n = 2i\sin(n\theta).$$

10. Αν $n \geq 2$ είναι θετικός ακέραιος και $\omega = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ να αποδείξετε ότι
$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1} = 0, \qquad 1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \ldots \cdot \omega^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις στο μιγαδικό επίπεδο:
$$z^3 = 1, \qquad z^4 = 1, \qquad z^6 = 1.$$

12. Να λύσετε, για $z$ μιγαδικό αριθμό, τις εξισώσεις:
$$z^3 = -i, \qquad z^4 = 16(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)), \qquad z^6 = -64,$$
$$z^3 = 1 - i, \qquad z^7 + 1 = 0, \qquad z^4 + 5z^2 + 4 = 0.$$

# Θεωρία Αριθμών (2017-2018)
## Φροντιστηριακές ασκήσεις #3, Μαθηματική Επαγωγή, Διαιρετότητα

1. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n$ ισχύει $n! \leq n^n$.

2. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \qquad 1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}.$$

3. Να δείξετε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος $N$ έτσι ώστε να ισχύει $2^n > n^3$ για κάθε $n \geq N$.

4. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n$ ισχύουν

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2$$

5. Να εκτελεσθεί η Ευκλείδεια Διαίρεση μεταξύ των ακεραίων $a$ και $b$, όταν:

$$a=-195518,\ b=22, \qquad a=192544,\ b=37.$$

6. Έστω $a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι $q,r$ έτσι ώστε:

$$a=bq+r, \qquad -\frac{|b|}{2} < r \leq \frac{|b|}{2}$$

7. Να δείξετε ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός. Επίσης να δείξετε ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 3. Επιπλέον να εξετασθεί αν το γινόμενο $n$ το πλήθος διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του $n$ για κάθε θετικό ακέραιο $n$.

8. Δείξτε ότι αν ο $n$ είναι περιττός θετικός ακέραιος τότε το 11 διαιρεί τον $10^n+1$, ενώ αν ο $n$ είναι άρτιος θετικός ακέραιος τότε το 11 διαιρεί τον $10^n-1$.

9. Βρείτε την 2-αδική και την 3-αδική αναπαράσταση του αριθμού 100.

10. Έστω ότι ο θετικός ακέραιος $n$ έχει 6-αδική αναπαράσταση $(2052)_6$. Βρείτε τον αριθμό $n$.

11. Δείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός της μορφής $6k+5$ έχει έναν πρώτο διαιρέτη της μορφής $6k+5$. Σαν πόρισμα δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $6k+5$.

# Θεωρία Αριθμών (2017-2018)

## Φροντιστηριακές ασκήσεις #4, Διαιρετότητα, Πρωτογενής Ανάλυση

1. Δείξτε ότι αν ο $a$ είναι περιττός ακέραιος τότε ο $a^2$ είναι της μορφής $8k+1$ και ο $a^4$ είναι της μορφής $16k+1$.

2. Έστω $p, q, a$ θετικοί ακέραιοι με τους $p, q$ διαφορετικούς πρώτους. Δείξτε ότι αν τα $p$ και $q$ διαιρούν τον $a$ τότε και το $pq$ διαιρεί τον $a$. Δείξτε με παράδειγμα ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει αν τα $p, q, a$ είναι θετικοί ακέραιοι με τον $p$ πρώτο αλλά τον $q$ σύνθετο.

3. Έστω $p, a, b$ θετικοί ακέραιοι με τον $p$ πρώτο. Δείξτε ότι αν $pb = a^2$ τότε το $p$ διαιρεί τον $b$.

4. Έστω $n \geq 2$ και
$$b = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$$
η πρωτογενής ανάλυση του φυσικού αριθμού $b$. Δείξτε ότι η $n$-στή ρίζα του $b$ είναι ρητός αριθμός αν και μόνο αν το $n$ διαιρεί το $a_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$. Σαν πόρισμα, έχουμε ότι ο $\sqrt{p}$ είναι άρρητος για κάθε πρώτο $p$. Πιο γενικά, σαν πόρισμα έχουμε ότι αν ο $a$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρώτων τότε ο $\sqrt{a}$ είναι άρρητος.

5. Έστω $a, b, n, m \in \mathbb{N}$ με $n \geq m$. Υποθέτουμε ότι το $a^n$ διαιρεί το $b^m$. Δείξτε ότι το $a$ διαιρεί το $b$.

6. Να περιγραφούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί οι οποίοι έχουν ακριβώς 2, 3 ή 4 θετικούς διαιρέτες.

7. Δείξτε ότι κάθε ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 11 είναι άθροισμα δύο σύνθετων αριθμών.

8. Βρείτε όλους τους φυσικούς διαιρέτες των αριθμών:
$$140, \quad 2013, \quad 1001, \quad 9999, \quad 111111, \quad 10!, \quad \binom{30}{10}$$

9. Να βρεθεί η πρωτογενής ανάλυση των φυσικών αριθμών:
$$10^6 - 1, \qquad 10^8 - 1, \qquad 2^{15} - 1$$

10. Να βρεθούν όλες οι θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης
$$m^n = n^m$$
δηλαδή να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων αριθμών $(n, m)$ τα οποία ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

# Θεωρία Αριθμών (2017-2018)

## Φροντιστηριακές ασκήσεις #5, Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

1. Δίδεται ότι $3168 = 2^5 \cdot 9 \cdot 11$ και $15972 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^3$. Να βρεθεί ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης και το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των 3168 και 15972.

2. Να υπολογίσετε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη $d$ και το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο $e$ των αριθμών 1485 και 1745. Στη συνέχεια να βρεθούν ακέραιοι $x$ και $y$ έτσι ώστε:
$$d = 1485x + 1745y$$

3. Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο $m$ ισχύει
$$(2m+1, 9m+4) = 1$$

4. Έστω $a, b$ θετικοί ακέραιοι και $p$ ένας πρώτος αριθμός. Είναι οι ακόλουθες προτάσεις αληθείς ή ψευδείς; Για κάθε μια δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:
   (α΄) Αν $(a, p^2) = p$, τότε: $(a^2, p^2) = p^2$.
   (β΄) Αν $(a, p^2) = p$ και $(b, p^2) = p^2$, τότε: $(ab, p^4) = p^3$.
   (γ΄) Αν $(a, p^2) = p$ και $(b, p^2) = p$, τότε: $(ab, p^4) = p^2$.
   (δ΄) Αν $(a, p^2) = p$, τότε: $(a + p, p^2) = p$.

5. Έστω $m$ ένας ακέραιος. Να δείξετε ότι οι αριθμοί
$$6m-1, \quad 6m+1, \quad 6m+2, \quad 6m+3, \quad 6m+5$$
είναι ανά δύο πρώτοι μεταξύ τους.

6. Έστω $a, b \in \mathbb{N}$, και υποθέτουμε ότι $(a, b) = 1$. Να δείξετε ότι:
   (α΄) $(a+b, a-b) = 1$ ή $2$.
   (β΄) $(2a+b, a+2b) = 1$ ή $3$.
   (γ΄) $(a+b, a-b, ab) = 1$ ή $2$.

   Μπορείτε να προσδιορίσετε, για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις πότε α-κριβώς ο μέγιστος διαιρέτης έχει την τιμή 1, 2, ή 3;

7. Αν $a, b$ είναι φυσικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:
$$(a, b) = (a+b, [a, b])$$
όπου $(c, d)$ συμβολίζει το Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη και $[c, d]$ το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο. Ως εφαρμογή, βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι 798 και το ελάχιστο κοινό τους πολλαπλάσιο να είναι 10780.

# Θεωρία Αριθμών (2017-2018)
## Φροντιστηριακές ασκήσεις #6, Διοφαντικές εξισώσεις, Ακέραιοι mod $n$

1. Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις, για τις ακόλουθες διοφαντικές εξισώσεις

$$1485x + 1745y = 15, \qquad 102x + 1001y = 1, \qquad 60x + 18y = 97.$$

2. Έστω η διοφαντική εξίσωση

$$ax + by = c$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι το σύνολο των θετικών λύσεων της παραπάνω διοφαντικής εξίσωσης είναι πεπερασμένο. Να εξετασθεί αν η διοφαντική εξίσωση

$$31x + 43y = 5$$

έχει θετικές λύσεις. Επιπλέον δείξτε ότι το σύνολο των θετικών λύσεων της διοφαντικής εξίσωση $x - y = 1$ είναι άπειρο.

3. Έστω $a_1, \ldots, a_n$ ακέραιοι όχι όλοι μηδέν και $c$ ακέραιος. Πότε έχει η Διοφαντική εξίσωση

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$$

ακέραιες λύσεις;

4. Δείξτε ότι η κλάση υπολοίπων $[10]_{21}$ είναι αντιστρέψιμη ως στοιχείο του $\mathbb{Z}_{21}$, και βρείτε την αντίστροφη κλάση.

5. Δείξτε ότι η κλάση $[62]_{155}$ δεν είναι αντιστρέψιμη ως στοιχείο του $\mathbb{Z}_{155}$.

6. Δείξτε ότι αν $a, n \in \mathbb{Z}$ με $n \geq 1$ τότε το σύνολο

$$\{a, a+1, \ldots, a+n-1\}$$

αποτελεί ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων mod $n$.

7. Δείξτε ότι

$$2^{20} - 1 \equiv 0 \bmod 41, \qquad 2^{50} \equiv 4 \bmod 7,$$
$$41^{65} \equiv 6 \bmod 7, \qquad 1! + 2! + 3! + \ldots + 100! \equiv 9 \bmod 12,$$
$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + 100^5 \equiv 0 \bmod 4.$$

8. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός

$$\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$$

είναι ακέραιος.

# Θεωρία Αριθμών (2017-2018)
## Φροντιστηριακές ασκήσεις #7, Ακέραιοι mod $n$

1. Βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς $n$ για τους οποίους ο αριθμός $\phi(n)$ είναι περιττός.

2. Να δείξετε ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $n$ έτσι ώστε $\phi(n) = 2, 4, 6, 8, 10, 12$.

3. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει θετικός ακέραιος $n$ έτσι ώστε $\phi(n) = 14$.

4. Να δείξετε ότι αν $m \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο των θετικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης
$$\phi(x) = m$$
είναι πεπερασμένο.

5. Έστω $n \in \mathbb{Z}$ με $n \geq 2$ και $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων mod $n$. Δείξτε ότι αν $n$ περιττός τότε
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \equiv 0 \,(\mathsf{mod}\ n)$$
ενώ αν $n$ άρτιος τότε
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \equiv n/2 \ (\mathsf{mod}\ n).$$

6. Δείξτε ότι: $11 \mid 10! + 1$ και $13 \mid 12! + 1$

7. Να βρεθούν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:
$$\frac{16!}{19} \quad \& \quad \frac{5!25!}{31} \quad \& \quad \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 43}{11} \quad \& \quad \frac{5^{100}}{7} \quad \& \quad \frac{6^{2000}}{11}$$

8. Δείξτε ότι:
$$3^{999999999} \equiv -1 \,(\mathsf{mod}\ 7) \qquad \& \qquad 2^{1000000} \equiv 1 \,(\mathsf{mod}\ 17)$$

9. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$:
$$42 \mid n^7 - n \qquad \& \qquad 30 \mid n^9 - n$$

10. Δείξτε ότι αν $p > 2$ είναι πρώτος, τότε
$$(p-2)! \equiv 1 \,(\mathsf{mod}\ p)$$

# Θεωρία Αριθμών (2017-2018)

## Φροντιστηριακές ασκήσεις #8, Συστήματα γραμμικών ισοτιμιών, Τάξη ακεραίου mod $n$

1. Βρείτε όλες τις λύσεις στο $\mathbb{Z}$, ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις, για τις ισοτιμίες:

$$5x \equiv 2 \pmod{8}, \qquad 13x \equiv 6 \pmod{26}, \qquad 3x \equiv 9 \pmod{30}.$$

2. Δείξτε ότι για κάθε $k \geq 2$, υπάρχουν $k$ το πλήθος διαδοχικοί ακέραιοι, κάθε ένας από τους οποίους διαιρείται από τετράγωνο αριθμού $> 1$.

3. Για ποιές τιμές του $c$, όπου $0 \leq c \leq 29$, έχει λύσεις η ισοτιμία $12\,x \equiv c \pmod{30}$ Όταν υπάρχουν λύσεις, πόσες ανισότιμες λύσεις $(\mathrm{mod}\ 30)$ υπάρχουν;

4. Βρείτε έναν αριθμό ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 11 και δίνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθεί με τους αριθμούς $2, 3, 5$, και 7.

5. Βρείτε όλες τις λύσεις στο $\mathbb{Z}$ για το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x & \equiv & 32 \pmod{8} \\ x & \equiv & -6 \pmod{15} \\ x & \equiv & 2 \pmod{7} \end{cases}$$

6. Βρείτε όλες τις λύσεις στο $\mathbb{Z}$ για το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} 2x & \equiv & 14 \pmod{10} \\ 5x & \equiv & 5 \pmod{15} \\ 3x & \equiv & 2 \pmod{8} \end{cases}$$

7. Βρείτε τις τάξεις mod 16 των ακεραίων $3, 5, 7$ και 9.

8. Βρείτε τις τάξεις των στοιχείων του $\mathsf{U}(\mathbb{Z}_9)$ και $\mathsf{U}(\mathbb{Z}_{10})$, όπου $\mathsf{U}(\mathbb{Z}_n)$ είναι το σύνολο των αντιστρεφίμων στοιχείων του $\mathbb{Z}_n$.

9. Έστω $n \geq 2$ ακέραιος και $a, b$ ακέραιοι με $ab \equiv 1 \pmod{n}$. Δείξτε ότι:

$$(a, n) = 1, \qquad (b, n) = 1, \qquad \mathrm{ord}_n(a) = \mathrm{ord}_n(b).$$

10. Έστω $a, m$ ακέραιοι με $a \geq 2, m \geq 2$. Θέτουμε $n = a^m - 1$. Δείξτε ότι

$$(a, n) = 1, \qquad \mathrm{ord}_n(a) = m$$

και ακολούθως να συμπεράνετε ότι $m \mid \phi(a^m - 1)$.

# Θεωρία Αριθμών (2017-2018)

## Φροντιστηριακές ασκήσεις #9, Τάξη ακεραίου mod $n$ , Πρωταρχικές ρίζες

1. Έστω $a, n$ ακέραιοι με $n \geq 1$ και $(a, n) = 1$. Να δειχθεί ότι ο θετικός ακέραιος $x$ είναι λύση της ισοτιμίας
$$a^x \equiv 1 \,(\text{mod } n)$$
αν και μόνο αν $\text{ord}_n(a) \mid x$. Σαν εφαρμογή, να βρεθούν όλες οι θετικές λύσεις της ισοτιμίας $2^x \equiv 1 \,(\text{mod } 7)$.

2. Έστω $n \geq 3$ ακέραιος. Δείξτε ότι $(n-1, n) = 1$ και ότι $\text{ord}_n(n-1) = 2$. Σαν συνέπεια, να συμπεράνετε ότι $2 \mid \phi(n)$.

3. Βρείτε, αν υπάρχουν, πρωταρχικές ρίζες $(\text{mod } n)$, όπου $n = 4, 5, 10, 13, 14, 18, 20$.

4. Βρείτε πρωταρχικές ρίζες $(\text{mod } n)$, όπου $n = 23$ και $n = 31$.

5. Δείξτε ότι αν υπάρχει μια πρωταρχική ρίζα $(\text{mod } n)$ τότε υπάρχουν ακριβώς $\phi(\phi(n))$ ανισότιμες πρωταρχικές ρίζες $(\text{mod } n)$.

6. Βρείτε όλες τις πρωταρχικές ρίζες $(\text{mod } 23)$.

7. (α′) Δείξτε ότι το 3 είναι πρωταρχική ρίζα $(\text{mod } 17)$.
   (β′) Για δοθέντα ακέραιο $a$ με $(a, 17) = 1$ υπολογίστε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο $k$ ώστε $3^k \equiv a \,(\text{mod } 17)$.
   (γ′) Λύστε για $x$ ακέραιο την ισοτιμία $x^4 \equiv 13 \,(\text{mod } 17)$.

8. Έστω $p$ περιττός πρώτος και $a$ ένας ακέραιος με $(a, p) = 1$. Δείξτε ότι:
   (α′) Αν $p \equiv 1 (\text{mod } 4)$, τότε ο $a$ είναι πρωταρχική ρίζα $(\text{mod } p)$ αν και μόνο αν ο ακέραιος $-a$ είναι επίσης πρωταρχική ρίζα $(\text{mod } p)$.
   (β′) Αν $p \equiv 3 (\text{mod } 4)$, τότε ο $a$ είναι πρωταρχική ρίζα $(\text{mod } p)$ αν και μόνο αν $\text{ord}_p(-a) = \frac{p-1}{2}$.