

Θεωρία Αριθμών (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #1, Μιγαδικοί αριθμοί

1. Στο μιγαδικό επίπεδο να σημειώσετε τις εικόνες και τις διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών αριθμών: $1 + i$, 1 , i , $-2i$, $3 + 4i$, $3 - 4i$, 5 , 0 .

2. Ποιος είναι ο \bar{z} όταν

$$z = -5 + 7i, \quad z = -4 + 9i, \quad z = 4i \quad z = 11, \quad z = -i.$$

3. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών

$$1 + i, \quad -5i, \quad 0, \quad -4, \quad (1 - i)^2(1 + i)^4, \quad (3 + i)/(4 - 3i).$$

4. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή $\alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $(-4 + 6i) + (7 - 2i)$, $(4 + 4i) + (-8 - 7i) + (5 + 3i)$
- $(3 - 2i) - (6 + 4i)$, $(3 + 2i)(4 + 5i)$
- $3i(6 + i)$, $(4 + 3i)(4 - 3i)$
- $1/(1 + i)$, i^6
- $i^2 + 2i + 1$, $(1 + i\sqrt{3})^2$
- $(3 + i)/(2 - i)$, $(6 - i\sqrt{2})/(1 + i\sqrt{2})$

5. Για έναν μιγαδικό αριθμό z να αποδείξετε ότι:

- Ο z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z = \bar{z}$.
- Ο z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z = -\bar{z}$.

6. Αν $z_1 = (5 - 9i)/(7 + 4i)$ και $z_2 = (5 + 9i)/(7 - 4i)$ να δείξετε ότι ο $z_1 + z_2$ είναι πραγματικός αριθμός, ενώ ο $z_1 - z_2$ είναι φανταστικός αριθμός.

7. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει

- $(x + y) + (x - y)i = 3 - i$
- $(3 - 2i)^2 - (x + yi) = x - yi$
- $((1 + i)/(1 - i))^2 + 1/(x + yi) = 1 + i$

8. Να λύσετε, για z μιγαδικό αριθμό, τις εξισώσεις

- $\bar{z} = z^2$
- $\bar{z} = z^3$

Θεωρία Αριθμών (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #2, Μιγαδικοί αριθμοί (Συνέχεια)

1. Να λύσετε, για z μιγαδικό αριθμό, τις εξισώσεις:

$$z^2 - 3z + 2 = 0, \quad z^2 - 2z + 3 = 0, \quad z + 1/z = 1.$$

2. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$ (με $x, y \in \mathbb{R}$) για τους οποίους ισχύει:

$$|z^2| = z^2, \quad |z - 1| = z, \quad |z + i| = 2\bar{z}.$$

3. Να βρείτε πού ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους

$$|z| = 1, \quad |z - i| = 1, \quad 1 < |z| < 2, \quad |z| \geq 2.$$

4. Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z| = 1$, να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με $w = 2z + 1$. Με άλλα λόγια, περιγράψτε το σύνολο

$$A = \{2z + 1 : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

5. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς:

$$1 + \sqrt{3}i, \quad 1 - \sqrt{3}i, \quad -1 - \sqrt{3}i, \quad -1 + \sqrt{3}i, \quad 4, \quad -4.$$

6. Να υπολογίσετε την παράσταση $((1 + i)/(\sqrt{2}))^6$.

7. Αν $z = (1 + i\sqrt{3})/2$ να υπολογίσετε τον z^{2017} .

8. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη διαίρεση ενός μιγαδικού z με i .

9. Αν $\theta \in \mathbb{R}$ και $z = \cos \theta + i \sin \theta$ να αποδείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$z^n + (1/z)^n = 2 \cos(n\theta), \quad z^n - (1/z)^n = 2i \sin(n\theta).$$

10. Αν $n \geq 2$ είναι θετικός ακέραιος και $\omega = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ να αποδείξετε ότι

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{n-1} = 0, \quad 1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \dots \cdot \omega^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις στο μιγαδικό επίπεδο:

$$z^3 = 1, \quad z^4 = 1, \quad z^6 = 1.$$

12. Να λύσετε, για z μιγαδικό αριθμό, τις εξισώσεις:

$$z^3 = -i, \quad z^4 = 16(\cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3)), \quad z^6 = -64, \\ z^3 = 1 - i, \quad z^7 + 1 = 0, \quad z^4 + 5z^2 + 4 = 0.$$

Θεωρία Αριθμών (2019-2020)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #3, Μαθηματική Επαγωγή,
Διαιρετότητα

1. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $n! \leq n^n$.
2. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύουν τα ακόλουθα:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, \quad 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

3. Να δείξετε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος N έτσι ώστε να ισχύει $2^n > n^3$ για κάθε $n \geq N$.
4. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύουν

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

5. Να εκτελεσθεί η Ευκλείδεια Διαίρεση μεταξύ των ακεραίων a και b , όταν:

$$a = 352, b = 7, \quad a = 352, b = -7, \quad a = -352, b = 7, \quad a = -352, b = -7.$$

6. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q, r έτσι ώστε:

$$a = bq + r, \quad -\frac{|b|}{2} < r \leq \frac{|b|}{2}$$

7. Να δείξετε ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός. Επίσης να δείξετε ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 3. Επιπλέον να εξετασθεί αν το γινόμενο n το πλήθος διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του n για κάθε θετικό ακέραιο n .
8. Δείξτε ότι αν ο n είναι περιττός θετικός ακέραιος τότε το 11 διαιρεί τον $10^n + 1$, ενώ αν ο n είναι άρτιος θετικός ακέραιος τότε το 11 διαιρεί τον $10^n - 1$.
9. Βρείτε την 2-αδική και την 3-αδική αναπαράσταση του αριθμού 100.
10. Έστω ότι ο θετικός ακέραιος n έχει 6-αδική αναπαράσταση $(2052)_6$. Βρείτε τον αριθμό n .
11. Δείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός της μορφής $6k + 5$ έχει έναν πρώτο διαιρέτη της μορφής $6k + 5$. Σαν πόρισμα δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $6k + 5$.

Θεωρία Αριθμών (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #4, Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

1. Δίδεται ότι $3168 = 2^5 \cdot 9 \cdot 11$ και $15972 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^3$. Να βρεθεί ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης και το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των 3168 και 15972.
2. Να υπολογίσετε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη d και το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο e των αριθμών 1485 και 1745. Στη συνέχεια να βρεθούν ακέραιοι x και y έτσι ώστε:

$$d = 1485x + 1745y$$

3. Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο m ισχύει

$$(2m + 1, 9m + 4) = 1$$

4. Έστω a, b θετικοί ακέραιοι και p ένας πρώτος αριθμός. Είναι οι ακόλουθες προτάσεις αληθείς ή ψευδείς; Για κάθε μια δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

(α') Αν $(a, p^2) = p$, τότε: $(a^2, p^2) = p^2$.

(β') Αν $(a, p^2) = p$ και $(b, p^2) = p^2$, τότε: $(ab, p^4) = p^3$.

(γ') Αν $(a, p^2) = p$ και $(b, p^2) = p$, τότε: $(ab, p^4) = p^2$.

(δ') Αν $(a, p^2) = p$, τότε: $(a + p, p^2) = p$.

5. Έστω m ένας ακέραιος. Να δείξετε ότι οι αριθμοί

$$6m - 1, \quad 6m + 1, \quad 6m + 2, \quad 6m + 3, \quad 6m + 5$$

είναι ανά δύο πρώτοι μεταξύ τους.

6. Έστω $a, b \in \mathbb{N}$, και υποθέτουμε ότι $(a, b) = 1$. Να δείξετε ότι:

(α') $(a + b, a - b) = 1$ ή 2.

(β') $(2a + b, a + 2b) = 1$ ή 3.

Μπορείτε να προσδιορίσετε, για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις πότε ακριβώς ο μέγιστος διαιρέτης έχει την τιμή 1, 2, ή 3;

7. Αν a, b είναι φυσικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$(a, b) = (a + b, [a, b])$$

όπου (c, d) συμβολίζει το Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη και $[c, d]$ το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο. Ως εφαρμογή, βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι 798 και το ελάχιστο κοινό τους πολλαπλάσιο να είναι 10780.

Θεωρία Αριθμών (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #5, Διαιρετότητα, Πρωτογενής Ανάλυση

1. Αποδείξτε ότι ο αριθμός 211 είναι πρώτος.
2. Δείξτε ότι αν ο a είναι περιττός ακέραιος τότε ο a^2 είναι της μορφής $8k + 1$ και ο a^4 είναι της μορφής $16k + 1$.
3. Έστω p, q, a θετικοί ακέραιοι με τους p, q διαφορετικούς πρώτους. Δείξτε ότι αν τα p και q διαιρούν τον a τότε και το pq διαιρεί τον a . Δείξτε με παράδειγμα ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει αν τα p, q, a είναι θετικοί ακέραιοι με τον p πρώτο αλλά τον q σύνθετο.
4. Έστω p, a, b θετικοί ακέραιοι με τον p πρώτο. Δείξτε ότι αν $pb = a^2$ τότε το p διαιρεί τον b .
5. Έστω a, b φυσικοί. Δείξτε ότι αν $(a, b) = 1$ τότε

$$(a - b, a^{11}b^{12}) = 1.$$

6. Έστω $n \geq 2$ και

$$b = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$$

η πρωτογενής ανάλυση του φυσικού αριθμού b . Δείξτε ότι η n -στή ρίζα του b είναι ρητός αριθμός αν και μόνο αν το n διαιρεί το a_i για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$. Σαν πόρισμα, έχουμε ότι ο \sqrt{p} είναι άρρητος για κάθε πρώτο p . Πιο γενικά, σαν πόρισμα έχουμε ότι αν ο a είναι γινόμενο διακεκριμένων πρώτων τότε ο \sqrt{a} είναι άρρητος.

7. Έστω $a, b, n, m \in \mathbb{N}$ με $n \geq m$. Υποθέτουμε ότι το a^n διαιρεί το b^m . Δείξτε ότι το a διαιρεί το b .
8. Βρείτε όλους τους φυσικούς διαιρέτες των αριθμών:

$$28, \quad 140, \quad 2013, \quad 1001, \quad 9999, \quad 10!, \quad \binom{30}{10}$$

9. Να περιγραφούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί οι οποίοι έχουν ακριβώς 2, 3 ή 4 θετικούς διαιρέτες.
10. Δείξτε ότι το πλήθος των φυσικών διαιρετών ενός φυσικού αριθμού n είναι περιττός αριθμός αν και μόνο αν ο n είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.
11. Δείξτε ότι κάθε ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 11 είναι άθροισμα δύο σύνθετων αριθμών.

Θεωρία Αριθμών (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #6, Διοφαντικές εξισώσεις, Ακέραιοι mod n

1. Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις, για τις ακόλουθες διοφαντικές εξισώσεις

$$1485x + 1745y = 15, \quad 102x + 1001y = 1, \quad 60x + 18y = 97.$$

2. Έστω η διοφαντική εξίσωση

$$ax + by = c$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι το σύνολο των θετικών λύσεων της παραπάνω διοφαντικής εξίσωσης είναι πεπερασμένο. Να εξετασθεί αν η διοφαντική εξίσωση

$$31x + 43y = 5$$

έχει θετικές λύσεις. Επιπλέον δείξτε ότι το σύνολο των θετικών λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης $x - y = 1$ είναι άπειρο.

3. Έστω a_1, \dots, a_n ακέραιοι όχι όλοι μηδέν και c ακέραιος. Πότε έχει η Διοφαντική εξίσωση

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$$

ακέραιες λύσεις;

4. Δείξτε ότι η κλάση υπολοίπων $[10]_{21}$ είναι αντιστρέψιμη ως στοιχείο του \mathbb{Z}_{21} , και βρείτε την αντίστροφη κλάση.
5. Δείξτε ότι η κλάση $[62]_{155}$ δεν είναι αντιστρέψιμη ως στοιχείο του \mathbb{Z}_{155} .
6. Δείξτε ότι αν $a, n \in \mathbb{Z}$ με $n \geq 1$ τότε το σύνολο

$$S = \{a, a + 1, \dots, a + n - 1\}$$

αποτελεί ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων mod n . Επίσης, δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς $\phi(n)$ στοιχεία στο S που είναι πρώτα με το n .

7. Πόσοι ακέραιοι μεταξύ του 1368 και του 2018 είναι πρώτοι με το 21;
8. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} 2^{20} - 1 &\equiv 0 \pmod{41}, & 2^{50} &\equiv 4 \pmod{7}, \\ 41^{65} &\equiv 6 \pmod{7}, & 1! + 2! + 3! + \dots + 100! &\equiv 9 \pmod{12}, \\ 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 100^5 &\equiv 0 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Θεωρία Αριθμών (2019-2020)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #7, Ακέραιοι mod n

1. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός

$$\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$$

είναι ακέραιος.

2. Βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n για τους οποίους ο αριθμός $\phi(n)$ είναι περιττός.
3. Να δείξετε ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι n έτσι ώστε $\phi(n) = 2, 4, 6, 8, 10, 12$.
4. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει θετικός ακέραιος n έτσι ώστε $\phi(n) = 14$.
5. Να δείξετε ότι αν $m \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο των θετικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$\phi(x) = m$$

είναι πεπερασμένο.

6. Έστω $n \in \mathbb{Z}$ με $n \geq 2$ και $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων mod n . Δείξτε ότι αν n περιττός τότε

$$\sum_{i=1}^n x_i \equiv 0 \pmod{n}$$

ενώ αν n άρτιος τότε

$$\sum_{i=1}^n x_i \equiv n/2 \pmod{n}.$$

7. Δείξτε ότι: $11 \mid 10! + 1$ και $13 \mid 12! + 1$

8. Να βρεθούν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

$$\frac{16!}{19} \quad \& \quad \frac{5!25!}{31} \quad \& \quad \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 43}{11} \quad \& \quad \frac{5^{100}}{7} \quad \& \quad \frac{6^{2000}}{11}$$

9. Δείξτε ότι:

$$3^{999999999} \equiv -1 \pmod{7} \quad \& \quad 2^{1000000} \equiv 1 \pmod{17}$$

10. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$42 \mid n^7 - n \quad \& \quad 30 \mid n^9 - n$$

11. Δείξτε ότι αν $p > 2$ είναι πρώτος, τότε

$$(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$$

Θεωρία Αριθμών (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #8, Συστήματα γραμμικών ισοτιμιών, Τάξη ακεραίου $\bmod n$

1. Βρείτε όλες τις λύσεις στο \mathbb{Z} , ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις, για τις ισοτιμίες:

$$5x \equiv 2 \pmod{8}, \quad 13x \equiv 6 \pmod{26}, \quad 3x \equiv 9 \pmod{30}.$$

2. Δείξτε ότι για κάθε $k \geq 2$, υπάρχουν k το πλήθος διαδοχικοί ακέραιοι, κάθε ένας από τους οποίους διαιρείται από τετράγωνο αριθμού > 1 .
3. Για ποιές τιμές του c , όπου $0 \leq c \leq 29$, έχει λύσεις η ισοτιμία $12x \equiv c \pmod{30}$ Όταν υπάρχουν λύσεις, πόσες ανισότιμες λύσεις $\pmod{30}$ υπάρχουν;
4. Βρείτε έναν αριθμό o οποίος είναι πολλαπλάσιο του 11 και δίνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθεί με τους αριθμούς 2, 3, 5, και 7.
5. Βρείτε όλες τις λύσεις στο \mathbb{Z} για το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x \equiv 32 \pmod{8} \\ x \equiv -6 \pmod{15} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

6. Βρείτε όλες τις λύσεις στο \mathbb{Z} για το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} 2x \equiv 14 \pmod{10} \\ 5x \equiv 5 \pmod{15} \\ 3x \equiv 2 \pmod{8} \end{cases}$$

7. Βρείτε τις τάξεις $\bmod 16$ των ακεραίων 3, 5, 7 και 9.
8. Βρείτε τις τάξεις των στοιχείων του $U(\mathbb{Z}_9)$ και $U(\mathbb{Z}_{10})$, όπου $U(\mathbb{Z}_n)$ είναι το σύνολο των αντιστρεψίμων στοιχείων του \mathbb{Z}_n .
9. Έστω $n \geq 2$ ακέραιος και a, b ακέραιοι με $ab \equiv 1 \pmod{n}$. Δείξτε ότι:

$$(a, n) = 1, \quad (b, n) = 1, \quad \text{ord}_n(a) = \text{ord}_n(b).$$

10. Έστω a, m ακέραιοι με $a \geq 2, m \geq 2$. Θέτουμε $n = a^m - 1$. Δείξτε ότι

$$(a, n) = 1, \quad \text{ord}_n(a) = m$$

και ακολούθως να συμπεράνετε ότι $m \mid \phi(a^m - 1)$.

Θεωρία Αριθμών (2019-2020)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #9, Τάξη ακεραίου $\bmod n$,

Πρωταρχικές ρίζες

1. Έστω a, n ακέραιοι με $n \geq 1$ και $(a, n) = 1$. Ναδειχθεί ότι ο θετικός ακέραιος x είναι λύση της ισοτιμίας

$$a^x \equiv 1 \pmod{n}$$

αν και μόνο αν $\text{ord}_n(a) \mid x$. Σαν εφαρμογή, να βρεθούν όλες οι θετικές λύσεις της ισοτιμίας $2^x \equiv 1 \pmod{7}$.

2. Έστω $n \geq 3$ ακέραιος. Δείξτε ότι $(n-1, n) = 1$ και ότι $\text{ord}_n(n-1) = 2$. Σαν συνέπεια, να συμπεράνετε ότι $2 \mid \phi(n)$.

3. Βρείτε, αν υπάρχουν, πρωταρχικές ρίζες $(\bmod n)$, όπου $n = 4, 5, 10, 13, 14, 18, 20$.

4. Βρείτε πρωταρχικές ρίζες $(\bmod n)$, όπου $n = 23$ και $n = 31$.

5. Δείξτε ότι αν υπάρχει μια πρωταρχική ρίζα $(\bmod n)$ τότε υπάρχουν ακριβώς $\phi(\phi(n))$ ανισότιμες πρωταρχικές ρίζες $(\bmod n)$.

6. Βρείτε όλες τις πρωταρχικές ρίζες $(\bmod 23)$.

7. (α') Δείξτε ότι το 3 είναι πρωταρχική ρίζα $(\bmod 17)$.

(β') Για δοθέντα ακέραιο a με $(a, 17) = 1$ υπολογίστε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο k ώστε $3^k \equiv a \pmod{17}$.

(γ') Λύστε για x ακέραιο την ισοτιμία $x^4 \equiv 13 \pmod{17}$.

8. Έστω p περιττός πρώτος και a ένας ακέραιος με $(a, p) = 1$. Δείξτε ότι:

(α') Αν $p \equiv 1 \pmod{4}$, τότε ο a είναι πρωταρχική ρίζα $(\bmod p)$ αν και μόνο αν ο ακέραιος $-a$ είναι επίσης πρωταρχική ρίζα $(\bmod p)$.

(β') Αν $p \equiv 3 \pmod{4}$, τότε ο a είναι πρωταρχική ρίζα $(\bmod p)$ αν και μόνο αν $\text{ord}_p(-a) = \frac{p-1}{2}$.