ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΒΛΑΧΟΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2017

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$

Αυτό το κεφάλαιο αφιερώνεται στη μελέτη των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$. Εισάγεται η θεμελιώδης έννοια της καμπυλότητας για τέτοιες καμπύλες. Στόχος είναι να εξεταστεί σε ποιό βαθμό μια καμπύλη καθορίζεται ως προς ισομετρία του $\mathbb{R}^2$ από την καμπυλότητα.

Ορισμός 1.0.1. *Καλούμε* **καμπύλη** *του $\mathbb{R}^2$ κάθε απεικόνιση $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα. Η καμπύλη καλείται τάξης C^r, όπου r είναι φυσικός αριθμός, αν υπάρχουν οι παράγωγοί της έως r τάξης και είναι συνεχείς.*

Θέτοντας

$$c(t) = (x(t), y(t)),\ t \in I,$$

οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ ονομάζονται συναρτήσεις συντεταγμένων της καμπύλης. Προφανώς η καμπύλη c είναι τάξης C^r αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της είναι της ίδιας τάξης. Συνήθως απαιτούμε η καμπύλη να είναι τουλάχιστον τάξης C^2. Συχνά κάνουμε λόγο για λείες καμπύλες, εννοώντας ότι η καμπύλη είναι τέτοιας τάξης διαφορισιμότητας όσο απαιτούν οι ανάγκες της θεωρίας. Η μεταβλητή $t \in I$ καλείται **παράμετρος** της καμπύλης.

Αξίζει να τονιστεί ότι κατά τον ορισμό μας οι καμπύλες είναι απεικονίσεις και όχι σύνολα σημείων του $\mathbb{R}^2$. Αναζητώντας φυσική ερμηνεία της έννοιας, μπορούμε να φανταστούμε την καμπύλη ως τροχιά ενός κινητού. Το σύνολο $c(I)$ ονομάζεται **εικόνα** της καμπύλης c. Επισημαίνουμε ότι δύο καμπύλες μπορεί να είναι διαφορετικές ακόμα κι αν έχουν την ίδια ακριβώς εικόνα.

Ορισμός 1.0.2. *Η καμπύλη* $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ *όπου* $I \subseteq \mathbb{R}$ *είναι ανοικτό διάστημα, καλείται* **γεωμετρικώς ισότιμη** *της καμπύλης* $\tilde{c}\colon I \to \mathbb{R}^2$ *αν υπάρχει ισομετρία* $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ *τέτοια ώστε*

$$\tilde{c} = T \circ c.$$

Δε διακρίνουμε μεταξύ καμπυλών οι οποίες διαφέρουν ως προς ισομετρία του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή μεταξύ γεωμετρικώς ισότιμων καμπυλών.

1.1 Κανονικές καμπύλες

Ορισμός 1.1.1. *Έστω λεία καμπύλη* $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ *όπου* $I \subseteq \mathbb{R}$ *είναι ανοικτό διάστημα, με* $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. *Το διάνυσμα*

$$c'(t_0) = \frac{dc}{dt}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

καλείται **εφαπτομενικό διάνυσμα (ή διάνυσμα ταχύτητας)** *της* c *στο* $t_0 \in I$. *Η καμπύλη* c *καλείται* **κανονική** *αν* $c'(t) \neq 0$ *για κάθε* $t \in I$.

Η γεωμετρική του ερμηνεία είναι ότι καθώς το t τείνει στο t_0, η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $c(t)$ και $c(t_0)$ τείνει να λάβει μια οριακή θέση η οποία θα καλείται η **εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης** c η οποία είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $c'(t_0)$ και καλά ορισμένη εφόσον $c'(t_0) \neq 0$. Αυτό μας αναγκάζει να περιορίσουμε τη μελέτη μας σε κανονικές καμπύλες. Έτσι η **εφαπτομένη ευθεία μιας κανονικής** c στο $t_0 \in I$ είναι εκείνη η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $c(t_0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα ταχύτητας $c'(t_0)$.

Εύκολα διαπιστώνεται (πώς;) ότι η κανονικότητα καμπύλης είναι ιδιότητα αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της ομάδας ισομετριών $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Τούτο σημαίνει ότι αν c και $\tilde{c}$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες και η καμπύλη c είναι κανονική, τότε και η καμπύλη $\tilde{c}$ είναι επίσης κανονική.

Παράδειγμα 1.1.1. Θεωρούμε την καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(t) = p + tv$$

όπου $p \in \mathbb{R}^2$ και $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Πρόκειται περί κανονικής καμπύλης αφού $c'(t) = v$. Η εικόνα της είναι η **ευθεία** του $\mathbb{R}^2$ η οποία **διέρχεται από το p και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα** $v \neq 0$. Πράγματι

$$c(\mathbb{R}) = p + \operatorname{span}\{v\} = T_p(\operatorname{span}\{v\}),$$

δηλαδή είναι εικόνα του μονοδιάστατου υποχώρου $\operatorname{span}\{v\}$ μέσω της παράλληλης μεταφοράς T_p.

Παράδειγμα 1.1.2. Η καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(t) = (\cos t, \sin t)$$

είναι κανονική διότι

$$c'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0), \quad \text{για κάθε } \; t \in \mathbb{R}.$$

Η εικόνα της είναι ο κύκλος

$$\mathbb{S}^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\},$$

δηλαδή ο κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $r = 1$. Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε μια από τις καμπύλες

$$\begin{aligned} c_1(t) &= (\cos t, -\sin t)\,, \; t \in \mathbb{R} \\ c_2(t) &= (\cos 2t, \sin 2t)\,, \; t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

είναι κανονική κι η εικόνα αμφοτέρων είναι ο κύκλος $\mathbb{S}^1$.

Παράδειγμα 1.1.3. Η καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(t) = \left(\cos t^2, \sin t^2\right)$$

δεν είναι κανονική διότι

$$c'(0) = (0,0)\,.$$

Η εικόνα της είναι και πάλι ο κύκλος $\mathbb{S}^1$.

Παράδειγμα 1.1.4. Η καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(t) = \left(t^2, t^3\right)$$

είναι γνωστή ως παραβολή του Neil. Δεν είναι κανονική διότι $c'(0) = (0,0)$.

Παράδειγμα 1.1.5. Η καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(t) = (a\cos t, b\sin t)\,,$$

όπου $a > 0$ και $b > 0$ είναι κανονική. Η εικόνα της είναι έλλειψη με ημιάξονες τους αριθμούς a, b. Παρατηρούμε ότι $c(t+2\pi) = c(t)$, δηλαδή πρόκειται περί κλειστής καμπύλης. Ο περιορισμός της όμως στο διάστημα $[0, 2\pi)$ δεν έχει αυτοτομές, δηλαδή είναι 1-1.

Παράδειγμα 1.1.6. Η καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(t) = \left(\sin t, \frac{1}{2}\sin 2t\right),$$

είναι κανονική και κλειστή αφού $c(t+2\pi) = c(t)$. Η εικόνα της δίδεται από την εξίσωση

$$x^4 + y^2 = x^2$$

από όπου προκύπτει ότι είναι συμμετρική ως προς τους άξονες.

Παράδειγμα 1.1.7. Δοθείσης τυχούσας λείας συνάρτησης $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, θεωρούμε την καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(t) = (t, f(t))$$

η οποία είναι κανονική διότι

$$c'(t) = (1, f'(t))\,.$$

Η εικόνα της είναι το γράφημα ως προς τον άξονα Ox της συνάρτησης f. Ομοίως μπορούμε να θεωρήσουμε την κανονική καμπύλη

$$c(t) = (f(t), t)$$

η οποία είναι γράφημα ως προς τον άξονα Oy.

Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει μια συνέπεια της κανονικότητας.

Πρόταση 1.1.1. *Έστω κανονική καμπύλη* $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ *όπου* $I \subseteq \mathbb{R}$ *είναι ανοικτό διάστημα. Για κάθε* $t_0 \in I$, *υπάρχει ανοικτό διάστημα* $I_0 \subseteq I$ *με* $t_0 \in I_0$ *τέτοιο ώστε ο περιορισμός της* c *στο* I_0 *να μην έχει αυτοτομές, δηλαδή να είναι 1-1. Επιπλέον, η καμπύλη τοπικά είναι γράφημα είτε ως προς τον άξονα* Ox *είτε ως προς τον άξονα* Oy.

Απόδειξη. Λόγω κανονικότητας έχουμε

$$c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0).$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέσουμε ότι $x'(t_0) \neq 0$. Επειδή η συνάρτηση x' είναι συνεχής, υπάρχει ανοικτό διάστημα $I_0 \subseteq I$ με $t_0 \in I_0$ τέτοιο ώστε $x'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I_0$. Επομένως η συνάρτηση $x = x(t)$ αντιστρέφεται για x κοντά στο $x(t_0)$ και η αντίστροφή της $t = t(x)$ διαφορίσιμη. Τότε είναι

$$\begin{aligned} c(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= (x, y(t(x))) \\ &= (x, f(x)), \end{aligned}$$

όπου f είναι η λεία συνάρτηση με $f(x) = y(t(x))$. Αυτό σημαίνει ότι κοντά στο t_0 η καμπύλη c είναι γράφημα ως προς τον άξονα Ox. Εργαζόμενοι ομοίως, προκύπτει ότι αν $y'(t_0) \neq 0$, τότε είναι γράφημα ως προς τον άξονα Oy. □

1.2 Αναπαραμετρήσεις καμπυλών

Έστω λεία καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα, με $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Θεωρούμε λεία συνάρτηση $f\colon J \to I$, με $f(\sigma) = t$, όπου $J \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα. Η λεία καμπύλη $\tilde{c} = c \circ f$ έχει παράμετρο σ και εφαπτομενικό διάνυσμα

$$\tilde{c}' = \frac{d\tilde{c}}{d\sigma} = \frac{df}{d\sigma}\frac{dc}{dt} = \frac{df}{d\sigma}c'.$$

Η καμπύλη $\tilde{c}$ είναι κανονική αν και μόνο αν η καμπύλη c είναι κανονική και ισχύει $df/d\sigma > 0$ παντού στο J ή $df/d\sigma < 0$ παντού στο J. Σε αυτή την περίπτωση, η λεία καμπύλη $\tilde{c} = c \circ f$ καλείται **αναπαραμέτρηση** της καμπύλης c.

Δύο καμπύλες εκ των οποίων η μία είναι αναπαραμέτρηση της άλλης έχουν ακριβώς την ίδια εικόνα.

Οι καμπύλες c_1, c_2 του Παραδείγματος 1.1.2 είναι αναπαραμετρήσεις της καμπύλης c του ιδίου παραδείγματος με αντίστοιχες συναρτήσεις τις $f_1(t) = -t$ και $f_2(t) = 2t$.

1.3 Μήκος καμπυλών

Έστω καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^2$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα, με $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Θεωρούμε διάστημα $[a, b] \subset I$ και τυχαία διαμέριση $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ αυτού. Η λεπτότητα της διαμέρισης P είναι ο αριθμός

$$|P| = \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \ldots, k\}.$$

Τα σημεία $c(t_0), c(t_1), \ldots, c(t_i), , \ldots, c(t_k)$ ορίζουν πολυγωνική γραμμή, η οποία ενώνει τα ληκτικά σημεία $c(a), c(b)$ και έχει μήκος

$$L(c, P) = \sum_{i=1}^{k} d\left(c(t_i), c(t_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^{k} \|(c(t_i) - c(t_{i-1})\|.$$

Θεωρούμε ακολουθία διαμερίσεων P_n του διαστήματος $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} |P_n| = 0.$$

Αποδεικνύεται στην Μαθηματική Ανάλυση ότι αν η καμπύλη c είναι τάξης C^1, τότε το όριο $\lim_{n\to\infty} L(c, P_n)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, είναι ανεξάρτητο της επιλογής της ακολουθίας διαμερίσεων και μάλιστα ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} L(c, P_n) = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Ο αριθμός αυτός καλείται **μήκος της καμπύλης** c **από το** a **έως το** b και συμβολίζεται με $L_a^b(c)$, δηλαδή έχουμε

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Εύκολα διαπιστώνεται (πώς;) ότι το μήκος είναι αναλλοίωτο κάτω από τη δράση της ομάδας ισομετριών $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Τούτο σημαίνει ότι αν c και $\tilde{c}$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες, τότε $L_a^b(\tilde{c}) = L_a^b(c)$.

Επιπλέον, με εφαρμογή του Θεωρήματος Αλλαγής Μεταβλητής ολοκληρωμάτων, εύκολα προκύπτει ότι αν η καμπύλη $\tilde{c}$ είναι αναπαραμέτρηση της καμπύλης c με $\tilde{c} = c \circ f$, τότε ισχύει

$$L_a^b(c) = L_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}(\tilde{c})$$

αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και $f(\tilde{a}) = a$ και $f(\tilde{b}) = b$, ενώ

$$L_a^b(c) = L_{\tilde{b}}^{\tilde{a}}(\tilde{c})$$

αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Πράγματι αν $t = f(\sigma)$, επειδή

$$\int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|c'(t)\| \frac{df}{d\sigma} d\sigma,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b \|c'(t)\| dt &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|\frac{df}{d\sigma}\frac{dc}{dt}(t)\| d\sigma \\ &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|\frac{d\tilde{c}}{d\sigma}\| d\sigma \\ &= L_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}(\tilde{c})\end{aligned}$$

αν $df/d\sigma > 0$, ενώ

$$\begin{aligned}\int_a^b \|c'(t)\| dt &= \int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} \|\frac{df}{d\sigma}\frac{dc}{dt}(t)\| d\sigma \\ &= \int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} \|\frac{d\tilde{c}}{d\sigma}\| d\sigma \\ &= L_{\tilde{b}}^{\tilde{a}}(\tilde{c})\end{aligned}$$

αν $df/d\sigma < 0$.

Ας διατυπώσουμε τώρα το ακόλουθο εύλογο πρόβλημα ελαχιστοποίησης του μήκους.

Πρόβλημα 1.3.1. *Δίνονται σημεία $p, q \in \mathbb{R}^2$. Υπάρχει λεία καμπύλη η οποία να συνδέει τα σημεία p, q και να έχει το ελάχιστο μήκος μεταξύ όλων των λείων καμπυλών που συνδέουν τα p, q;*

Η απάντηση δίνεται στο ακόλουθο

Θεώρημα 1.3.1. *Δίνονται τα διακεκριμένα σημεία $p, q \in \mathbb{R}^2$. Κάθε λεία κανονική καμπύλη $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ με $c(a) = p$ και $c(b) = q$ έχει μήκος*

$$L_a^b(c) \geq d(p,q),$$

όπου $d(p,q)$ είναι η απόσταση των σημείων p, q. Επιπλέον, η ισότητα ισχύει μόνο αν η εικόνα της c είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία p, q.

Απόδειξη. Θεωρούμε το μοναδιαίο διάνυσμα

$$w = \frac{q-p}{\|q-p\|}.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\langle c'(t), w\rangle \leq |\langle c'(t), w\rangle| \leq \|c'(t)\|$$

για κάθε $t \in [a,b]$. Ολοκληρώνοντας, λαμβάνουμε

$$d(p,q) = \langle q-p, w\rangle \leq \int_a^b |\langle c'(t), w\rangle| dt \leq L_a^b(c).$$

Αν $L_a^b(c) = d(p,q)$, τότε η παραπάνω ανισότητα γίνεται παντού ισότητα. Άρα τα διανύσματα $c'(t)$ και w είναι ομόρροπα για κάθε $t \in [a,b]$, δηλαδή

$$c'(t) = f(t)w,$$

όπου $f(t)$ είναι λεία και παντού θετική συνάρτηση. Τούτο σημαίνει ότι εικόνα της καμπύλης c είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία p, q (γιατί;). □

1.4 Μήκος τόξου-φυσική παράμετρος

Σε αυτή την ενότητα θα εισάγουμε μια φυσική αναπαραμέτρηση για κανονικές καμπύλες. Έστω λεία καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα, με $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Επιλέγουμε $t_0 \in I$. Η λεία συνάρτηση

$$s\colon I \to \mathbb{R}$$

με

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\| d\sigma,$$

καλείται **μήκος τόξου της** c **με αφετηρία** t_0. Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $s(t)$ λαμβάνει αρνητικές τιμές για $t < t_0$, ενώ είναι $s(t) = L_{t_0}^{t}(c)$ αν $t > t_0$.

Αν αλλάξουμε αφετηρία, τότε το μήκος τόξου αλλάζει κατά μια σταθερά.

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού προκύπτει ότι η συνάρτηση $s(t)$ είναι διαφορίσιμη με παράγωγο

$$\frac{ds}{dt} = \|c'\|.$$

Αν η καμπύλη c είναι κανονική, τότε έχουμε $ds/dt > 0$ παντού στο I. Από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης, η συνάρτηση $s = s(t)$ έχει λεία αντίστροφο f, δηλαδή $t = f(s)$ ή πιο απλά $t = t(s)$.

Η καμπύλη $\bar{c} = c \circ f$ είναι αναπαραμέτρηση της c και ονομάζεται **αναπαραμέτρηση της καμπύλης** c **με φυσική παράμετρο ή με παράμετρο το μήκος τόξου** (χάριν συντομίας γράφουμε $c = \bar{c} = c \circ f$). Έχει δε **μοναδιαίο** διάνυσμα ταχύτητας

$$\frac{dc}{ds} = \frac{1}{\|c'\|} c'.$$

Επομένως αποδείξαμε ότι κάθε κανονική καμπύλη δέχεται αναπαραμέτρηση με παράμετρο το μήκος τόξου.

Συμβολίζουμε τις παραγώγους ως προς το μήκος τόξου με τελείες, δηλαδή

$$\dot{} = \frac{d}{ds}, \ddot{} = \frac{d^2}{ds^2}, \ \ldots.$$

και ακολουθούμε από εδώ και στο εξής αυτή τη σύμβαση. Έτσι αν

$$c(s) = (x(s), y(s)),$$

τότε

$$\dot{c}(s) = \frac{dc}{ds}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$$

και

$$\ddot{c}(s) = \frac{d^2c}{ds^2}(s) = (\ddot{x}(s), \ddot{y}(s)).$$

Αντίστροφα, αν το διάνυσμα ταχύτητας μιας καμπύλης c με παράμετρο t είναι μοναδιαίο, τότε το μήκος τόξου της με αφετηρία t_0 είναι

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\| d\sigma = t - t_0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η παράμετρος t είναι μήκος τόξου ως προς κατάλληλη αφετηρία.

Συνεπώς **μια καμπύλη έχει ως παράμετρο το μήκος τόξου αν και μόνο αν το εφαπτομενικό της διάνυσμα είναι παντού μοναδιαίο.**

Αν μια καμπύλη έχει παράμετρο το μήκος τόξου, τότε το αυτό ισχύει και για κάθε άλλη καμπύλη γεωμετρικώς ισότιμη προς αυτή (γιατί;).

Παράδειγμα 1.4.1. Η καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(t) = (r\cos t, r\sin t)$$

και $r > 0$ έχει ως εικόνα τον κύκλο κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας r. Είναι κανονική διότι

$$\|c'(t)\| = r.$$

Το μήκος τόξου της c με αφετηρία t_0 είναι η συνάρτηση

$$s = s(t) = r(t - t_0).$$

Επιλέγοντας ως αφετηρία $t_0 = 0$, έχουμε $s = rt$. Έτσι προκύπτει ότι η αναπαραμέτρηση της καμπύλης c με φυσική παράμετρο είναι η καμπύλη

$$c(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right).$$

1.5 Καμπυλότητα καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$

1.5.1 Καμπύλες με φυσική παράμετρο

Στόχος μας είναι να ορίσουμε την έννοια της καμπυλότητας ως μέτρο απόκλισης τυχούσας καμπύλης από την απλούστερη καμπύλη, δηλαδή την ευθεία. Με άλλα λόγια η καμπυλότητα καμπύλης θα οριστεί ως ρυθμός μεταβολής της εφαπτομένης της ευθείας.

Κατ' αρχήν, θεωρούμε καμπύλη

$$c(s) = (x(s), y(s))$$

με φυσική παράμετρο, δηλαδή με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I \subseteq \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη ευθεία της στο τυχόν s σχηματίζει γωνία $\varphi(s)$ με τον άξονα Ox. Ο ρυθμός μεταβολής της εφαπτομένης ευθείας είναι η παράγωγος της γωνιακής συνάρτησης $\varphi(s)$. Είναι όμως η $\varphi(s)$ παραγωγίσιμη; Τούτο θα προκύψει από το ακόλουθο

Λήμμα 1.5.1. *Αν $f, g \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι C^1 συναρτήσεις με*

$$f^2(t) + g^2(t) = 1, \quad \textit{για κάθε} \;\; t \in I,$$

τότε για κάθε $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(t_0) = \cos\varphi_0, g(t_0) = \sin\varphi_0$ και $t_0 \in I$, υπάρχει μοναδική C^1 συνάρτηση $\varphi \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(t) = \cos\varphi(t), \;\; g(t) = \sin\varphi(t) \;\; \textit{και} \;\; \varphi(t_0) = \varphi_0.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f(\sigma)g'(\sigma) - f'(\sigma)g(\sigma)\Big) d\sigma.$$

Προφανώς ισχύει $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι

$$(f(t) - \cos\varphi(t))^2 + (g(t) - \sin\varphi(t))^2 = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$f(t)\cos\varphi(t) + g(t)\sin\varphi(t) = 1.$$

Τούτο όμως προκύπτει από τα δεδομένα (γιατί;). $\square$

Είναι φανερό ότι αν στο Λήμμα 1.5.1 δεν προκαθορίσουμε την τιμή της γωνιακής συνάρτησης φ σε ένα $t_0 \in I$, τότε υπάρχουν άπειρες τέτοιες γωνιακές συναρτήσεις. Επιπλέον, αν φ και $\tilde{\varphi}$ είναι δύο τέτοιες συναρτήσεις, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε (γιατί;)

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) + 2k\pi.$$

Επειδή η καμπύλη c με $c(s) = (x(s), y(s))$ έχει φυσική παράμετρο ισχύει

$$\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = 1 \ \text{ για κάθε } \ s \in I.$$

Αν η καμπύλη c είναι τάξης C^2, τότε σύμφωνα με τα ανωτέρω υπάρχει C^1 γωνιακή συνάρτηση $\varphi\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\dot{x}(s) = \cos\varphi(s), \ \dot{y}(s) = \sin\varphi(s) \ \text{ για κάθε } \ s \in I. \tag{1.1}$$

Ορισμός 1.5.1. *Ονομάζουμε* **καμπυλότητα** *μιας C^2 καμπύλης $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, με φυσική παράμετρο s, τη συνεχή συνάρτηση $k\colon I \to \mathbb{R}$ με*

$$k(s) = \dot{\varphi}(s) = \frac{d\varphi}{ds}(s).$$

Η καμπυλότητα είναι καλώς ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη της επιλογής της γωνιακής συνάρτησης φ.

Από την (1.1) έχουμε

$$\ddot{x} = -k\dot{y} \ \text{ και } \ \ddot{y} = k\dot{x},$$

απ' όπου λαμβάνουμε το ακόλουθο συμπέρασμα το οποίο μας παρέχει ένα εύκολο τρόπο υπολογισμού της καμπυλότητας.

Πρόταση 1.5.2. *Η καμπυλότητα k μιας καμπύλης $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο $s \in I$ και*

$$c(s) = (x(s), y(s)), \quad s \in I,$$

δίνεται από τη σχέση

$$k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}.$$

Ας θεωρήσουμε τη στροφή $J = R_{\pi/2} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ κατά γωνία $\pi/2$. Επειδή

$$J(v_1, v_2) = (-v_2, v_1),$$

άμεσα προκύπτει ότι η καμπυλότητα δίνεται από την σχέση

$$k = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle.$$

Το διάνυσμα $\ddot{c}$ είναι το **διάνυσμα της επιτάχυνσης** της καμπύλης c.

Η καμπύλη του Παραδείγματος 1.4.1, της οποίας η εικόνα είναι κύκλος ακτίνας r, έχει σταθερή καμπυλότητα $k = 1/r$.

Παρατήρηση 1.5.1. Σημειώνουμε ότι αν θεωρήσουμε την αναπαραμέτρηση $\tilde{c} = c \circ f$ της καμπύλης c με $f(s) = -s$, τότε και η καμπύλη $\tilde{c}$ έχει φυσική παράμετρο, ενώ οι καμπυλότητές τους $\tilde{k}$ και k αντίστοιχα, πληρούν $\tilde{k} = -k$.

Είναι η καμπυλότητα γεωμετρική έννοια; Με άλλα λόγια, πως σχετίζονται οι καμπυλότητες δύο γεωμετρικώς ισότιμων καμπυλών; Η απάντηση δίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.5.3. *Οι καμπυλότητες k και $\tilde{k}$ των γεωμετρικώς ισότιμων καμπυλών c και $\tilde{c} = T \circ c$ με φυσική παράμετρο και $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ πληρούν τη σχέση $\tilde{k} = \varepsilon k$, όπου $\varepsilon = 1$ ή $\varepsilon = -1$, αν η ισομετρία T διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό, αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\dot{\tilde{c}} = T_* \dot{c} \ \text{ και } \ \ddot{\tilde{c}} = T_* \ddot{c},$$

όπου T_* είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T, δηλαδή $T = T_v \circ T_*$ και T_v είναι παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα v. Επομένως

$$\tilde{k} = \langle \ddot{\tilde{c}}, J\dot{\tilde{c}} \rangle = \langle T_* \ddot{c}, J \circ T_* \ddot{c} \rangle.$$

Όμως εύκολα ελέγχεται ότι

$$J \circ T_* = T_* \circ J$$

αν T_* είναι στροφή, ενώ

$$J \circ T_* = -T_* \circ J$$

αν T_* είναι κατοπτρισμός, από όπου και προκύπτει το ζητούμενο. □

1.5.2 Καμπύλες με τυχαία παράμετρο

Έχουμε έως τώρα ορίσει την καμπυλότητα για καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο. Πως ορίζεται όμως η καμπυλότητα για καμπύλες με τυχούσα παράμετρο;

Έστω λεία κανονική καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^2$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα, με
$$c(t) = (x(t), y(t))\,,\ t \in I.$$

Θεωρούμε την αναπαραμέτρηση $\bar{c} = c \circ f$ της καμπύλης c με φυσική παράμετρο, όπου $t = f(s)$ (ή πιο απλά $t = t(s)$) είναι η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης μήκος τόξου $s = s(t)$.

Αν $\bar{k}$ είναι η καμπυλότητα της καμπύλης $\bar{c}$ όπως ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα, τότε ορίζουμε ως **καμπυλότητα της καμπύλης** c τη συνάρτηση $k\colon I \to \mathbb{R}$ με
$$k(t) = \bar{k}\,(s(t))\,,\quad t \in I.$$

Η αναπαραμέτρηση της καμπύλης c έχει **μοναδιαίο** διάνυσμα ταχύτητας (θυμίζουμε ότι χάριν συντομίας γράφουμε $c = \bar{c} = c \circ f$)
$$\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{1}{\|c'\|}c'.$$

Κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας έχουμε
$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{dt}{ds}\frac{dx}{dt} = \frac{dt}{ds}x',\\
\dot{y} &= \frac{dt}{ds}\frac{dy}{dt} = \frac{dt}{ds}y',\\
\ddot{x} &= \Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 x'' + x'\frac{d^2t}{ds^2},\\
\ddot{y} &= \Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 y'' + y'\frac{d^2t}{ds^2}.
\end{aligned}$$

Από αυτές προκύπτει εύκολα το ακόλουθο συμπέρασμα που μας παρέχει ένα τρόπο υπολογισμού της καμπυλότητας κανονικών καμπυλών με τυχούσα παράμετρο.

Πρόταση 1.5.4. *Η καμπυλότητα k μιας κανονικής καμπύλης $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο $t \in I$ και*

$$c(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I,$$

είναι η συνάρτηση

$$k = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

ή ισοδύναμα

$$k = \frac{\langle c'', Jc' \rangle}{\|c'\|^3}.$$

Ως εφαρμογή της ανωτέρω πρότασης προκύπτει ότι οι καμπύλες γραφήματα του Παραδείγματος 1.1.7 με

$$c(t) = (t, f(t))$$

έχουν καμπυλότητα

$$k = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}.$$

1.5.3 Γεωμετρική ερμηνεία της καμπυλότητας

Η προηγούμενη έκφραση για την καμπυλότητα των καμπυλών γραφήματα μας επιτρέπει την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία της καμπυλότητας.

Ας θεωρήσουμε καμπύλες c και $\tilde{c}$ με φυσική παράμετρο $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ των οποίων οι καμπυλότητες πληρούν την ανισότητα $k(s_0) > \tilde{k}(s_0)$ για κάποιο $s_0 \in I$. Επειδή λόγω της Πρότασης 1.5.3 η καμπυλότητα δεν αλλάζει αν μετατοπίσουμε τις καμπύλες με ισομετρίες του $\mathbb{R}^2$ που διατηρούν τον προσανατολισμό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$c(s_0) = \tilde{c}(s_0) = (0,0) \;\text{ και }\; \dot{c}(s_0) = \dot{\tilde{c}}(s_0) = (1,0).$$

Τότε όμως σύμφωνα με τη Πρόταση 1.1.1, οι καμπύλες γράφονται κοντά στο $(0,0)$ ως γραφήματα λείων συναρτήσεων f και $\tilde{f}$ που ορίζονται σε κατάλληλο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$ και πληρούν

$$f(0) = 0 = \tilde{f}(0) \;\text{ και }\; f'(0) = 0 = \tilde{f}'(0).$$

Επειδή $k(0) > \tilde{k}(0)$, έχουμε $f''(0) > \tilde{f}''(0)$. Τότε η συνάρτηση $g = f - \tilde{f}$ έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο 0, δηλαδή κοντά στο $(0,0)$ η καμπύλη c βρίσκεται υπεράνω από την καμπύλη $\tilde{c}$.

Ειδικά, αν η καμπύλη $\tilde{c}$ είναι ευθεία, δηλαδή $\tilde{k} = 0$, προκύπτει ότι μια καμπύλη με καμπυλότητα $k > 0$ είναι τοπικά κυρτή. Αυτό σημαίνει ότι τοπικά περιέχεται σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα με ακμή την εφαπτομένη της ευθεία.

Αν υποθέσουμε ότι κοντά στο $(0,0)$ η καμπύλη c βρίσκεται υπεράνω από την καμπύλη $\tilde{c}$, τότε επειδή η συνάρτηση g έχει ελάχιστο στο 0, έχουμε $g''(0) \geq 0$ ή ισοδύναμα $k(0) \geq \tilde{k}(0)$.

1.5.4 Πλαίσιο Frenet και εξισώσεις Frenet

Έστω $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με φυσική παράμετρο $s \in I$. Συμβολίζουμε με $\vec{t}(s)$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\vec{t}(s) = \dot{c}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)), \quad s \in I.$$

Στρέφοντας το διάνυσμα $\vec{t}(s)$ κατά γωνία $\pi/2$ αποκτούμε το διάνυσμα

$$\vec{n}(s) = J\vec{t}(s) = (-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s)), \quad s \in I,$$

το οποίο καλείται μοναδιαίο **κάθετο διάνυσμα** της καμπύλης c.

Είναι φανερό ότι για κάθε $s \in I$ τα διανύσματα $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s)\}$ συνιστούν ορθομοναδιαία δεξιόστροφη βάση του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$, η οποία καλείται **πλαίσιο Frenet** της καμπύλης c.

Από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\dot{\vec{t}} &= \frac{d\varphi}{ds}(-\sin\varphi, \cos\varphi),\\ \dot{\vec{n}} &= -\frac{d\varphi}{ds}(\cos\varphi, \sin\varphi),\end{aligned}$$

λαμβάνουμε τις λεγόμενες **εξισώσεις Frenet** της καμπύλης c

$$\begin{aligned}\dot{\vec{t}} &= k\vec{n},\\ \dot{\vec{n}} &= -k\vec{t}.\end{aligned}$$

Για κανονική καμπύλη c με τυχαία παράμετρο t, το πλαίσιο Frenet είναι

$$\vec{t}(t) = \frac{1}{\|c'(t)\|}c'(t), \quad \vec{n}(t) = \frac{1}{\|c'(t)\|}Jc'(t).$$

Η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $c(t_0)$ και είναι παράλληλη προς το κάθετο διάνυσμα $\vec{n}(t_0)$ καλείται **κάθετη ευθεία** της καμπύλης c στο t_0.

1.6 Το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το ακόλουθο συμπέρασμα θεμελιώδους σημασίας για τη θεωρία των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$.

Θεώρημα 1.6.1 (Θεμελιώδες Θεώρημα). *(i) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $k(s), s \in I \subseteq \mathbb{R}$, υπάρχει καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο s και καμπυλότητα τη δοθείσα συνάρτηση k.*

(ii) Αν $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ και $\tilde{c}\colon I \to \mathbb{R}^2$ είναι καμπύλες αμφότερες με φυσική παράμετρο και ίσες καμπυλότητες[1] $k = \tilde{k}$, τότε υπάρχει ισομετρία $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό, τέτοια ώστε $\tilde{c} = T \circ c$.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε τη C^1 συνάρτηση

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} k(\sigma)d\sigma,$$

όπου $s_0 \in I$ και την C^2 καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(s) = \Big(\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(\sigma)d\sigma, \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(\sigma)d\sigma\Big).$$

[1]Είναι προφανές ότι αν οι καμπυλότητες k και $\tilde{k}$ πληρούν $\tilde{k} = -k$, τότε υπάρχει ισομετρία $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ η οποία αντιστρέφει τον προσανατολισμό, τέτοια ώστε $\tilde{c} = T \circ c$.

Το εφαπτομενικό της διάνυσμα είναι μοναδιαίο αφού

$$\frac{dc}{ds}(s) = \Big(\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)\Big).$$

Επομένως το s είναι μήκος τόξου για την καμπύλη c και προφανώς η καμπυλότητά της είναι

$$\frac{d\varphi}{ds}(s) = k(s).$$

(ii) Επιλέγουμε $s_0 \in I$ και στροφή $A \in O(2)$ τέτοια ώστε

$$A\dot{\tilde{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0)$$

και τις παραράλληλες μεταφορές T_v κατά $v = c(s_0)$ και T_w κατά $w = -\tilde{c}(s_0)$. Θεωρούμε την καμπύλη

$$\bar{c} = T \circ \tilde{c},$$

όπου $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ είναι η ισομετρία με

$$T = T_v \circ A \circ T_w.$$

Η καμπύλη $\bar{c}$ προφανώς έχει ως παράμετρο το μήκος τόξου s και λόγω της Πρότασης 1.5.3 έχει καμπυλότητα k. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\bar{c}(s_0) = c(s_0) \ \text{ και } \ \dot{\bar{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0). \tag{1.2}$$

Έστω $\varphi(s)$ και $\bar{\varphi}(s)$ γωνιακές συναρτήσεις των καμπυλών c και $\bar{c}$, αντίστοιχα, δηλαδή,

$$\dot{c}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)) \ \text{ και } \ \dot{\bar{c}}(s) = (\cos\bar{\varphi}(s), \sin\bar{\varphi}(s)). \tag{1.3}$$

Λόγω της δεύτερης από τις ισότητες (1.2), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varphi(s_0) = \bar{\varphi}(s_0)$. Όμως τότε έχουμε

$$k(s) = \frac{d\varphi}{ds}(s) = \frac{d\bar{\varphi}}{ds}(s),$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d(\varphi - \bar{\varphi})}{ds}(s) = 0.$$

Επειδή $\varphi(s_0) = \bar{\varphi}(s_0)$, λαμβάνουμε $\varphi(s) = \bar{\varphi}(s)$ για κάθε $s \in I$. Από τις (1.3) έχουμε

$$\frac{d(c - \bar{c})}{ds}(s) = 0$$

και λόγω της πρώτης από τις σχέσεις (1.2), τελικώς βρίσκουμε ότι

$$\bar{c}(s) = c(s) \ \text{ για κάθε } \ s \in I.$$

Συνεπώς είναι $\tilde{c} = T^{-1} \circ c$ και η T^{-1} είναι ισομετρία η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό. □

Άμεση συνέπεια είναι το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πόρισμα 1.6.2. *Οι μόνες καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ με σταθερή καμπυλότητα είναι ευθείες (ή τμήματα αυτών) και κύκλοι (ή τόξα κύκλων).*

1.7 Ασκήσεις

1. Δίνεται η καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Εξετάστε αν η c είναι κανονική καμπύλη. Βρείτε τη συνάρτηση μήκους τόξου της με αφετηρία $t_0 = 0$.

(ii) Βρείτε αναπαραμέτρηση με παράμετρο το μήκος τόξου.

(iii) Υπολογίστε την καμπυλότητά της ως συνάρτηση της παραμέτρου t, αλλά και του μήκους τόξου.

(iv) Υπολογίστε το πλαίσιο Frenet συναρτήσει της παραμέτρου t, αλλά και του μήκους τόξου.

(v) Υπάρχει εφαπτομένη ή κάθετη ευθεία της καμπύλης c η οποία διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$;

2. Δίνεται η καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(t) = \Big(t, a\cosh(\frac{t}{a} + b)\Big), \quad t \in \mathbb{R},$$

όπου $a \neq 0$ και b είναι πραγματικοί αριθμοί. Να υπολογιστεί η καμπυλότητά της ως συνάρτηση του μήκους τόξου.

3. Να βρεθεί η καμπύλη $c(s)$ του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in \mathbb{R}$ και καμπυλότητα $k(s) = -5$ τέτοια ώστε
$$c(0) = (1,1) \quad \text{και} \quad \dot{c}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

4. Να βρεθούν όλες οι καμπύλες $c(s)$ του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in \mathbb{R}$ και μοναδιαίο κάθετο
$$\vec{n}(s) = (-\sin s, \cos s)\,.$$

5. Αποδείξτε ότι οι μόνες καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ που έχουν την ιδιότητα οι κάθετες ευθείες να διέρχονται από σταθερό σημείο p_0 είναι τόξα κύκλου κέντρου p_0.

6. Αποδείξτε ότι οι μόνες καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ που έχουν την ιδιότητα οι εφαπτόμενες ευθείες να απέχουν σταθερή απόσταση από σταθερό σημείο είναι τμήματα ευθείας ή τόξα κύκλου.

7. Δίνεται η καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με
$$c(t) = \left(R\cos^3 t, R\sin^3 t\right), \quad t \in [0, 2\pi].$$
όπου R είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

   (i) Να εξεταστεί ως προς την κανονικότητα.

   (ii) Να υπολογιστεί το μήκους τόξου με αφετηρία $t_0 = 0$.

   (iii) Να υπολογιστεί το μήκος της.

   (iv) Βρείτε αναπαραμέτρησή της με παράμετρο το μήκος τόξου.

8. Έστω $c(s)$ καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ και καμπυλότητα $k(s) \neq 0$ για κάθε $s \in I$. Θεωρούμε την καμπύλη
$$\tilde{c}(s) = c(s) + \frac{1}{k(s)}\vec{n}(s),$$
όπου $\vec{n}(s)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο της καμπύλης c.

   (i) Να εξεταστεί αν η καμπύλη $\tilde{c}$ είναι κανονική.

   (ii) Αν η καμπύλη $\tilde{c}$ είναι κανονική, να βρεθεί το πλαίσιο Frenet καθώς και η καμπυλότητά της.

9. Έστω $c(s)$ καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in [a,b]$. Θεωρούμε την καμπύλη

$$c_\sigma(s) = c(s) + \sigma \vec{n}(s),$$

όπου $\vec{n}(s)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο της καμπύλης c.

(i) Να αποδείξτε ότι η καμπύλη c_σ είναι κανονική για σ αρκούντως μικρό. Βρείτε το πλαίσιο Frenet της c_σ.

(ii) Να αποδείξτε ότι, για σ αρκούντως μικρό, η καμπυλότητα k_σ της καμπύλης c_σ είναι

$$k_\sigma(s) = \frac{k(s)}{1 - \sigma k(s)},$$

όπου $k(s)$ είναι η καμπυλότητα της καμπύλης c.

10. Δίνονται οι καμπύλες $c_1, c_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με

$$c_1(t) = (f(t), t) \text{ και } c_2(t) = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2} f(t) + \frac{1}{2} t, \frac{1}{2} f(t) - \frac{\sqrt{3}}{2} t\Big), \ t \in \mathbb{R},$$

όπου $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι λεία συνάρτηση. Δείξτε ότι καμπύλες c_1 και c_2 είναι γεωμετρικώς ισότιμες.

11. Δίνεται καμπύλη $c \colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$, με παράμετρο το μήκος τόξου s, για την οποία υπάρχει $s_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε η απόσταση $d(c(s), O)$ του τυχόντος σημείου της καμπύλης από την αρχή O του $\mathbb{R}^2$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της για $s = s_0$. Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα $k(s)$ της καμπύλης c στο s_0 πληροί $|k(s_0)| \geq k_0$, όπου $k_0 > 0$ είναι η καμπυλότητα του κύκλου κέντρου O που διέρχεται από το σημείο $c(s_0)$.

Κεφάλαιο 2

Καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$

Αυτό το κεφάλαιο αφιερώνεται στη μελέτη των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$. Η θεωρία τους παρουσιάζει ομοιότητες αλλά και σημαντικές διαφορές από αυτή των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$.

Μια καμπύλη του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι μια απεικόνιση $c\colon I \to \mathbb{R}^3$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα. Η καμπύλη c καλείται τάξης C^r, όπου r είναι φυσικός αριθμός, αν υπάρχουν οι παράγωγοί της έως r τάξης και είναι συνεχείς. Θέτοντας

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)), \ t \in I,$$

οι συναρτήσεις $x(t), y(t), z(t)$ ονομάζονται συναρτήσεις συντεταγμένων της καμπύλης. Προφανώς η καμπύλη c είναι τάξης C^r αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της είναι της ίδιας τάξης. Συνήθως απαιτούμε η καμπύλη να είναι τουλάχιστον C^3 τάξης. Συχνά κάνουμε λόγο για λείες καμπύλες, εννοώντας ότι η καμπύλη είναι τέτοιας τάξης διαφορισιμότητας όσο απαιτούν οι ανάγκες της θεωρίας. Η μεταβλητή $t \in I$ καλείται **παράμετρος** της καμπύλης.

Αξίζει να τονιστεί ότι κατά τον ορισμό μας οι καμπύλες είναι απεικονίσεις και όχι σύνολα σημείων του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$. Αναζητώντας φυσική ερμηνεία της έννοιας, μπορούμε να φανταστούμε την καμπύλη ως τροχιά ενός κινητού το οποίο τη χρονική στιγμή $t \in I$ βρίσκεται στη θέση $c(t)$. Το σύνολο $c(I)$ ονομάζεται **εικόνα** της καμπύλης c. Επισημαίνουμε ότι δύο καμπύλες μπορεί να είναι διαφορετικές ακόμη κι αν έχουν την ίδια ακριβώς εικόνα.

Όπως και στην περίπτωση των καμπυλών του $\mathbb{R}^2$, μια καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ καλείται **γεωμετρικώς ισότιμη** μιας καμπύλης $\tilde{c}\colon I \to \mathbb{R}^3$ αν υπάρχει ισομετρία $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ τέτοια ώστε

$$\tilde{c} = T \circ c.$$

Δε διακρίνουμε μεταξύ καμπυλών οι οποίες διαφέρουν ως προς ισομετρία του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$, δηλαδή μεταξύ γεωμετρικώς ισότιμων καμπυλών.

Ορισμός 2.0.1. *Έστω λεία καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^3$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα, με $c(t) = (x(t), y(t)z(t))$, $t \in I$. Το διάνυσμα*

$$c'(t_0) = \frac{dc}{dt}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

καλείται **εφαπτομενικό διάνυσμα (ή διάνυσμα ταχύτητας)** *της καμπύλης c στο $t_0 \in I$. Η καμπύλη c καλείται* **κανονική** *αν $c'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$.*

Η γεωμετρική του ερμηνεία είναι ότι καθώς το t τείνει στο t_0, η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $c(t)$ και $c(t_0)$ τείνει να λάβει μια οριακή θέση η οποία θα καλείται η **εφαπτομένη ευθεία** της καμπύλης c η οποία είναι παράλληλη προς το $c'(t_0)$ και καλά ορισμένη μόνο εφόσον $c'(t_0) \neq 0$. Αυτό μας αναγκάζει να περιορίσουμε τη μελέτη μας σε κανονικές καμπύλες. Έτσι η **εφαπτομένη ευθεία μιας κανονικής καμπύλης** c στο $t_0 \in I$ είναι εκείνη η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $c(t_0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα ταχύτητας $c'(t_0)$.

Αν c και $\tilde{c}$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες, δηλαδή $\tilde{c} = T \circ c$ για κάποια ισομετρία $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$, και η καμπύλη c είναι κανονική, τότε και η καμπύλη $\tilde{c}$ είναι επίσης κανονική, αφού ισχύει

$$\tilde{c}'(t) = T_* c'(t) \ \text{ για κάθε } \ t \in I,$$

όπου T_* είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T.

Παράδειγμα 2.0.1. Η καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)\,, \quad t \in \mathbb{R},$$

όπου $a > 0$ και $b \neq 0$ είναι κανονική. Η καμπύλη αυτή είναι γνωστή ως **κυλινδρική έλικα.**

2.1 Καμπυλότητα και στρέφη καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$

Όλα όσα αναφέραμε για αναπαραμετρήσεις, μήκος καμπυλών και μήκος τόξου καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$ μεταφέρονται αυτούσια για καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$. Σημειώνουμε ότι γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ έχουν την ίδια συνάρτηση μήκος τόξου με κοινή αφετηρία. Έτσι κάθε κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ μπορεί να αναπαραμετρηθεί ώστε να έχει ως παράμετρο το μήκος τόξου. Μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ έχει φυσική παράμετρο αν και μόνο το διάνυσμα ταχύτητάς της είναι μοναδιαίο παντού.

Ωστόσο, η πρώτη διαφορά μεταξύ των καμπυλών του $\mathbb{R}^2$ και αυτών του $\mathbb{R}^3$ αφορά την καμπυλότητα.

Ακολούθως δίνεται ο ορισμός της καμπυλότητας για καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο, δηλαδή για καμπύλες με παράμετρο το μήκος τόξου.

Ορισμός 2.1.1. *Η καμπυλότητα μιας καμπύλης $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, με φυσική παράμετρο $s \in I$, ορίζεται ως η συνάρτηση $k\colon I \to [0,\infty)$ με*

$$k(s) = \|\ddot{c}(s)\|,\ s \in I.$$

Παρατηρούμε ότι $k(s) \geq 0$ για κάθε $s \in I$. Επιπλέον αν $k(s) = 0$ για κάθε $s \in I$, τότε με ολοκλήρωση λαμβάνουμε $c(s) = p + sv$, όπου $p \in \mathbb{R}^3$ και v είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Τούτο δείχνει ότι οι μόνες καμπύλες με καμπυλότητα $k = 0$ είναι οι ευθείες ή ευθύγραμμα τμήματα.

Σημειώνουμε ότι αν θεωρήσουμε την αναπαραμέτρηση $\tilde{c} = c \circ f$ της καμπύλης c με $f(s) = -s$, τότε και η καμπύλη $\tilde{c}$ έχει φυσική παράμετρο με καμπυλότητα $\tilde{k} = k$.

Είναι η καμπυλότητα γεωμετρική έννοια; Με άλλα λόγια πως σχετίζονται οι καμπυλότητες δύο γεωμετρικώς ισότιμων καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$; Οι γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες c και $\tilde{c} = T \circ c$, όπου $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$, με φυσική παράμετρο πληρούν

$$\dot{\tilde{c}} = T_* \dot{c} \;\text{ και }\; \ddot{\tilde{c}} = T_* \ddot{c},$$

όπου T_* είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T. Επομένως

$$\tilde{k} = \|\ddot{\tilde{c}}\| = \|T_* \ddot{c}\| = \|\ddot{c}\| = k.$$

Συνεπώς, οι γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ έχουν την ίδια καμπυλότητα.

Ακολουθεί ο ορισμός της καμπυλότητας για κανονικές καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ με τυχούσα παράμετρο.

Θεωρούμε κανονική καμπύλη $c \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο $t \in I$. Τότε η αναπαραμέτρησή της $\bar{c} = c \circ f$ έχει φυσική παράμετρο, όπου $t = f(s)$ ή πιο απλά $t = t(s)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης μήκους τόξου $s = s(t)$.

Αν $\bar{k}$ είναι η καμπυλότητα της καμπύλης $\bar{c}$ όπως ορίστηκε πιο πάνω, τότε ορίζουμε ως **καμπυλότητα της καμπύλης** c τη συνάρτηση $k \colon I \to [0, \infty)$ με

$$k(t) = \bar{k}\left(s(t)\right), \quad t \in I.$$

Με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\dot{c} = \frac{dt}{ds}\frac{dc}{dt} = \frac{dt}{ds}c' \tag{2.1}$$

και

$$\ddot{c} = \Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 c'' + \frac{d^2t}{ds^2}c'. \tag{2.2}$$

Επειδή το εφαπτόμενο διάνυσμα $\dot{c}$ είναι μοναδιαίο, με παραγώγιση της σταθερής συνάρτησης $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$ λαμβάνουμε

$$\langle \dot{c}, \ddot{c} \rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 0.$$

Οπότε είναι

$$\begin{aligned} k &= \|\ddot{c}\| = \|\dot{c} \times \ddot{c}\| \\ &= \Big(\frac{dt}{ds}\Big)^3 \|c' \times c''\|. \end{aligned}$$

Όμως με χρήση της ισότητας

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|} \tag{2.3}$$

και των ανωτέρω σχέσεων προκύπτει το ακόλουθο συμπέρασμα το οποίο μας δίνει ένα τρόπο υπολογισμού της καμπυλότητας κανονικών καμπυλών με τυχούσα παράμετρο.

Πρόταση 2.1.1. *Η καμπυλότητα k μιας κανονικής καμπύλης $c\colon I \to \mathbb{R}^3$, με παράμετρο $t \in I$, είναι η συνάρτηση*

$$k = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}.$$

Έτσι εύκολα διαπιστώνεται ότι η καμπύλη του Παραδείγματος 2.0.1 έχει σταθερή καμπυλότητα

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Προκύπτει το συμπέρασμα ότι, σε αντίθεση με τις καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$, δεν αρκεί η καμπυλότητα για να καθοριστεί, ως προς γεωμετρική ισοτιμία, μια καμπύλη του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$. Πράγματι η κυλινδρική έλικα έχει την ίδια καμπυλότητα με ένα κύκλο ακτίνας $(a^2 + b^2)/a$, χωρίς να είναι προφανώς γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες.

2.2 Πλαίσιο Frenet και εξισώσεις Frenet

Έστω καμπύλη $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$. Συμβολίζουμε με $\vec{t}(s)$ το **μοναδιαίο εφαπτομενικό της διάνυσμα**

$$\vec{t}(s) = \dot{c}(s), \quad s \in I.$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\dot{\vec{t}}(s)$ είναι κάθετο στο $\vec{t}(s)$ αφού έχουμε ότι

$$\langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{t}(s) \rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\langle \vec{t}(s), \vec{t}(s) \rangle = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι η **καμπυλότητα της καμπύλης** c **είναι παντού θετική**, τότε ορίζουμε το **κύριο κάθετο διάνυσμα** $\vec{n}(s)$ ως το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{n}(s) = \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{k(s)} = \frac{\ddot{c}(s)}{k(s)}, \quad s \in I.$$

Από εδώ και στο εξής θα μελετούμε μόνο κανονικές καμπύλες των οποίων η καμπυλότητα είναι **παντού θετική.** Έχουμε τότε την ακόλουθη εξίσωση, γνωστή ως **πρώτη εξίσωση Frenet**,

$$\dot{\vec{t}} = k\vec{n}.$$

Ορισμός 2.2.1. *Το* **δεύτερο κάθετο διάνυσμα** $\vec{b}(s)$ *μιας καμπύλης με φυσική παράμετρο* $s \in I$ *και παντού θετική καμπυλότητα είναι το μοναδιαίο διάνυσμα*

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s).$$

Είναι φανερό ότι τα διανύσματα $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ συνιστούν, για κάθε $s \in I$, μια δεξιόστροφη ορθομοναδιαία βάση του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$, το λεγόμενο **πλαίσιο Frenet** της καμπύλης. Για τις παραγώγους του πλαισίου Frenet έχουμε

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{t}}(s) &= \langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{t}(s)\rangle \vec{t}(s) + \langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{n}(s)\rangle \vec{n}(s) + \langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{b}(s)\rangle \vec{b}(s),\\
\dot{\vec{n}}(s) &= \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{t}(s)\rangle \vec{t}(s) + \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{n}(s)\rangle \vec{n}(s) + \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{b}(s)\rangle \vec{b}(s),\\
\dot{\vec{b}}(s) &= \langle \dot{\vec{b}}(s), \vec{t}(s)\rangle \vec{t}(s) + \langle \dot{\vec{b}}(s), \vec{n}(s)\rangle \vec{n}(s) + \langle \dot{\vec{b}}(s), \vec{b}(s)\rangle \vec{b}(s),
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{t}}(s) &= k(s)\vec{n}(s),\\
\dot{\vec{n}}(s) &= -k(s)\vec{t}(s) + \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{b}(s)\rangle \vec{b}(s),\\
\dot{\vec{b}}(s) &= -\langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{b}(s)\rangle \vec{n}(s).
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την στρέψη καμπύλης. Πρόκειται για μια σημαντική συνάρτηση για την θεωρία των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$. Αρχικά δίνουμε τον ορισμό για καμπύλες με παράμετρο το μήκος τόξου.

Ορισμός 2.2.2. *Η* **στρέψη** *μιας καμπύλης* $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *με φυσική παράμετρο* $s \in I$ *και παντού θετική καμπυλότητα είναι η συνάρτηση* $\tau\colon I \to \mathbb{R}$ *με*

$$\tau(s) = \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{b}(s) \rangle.$$

Από τα ανωτέρω προκύπτουν οι λεγόμενες **εξισώσεις Frenet** της καμπύλης c, δηλαδή οι ακόλουθες

$$\dot{\vec{t}} = k\vec{n}, \tag{2.4}$$

$$\dot{\vec{n}} = -k\vec{t} + \tau\vec{b}, \tag{2.5}$$

$$\dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n}. \tag{2.6}$$

Η στρέψη μπορεί να υπολογιστεί χωρίς να απαιτείται γνώση του πλαισίου Frenet. Πράγματι, επειδή

$$\dot{\vec{n}} = \frac{d}{ds}\Big(\frac{\ddot{c}}{k}\Big) = \frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{k}\Big)\,\ddot{c} + \frac{1}{k}\,\dddot{c}$$

και

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \frac{1}{k}\,\dot{c} \times \ddot{c},$$

έχουμε

$$\tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{k^2} = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{\|\ddot{c}\|^2}.$$

Ακολούθως δίνουμε τον ορισμό της στρέψης για καμπύλες με τυχούσα παράμετρο.

Θεωρούμε κανονική καμπύλη $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο $t \in I$ και καμπυλότητα k παντού θετική. Τότε η αναπαραμέτρησή της $\bar{c} = c \circ f$ έχει φυσική παράμετρο, όπου $t = f(s)$ ή πιο απλά $t = t(s)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης μήκους τόξου $s = s(t)$.

Αν $\bar{\tau}$ είναι η στρέψη της καμπύλης $\bar{c}$ όπως ορίστηκε πιο πάνω, τότε ορίζουμε ως **στρέψη της καμπύλης** c τη συνάρτηση $\tau\colon I \to \mathbb{R}$ με

$$\tau(t) = \bar{\tau}\,(s(t))\,, \quad t \in I.$$

Αναλόγως ορίζεται το πλαίσιο Frenet. Από την (2.2) βρίσκουμε ότι

$$\dddot{c} = \Big(\frac{dt}{ds}\Big)^3 c''' + 3\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2}\,c'' + \frac{d^3t}{ds^3}\,c'. \tag{2.7}$$

Κάνοντας χρήση των (2.3), (2.1), (2.2) και (2.7) έχουμε τον ακόλουθο τρόπο υπολογισμού της στρέψης καμπύλης με τυχούσα παράμετρο.

Πρόταση 2.2.1. *Η στρέψη μιας κανονικής καμπύλης $c\colon I \to \mathbb{R}^3$, με παράμετρο $t \in I$ και παντού θετική καμπυλότητα k, είναι η συνάρτηση*

$$\tau = \frac{[c', c'', c''']}{\|c' \times c''\|^2}.$$

Επιπλέον προκύπτει εύκολα ότι το πλαίσιο Frenet καμπύλης με τυχούσα παράμετρο είναι

$$\vec{t} = \frac{c'}{\|c'\|},\ \ \vec{b} = \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|},\ \ \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}.$$

Εύκολα υπολογίζεται ότι η στρέψη της κυλινδρικής έλικας του Παραδείγματος 2.0.1 είναι

$$\tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Παρατήρηση 2.2.1. Σημειώνουμε ότι αν μια καμπύλη c έχει παράμετρο το μήκος τόξου s και στρέψη τ, τότε η αναπαραμέτρησή της $\tilde{c} = c \circ f$ με $f(s) = -s$ έχει φυσική παράμετρο και στρέψη $\tilde{\tau} = \tau$.

Είναι η στρέψη γεωμετρική έννοια; Η απάντηση δίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.2.2. *Η στρέψη $\tilde{\tau}$ της καμπύλης $\tilde{c} = T \circ c$, όπου $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$, είναι $\tilde{\tau} = \varepsilon\tau$, όπου τ είναι η στρέψη της καμπύλης c, και $\varepsilon = 1$ ή $\varepsilon = -1$, αν η T διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό, αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη c (άρα και η καμπύλη $\tilde{c}$) έχει παράμετρο το μήκος τόξου. Έχουμε

$$\dot{\tilde{c}} = T_*\dot{c},\ \ \ddot{\tilde{c}} = T_*\ddot{c} \ \text{ και } \ \dddot{\tilde{c}} = T_*\dddot{c},$$

όπου T_* είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T. Επομένως, επειδή οι καμπυλότητες των γεωμετρικώς ισότιμων καμπυλών είναι $\tilde{k} = k$, έχουμε

$$\tilde{\tau} = \frac{[\dot{\tilde{c}}, \ddot{\tilde{c}}, \dddot{\tilde{c}}]}{\tilde{k}^2} = \frac{[T_*\dot{c}, T_*\ddot{c}, T_*\dddot{c}]}{k^2}.$$

Λόγω της Πρότασης Α΄.2.4(v), είναι

$$[T_*\dot{c}, T_*\ddot{c}, T_*\dddot{c}] = \varepsilon[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}],$$

όπου $\varepsilon = 1$ ή $\varepsilon = -1$, αν η ισομετρία T διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό, αντίστοιχα, από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

2.3 Επίπεδες καμπύλες

Ορισμός 2.3.1. *Μια καμπύλη του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ καλείται* **επίπεδη** *αν η εικόνα της περιέχεται σε ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$.*

Στην ακόλουθη πρόταση, όπου δίνεται ένας χαρακτηρισμός των επιπέδων καμπυλών, είναι εμφανής η γεωμετρική ερμηνεία της στρέψης.

Πρόταση 2.3.1. *Μια κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα παντού θετική είναι επίπεδη αν και μόνο αν η στρέψη της είναι μηδέν.*

Απόδειξη. Έστω καμπύλη $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$, και καμπυλότητα παντού θετική.

Υποθέτουμε ότι η στρέψη της είναι μηδέν. Από την εξίσωση Frenet (2.6), βρίσκουμε ότι $\vec{b}(s) = w$ για κάθε $s \in I$, όπου w είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Τότε έχουμε

$$\frac{d}{ds}\langle c(s), w\rangle = 0.$$

Συνεπώς υπάρχει σταθερά a τέτοια ώστε

$$\langle c(s), w\rangle = a \ \text{ για κάθε } \ s \in I.$$

Τούτο σημαίνει ότι η εικόνα της καμπύλης c περιέχεται σε επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στο διάνυσμα w.

Αντίστροφα, αν η εικόνα της καμπύλης c περιέχεται σε επίπεδο το οποίο είναι κάθετο σε μοναδιαίο διάνυσμα w, τότε έχουμε

$$\langle c(s), w\rangle = a \ \text{ για κάθε } \ s \in I$$

για κάποια σταθερά a. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$\langle \dot{c}(s), w\rangle = 0 \ \text{ και } \ \langle \ddot{c}(s), w\rangle = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\langle \vec{t}(s), w\rangle = 0 \ \text{ και } \ \langle \vec{n}(s), w\rangle = 0.$$

Τότε όμως το δεύτερο κάθετο της καμπύλης c είναι $\vec{b}(s) = \pm w$, δηλαδή ανεξάρτητο του s, και η εξίσωση (2.6) δίνει ότι $\tau(s) = 0$ για κάθε $s \in I$. □

2.4 Το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των καμπυλών του $\mathbb{R}^3$

Θεώρημα 2.4.1. *(i) Για κάθε ζεύγος λείων συναρτήσεων $k, \tau \colon I \to \mathbb{R}$ με $k(s) > 0$ για κάθε $s \in I \subseteq \mathbb{R}$, υπάρχει καμπύλη $c \colon I \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$, της οποίας η καμπυλότητα και η στρέψη είναι οι δοθείσες συναρτήσεις k και τ, αντίστοιχα.*

(ii) Έστω καμπύλη $c \colon I \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$, καμπυλότητα k παντού θετική και στρέψη τ. Αν $\tilde{c} \colon I \to \mathbb{R}^3$ είναι μια άλλη καμπύλη με φυσική παράμετρο $s \in I$, καμπυλότητα $\tilde{k} = k$ και στρέψη[1] $\tilde{\tau} = \tau$, τότε υπάρχει ισομετρία $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$, η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό, τέτοια ώστε $\tilde{c} = T \circ c$.

Απόδειξη. (i) Έστω $\{v_1, v_2, v_3\}$ μια δεξιόστροφη και ορθομοναδιαία βάση του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$. Θεωρούμε το σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1(s) &= k(s)X_2(s)\\
\dot{X}_2(s) &= -k(s)X_1(s) + \tau(s)X_3(s)\\
\dot{X}_3(s) &= -\tau(s)X_2(s)
\end{aligned}$$

[1] Είναι προφανές ότι στην περίπτωση όπου ισχύει $\tilde{k} = k$ και $\tilde{\tau} = -\tau$, τότε υπάρχει ισομετρία $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ η οποία αντιστρέφει τον προσανατολισμό, τέτοια ώστε $\tilde{c} = T \circ c$.

με αγνώστους τις διανυσματικές συναρτήσεις $X_1(s), X_2(s), X_3(s)$ και αρχικές συνθήκες

$$X_1(s_0) = v_1,\ X_2(s_0) = v_2,\ X_3(s_0) = v_3$$

για κάποιο $s_0 \in I$.

Το γραμμικό αυτό σύστημα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1(s) \\ \dot{X}_2(s) \\ \dot{X}_3(s) \end{pmatrix} = A(s) \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{pmatrix},$$

όπου

$$A(s) = (a_{ij}(s)) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα το οποίο αφορά γραμμικά συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, υπάρχει λεία λύση

$$\{X_1(s), X_2(s), X_3(s)\}$$

η οποία ορίζεται για κάθε $s \in I$.

Θα αποδείξουμε ότι τα διανύσματα $\{X_1(s), X_2(s), X_3(s)\}$ αποτελούν δεξιόστροφη και ορθομοναδιαία βάση για κάθε $s \in I$.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τις λείες συναρτήσεις $f_{ij}\colon I \to \mathbb{R}$ με

$$f_{ij}(s) = \langle X_i(s), X_j(s) \rangle,\ \ 1 \le i, j \le 3.$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι λύσεις του γραμμικού προβλήματος

$$\frac{df_{ij}}{ds} = \sum_k a_{ik} f_{kj} + \sum_k a_{jk} f_{ik},\ \ 1 \le i, j \le 3$$

με αρχικές συνθήκες

$$f_{ij}(s_0) = \delta_{ij}.$$

Επειδή ο πίνακας $A(s)$ είναι αντισυμμετρικός, οι συναρτήσεις δ_{ij} είναι επίσης λύση του ανωτέρω προβλήματος. Λόγω μοναδικότητας της λύσης, βρίσκουμε ότι

$$f_{ij}(s) = \delta_{ij} \ \text{ για κάθε } \ s \in I.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\{X_1(s), X_2(s), X_3(s)\}$ συνιστούν ορθομοναδιαία βάση. Για να δείξουμε ότι είναι δεξιόστροφη, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για το μικτό γινόμενο ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}[X_1(s), X_2(s), X_3(s)] &= [\dot{X}_1(s), X_2(s), X_3(s)]\\ &+ [X_1(s), \dot{X}_2(s), X_3(s)]\\ &+ [X_1(s), X_2(s), \dot{X}_3(s)]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Τότε είναι

$$\begin{aligned}[X_1(s), X_2(s), X_3(s)] &= [X_1(s_0), X_2(s_0), X_3(s_0)]\\ &= [v_1, v_2, v_3] = 1.\end{aligned}$$

Στην συνέχεια θεωρούμε την καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ με

$$c(s) = \int_{s_0}^{s} \|X_1(\sigma)\| d\sigma.$$

Το εφαπτομενικό της διάνυσμα είναι μοναδιαίο αφού

$$\frac{dc}{ds}(s) = X_1(s).$$

Επομένως το s είναι μήκος τόξου για την καμπύλη c, το X_1 είναι το μοναδιαίο εφαπτομενικό της διάνυσμα και η καμπυλότητά της είναι η συνάρτηση k. Επιπλέον το πλαίσιο Frenet είναι το $\{X_1(s), X_2(s), X_3(s)\}$ και επομένως η στρέψη της είναι η συνάρτηση τ.

(ii) Έστω

$$\left\{E_1(s) = \vec{t}(s), E_2(s) = \vec{n}(s), E_3(s) = \vec{b}(s)\right\}$$

και

$$\left\{\tilde{E}_1(s), \tilde{E}_2(s), \tilde{E}_3(s)\right\}$$

τα πλαίσια Frenet των καμπυλών c και $\tilde{c}$, αντίστοιχα. Επιλέγουμε $s_0 \in I$ και $A \in O(3)$ με $\det A = 1$ τέτοια ώστε

$$A\tilde{E}_1(s_0) = E_1(s_0),\ A\tilde{E}_2(s_0) = E_2(s_0),\ A\tilde{E}_3(s_0) = E_3(s_0).$$

Θεωρούμε τις παραράλληλες μεταφορές T_v κατά το διάνυσμα $v = c(s_0)$ και T_w κατά το διάνυσμα $w = -\tilde{c}(s_0)$. Ορίζουμε την καμπύλη

$$\bar{c} = T \circ \tilde{c},$$

όπου $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι η ισομετρία

$$T = T_v \circ A \circ T_w.$$

Η καμπύλη $\bar{c}$ προφανώς έχει ως παράμετρο το μήκος τόξου s, καμπυλότητα k και στρέψη τ. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\bar{c}(s_0) = c(s_0)$$

και ότι το πλαίσιο Frenet $\{\bar{E}_1(s), \bar{E}_2(s), \bar{E}_3(s)\}$ της καμπύλης $\bar{c}$ πληροί

$$\bar{E}_1(s_0) = E_1(s_0),\ \bar{E}_2(s_0) = E_2(s_0),\ \bar{E}_3(s_0) = E_3(s_0).$$

Επειδή $\{E_1(s), E_2(s), E_3(s)\}$ και $\{\bar{E}_1(s), \bar{E}_2(s), \bar{E}_3(s)\}$ πληρούν τις εξισώσεις Frenet, είναι λύσεις του ιδίου γραμμικού συστήματος με τις ίδιες αρχικές συνθήκες. Λόγω μοναδικότητας της λύσης έχουμε ότι

$$\bar{E}_1(s) = E_1(s),\ \bar{E}_2(s) = E_2(s),\ \bar{E}_3(s) = E_3(s) \ \text{ για κάθε } \ s \in I.$$

Τότε όμως είναι

$$\frac{dc}{ds}(s) = \frac{d\bar{c}}{ds}(s) \ \text{ για κάθε } \ s \in I.$$

Επειδή $\bar{c}(s_0) = c(s_0)$, τελικώς βρίσκουμε ότι

$$\bar{c}(s) = c(s) \ \text{ για κάθε } \ s \in I.$$

Συνεπώς είναι $\tilde{c} = T^{-1} \circ c$ και η T^{-1} είναι ισομετρία η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό. □

2.5 Καμπύλες σταθερής κλίσης

Ορισμός 2.5.1. *Μια κανονική καμπύλη c του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ καλείται* **καμπύλη σταθερής κλίσης** *αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα το οποίο σχηματίζει σταθερή γωνία με κάθε εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης c.*

Με άλλα λόγια μια καμπύλη είναι καμπύλη σταθερής κλίσης αν υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα w τέτοιο ώστε το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{t}$ να πληροί παντού τη σχέση

$$\langle \vec{t}, w \rangle = \cos\varphi,$$

όπου φ είναι η σταθερή γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα w με κάθε εφαπτομένη ευθεία.

Το διάνυσμα w συχνά αναφέρεται ως η **διεύθυνση** της καμπύλης σταθερής κλίσης, ενώ η σταθερή γωνία φ ως **κλίση** της.

Οι επίπεδες καμπύλες καθώς και οι κυλινδρικές έλικες είναι καμπύλες σταθεράς κλίσης (ποιά είναι η διεύθυνση και ποιά η κλίση τους;).

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας δίνει ένα χαρακτηρισμό για τις καμπύλες σταθεράς κλίσης.

Θεώρημα 2.5.1. *Μια κανονική καμπύλη του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ με παντού θετική καμπυλότητα k και στρέψη τ είναι καμπύλη σταθερής κλίσης αν και μόνο αν η συνάρτηση τ/k είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Έστω καμπύλη $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$ και παντού θετική καμπυλότητα k.

Υποθέτουμε ότι η καμπύλη c είναι καμπύλη σταθερής κλίσης. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα w τέτοιο ώστε

$$\langle \vec{t}, w \rangle = \cos\varphi,$$

όπου φ σταθερή γωνία. Παραγωγίζοντας και κάνοντας χρήση της πρώτης εξίσωσης Frenet, λαμβάνουμε

$$\langle \vec{n}, w \rangle = 0.$$

Επομένως είναι
$$w = \cos\varphi\, \vec{t} + \sin\varphi\, \vec{b}.$$

Παραγωγίζοντας ξανά και κάνοντας χρήση της πρώτης και τρίτης εξίσωσης Frenet, βρίσκουμε ότι
$$\frac{\tau}{k} = \cot\varphi.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι
$$\frac{\tau}{k} = \cot\varphi \tag{2.8}$$
για κάποια σταθερή γωνία φ. Θεωρούμε τη λεία διανυσματική συνάρτηση $W\colon I \to \mathbb{R}^3$ με
$$W(s) = \cos\varphi\, \vec{t}(s) + \sin\varphi\, \vec{b}(s), \quad s \in I.$$

Με τη βοήθεια των εξισώσεων Frenet και της ισότητας (2.8), προκύπτει ότι
$$\frac{dW}{ds}(s) = 0,$$
δηλαδή είναι $W(s) = w$ ανεξάρτητο του s. Προφανώς ισχύει
$$\langle \vec{t}, w\rangle = \cos\varphi,$$
το οποίο σημαίνει ότι η καμπύλη c είναι καμπύλη σταθερής κλίσης. □

2.6 Σφαιρικές καμπύλες

Ορισμός 2.6.1. *Μια καμπύλη του Ευκλειδείου χώρου* $\mathbb{R}^3$ *καλείται* **σφαιρική** *αν η εικόνα περιέχεται σε μια σφαίρα.*

Έστω σφαιρική καμπύλη $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$, της οποίας η εικόνα περιέχεται στη σφαίρα κέντρου p_0 και ακτίνας $R > 0$. Τότε είναι
$$\Big\langle c(s) - p_0, c(s) - p_0 \Big\rangle = R^2 \ \text{ για κάθε } \ s \in I.$$

Παραγωγίζοντας λαμβάνουμε

$$\Big\langle c(s) - p_0, \dot{c}(s) \Big\rangle = 0 \ \text{ και } \ \Big\langle c(s) - p_0, \ddot{c}(s) \Big\rangle = -1. \tag{2.9}$$

Η δεύτερη από τις ανωτέρω σχέσεις δείχνει ότι η καμπυλότητα της καμπύλης c είναι παντού θετική. Επιπλέον με τη βοήθεια της πρώτης προκύπτει ότι

$$c(s) - p_0 = \Big\langle c(s) - p_0, \vec{n}(s) \Big\rangle \, \vec{n}(s) + \Big\langle c(s) - p_0, \vec{b}(s) \Big\rangle \, \vec{b}(s) \tag{2.10}$$

και επομένως

$$\Big\langle c(s) - p_0, \vec{n}(s) \Big\rangle^2 + \Big\langle c(s) - p_0, \vec{b}(s) \Big\rangle^2 = R^2.$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 1.5.1, γνωρίζουμε ότι υπάρχει λεία συνάρτηση $\omega\colon I \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\Big\langle c(s) - p_0, \vec{n}(s) \Big\rangle = R\cos\omega(s) \ \text{ και } \ \Big\langle c(s) - p_0, \vec{b}(s) \Big\rangle = R\sin\omega(s).$$

Τότε η δεύτερη από τις εξισώσεις (2.9) δίνει

$$k(s) = -\frac{1}{R\cos\omega(s)}. \tag{2.11}$$

Είναι φανερό ότι ισχύει

$$k(s) \geq \frac{1}{R} \ \text{ για κάθε } \ s \in I.$$

Επιπλέον η σχέση (2.10) γίνεται

$$c(s) - p_0 = R\,\Big(\cos\omega(s)\,\vec{n}(s) + \sin\omega(s)\,\vec{b}(s)\Big).$$

Παραγωγίζοντας και κάνοντας χρήση των εξισώσεων Frenet, βρίσκουμε ότι

$$\tau(s) = -\dot{\omega}(s). \tag{2.12}$$

Ως συνέπεια των ανωτέρω λαμβάνουμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πρόταση 2.6.1. *Οι μόνες κανονικές σφαιρικές καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ με σταθερή καμπυλότητα είναι τόξα κύκλων.*

Απόδειξη. Από τις εξισώσεις (2.11) και (2.12) προκύπτει ότι η στρέψη είναι $\tau = 0$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.1 η καμπύλη είναι επίπεδη. Συνεπώς η καμπύλη είναι τόξο κύκλου. □

Αξίζει να παρατηρήσουμε, υπό την υπόθεση ότι η στρέψη δεν μηδενίζεται πουθενά, ότι από την εξίσωση (2.11) με παραγώγιση και λαμβάνοντας υπόψη την (2.12), βρίσκουμε

$$\frac{\dot{k}}{k^2\tau} = R\sin\omega.$$

Παραγωγίζοντας και κάνοντας και πάλι χρήση των (2.11) και (2.12) προκύπτει ότι

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\Big) = \frac{\tau}{k}. \tag{2.13}$$

Συμπεραίνουμε ότι η ανωτέρω είναι μια συνθήκη αναγκαία για να είναι μια καμπύλη σφαιρική.

Το ερώτημα που εύλογα τίθεται τώρα είναι κατά πόσο η συνθήκη (2.13) χαρακτηρίζει τις σφαιρικές καμπύλες. Η απάντηση δίνεται ακολούθως.

Πρόταση 2.6.2. *Μια κανονική καμπύλη του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$, με καμπυλότητα παντού θετική και στρέψη που δε μηδενίζεται πουθενά, είναι σφαιρική αν και μόνο αν πληρείται η συνθήκη (2.13).*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το αντίστροφο. Θεωρούμε τη λεία διανυσματική συνάρτηση $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ με

$$\alpha = c + \frac{1}{k}\,\vec{n} - \frac{\dot{k}}{k^2\tau}\,\vec{b}.$$

Κάνοντας χρήση της (2.13) και των εξισώσεων Frenet, εύκολα προκύπτει ότι $\dot{\alpha} = 0$. Επομένως η διανυσματική συνάρτηση α είναι σταθερή, έστω $\alpha(s) = p_0$. Όμως είναι

$$\|c - p_0\| = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \Big(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\Big)^2}.$$

Ξανά κάνοντας χρήση της (2.13), βρίσκουμε ότι

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{k^2}+\Big(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\Big)^2\Big)=0,$$

και επομένως η καμπύλη c είναι σφαιρική. □

2.7 Ασκήσεις

1. Δίνεται η καμπύλη $c\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με

$$c(t)=\Big(t-\sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t+\sin t\Big),\quad t\in\mathbb{R}.$$

   (i) Εξετάστε αν η καμπύλη c είναι κανονική καμπύλη. Βρείτε τη συνάρτηση μήκους τόξου της με αφετηρία $t_0=0$.

   (ii) Βρείτε αναπαραμέτρησή της με παράμετρο το μήκος τόξου.

   (iii) Υπολογίστε την καμπυλότητα και τη στρέψη της ως συνάρτηση της παραμέτρου t αλλά και του μήκους τόξου.

   (iv) Υπολογίστε το πλαίσιο Frenet συναρτήσει της παραμέτρου t αλλά και συναρτήσει του μήκους τόξου.

2. Δίνεται η καμπύλη $c\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με

$$c(t)=(a\cos t, a\sin t, f(t)),\quad t\in\mathbb{R},$$

   όπου $a\neq 0$ είναι πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί η λεία συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε η καμπύλη c να είναι επίπεδη.

3. Δίνεται η καμπύλη $c\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με

$$c(t)=\Big(3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3\Big),\quad t\in\mathbb{R}.$$

   Να αποδείξετε ότι είναι καμπύλη σταθεράς κλίσης και να βρεθεί σταθερό διάνυσμα (δηλαδή η διεύθυνσή της) το οποίο σχηματίζει σταθερή γωνία με όλες τις εφαπτόμενες ευθείες της καμπύλης c.

4. Καμπύλη $c(s)$ του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$, με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in \mathbb{R}$, έχει παντού θετική καμπυλότητα και μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα
$$\vec{n}(s) = (\sin s, 0, \cos s)\,.$$
Να αποδειχθεί ότι έχει σταθερή καμπυλότητα και σταθερή στρέψη. Να βρεθεί η καμπύλη c αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι
$$k = \frac{1}{\sqrt{2}},\;\; c(0) = (0,0,0) \;\;\text{και}\;\; \vec{t}(0) = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big).$$

5. Να αποδειχθεί ότι οι καμπύλες $c, \bar{c} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με
$$c(t) = \Big(t + \sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t - \sin t\Big),\;\; t \in \mathbb{R}$$
$$\bar{c}(t) = (2\cos t, 2\sin t, -2t)\,,\;\; t \in \mathbb{R}$$
είναι γεωμετρικώς ισότιμες.

6. Αποδείξτε ότι αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες μιας κανονικής καμπύλης του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η καμπύλη είναι τμήμα ευθείας.

7. Αποδείξτε ότι αν όλα τα κάθετα επίπεδα[2] μιας κανονικής καμπύλης του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα παντού θετική διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η καμπύλη είναι σφαιρική.

8. Αποδείξτε ότι αν όλα τα επίπεδα προσκολλήσεως[3] μιας κανονικής καμπύλης του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα παντού θετική διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η καμπύλη είναι επίπεδη.

---

[2] Το **κάθετο επίπεδο** μιας καμπύλης $c \colon I \to \mathbb{R}^3$ του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$ και καμπυλότητα παντού θετική είναι το επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο $c(s)$ της καμπύλης και είναι κάθετο στο εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{t}(s)$.

[3] Το **επίπεδο προσκολλήσεως** μιας καμπύλης $c \colon I \to \mathbb{R}^3$ του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$ και καμπυλότητα παντού θετική είναι το επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο $c(s)$ της καμπύλης και είναι κάθετο στο δεύτερο κάθετο διάνυσμα $\vec{b}(s)$.

Κεφάλαιο 3

Επιφάνειες

3.1 Κανονικές Επιφάνειες

Εισάγουμε την έννοια της κανονικής επιφάνειας ως ένα σύνολο σημείων του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε να είναι παραμετρημένα τμήματα του επιπέδου κατάλληλα συγκολλημένα, χωρίς αυτοτομές ώστε να μπορούμε να ορίσουμε εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο. Προκύπτει ότι οι επιφάνειες είναι εκείνα τα διδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ επί των οποίων μπορούμε να μεταφέρουμε θεμελιώδεις έννοιες του διαφορικού λογισμού.

Ορισμός 3.1.1. *Ένα μη κενό υποσύνολο $S \subset \mathbb{R}^3$ καλείται* **κανονική επιφάνεια** *αν για κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ με $p \in V$ και απεικόνιση*

$$X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$$

η οποία είναι **επί** *με*

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in U,$$

όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε:

(i) Η απεικόνιση X είναι λεία, δηλαδή υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων συντεταγμένων της $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ έως κάποιας τάξης[1] *και είναι συνεχείς στο U.*

(ii) Η απεικόνιση

$$X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$$

είναι **ομοιομορφισμός** *(δηλαδή αντιστρέφεται και η αντίστροφή της $X^{-1}\colon V \cap S \to U$ είναι συνεχής).*

(iii) Για κάθε $q \in U$ το διαφορικό $dX_q\colon T_q\mathbb{R}^2 \to T_{X(q)}\mathbb{R}^3$ είναι 1-1.

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο $T_p\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ με αφετηρία το σημείο p. Το σύνολο αυτό καθίσταται n-διάστατος διανυσματικός χώρος με τη συνήθη πρόσθεση διανυσμάτων και τον συνήθη βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Ο διανυσματικός αυτός χώρος είναι ισόμορφος με τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ μέσω παράλληλης μεταφοράς (βλέπε Παράρτημα).

Κάθε απεικόνιση

$$X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$$

με τις ανωτέρω ιδιότητες ονομάζεται **παραμέτρηση** ή **σύστημα συντεταγμένων** της κανονικής επιφάνειας S. Το σύνολο $V \cap S$, το οποίο είναι ανοικτό[2] στην S, καλείται **περιοχή συντεταγμένων**. Οι μεταβλητές (u,v) καλούνται **συντεταγμένες** ή **παράμετροι** του συστήματος συντεταγμένων X. Αν για σημείο $p \in V \cap S$ είναι $p = X(u,v)$, τότε το ζεύγος (u,v) καλούνται **συντεταγμένες του p ως προς το σύστημα συντεταγμένων** X.

Αν $\{e_1, e_2\}$ και $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ είναι οι συνήθεις βάσεις των Ευκλειδείων χώρων $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα, τότε ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης X στο $q = (u,v) \in U$ είναι ο

$$\mathrm{Jac}X(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix}.$$

[1]Συνήθως η κλάση διαφορισιμότητας C^3 είναι αρκετή για τις ανάγκες της θεωρίας μας.

[2]Ένα υποσύνολο A της επιφάνειας S καλείται ανοικτό στην S αν γράφεται ως $A = S \cap V$, όπου V είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$.

Επιπλέον έχουμε ότι

$$dX_q(e_1) = X_u(q) = (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v))\,,$$
$$dX_q(e_2) = X_v(q) = (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v))\,.$$

Επομένως η συνθήκη στον ορισμό της κανονικής επιφάνειας ότι το διαφορικό $dX_q\colon T_q\mathbb{R}^2 \to T_{X(q)}\mathbb{R}^3$ είναι 1-1 είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$\operatorname{rank}(\operatorname{Jac}X(q)) = 2$$

ή ισοδύναμα

$$X_u(q) \times X_v(q) \neq (0,0,0).$$

Από τον Ορισμό 3.1.1 άμεσα προκύπτει ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο κανονικής επιφάνειας S είναι κατά φυσικό τρόπο κανονική επιφάνεια.

Επιπλέον αν $T \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι ισομετρία, τότε και το υποσύνολο $\tilde{S} = T(S)$ του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι επίσης κανονική επιφάνεια. Πράγματι εύκολα διαπιστώνεται ότι αν

$$X\colon U \to V \cap S$$

είναι σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας S, τότε η απεικόνιση

$$\tilde{X} = T \circ X\colon U \to T(V) \cap \tilde{S}$$

είναι σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας $\tilde{S} = T(S)$. Αυτό σημαίνει ότι η γεωμετρική ισοτιμία έχει έννοια μεταξύ κανονικών επιφανειών.

Παραθέτουμε στη συνέχεια παραδείγματα κανονικών επιφανειών.

Παράδειγμα 3.1.1. Δοθείσης τυχούσας λείας συνάρτησης

$$f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$, θεωρούμε το γράφημά της Γ_f ως προς το επίπεδο Oxy, δηλαδή το σύνολο

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in U\}.$$

Το σύνολο Γ_f είναι κανονική επιφάνεια. Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση

$$X\colon U \to \Gamma_f, \quad \text{με} \quad X(u,v) = (u, v, f(u,v)) .$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η απεικόνιση X πληροί τις συνθήκες (i), (ii) και (iii) του Ορισμού 3.1.1, όπου $V = \mathbb{R}^3$. Αξίζει να τονίζουμε ότι αυτή η κανονική επιφάνεια καλύπτεται από ένα μόνο σύστημα συντεταγμένων. Αναλόγως μπορούμε να ορίσουμε γραφήματα ως προς τα επίπεδα Oxz ή Oyz.

Παράδειγμα 3.1.2. Η σφαίρα

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

είναι κανονική επιφάνεια. Αφήνεται ως άσκηση να διαπιστωθεί ότι οι ακόλουθες απεικονίσεις

$$X_i\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V_i \cap \mathbb{S}^2, \;\; i = 1, \dots, 6, \;\; U = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1 \right\}$$

με

$$\begin{aligned}
X_1(u,v) &= \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right), \;\; V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0 \right\},\\
X_2(u,v) &= \left(u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2}\right), \;\; V_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0 \right\},\\
X_3(u,v) &= \left(u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v\right), \;\; V_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0 \right\},\\
X_4(u,v) &= \left(u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v\right), \;\; V_4 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y < 0 \right\},\\
X_5(u,v) &= \left(\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v\right), \;\; V_5 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \right\},\\
X_6(u,v) &= \left(-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v\right), \;\; V_6 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0 \right\}
\end{aligned}$$

πληρούν τις απαιτήσεις του Ορισμού 3.1.1. Επιπλέον

$$X(U_1) \cup \cdots \cup X(U_6) = \mathbb{S}^2.$$

Παράδειγμα 3.1.3. Ένας άλλος τρόπος για να αποδείξουμε ότι η σφαίρα $\mathbb{S}^2$ είναι κανονική επιφάνεια είναι ο ακόλουθος. Θεωρούμε την απεικόνιση $X\colon U \to \mathbb{S}^2 \setminus C$ με

$$X(\varphi,\theta) = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)\,, \quad (\varphi,\theta) \in U = (0,2\pi)\times(0,\pi),$$

όπου C είναι το ημικύκλιο

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : y = 0 \ \text{ και } \ x \geq 0\right\}.$$

Η απεικόνιση X είναι προφανώς λεία και μάλιστα ισχύει

$$\|X_\varphi(\varphi,\theta) \times X_\theta(\varphi,\theta)\|^2 = \sin^2\theta > 0.$$

Επιπλέον η απεικόνιση $X\colon U \to \mathbb{S}^2 \cap V$ είναι ομοιομορφισμός (γιατί;) όπου

$$V = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \ \text{ και } \ x \geq 0\right\}.$$

Οι παράμετροι φ, θ είναι γνωστές ως γεωγραφικό μήκος και γεωγραφικό πλάτος, αντίστοιχα. Στρέφοντας κατάλληλα τη συνήθη βάση του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ μπορούμε να ορίσουμε παρόμοιο σύστημα συντεταγμένων το οποίο να καλύπτει το ημικύκλιο C παραλείποντας όμως κάποιο άλλο ημικύκλιο το οποίο περιέχεται στην περιοχή συντεταγμένων $\mathbb{S}^2 \setminus C$. Κατ΄ αυτόν τον τρόπο η σφαίρα $\mathbb{S}^2$ καλύπτεται από δύο συστήματα συντεταγμένων.

Μια μέθοδος κατασκευής κανονικών επιφανειών δίνεται στο ακόλουθο σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό υποσύνολο U του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ και $a \in f(U)$. Αν το σύνολο $f^{-1}(a)$ δεν περιέχει κρίσιμα[3] σημεία της συνάρτησης f, τότε είναι κανονική επιφάνεια.*

[3]Τα κρίσιμα σημεία μιας λείας συνάρτησης f είναι τα σημεία στα οποία μηδενίζονται και οι τρείς μερικές της παραγώγοι.

Απόδειξη. Θεωρούμε σημείο $p_0 \in f^{-1}(a)$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $f_z(p_0) \neq 0$. Οι περιπτώσεις $f_x(p_0) \neq 0$ ή $f_y(p_0) \neq 0$ αντιμετωπίζονται ανάλογα. Ορίζουμε την απεικόνιση $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ με

$$F(x,y,z) = (x,y,f(x,y,z)).$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης F στο σημείο p_0 είναι

$$\mathrm{Jac}F(p_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(p_0) & f_y(p_0) & f_z(p_0) \end{pmatrix}.$$

Από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης, γνωρίζουμε ότι υπάρχει περιοχή V του σημείου p_0 και περιοχή W του σημείου $F(p_0)$ τέτοιες ώστε ο περιορισμός $F|_V\colon V \to W$ είναι διαφορομορφισμός. Με άλλα λόγια το σύστημα των εξισώσεων

$$x = u, \quad y = v, \quad t = f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in V$$

με αγνώστους x, y, z έχει μοναδική λύση

$$u = x, \quad v = y, \quad z = g(u,v,t), \quad (u,v,t) \in W,$$

όπου g είναι λεία συνάρτηση. Είναι φανερό ότι το σύνολο $f^{-1}(a) \cap V$ είναι γράφημα της διαφορίσιμης συνάρτησης h όπου

$$h(u,v) = g(u,v,a),$$

αφού τα σημεία του σύνολου $f^{-1}(a) \cap V$ είναι της μορφής $(u,v,h(u,v))$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παράδειγμα 3.1.4. Η σφαίρα

$$\mathbb{S}^2_R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}$$

κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $R > 0$ είναι κανονική επιφάνεια. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \;\text{ με }\; f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2,$$

τότε έχουμε ότι $\mathbb{S}^2_R = f^{-1}(0)$. Το μόνο κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f είναι το $(0,0,0)$ το οποίο δεν ανήκει στη σφαίρα $\mathbb{S}^2_R = f^{-1}(0)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.1, η σφαίρα $\mathbb{S}^2_R$ είναι κανονική επιφάνεια.

Παράδειγμα 3.1.5. Ο ορθός κυκλικός κύλινδρος

$$C_r = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\right\}$$

ακτίνας $r > 0$ είναι κανονική επιφάνεια. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ \text{ με } \ f(x,y,z) = x^2 + y^2 - r^2,$$

τότε έχουμε ότι $C_r = f^{-1}(0)$. Το σύνολο των κρίσιμων σημείων της συνάρτησης f είναι ο άξονας Oz του οποίου κανένα σημείο δεν ανήκει στον κύλινδρο $C_r = f^{-1}(0)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.1, ο κύλινδρος C_r είναι κανονική επιφάνεια.

Παράδειγμα 3.1.6. Το δίχωνο υπερβολοειδές

$$\Sigma_r = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = r^2\right\},$$

όπου $r > 0$, είναι κανονική επιφάνεια. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ \text{ με } \ f(x,y,z) = -x^2 - y^2 + z^2 - r^2,$$

τότε έχουμε ότι $\Sigma_r = f^{-1}(0)$. Το μόνο κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f είναι το $(0,0,0)$ το οποίο δεν ανήκει στο σύνολο $\Sigma_r = f^{-1}(0)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.1, το δίχωνο υπερβολοειδές Σ_r είναι κανονική επιφάνεια.

Από τα ανωτέρω παραδείγματα, μόνο στο Παράδειγμα 3.1.6 η κανονική επιφάνεια που λαμβάνουμε δεν είναι τροχιακά συνεκτική. Πράγματι, αν το δίχωνο υπερβολοειδές Σ_r ήταν τροχιακά συνεκτικό, τότε για σημεία $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma_r$ με $z_0 < 0$ και $p_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \Sigma_r$ με $z_1 > 0$ θα υπήρχε συνεχής καμπύλη

$$c\colon [0,1] \to \Sigma_r \ \text{ με } \ c(0) = p_1 \ \text{ και } \ c(1) = p_2.$$

Αν θέσουμε

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

τότε από το Θεώρημα Bolzano θα υπήρχε $t_0 \in (0,1)$ με $z(t_0) = 0$, πράγμα αδύνατο.

Σημειώνουμε ότι κάθε τροχιακά συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι και συνεκτικό. Το αντίστροφο δεν είναι αληθές εν γένει. Αναφέρουμε όμως ότι για κανονικές επιφάνειες, οι έννοιες συνεκτικότητα και τροχιακή συνεκτικότητα είναι ισοδύναμες. Πράγματι, ισχύει η ακόλουθη πρόταση την οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 3.1.2. *Μια κανονική επιφάνεια S είναι συνεκτική αν και μόνο αν είναι τροχιακά συνεκτική.*

Από εδώ και στο εξής θα υποθέτουμε ότι **κάθε κανονική επιφάνεια είναι συνεκτική**, αφού διαφορετικά εξετάζουμε την κάθε συνεκτική συνιστώσα ως μια ξεχωριστή επιφάνεια.

Πρόταση 3.1.3. *Για κάθε σημείο p κανονικής επιφάνειας S υπάρχει περιοχή V του σημείου p στην S η οποία είναι γράφημα ως προς ένα από τα τρία επίπεδα Oxy, Oxz ή Oyz.*

Απόδειξη. Προκύπτει από το λήμμα που ακολουθεί. □

Λήμμα 3.1.4. *Έστω σημείο p_0 κανονικής επιφάνειας S και απεικόνιση*

$$X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \ \text{ με } \ p_0 = X(q_0) \in X(U)$$

η οποία πληροί τις ιδιότητες (i) και (iii) του Ορισμού 3.1.1.

(i) Τότε υπάρχει περιοχή $U_0 \subseteq U$ του σημείου p_0 και ανοικτό υποσύνολο W του $\mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε η απεικόνιση

$$\pi \circ X|_{U_0}\colon U_0 \to W$$

να είναι διαφορομορφισμός, όπου $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ είναι μία από τις τρείς προβολές[4] του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^2$.

(ii) Αν επιπλέον η απεικόνιση X είναι 1-1, τότε η αντίστροφή της X^{-1} είναι συνεχής.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι για την απεικόνιση

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

[4]Δηλαδή μία από τις απεικονίσεις $\pi_i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, i = 1,2,3$, με $\pi_1(x,y,z) = (x,y)$, $\pi_2(x,y,z) = (x,z)$ και $\pi_3(x,y,z) = (y,z)$.

ισχύει
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q_0) \neq 0.$$

Τότε η απεικόνιση $\pi_1 \circ X\colon U \to \mathbb{R}^2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Αντίστροφης Απεικόνισης και από αυτό προκύπτει το σκέλος (i). Το σκέλος (ii) προκύπτει παρατηρώντας ότι

$$(X|_{U_0})^{-1} = (\pi_1 \circ X|_{U_0})^{-1} \circ \pi_1$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πρόταση 3.1.5. *Έστω κανονική επιφάνειας S και*

$$X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S, \quad \tilde{X}\colon \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$$

δύο συστήματα συντεταγμένων αυτής με $W := X(U) \cap \tilde{X}(\tilde{U}) \neq \emptyset$. Τότε η απεικόνιση

$$\tilde{X}^{-1} \circ X\colon X^{-1}(W) \to \tilde{X}^{-1}(W)$$

είναι διαφορομορφισμός.

Απόδειξη. Κάνοντας χρήση του Λήμματος 3.1.4, έχουμε ότι σε κατάλληλη περιοχή η απεικόνιση $\pi \circ X$ είναι διαφορομορφισμός, όπου $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ είναι μία από τις τρείς προβολές του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}^2$. Τότε σε αυτή την περιοχή είναι

$$\tilde{X}^{-1} \circ X = (\pi \circ \tilde{X})^{-1} \circ (\pi \circ X).$$

Από τη τελευταία ισότητα έπεται ότι η απεικόνιση $\tilde{X}^{-1} \circ X$ είναι διαφορίσιμη. Ομοίως προκύπτει ότι η απεικόνιση $X^{-1} \circ \tilde{X}$ είναι διαφορίσιμη, δηλαδή η απεικόνιση $\tilde{X}^{-1} \circ X$ είναι διαφορομορφισμός. □

3.2 Διαφορίσιμες απεικονίσεις

Ορισμός 3.2.1. *Έστω S κανονική επιφάνεια και V ανοικτό υποσύνολο της S.*

(i) Μια συνάρτηση $f\colon V \to \mathbb{R}$ *καλείται* **διαφορίσιμη στο σημείο** $p \in V$ *αν για κάποιο σύστημα συντεταγμένων*

$$X\colon U \to S \quad \mu\varepsilon \quad p \in X(U) \subseteq V,$$

η συνάρτηση $f \circ X\colon U \to \mathbb{R}$ *είναι διαφορίσιμη στο σημείο* $X^{-1}(p)$. *Η συνάρτηση* f *καλείται* **διαφορίσιμη στο** V *αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου* V.

(ii) Μια απεικόνιση

$$F\colon V \subseteq S \to \mathbb{R}^3 \quad \mu\varepsilon \;\; F = (f_1, f_2, f_3)$$

καλείται διαφορίσιμη αν κάθε μία από τις συναρτήσεις συντεταγμένων της $f_i\colon V \to \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$, *είναι διαφορίσιμη συνάρτηση.*

Ας σημειωθεί ότι ο ανωτέρω ορισμός είναι καλός δηλαδή ανεξάρτητος της επιλογής του συστήματος συντεταγμένων. Πράγματι, αν $\tilde{X}\colon U \to S$ είναι άλλο ένα σύστημα συντεταγμένων με $p \in \tilde{X}(U) \subseteq V$, τότε λόγω της Πρότασης 3.1.5, η συνάρτηση

$$f \circ \tilde{X} = (f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \tilde{X})$$

είναι διαφορίσιμη ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων.

Παρατήρηση 3.2.1. Έστω $f\colon W \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση, όπου W είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$. Αν S είναι κανονική επιφάνεια και ισχύει $S \subset W$, τότε ο περιορισμός $f|_S\colon S \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση.

Ορισμός 3.2.2. *Έστω* $S, \tilde{S}$ *κανονικές επιφάνειες και* V *ανοικτό υποσύνολο της* S.

(i) Μια συνεχής απεικόνιση $F\colon V \subseteq S \to \tilde{S}$ *καλείται* **διαφορίσιμη στο σημείο** $p \in V$ *αν για συστήματα συντεταγμένων*

$$X\colon U \to S \;\; \mu\varepsilon \;\; p \in X(U) \subseteq V \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \tilde{X}\colon \tilde{U} \to \tilde{S} \;\; \mu\varepsilon \;\; F(X(U)) \subseteq \tilde{X}(\tilde{U})$$

η απεικόνιση

$$\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X\colon U \to \mathbb{R}^2$$

είναι διαφορίσιμη στο σημείο $X^{-1}(p)$. *Η απεικόνιση* F *καλείται* **διαφορίσιμη στο** V *αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου* V.

(ii) Η απεικόνιση F καλείται **διαφορομορφισμός** *αν είναι διαφορίσιμη, 1-1, επί και η αντίστροφή της F^{-1} είναι διαφορίσιμη.*

Ο ανωτέρω ορισμός είναι καλός δηλαδή ανεξάρτητος της επιλογής του συστήματος συντεταγμένων. Πράγματι, αν

$$X_1\colon U_1 \to S \ \text{ και } \ \tilde{X}_1\colon \tilde{U}_1 \to \tilde{S}$$

είναι συστήματα συντεταγμένων των επιφανειών S και $\tilde{S}$ αντίστοιχα με

$$p \in X_1(U_1) \subseteq V \ \text{ και } \ f(X_1(U_1)) \subseteq \tilde{X}_1(\tilde{U}_1),$$

τότε λόγω της Πρότασης 3.1.5, η απεικόνιση

$$\tilde{X}_1^{-1} \circ F \circ X_1 = (\tilde{X}_1^{-1} \circ \tilde{X}) \circ (\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X) \circ (X^{-1} \circ X_1)$$

είναι διαφορίσιμη ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων.

Εύκολα διαπιστώνεται ότι αν

$$F\colon S_1 \to S_2 \ \text{ και } \ G\colon S_2 \to S_3$$

είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ των κανονικών επιφανειών S_1, S_2 και S_3, τότε η σύνθεση

$$G \circ F\colon S_1 \to S_3$$

είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

Είναι φανερό ότι κάθε διαφορομορφισμός μεταξύ κανονικών επιφανειών είναι και ομοιομορφισμός.

Παρατήρηση 3.2.2. Η Πρόταση 3.1.5 δείχνει τώρα ότι αν $X\colon U \to V \cap S$ είναι σύστημα συντεταγμένων μια κανονικής επιφάνειας S, τότε η απεικόνιση X είναι διαφορομορφισμός ως απεικόνιση μεταξύ των κανονικών επιφανειών U και $V \cap S$.

Παρατήρηση 3.2.3. Έστω $F\colon W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ λεία απεικόνιση, όπου W είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$. Αν S και $\tilde{S}$ είναι κανονικές επιφάνειες τέτοιες ώστε $S \subset W$ και $F(S) \subseteq \tilde{S}$, τότε ο περιορισμός $F|_S\colon S \to \tilde{S}$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

3.3 Εφαπτόμενα διανύσματα και Εφαπτόμενο επίπεδο

Ορισμός 3.3.1. *Έστω S κανονική επιφάνεια και σημείο $p \in S$. Ένα διάνυσμα $w \in T_p\mathbb{R}^3$ καλείται* **εφαπτόμενο διάνυσμα** *της κανονικής επιφάνειας S στο σημείο της p αν υπάρχει λεία καμπύλη $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, όπου $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε*

$$c(0) = p \ \text{ και } \ c'(0) = w.$$

Το σύνολο των εφαπτομένων διανυσμάτων της επιφάνειας S στο σημείο της p συμβολίζεται με T_pS. Προφανώς είναι

$$T_pS \subset T_p\mathbb{R}^3,$$

όπου $T_p\mathbb{R}^3$ είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα διανύσματα του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ με αφετηρία το σημείο p. Το σύνολο $T_p\mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 3 με πράξεις τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης διανυσμάτων και βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει πληροφορίες για τη δομή του συνόλου T_pS.

Πρόταση 3.3.1. *Έστω S κανονική επιφάνεια και σημείο της p. Αν $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ είναι σύστημα συντεταγμένων με $p = X(q) \in X(U)$, τότε ισχύει*

$$T_pS = dX_q(T_q\mathbb{R}^2).$$

Απόδειξη. Έστω $w \in T_pS$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.3.1 υπάρχει καμπύλη $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X(U)$, όπου $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε

$$c(0) = p \ \text{ και } \ c'(0) = w.$$

Θεωρούμε την καμπύλη $\beta = X^{-1} \circ c$ της οποίας η είκονα περιέχεται στο σύνολο U. Λόγω της Παρατήρησης 3.2.2 η καμπύλη β είναι λεία. Τότε είναι

$$w = c'(0) = (X \circ \beta)'(0) = dX_q\left(\beta'(0)\right),$$

και επομένως είναι $T_pS \subseteq dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$.

Αντίστροφα, έστω $w = dX_q(w_0) \in dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$. Θεωρούμε καμπύλη $\beta\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, όπου $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε

$$\beta(0) = X^{-1}(p) \;\; \text{και} \;\; \beta'(0) = w_0.$$

Τότε η καμπύλη $c = X \circ \beta\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X(U)$ πληροί

$$c(0) = p \;\; \text{και} \;\; c'(0) = (X \circ \beta)'(0) = dX_q(w_0).$$

Άρα είναι $dX_q(T_q\mathbb{R}^2) \subseteq T_pS$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Η Πρόταση 3.3.1 καθώς και το σκέλος (iii) του Ορισμού 3.1.1 δείχνει ότι το σύνολο T_pS είναι διδιάστατος διανυσματικός υπόχωρος του 3-διάστατου διανυσματικού χώρου $T_p\mathbb{R}^3$. Από εδώ και στο εξής, το σύνολο T_pS ονομάζεται **εφαπτόμενο επίπεδο της** κανονικής επιφάνειας S στο σημείο της p.

Είναι προφανές ότι τα διανύσματα $X_u(q), X_v(q)$ ανήκουν στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pS, αφού είναι αντίστοιχα τα διανύσματα ταχύτητας των επιφανειακών καμπύλων c_1 και c_2 με

$$c_1(t) = X(t, v_0), \quad c_2(t) = X(u_0, t), \quad q = (u_0, v_0).$$

Οι καμπύλες αυτές καλούνται **παραμετρικές καμπύλες** $v = v_0$ και $u = u_0$, αντίστοιχα, ως προς το σύστημα συντεταγμένων

$$X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S.$$

Λόγω του σκέλους (iii) του Ορισμού 3.1.1, τα διανύσματα $X_u(q), X_v(q)$ είναι βάση του εφαπτομένου επιπέδου T_pS.

Στην απόδειξη της Πρότασης 3.3.1 θέτοντας

$$\beta(t) = (u(t), v(t)),$$

έχουμε ότι

$$c(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Με τη βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας βρίσκουμε ότι

$$w = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q).$$

Επομένως οι συντεταγμένες του εφαπτόμενου διανύσματος w ως προς τη βάση $X_u(q), X_v(q)$ του εφαπτομένου επιπέδου T_pS είναι οι αριθμοί $u'(0), v'(0)$.

3.4 Διαφορικό απεικόνισεων μεταξύ κανονικών επιφανειών

Ορισμός 3.4.1. *Έστω $F\colon S \to \tilde{S}$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των κανονικών επιφανειών $S, \tilde{S}$ και $p \in S$. Ονομάζουμε* **διαφορικό** *της F στο σημείο p την απεικόνιση*

$$dF_p\colon T_pS \to T_{F(p)}\tilde{S}$$

με

$$dF_p(w) = (F \circ c)'(0)$$

όπου $w \in T_pS$ και $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S, \varepsilon > 0$, είναι καμπύλη της S με

$$c(0) = p \text{ και } c'(0) = w.$$

Είναι ο ανωτέρω ορισμός καλός, δηλαδή ανεξάρτητος της επιλογής της επιφανειακής καμπύλης c; Για να το εξετάσουμε, θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων

$$X\colon U \to S \text{ με } p \in X(U)$$

και παραμέτρους (u, v). Θεωρούμε επιπλέον σύστημα συντεταγμένων

$$\tilde{X}\colon \tilde{U} \to \tilde{S}$$

με παραμέτρους $(\tilde{u}, \tilde{v})$ τέτοιο ώστε $F(X(U)) \subseteq \tilde{X}(\tilde{U})$. Η απεικόνιση

$$\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X\colon U \to \mathbb{R}^2$$

είναι διαφορίσιμη με

$$\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)).$$

Για τις καμπύλες c και $\tilde{c} = F \circ c$ είναι

$$c(t) = X(u(t), v(t)) \text{ και } \tilde{c}(t) = \tilde{X}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)).$$

Επειδή

$$\tilde{c}(t) = F \circ c(t) = F \circ X(u(t), v(t)),$$

βρίσκουμε ότι

$$(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = \tilde{X}^{-1} \circ F \circ X\,(u(t), v(t)) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))\,.$$

Συνεπώς, με χρήση του κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{u}'(0) &= u'(0)\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\,(u(0), v(0)) + v'(0)\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\,(u(0), v(0)) \\ \tilde{v}'(0) &= u'(0)\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\,(u(0), v(0)) + v'(0)\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\,(u(0), v(0))\,. \end{aligned}$$

Επειδή τα διανύσματα ταχύτητας των c και $\tilde{c}$ είναι αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \tilde{c}'(0) &= \tilde{u}'(0)\tilde{X}_{\tilde{u}}\,(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) + \tilde{v}'(0)\tilde{X}_{\tilde{v}}\,(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) \\ c'(0) &= u'(0)X_u\,(u(0), v(0)) + v'(0)X_v\,(u(0), v(0))\,, \end{aligned}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \tilde{c}'(0) = &\left(u'(0)\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\,(u(0), v(0)) + v'(0)\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\,(u(0), v(0))\right)\tilde{X}_{\tilde{u}}\,(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) \\ &+ \left(u'(0)\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\,(u(0), v(0)) + v'(0)\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\,(u(0), v(0))\right)\tilde{X}_{\tilde{v}}\,(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0))\,. \end{aligned}$$

Αυτό δηλώνει ότι το διάνυσμα $(F \circ c)'(0)$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής της επιφανειακής καμπύλης c και επιπλέον εξαρτάται γραμμικά από τις συντεταγμένες $(u'(0), v'(0))$ του διανύσματος ταχύτητας $c'(0)$ ως προς τη βάση X_u, X_v του εφαπτομένου χώρου. Αποδείξαμε επομένως την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.4.1. *Έστω $F\colon S \to \tilde{S}$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των κανονικών επιφανειών $S, \tilde{S}$. Για κάθε σημείο $p \in S$, το διαφορικό $dF_p\colon T_pS \to T_{F(p)}\tilde{S}$ είναι γραμμική απεικόνιση.*

Σημειώνουμε ότι ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας για διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ κανονικών επιφανειών. Πράγματι, εύκολα διαπιστώνεται ότι αν

$$F\colon S_1 \to S_2 \;\text{ και }\; G\colon S_2 \to S_3$$

είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ των κανονικών επιφανειών S_1, S_2 και S_3, τότε η σύνθεση

$$G \circ F \colon S_1 \to S_3$$

είναι διαφορίσιμη και για κάθε σημείο $p \in S_1$ ισχύει

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p.$$

Το διαφορικό διαφορίσιμων συναρτήσεων επί κανονικών επιφανειών ορίζεται ανάλογα.

Ορισμός 3.4.2. *Έστω $f \colon S \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση και p σημείο της κανονικής επιφάνειας S. Ονομάζουμε* **διαφορικό** *της συνάρτησης f σημείο p την απεικόνιση*

$$df_p \colon T_pS \to T_{f(p)}\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$$

με

$$df_p(w) = (f \circ c)'(0)$$

όπου $w \in T_pS$ και $c \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S, \varepsilon > 0$, είναι καμπύλη της S με

$$c(0) = p \text{ και } c'(0) = w.$$

Προκύπτει εύκολα ότι το διαφορικό $df_p \colon T_pS \to \mathbb{R}$ είναι καλά ορισμένο και γραμμική απεικόνιση.

Παράδειγμα 3.4.1. Για κάθε κανονική επιφάνεια S και διάνυσμα $e \in \mathbb{R}^3$, θεωρούμε τη **συνάρτηση ύψους** $h \colon S \to \mathbb{R}$ ως προς το e με

$$h(p) = \langle p, e \rangle, \quad p \in S.$$

Η συνάρτηση h είναι διαφορίσιμη αφού για κάθε σύστημα συντεταγμένων $X \colon U \to S$ η σύνθεση $h \circ X = \langle X, e \rangle$ είναι προφανώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Το διαφορικό της στο τυχόν σημείο $p \in S$ και για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_pS$ είναι

$$dh_p(w) = (h \circ c)'(0),$$

όπου $c\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to S, \varepsilon > 0$, είναι καμπύλη της S με

$$c(0) = p \text{ και } c'(0) = w.$$

Επομένως βρίσκουμε ότι

$$dh_p(w) = \langle c'(0), e\rangle$$

ή ισοδύναμα

$$dh_p(w) = \langle w, e\rangle.$$

Θα χρειαστούμε στη συνέχεια την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.4.2. *Έστω S συνεκτική κανονική επιφάνεια και $f\colon S \to \mathbb{R}$ είναι λεία συνάρτηση. Αν ισχύει*

$$df_p = 0 \text{ για κάθε } p \in S,$$

τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Απόδειξη. Έστω $X\colon U \to S$ σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας με παραμέτρους $(u,v) \in U$, όπου U είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$. Από την υπόθεση έχουμε

$$(f\circ X)_v(u,v) = (f\circ X)_u(u,v) = 0 \text{ για κάθε } (u,v) \in U.$$

Επειδή το σύνολο U είναι συνεκτικό, συνάγουμε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στην περιοχή συντεταγμένων $X(U)$. Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι κάθε σημείο της επιφάνειας S έχει περιοχή στην S επί της οποίας η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Θα δείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή σε ολόκληρη την S. Θεωρούμε τυχόντα σημεία $p, q \in S$. Λόγω της Πρότασης 3.1.2, υπάρχει συνεχής καμπύλη $c\colon [0,1] \to S$ τέτοια ώστε $c(0) = p$ και $c(1) = q$. Για κάθε $t \in [0,1]$ υπάρχει ανοικτή περιοχή V_t του σημείου $c(t)$ στην επιφάνεια S επί της οποίας η συνάρτηση f είναι σταθερή με τιμή $a_t = f|_{V_t}$. Προφανώς ισχύει

$$c([0,1]) \subseteq \cup_{t\in[0,1]} V_t.$$

Επειδή το σύνολο $c([0,1])$ είναι συμπαγές ως εικόνα συμπαγούς συνόλου μέσω της συνεχούς καμπύλης c, έχουμε ότι

$$c([0,1]) \subseteq V_{t_0} \cup \cdots \cup V_{t_m}$$

για κάποιους αριθμούς $t_0, \ldots, t_m \in [0,1]$ με $t_0 = 0$ και $t_m = 1$. Τότε, επειδή είναι

$$V_{t_i} \cap V_{t_{i+1}} \neq \emptyset, \quad i = 0, \ldots, m-1,$$

λαμβάνουμε

$$f(p) = a_{t_0} = \cdots = a_{t_m} = f(q).$$

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι σταθερή. □

Μπορούμε να ορίσουμε διαφορικό για κάθε λεία απεικόνιση

$$F\colon V \subseteq S \to \mathbb{R}^3 \quad \text{με} \quad F = (f, g, h)$$

σε κάθε σημείο $p \in S$. Πράγματι το διαφορικό της απεικόνισης F στο σημείο $p \in S$ ορίζεται να είναι η γραμμική απεικόνιση

$$dF_p\colon T_pS \to T_p\mathbb{R}^3$$

με

$$dF_p = (df_p, dg_p, dh_p),$$

όπου

$$df_p, dg_p, dh_p\colon T_pS \to \mathbb{R}$$

είναι τα διαφορικά των συναρτήσεων συντεταγμένων f, g, h της απεικόνισης F.

Άμμεση συνέπεια της Πρότασης 3.4.2 είναι το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πόρισμα 3.4.3. *Έστω S συνεκτική κανονική επιφάνεια και $F\colon S \to \mathbb{R}^3$ είναι λεία απεικόνιση. Αν ισχύει*

$$dF_p = 0 \ \text{ για κάθε } \ p \in S,$$

τότε η απεικόνιση F είναι σταθερή.

Το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης επεκτείνεται ως ακολούθως και για διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ επιφανειών.

Θεώρημα 3.4.4. *Έστω $F\colon S \to \tilde{S}$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των κανονικών επιφανειών $S, \tilde{S}$, τέτοια ώστε για σημείο $p \in S$ το διαφορικό της*

$$dF_p\colon T_pS \to T_{F(p)}\tilde{S}$$

είναι ισομορφισμός. Τότε υπάρχει περιοχή V του σημείου p στην S και περιοχή W του σημείου $F(p)$ στην $\tilde{S}$ τέτοιες ώστε ο περιορισμός $F|_V\colon V \to W$ να αντιστρέφεται και η αντίστροφή της $(F|_V)^{-1}\colon W \to V$ να είναι διαφορίσιμη απεικόνιση, δηλαδή η $F|_V\colon V \to W$ είναι διαφοραμορφισμός.

3.5 Κανονικές Παραμετρικές Επιφάνειες

Ορίσαμε τις κανονικές επιφάνειες ως σύνολα σημείων του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$. Συχνά είναι χρήσιμο να ορίσουμε, κατ΄ αναλογία με τις καμπύλες, τις κανονικές παραμετρικές επιφάνειες. Ο ορισμός αυτός είναι χρήσιμος κυρίως για την τοπική θεωρία.

Ορισμός 3.5.1. *Μια* **παραμετρική επιφάνεια** *είναι κάθε λεία απεικόνιση*

$$X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ \ \text{με} \ \ X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in U,$$

όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Η απεικόνιση X καλείται **κανονική παραμετρική επιφάνεια** *αν επιπλέον ισχύει*

$$X_u(u,v) \times X_v(u,v) \neq (0,0,0) \ \ \text{για κάθε} \ \ (u,v) \in U.$$

Η ακόλουθη πρόταση συσχετίζει τις κανονικές επιφάνειες με τις κανονικές παραμετρικές επιφάνειες. Ουσιαστικά μας επιτρέπει όλες οι έννοιες που έχουν οριστεί ή θα ορισθούν στη συνέχεια για κανονικές επιφάνειες να μπορούν, για τους σκοπούς της τοπικής θεωρίας, να εισαχθούν και για τις κανονικές παραμετρικές επιφάνειες.

Πρόταση 3.5.1. *Έστω $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ κανονική παραμετρική επιφάνεια. Για κάθε σημείο $q \in U$ υπάρχει περιοχή $U_0 \subseteq U$ του q τέτοια ώστε το σύνολο $X(U_0)$ να είναι κανονική επιφάνεια.*

Απόδειξη. Επειδή είναι

$$X_u(q) \times X_v(q) = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(q), -\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}(q), \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \right) \neq (0,0,0),$$

για κάθε $q \in U$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0.$$

Τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης για την απεικόνιση

$$\phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

προκύπτει ότι κοντά στο σημείο q το σύστημα

$$x = x(u,v), \quad y = (u,v)$$

με αγνώστους (u,v) έχει μοναδική και λεία λύση

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y).$$

Συνεπώς για (u,v) κοντά στο σημείο q έχουμε

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (x, y, f(x,y)),$$

όπου f είναι η λεία συνάρτηση με

$$f(x,y) = z\left(u(x,y), v(x,y)\right).$$

Τούτο σημαίνει ότι είναι γράφημα ως προς το επίπεδο Oxy. □

Η παραμετρική επιφάνεια

$$X \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

καλείται **γεωμετρικώς ισότιμη** της παραμετρικής επιφάνειας

$$\tilde{X} \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

αν και μόνο αν υπάρχει ισομετρία $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ τέτοια ώστε $\tilde{X} = T \circ X$.

Είναι φανερό (γιατί;) πως αν η παραμετρική επιφάνεια X είναι κανονική, τότε και κάθε άλλη παραμετρική επιφάνεια γεωμετρικώς ισότιμη προς την X είναι επίσης κανονική.

Παράδειγμα 3.5.1 (Εκ περιστροφής επιφάνειες). Έστω $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με

$$c(t) = (f(t), 0, g(t)), \quad t \in I,$$

τέτοια ώστε $f(t) > 0$ για κάθε $t \in I$. Η παραμετρική επιφάνεια

$$X\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

με

$$X(t,\theta) = (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t))$$

είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια. Πρόκειται για την εκ περιστροφής επιφάνεια που παράγεται από περιστροφή της καμπύλης c γύρω από τον άξονα Oz.

Οι παραμετρικές καμπύλες $X(t, \theta = \theta_0)$ ονομάζονται **μεσημβρινοί**, ενώ οι παραμετρικές καμπύλες $X(t = t_0, \theta)$ είναι κύκλοι που περιέχονται σε επίπεδα κάθετα στον άξονα Oz και ονομάζονται **παράλληλοι**.

3.6 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ το σύνολο

   $$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = r^2\right\}$$

   είναι κανονική επιφάνεια. Βρείτε ένα σύστημα συντεταγμένων γύρω από κάθε σημείο της.

2. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία και τις κρίσιμες τιμές της συνάρτησης $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με

   $$f(x,y,z) = (x+y+z-1)^2.$$

   Για ποιές τιμές της σταθεράς $a \in \mathbb{R}$ είναι το σύνολο $f^{-1}(a)$ κανονική επιφάνεια; Να εξετάστε τα ίδια ερωτήματα στην περίπτωση όπου $f(x,y,z) = x^2yz$.

3. Αποδείξτε ότι το ελλειψοειδές

   $$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

είναι κανονική επιφάνεια, όπου a, b, c είναι θετικοί αριθμοί. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $X\colon (0,\pi)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ με

$$X(u,v) = (a\sin u\cos v, b\sin u\sin v, c\cos u), \quad (u,v)\in(0,\pi)\times(0,2\pi)$$

είναι σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας S. Περιγράψτε γεωμετρικά τις παραμετρικές καμπύλες $X(u=u_0, v)$.

4. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\right\}$$

είναι κανονική επιφάνεια και βρείτε ένα σύστημα συντεταγμένων της.

5. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2\right\}$$

δεν είναι κανονική επιφάνεια.

6. Είναι η απεικόνιση $X\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ με

$$X(u,v) = (v\sin u, v\cos u, u), \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

κανονική παραμετρική επιφάνεια;

7. Έστω καμπύλη $c\colon I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s\in I$, καμπυλότητα $k(s)>0$ για κάθε $s\in I$ και κύριο κάθετο $\vec{n}(s)$. Θεωρούμε την απεικόνιση $X\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με

$$X(s,v) = c(s) + v\vec{n}(s), \quad (s,v)\in I\times\mathbb{R}.$$

Είναι η απεικόνιση X κανονική παραμετρική επιφάνεια;

8. Αποδείξτε ότι όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα της επιφάνειας με εξίσωση

$$z = xf(y/x), x\neq 0,$$

όπου f είναι λεία συνάρτηση, διέρχονται από το σημείο $O=(0,0,0)$.

9. Έστω καμπύλη $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$, καμπυλότητα k με $0 < k(s) < 1/r$ για κάθε $s \in I$ και πλαίσιο Frenet $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $X\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$X(s,v) = c(s) + r\Big(\cos v\, \vec{n}(s) + \sin v\, \vec{b}(s)\Big), \quad (s,v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι η απεικόνιση X είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια.

Κεφάλαιο 4

Πρώτη θεμελιώδης μορφή

Είναι γνωστό ότι το κατάλληλο εργαλείο για γεωμετρικές μετρήσεις στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$, όπως μέτρηση μήκους διανυσμάτων, γωνίας διανυσμάτων, εμβαδού, όγκου κ.ο.κ., δεν είναι άλλο παρά το εσωτερικό γινόμενο. Στόχος μας είναι να δούμε πώς μπορούμε να κάνουμε γεωμετρικές μετρήσεις πάνω σε τυχούσα κανονική επιφάνεια.

4.1 Πρώτη θεμελιώδης μορφή κανονικής επιφάνειας

Έστω S κανονική επιφάνεια του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$. Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$

με

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

όπου

$$x=(x_1,x_2,x_3)\ \text{ και }\ y=(y_1,y_2,y_3).$$

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε σημείο $p\in S$ έχουμε το εφαπτόμενο επίπεδο T_pS το οποίο είναι ένας διδιάστατος υπόχωρος του 3-διάστατου διανυσματικού χώρου $T_p\mathbb{R}^3$. Ο περιορισμός του συνήθους εσωτερικού γινομένου του διανυσματικού χώρου $T_p\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3$ στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pS ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του διανυσματικού χώρου T_pS το οποίο συμβολίζεται με

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_p\colon T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}, \ \ (w_1, w_2) \mapsto \langle w_1, w_2\rangle_p, \ w_1, w_2 \in T_pS.$$

Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή αυτού του εσωτερικού γινομένου είναι η πρώτη θεμελιώδης μορφή της κανονικής επιφάνειας S στο σημείο της p.

Ορισμός 4.1.1. *Έστω S κανονική επιφάνεια. Η* **πρώτη θεμελιώδης μορφή** I_p **της επιφάνειας** S **στο σημείο της** p *είναι η τετραγωνική μορφή*

$$I_p\colon T_pS \to \mathbb{R} \ \ \textit{με} \ \ I_p(w) = \|w\|^2 = \langle w, w\rangle_p \ \ \textit{και} \ \ w \in T_pS.$$

Είναι φανερό ότι η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι θετικά οριστική αφού

$$I_p(w) \geq 0 \ \ \text{για κάθε} \ \ w \in T_pS$$

και ισχύει

$$I_p(w) = 0 \ \ \text{αν και μόνο αν} \ \ w = 0.$$

Λόγω της ταυτότητας

$$\|w_1 + w_2\|^2 = \|w_1\|^2 + 2\langle w_1, w_2\rangle_p + \|w_2\|^2$$

έχουμε ότι

$$\langle w_1, w_2\rangle_p = \frac{1}{2}\left(I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2)\right) \tag{4.1}$$

για κάθε $w_1, w_2 \in T_pS$.

Αυτό σημαίνει ότι η πρώτη θεμελιώδης μορφή I_p στο σημείο $p \in S$ καθορίζει το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pS. Χάριν συντομίας και αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, συχνά παραλείπουμε το δείκτη p.

Έστω κανονική επιφάνεια S και $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U$ με $p \in X(U)$. Θεωρούμε εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_pS$ και καμπύλη

$$c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X(U) \ \ \text{με} \ \ c(0) = p \ \ \text{και} \ \ c'(0) = w.$$

Γράφοντας

$$c(t) = X\left(u(t), v(t)\right),$$

έχουμε βάσει του κανόνα της αλυσίδας ότι

$$w = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q), \quad q = X^{-1}(p).$$

Επομένως λαμβάνουμε

$$I_p(w) = E(q)(u'(0))^2 + 2F(q)u'(0)v'(0) + G(q)(v'(0))^2, \tag{4.2}$$

όπου $E, F, G\colon U \to \mathbb{R}$ είναι οι λείες συναρτήσεις

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι γνωστές ως **θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης** της επιφάνειας S ως προς το σύστημα συνταταγμένων $X\colon U \to \mathbb{R}^3$.

Έτσι το μήκος του εφαπτομένου διανύσματος

$$w = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q), \quad q = X^{-1}(p).$$

είναι

$$\|w\| = \sqrt{I_p(w)} = \sqrt{E(q)(u'(0))^2 + 2F(q)u'(0)v'(0) + G(q)(v'(0))^2}.$$

Ο πίνακας της πρώτης θεμελιώδους μορφής ως τετραγωνικής μορφής ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ του εφαπτομένου επιπέδου σε κάθε σημείο της περιοχής συντεταγμένων $X(U)$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι γνωστή αν είναι γνωστά τα θεμελιώδη της ποσά πρώτης τάξης.

Επειδή η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι θετικά οριστική, έχουμε ότι

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 > 0.$$

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να προκύψει ως συνέπεια του σκέλους (iii) του Ορισμού 3.1.1 και της ταυτότητας του Lagrange

$$\|X_u \times X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2$$

ή ισοδύναμα

$$\|X_u \times X_v\|^2 = EG - F^2. \tag{4.3}$$

Η γωνία θ δύο μη μηδενικών εφαπτομένων διανυσμάτων $w_1, w_2 \in T_pS$ δίνεται από την ισότητα

$$\cos\theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle_p}{\sqrt{I_p(w_1)}\,\sqrt{I_p(w_2)}}.$$

Αν

$$w_1 = a_1 X_u + a_2 X_v \quad \text{και} \quad w_2 = b_1 X_u + b_2 X_v,$$

τότε η γωνία τους πληροί

$$\cos\theta = \frac{a_1 b_1 E + (a_1 b_2 + a_2 b_1) F + a_2 b_2 G}{\sqrt{E a_1^2 + 2F a_1 a_2 + G a_2^2}\,\sqrt{E b_1^2 + 2F b_1 b_2 + G b_2^2}}.$$

Η γωνία δύο τεμνομένων κανονικών επιφανειακών καμπυλών της κανονικής επιφάνειας S ορίζεται και υπολογίζεται ως ανωτέρω ως η γωνία των διανυσμάτων ταχύτητάς των στο σημείο τομής. Έτσι για τυχαίο σύστημα συντεταγμένων $X\colon U \to S$, η γωνία των παραμετρικών καμπυλών $X(t, v_0)$ και $X(u_0, t)$ στο σημείο τομής $X(u_0, v_0)$ δίνεται από την ισότητα

$$\cos\theta = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)}\,\sqrt{G(u_0, v_0)}}.$$

Το σύστημα συντεταγμένων X της κανονικής επιφάνειας S καλείται **ορθογώνιο** αν ισχύει $F = 0$, δηλαδή αν οι παραμετρικές του καμπύλες τέμνονται υπό ορθή γωνία.

4.1.1 Μήκος επιφανειακής καμπύλης

Το μήκος επιφανειακής καμπύλης $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to S$ από το a εως το b με $[a,b] \subset I$ είναι ο αριθμός

$$L_a^b(c) = \int_a^b \sqrt{I_{c(t)}(c'(t))}dt.$$

Το μήκος τόξου της καμπύλης c με αφετηρία $t_0 \in I$ είναι η συνάρτηση

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{I_{c(t)}(c'(\sigma))}d\sigma.$$

Αν υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $X\colon U \to S$ τέτοιο ώστε

$$c([a,b]) \subset X(U)$$

και είναι

$$c(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in [a,b],$$

τότε έχουμε

$$L_a^b(c) = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}dt,$$

όπου έχουμε εισάγει χάριν ευκολίας τη συντομογραφία

$$E = E(u(t), v(t)),\ F = F(u(t), v(t)),\ G = G(u(t), v(t)).$$

Το μήκος τόξου της καμπύλης με αφετηρία $t_0 \in [a,b]$ και $t \in [a,b]$ είναι

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}d\sigma.$$

4.1.2 Εμβαδό

Έστω S κανονική επιφάνεια και $R \subseteq S$ χωρίο της, για το οποίο υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $X\colon U \to S$ με παραμέτρους (u,v) τέτοιο ώστε $R \subseteq X(U)$. Ο αριθμός

$$A(R) = \iint_{X^{-1}(R)} \|X_u \times X_v\| dudv$$

ονομάζεται **εμβαδό** του χωρίου R.

Βεβαίως πρέπει να διαπιστωθεί αν ο ορισμός αυτός είναι καλός, δηλαδή ανεξάρτητος της επιλογής του συστήματος συντεταγμένων. Πράγματι έστω ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $\tilde{X}\colon \tilde{U} \to S$ με παραμέτρους $(\tilde{u}, \tilde{v})$ τέτοιο ώστε $R \subseteq \tilde{X}(\tilde{U})$. Από την Πρόταση 3.1.5 γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση

$$\phi = \tilde{X}^{-1} \circ X\colon X^{-1}(W) \to \tilde{X}^{-1}(W) \ \text{ με } \ \phi(u,v) = (\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v))$$

είναι διαφορομορφισμός, όπου $W := X(U) \cap \tilde{X}(\tilde{U})$. Όμως επειδή $X = \tilde{X} \circ \phi$, από τον κανόνα της αλυσίδας λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}\tilde{X}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}\tilde{X}_{\tilde{v}} \\ X_v &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\tilde{X}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}\tilde{X}_{\tilde{v}}. \end{aligned}$$

Από αυτές προκύπτει ότι

$$X_u \times X_v = \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u,v)}\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}.$$

Τότε από το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών για τα διπλά ολοκληρώματα έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{X}^{-1}(R)} \|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\| d\tilde{u}d\tilde{v} &= \iint_{X^{-1}(R)} \|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\| \left|\frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u,v)}\right| dudv \\ &= \iint_{X^{-1}(R)} \left\|\frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u,v)}\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\right\| dudv \\ &= \iint_{X^{-1}(R)} \|X_u \times X_v\| dudv. \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της ισότητας (4.3) προκύπτει ότι το εμβαδό του χωρίου R ισοδύναμα είναι

$$A(R) = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Τούτο σημαίνει ότι για τον υπολογισμό του χωρίου απαιτείται γνώση μόνο της πρώτης θεμελιώδους μορφής.

4.2 Έσωθεν γεωμετρία-Ισομετρίες

Έχουμε διαπιστώσει πως η πρώτη θεμελιώδης μορφή μιας κανονικής επιφάνειας είναι εκείνο το εργαλείο που μας επιτρέπει να κάνουμε μετρήσεις γεωμετρικού χαρακτήρα επί της επιφάνειας, όπως μέτρηση μήκους διανύσματος, μήκους καμπύλης, εμβαδού κ.ο.κ.. Με άλλα λόγια οι μετρήσεις αυτές εξαρτώνται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή και όχι από το πώς φαίνεται η επιφάνεια από εξωτερικό παρατηρητή. Για αυτό το λόγο όλες αυτές οι έννοιες καλούνται **εσωτερικές** έννοιες της επιφάνειας.

Γενικότερα με τον όρο **έσωθεν (εσωτερική) γεωμετρία** μιας κανονικής επιφάνειας εννοούμε τη μελέτη όλων εκείνων των γεωμετρικών εννοιών οι οποίες εξαρτώνται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή.

Υπό αυτή την οπτική γωνία έχει νόημα να αναρωτηθεί κανείς τι σημαίνει δύο επιφάνειες να έχουν την ίδια έσωθεν γεωμετρία, δηλαδή την ίδια πρώτη θεμελιώδη μορφή.

Ορισμός 4.2.1. *Έστω $\phi\colon S \to \tilde{S}$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ κανονικών επιφανειών S και $\tilde{S}$ με πρώτες θεμελιώδεις μορφές I και $\tilde{I}$, αντίστοιχα. Η απεικόνιση ϕ καλείται* **ισομετρία** *μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και $\tilde{S}$ αν είναι διαφορομορφισμός και για κάθε σημείο $p \in S$ και κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_pS$ ισχύει*

$$\tilde{I}_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) = I_p(w).$$

Η επιφάνεια S καλείται **ισομετρική** *της $\tilde{S}$.*

Ισοδύναμα, κάνοντας χρήση της ταυτότητας (4.1), έχουμε ότι ένας διαφορομορφισμός $\phi\colon S \to \tilde{S}$ είναι ισομετρία αν για $p \in S$ και κάθε εφαπτόμενα διάνυσματα $w_1, w_2 \in T_pS$ ισχύει

$$\langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_2)\rangle_{\phi(p)} = \langle w_1, w_2\rangle_p.$$

Η σχέση αυτή σημαίνει ότι το διαφορικό

$$d\phi_p\colon T_pS \to T_{\phi(p)}\tilde{S}$$

είναι ισομετρία (με την έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας[1]) μεταξύ των αντιστοίχων εφαπτομένων επιπέδων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι γεωμετρικώς ισότιμες κανονικές επιφάνειες είναι ισομετρικές όπως προκύπτει από την πρόταση που ακολουθεί. Το αντίστροφο δεν είναι αληθές εν γένει όπως φαίνεται στα Παραδείγματα 4.2.1 και 4.2.2 που έπονται.

Πρόταση 4.2.1. *Έστω S και $\tilde{S}$ κανονικές επιφάνειες με πρώτες θεμελιώδεις μορφές I και $\tilde{I}$ αντίστοιχα. Αν οι επιφάνειες S και $\tilde{S}$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες και $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι η ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\tilde{S} = T(S)$, τότε ο περιορισμός $T|_S : S \to \tilde{S}$ είναι ισομετρία μεταξύ των επιφανειών S και $\tilde{S}$.*

Απόδειξη. Η ισομετρία T είναι διαφορομορφισμός. Επιπλέον αν A είναι το γραμμικό μέρος της T, δηλαδή $T = T_v \circ A$, όπου $A \in O(3)$, τότε γνωρίζουμε ότι

$$dT_p = A \ \text{ για κάθε σημείο } \ p.$$

Από αυτή άμεσα προκύπτει

$$\tilde{I}_{T(p)}\left(dT_p(w)\right) = I_p(w)$$

για κάθε σημείο $p \in S$ και κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_pS$. Συνεπώς ο περιορισμός $T|_S : S \to \tilde{S}$ είναι ισομετρία. $\square$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\phi\colon S \to \tilde{S}$ είναι ισομετρία μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και $\tilde{S}$, τότε και η αντίστροφή της $\phi^{-1}\colon \tilde{S} \to S$ είναι ισομετρία.

Επιπλέον η σύνθεση ισομετριών είναι ισομετρία, ενώ η ταυτοτική απεικόνιση κάθε επιφάνειας είναι επίσης ισομετρία (άσκηση!). Όλα τούτα μας επιτρέπουν να ορίσουμε μια σχέση ισοτιμίας (ισοδυναμίας) στο σύνολο των κανονικών επιφανειών.

[1]Ένας γραμμικός ισομορφισμός $L\colon V \to W$ μεταξύ διανυσματικών χώρων V και W εφοδιασμένων με εσωτερικά γινόμενα $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ και $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$, αντίστοιχα, καλείται **ισομετρία** αν ισχύει

$$\langle L(x), L(y)\rangle_W = \langle x, y\rangle_V$$

για κάθε $x, y \in V$.

Υπό αυτή την έννοια, ισομετρικές επιφάνειες είναι ταυτόσημες από την σκοπιά της έσωθεν γεωμετρίας. Πράγματι βάσει του Ορισμού 4.2.1 καταλήγουμε στην ακόλουθη διαπίστωση.

> **Επειδή οι ισομετρίες μεταξύ κανονικών επιφανειών διατηρούν την πρώτη θεμελιώδη μορφή, θα διατηρούν επίσης ό,τι υπολογίζεται ή εξαρτάται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή. Με άλλα λόγια ισομετρικές επιφάνειες έχουν την ίδια έσωθεν γεωμετρία.**

Ειδικότερα, οι ισομετρίες μεταξύ κανονικών επιφανειών διατηρούν τα εμβαδά καθώς και τα μήκη καμπυλών.

Πως όμως εξετάζουμε αν δύο επιφάνεις είναι ισομετρικές;

Ας υποθέσουμε κατ΄ αρχάς ότι οι κανονικές επιφάνειες S και $\tilde{S}$ είναι ισομετρικές και $\phi\colon S \to \tilde{S}$ είναι μια μεταξύ τους ισομετρία. Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων $X\colon U \to S$ με παραμέτρους $(u,v) \in U$ και θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης E, F, G. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η απεικόνιση $\tilde{X} = \phi \circ X$ είναι σύστημα συντεταγμένων της $\tilde{S}$ με παραμέτρους $(u,v) \in U$. Συμβολίζουμε με $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ τα αντίστοιχα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης του συστήματος συντεταγμένων $\tilde{X}$. Είναι φανερό από τον ορισμό του διαφορικού ότι ισχύουν

$$\tilde{X}_u = d\phi(X_u) \ \text{ και } \ \tilde{X}_v = d\phi(X_v).$$

Επειδή η απεικόνιση ϕ είναι ισομετρία έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_u \rangle = \langle d\phi(X_u), d\phi(X_u) \rangle = \langle X_u, X_u \rangle = E,\\
\tilde{F} &= \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle = \langle d\phi(X_u), d\phi(X_v) \rangle = \langle X_u, X_v \rangle = F,\\
\tilde{G} &= \langle \tilde{X}_v, \tilde{X}_v \rangle = \langle d\phi(X_v), d\phi(X_v) \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = G.
\end{aligned}$$

Τούτο σημαίνει ότι οι ισομετρικές επιφάνεις S και $\tilde{S}$ έχουν τα ίδια θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης ως προς κοινές παραμέτρους. Η ακόλουθη πρόταση μας εξασφαλίζει ότι και το αντίστροφο είναι αληθές.

Πρόταση 4.2.2. *Έστω κανονικές επιφάνειες S και $\tilde{S}$ με συστήματα συντεταγμένων $X\colon U \to S$, $\tilde{X}\colon U \to \tilde{S}$ με κοινές παραμέτρους $(u,v) \in U$ και θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης E, F, G και $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$, αντίστοιχα. Αν ισχύει*

$$\tilde{E} = E, \ \tilde{F} = F \ \text{ και } \ \tilde{G} = G,$$

τότε η απεικόνιση

$$\tilde{X} \circ X^{-1} \colon X(U) \to \tilde{X}(U)$$

είναι ισομετρία μεταξύ των κανονικών επιφανειών $X(U)$ *και* $\tilde{X}(U)$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.1.5 γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση $\phi = \tilde{X} \circ X^{-1}$ είναι διαφορομορφισμός. Για να δείξουμε ότι είναι ισομετρία αρκεί να αποδείξουμε ότι διατηρεί την πρώτη θεμελιώδη μορφή. Πράγματι για τυχόν σημείο $p = X(q) \in X(U)$ και τυχόν εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_pS$ θεωρούμε καμπύλη

$$c(t) = X(u(t), v(t))$$

τέτοια ώστε $c(0) = p$ και $c'(0) = w$. Κατά τα γνωστά είναι

$$w = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q).$$

Επειδή

$$d\phi_p(w) = \tilde{c}'(0),$$

όπου $\tilde{c}$ είναι η καμπύλη

$$\tilde{c}(t) = \phi \circ c(t) = \tilde{X}(u(t), v(t)),$$

έχουμε ότι

$$d\phi_p(w) = u'(0)\tilde{X}_u(q) + v'(0)\tilde{X}_v(q).$$

Κάνοντας χρήση της ισότητας (4.2), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) &= \tilde{E}(q)(u'(0))^2 + 2\tilde{F}(q)u'(0)v'(0) + \tilde{G}(q)(v'(0))^2 \\ &= E(q)(u'(0))^2 + 2F(q)u'(0)v'(0) + G(q)(v'(0))^2 \\ &= I_p(w). \end{aligned}$$

Αυτό φανερώνει ότι η απεικόνιση ϕ είναι ισομετρία και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παράδειγμα 4.2.1. Στην Πρόταση 4.2.2 θεωρούμε ως κανονική επιφάνεια S τον ορθό κυκλικό κύλινδρο με εξίσωση

$$x^2 + y^2 = r^2, \ r > 0$$

και ως κανονική επιφάνεια $\tilde{S}$ το επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο p_0 και είναι παράλληλο προς τα ορθομοναδιαία διανύσματα $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$. Εύκολα ελέγχεται ότι οι απεικονίσεις

$$\begin{aligned} X &\colon U \to V \cap S \quad \text{με} \quad X(u,v) = \left(r\cos\frac{u}{r}, r\sin\frac{u}{r}, v\right) \\ \tilde{X} &\colon U \to \tilde{V} \cap \tilde{S} \quad \text{με} \quad \tilde{X}(u,v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \end{aligned}$$

είναι συστήματα συνταταγμένων, όπου

$$U = (0, 2\pi r) \times \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = r,\ y = 0\right\}.$$

Τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης των επιφανειών αυτών ως προς τα ανωτέρω συστήματα συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E = 1, \\ \tilde{F} &= F = 0, \\ \tilde{G} &= G = 1. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.2, οι κανονικές επιφάνειες $X(U)$ και $\tilde{X}(U)$ είναι ισομετρικές.

Στην πραγματικότητα έχουμε αποδείξει ότι κάθε σημείο του κυλίνδρου S έχει μια περιοχή στην S η οποία είναι ισομετρική με μια περιοχή του επιπέδου. Με άλλα λόγια ο κύλινδρος και οποιοδήποτε επίπεδο είναι **τοπικά ισομετρικές επιφάνειες**. Προσοχή όμως δεν ισομετρικές επιφάνειες. Αν ήταν ισομετρικές θα ήταν και ομοιομορφικές. Όμως δεν είναι ομοιομορφικές γιατί το επίπεδο έχει μια τοπολογική ιδιότητα (ποιά;) που δεν τη διαθέτει ο κύλινδρος.

Παράδειγμα 4.2.2. Το **αλυσοοειδές** είναι η επιφάνεια S με εξίσωση

$$x^2 + y^2 = a^2 \cosh^2 \frac{z}{a},$$

όπου a είναι μη μηδενική σταθερά. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος 3.1.1 προκύπτει ότι το αλυσοοειδές είναι κανονική επιφάνεια με σύστημα συντεταγμένων

$$X(u,v) = (a\cosh v \cos u, a\cosh v \sin u, av), \quad (u,v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

και αντίστοιχα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης

$$E(u,v) = G(u,v) = a^2 \cosh^2 v, \quad F(u,v) = 0.$$

Το **ελικοειδές** είναι η επιφάνεια $\tilde{S}$ με εξίσωση

$$x \sin \frac{z}{a} = y \cos \frac{z}{a}.$$

Με χρήση του Θεωρήματος 3.1.1 βλέπουμε ότι και το ελικοειδές είναι κανονική επιφάνεια με σύστημα συντεταγμένων

$$\tilde{X}(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{v}\cos\tilde{u}, \tilde{v}\sin\tilde{u}, a\tilde{u}), \quad (\tilde{u},\tilde{v}) \in (0,2\pi)\times\mathbb{R}$$

και αντίστοιχα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης

$$\tilde{E}(\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{v}^2 + a^2, \ \tilde{F}(\tilde{u},\tilde{v}) = 0, \ \tilde{G}(\tilde{u},\tilde{v}) = 1.$$

Παρατηρούμε όμως ότι αν θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$\phi\colon (0,2\pi)\times\mathbb{R} \to (0,2\pi)\times\mathbb{R}$$

με

$$\phi(u,v) = (u, a\sinh v) = (\tilde{u},\tilde{v}),$$

τότε η απεικόνιση $\bar{X} = \tilde{X}\circ\phi$ με

$$\bar{X}(u,v) = (a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, au)$$

είναι σύστημα συντεταγμένων του ελικοειδούς με θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης

$$\bar{E}(u,v) = \bar{G}(u,v) = a^2\cosh^2 v, \quad \bar{F}(u,v) = 0.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.2, το αλυσοειδές και το ελικοειδές είναι τοπικά ισομετρικές επιφάνειες.

4.3 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι γεωμετρικά ισότιμες επιφάνειες είναι και ισομετρικές.

2. Έστω $\phi\colon S \to \tilde{S}$ τοπική ισομετρία μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και $\tilde{S}$. Αν $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to S$ είναι καμπύλη της S και $[a, b] \subset I$, τότε αποδείξτε ότι για τα μήκη των καμπυλών c και $\tilde{c} = f \circ c$ ισχύει
$$L_a^b(\tilde{c}) = L_a^b(c).$$

3. Υπολογίστε την πρώτη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας γράφημα Γ_h στο τυχόν της σημείο, όπου $h\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι λεία συνάρτηση.

4. Αποδείξτε ότι αν μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\phi\colon S \to \tilde{S}$ μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και $\tilde{S}$ είναι ισομετρία, τότε και η αντίστροφή της $\phi^{-1}\colon \tilde{S} \to S$ είναι επίσης ισομετρία.

5. Αποδείξτε η σύνθεση ισομετριών μεταξύ κανονικών επιφανειών είναι ισομετρία. Επιπλέον αποδείξτε ότι η ταυτοτική απεικόνιση κάθε επιφάνειας είναι επίσης ισομετρία. Τι δομή φέρει το σύνολο όλων των ισομετριών τυχούσας κανονικής επιφάνειας;

Κεφάλαιο 5

Προσανατολισμός-Απεικόνιση Gauss

5.1 Προσανατολισμός-Μοναδιαίο κάθετο

Έστω S κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ και $X\colon U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u,v) \in U$ και θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης E, F, G. Για κάθε σημείο $p \in X(U)$ τα διανύσματα

$$X_u(X^{-1}(p)), X_v(X^{-1}(p))$$

συνιστούν βάση του εφαπτομένου επιπέδου T_pS. Το διάνυσμα

$$\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(X^{-1}(p)) = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}}(X^{-1}(p))$$

είναι ένα από τα δύο μοναδιαία κάθετα διανύσματα (το άλλο είναι το αντίθετο του) στο T_pS.

Η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο p και είναι κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pS καλείται **κάθετη ευθεία** της S στο p.

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$N\colon X(U) \to \mathbb{R}^3 \;\text{ με }\; N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}.$$

Λόγω της Παρατήρησης 3.2.2 η N είναι λεία και καλείται **κάθετο μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο** της S στο $X(U)$.

Ας θεωρήσουμε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $\tilde{X}\colon \tilde{U} \to S$ με παραμέτρους $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{U}$ και αντίστοιχο κάθετο μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $\tilde{N}$ στο $\tilde{X}(\tilde{U})$ με

$$\tilde{N} = \frac{\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\|} \circ \tilde{X}^{-1}.$$

Αν $W := X(U) \cap \tilde{X}(\tilde{U}) \neq \emptyset$, τότε από την Πρόταση 3.1.5 γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση

$$\phi = \tilde{X}^{-1} \circ X\colon X^{-1}(W) \to \tilde{X}^{-1}(W) \ \text{ με } \ \phi(u, v) = (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$$

είναι διαφορομορφισμός. Όμως επειδή $X = \tilde{X} \circ \phi$, από τον κανόνα της αλυσίδας είναι

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}\tilde{X}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}\tilde{X}_{\tilde{v}} \\ X_v &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\tilde{X}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}\tilde{X}_{\tilde{v}}. \end{aligned}$$

Από αυτές προκύπτει ότι

$$X_u \times X_v = \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)}\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}$$

και επομένως στο W είναι

$$\tilde{N} = \pm N.$$

Τούτο εγείρει ερωτήματα αν σε κάθε κανονική επιφάνεια υπάρχει ένα κάθετο μοναδιαίο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο το οποίο να ορίζεται σε **ολόκληρη** την επιφάνεια. Στην πραγματικότητα την ιδιότητα αυτή έχουν μόνο οι λεγόμενες προσανατολίσιμες επιφάνειες όπως προκύπτει από τα ακόλουθα.

Ορισμός 5.1.1. *Μια κανονική επιφάνεια S καλείται* **προσανατολίσιμη** *αν υπάρχει οικογένεια συστημάτων συντεταγμένων $\{X_a\}_{a\in A}$ με $X_a\colon U_a \to S$ τέτοια ώστε*

$$\cup_{a\in A} X_a(U_a) = S$$

και

$$\det d(X_b^{-1} \circ X_a) > 0 \ \text{ για κάθε } \ a, b \in A \ \text{ με } \ X_a(U_a) \cap X_b(U_b) \neq \emptyset.$$

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα το οποίο αναφέρουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 5.1.1. *Έστω S κανονική επιφάνεια. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ενός καθέτου μοναδιαίου διαφορίσιμου διανυσματικού πεδίου $N\colon S \to \mathbb{R}^3$ το οποίο να ορίζεται σε ολόκληρη την επιφάνεια, είναι η επιφάνεια S να είναι προσανατολίσιμη.*

Αν μια επιφάνεια S είναι προσανατολίσιμη, τότε υπάρχουν δύο ακριβώς κάθετα μοναδιαία διανυσματικά πεδία τα οποία ορίζονται σε ολόκληρη την επιφάνεια και καθένα από αυτά ονομάζεται **προσανατολισμός** της S. Η επιφάνεια S καλείται **προσανατολισμένη** αν είναι προσανατολίσιμη και έχουμε προεπιλέξει ένα προσανατολισμό αυτής.

Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με προσανατολισμό N. Ένα σύστημα συντεταγμένων $X\colon U \to S$ με παραμέτρους $(u, v) \in U$ αυτής θα λέμε ότι **ανήκει στον δοσμένο προσανατολισμό** αν στη περιοχή συντεταγμένων $X(U)$ ισχύει

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}.$$

Οι επιφάνειες γραφήματα Γ_f του Παραδείγματος 3.1.1 είναι προσανατολίσιμες με μοναδιαίο κάθετο

$$N\colon \Gamma_f \to \mathbb{R}^3 \ \text{ με } \ N\left(x, y, f(x, y)\right) = \frac{(-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}.$$

Είναι προφανές ότι κάθε κανονική επιφάνεια είναι τοπικά προσανατολίσιμη με προσαναταλισμό που ορίζεται ως

$$N\colon X(U) \to \mathbb{R}^3 \ \text{ με } \ N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1},$$

όπου $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ είναι σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U$.

Το Θεώρημα 3.1.1 μας δίνει μια μέθοδο κατασκευής προσανατολίσιμων επιφανειών.

Θεώρημα 5.1.2. *Έστω $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^3$ και $a \in f(U)$. Αν το σύνολο $f^{-1}(a)$ δεν περιέχει κρίσιμα σημεία της f, τότε το σύνολο $f^{-1}(a)$ είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια με προσανατολισμό*

$$N\colon f^{-1}(a) \to \mathbb{R}^3$$

όπου

$$N(p) = \frac{\mathrm{grad} f(p)}{\|\mathrm{grad} f(p)\|}, \quad p \in f^{-1}(a).$$

Απόδειξη. Έστω $p \in f^{-1}(a)$, $w \in T_p f^{-1}(a)$. Θεωρούμε καμπύλη

$$c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to f^{-1}(a), \quad c(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

με

$$c(0) = p \ \text{ και } \ c'(0) = w.$$

Παραγωγίζοντας την

$$f\left(x(t), y(t), z(t)\right) = a,$$

με τη βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας λαμβάνουμε

$$x'(0) f_x(p) + y'(0) f_y(p) + z'(0) f_z(p) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\langle w, \mathrm{grad} f(p)\rangle = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\mathrm{grad} f(p)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_p f^{-1}(a)$. □

Ισχύει το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα το οποίου την απόδειξη παραλείπουμε.

Θεώρημα 5.1.3. *Κάθε συμπαγής κανονική επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη.*

5.2 Απεικόνιση Gauss

Ορισμός 5.2.1. *Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με προσανατολισμό N. Η* **απεικόνιση Gauss** *ή* **σφαιρική απεικόνιση** *της S είναι η απεικόνιση (συμβολίζεται με το ίδιο σύμβολο N)*

$$N \colon S \to \mathbb{S}^2$$

η οποία στο τυχόν σημείο $p \in S$ αντιστοιχεί το σημείο[1] *$\bar{p} \in \mathbb{S}^2$ το οποίο είναι το πέρας του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος $N(p)$ της S στο p όταν αυτό το μεταφέρουμε παράλληλα στον $\mathbb{R}^3$ ώστε η αρχή του να συμπέσει με το κέντρο της $\mathbb{S}^2$.*

Είναι φανερό πως η απεικόνιση Gauss είναι λεία ως απεικόνιση μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και $\mathbb{S}^2$.

Παράδειγμα 5.2.1. Κάθε επιφάνεια γράφημα Γ_f, όπου $f \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι λεία συνάρτηση (Παραδείγμα 3.1.1), είναι προσανατολίσιμη με μοναδιαίο κάθετο

$$N \colon \Gamma_f \to \mathbb{R}^3 \ \text{ με } \ N = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Επομένως η απεικόνιση Gauss είναι

$$N \colon \Gamma_f \to \mathbb{S}^2 \ \text{ με } \ N(p) = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}(x, y), \quad p = (x, y, f(x, y)).$$

Παρατηρούμε πως η σφαιρική εικόνα (η εικόνα δηλαδή της απεικόνισης Gauss) περιέχεται στο άνω ημισφαίριο της $\mathbb{S}^2$.

Παράδειγμα 5.2.2. Θεωρούμε το επίπεδο Π με εξίσωση

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0.$$

[1] Προφανώς οι συντεταγμένες του σημείου $\bar{p} \in \mathbb{S}^2$ είναι ακριβώς οι συντεταγμένες του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος $N(p)$. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η απεικόνιση Gauss συμβολίζεται με ίδιο σύμβολο N.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.2, το επίπεδο Π είναι προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss

$$N \colon S \to \mathbb{S}^2 \ \text{ με } \ N(p) = \frac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}.$$

Παρατηρούμε ότι η σφαιρική εικόνα αποτελείται από ένα μόνο σημείο αφού είναι

$$N(\Pi) = \left\{ \frac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}} \right\}.$$

Παράδειγμα 5.2.3. Ο ορθός κυκλικός κύλινδρος

$$C_r = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2 \right\}$$

του Παραδείγματος 3.1.5 είναι προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss

$$N \colon C_r \to \mathbb{S}^2 \ \text{ με } \ N(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, 0).$$

Παρατηρούμε ότι η σφαιρική εικόνα είναι ο μέγιστος κύκλος της $\mathbb{S}^2$ με εξισώσεις

$$x^2 + y^2 = 1 \ \text{ και } \ z = 0.$$

Παράδειγμα 5.2.4. Η σφαίρα

$$\mathbb{S}^2_R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \right\}$$

του Παραδείγματος 3.1.4 είναι προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss

$$N \colon \mathbb{S}^2_R \to \mathbb{S}^2 \ \text{ με } \ N(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, y, z).$$

Η σφαιρική εικόνα είναι ολόκληρη η $\mathbb{S}^2$.

Παρατήρηση 5.2.1. Σημειώνουμε πως αν αλλάξουμε προσανατολισμό, η απεικόνιση Gauss είναι η αντίθετη της αρχικής.

Πως σχετίζονται οι απεικονίσεις Gauss γεωμετρικώς ισότιμων επιφανειών; Η απάντηση δίνεται στην ακόλουθη

Πρόταση 5.2.1. *Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss*

$$N\colon S \to \mathbb{S}^2.$$

(i) Τότε κάθε επιφάνεια γεωμετρικώς ισότιμη με την S είναι προσανατολίσιμη.

(ii) Αν οι επιφάνεις S και $\tilde{S}$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες και $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι η ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ με $\tilde{S} = T(S)$, τότε η απεικόνιση

$$\tilde{N}\colon \tilde{S} \to \mathbb{S}^2 \ \text{ με } \ \tilde{N} \circ T = AN,$$

ορίζει προσανατολισμό στην $\tilde{S}$, όπου A είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T.

(iii) Αν οι προσανατολισμένες επιφάνειες S και $\tilde{S}$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες, τότε οι απεικονίσεις Gauss αυτών $N\colon S \to \mathbb{S}^2$ και $\tilde{N}\colon \tilde{S} \to \mathbb{S}^2$ συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\tilde{N} \circ T = \pm AN.$$

Απόδειξη. Έστω σύστημα συντεταγμένων $X\colon U \to S$ με παραμέτρους $(u, v) \in U$ το οποίο ανήκει στον δοσμένο προσανατολισμό της S, δηλαδή ισχύει

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1} \ \text{ στο } \ X(U).$$

Γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση $\tilde{X} = T \circ X$ είναι σύστημα συντεταγμένων της $\tilde{S}$. Προφανώς έχουμε

$$\tilde{X}_u = AX_u, \quad \tilde{X}_v = AX_v,$$

όπου $A \in O(3)$ είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T. Είναι φανερό ότι το AN είναι κάθετο στα $\tilde{X}_u, \tilde{X}_v$, και επομένως η απεικόνιση

$$\tilde{N}\colon \tilde{S} \to \mathbb{S}^2$$

που ορίζεται μέσω της

$$\tilde{N} \circ T = AN,$$

ορίζει προσανατολισμό επί της επιφάνειας $\tilde{S}$ κι αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

5.3 Ασκήσεις

1. Δίνεται η επιφάνεια με εξίσωση

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}.$$

   Αφού αποδείξτε ότι είναι κανονική επιφάνεια, να βρείτε την απεικόνιση Gauss καθώς και την σφαιρική της εικόνα.

2. Αποδείξτε ότι ένα μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της παραμετρικής επιφάνειας της Άσκησης 3.6.9 είναι το

$$N(s, v) = \cos v\, \vec{n}(s) + \sin v\, \vec{b}(s).$$

3. Αποδείξτε ότι η επιφάνεια S με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

   είναι προσανατολίσιμη. Βρείτε ένα προσανατολισμό της και την αντίστοιχη απεικόνιση Gauss N. Περιγράψτε γεωμετρικά την εικόνα της απεικόνισης Gauss. Είναι η απεικόνιση Gauss 1-1;

Κεφάλαιο 6

Απεικόνιση Weingarten-Δεύτερη θεμελιώδης μορφή

Για να μελετήσουμε την έξωθεν γεωμετρία μιας επιφάνειας είναι απαραίτητο να εξετάσουμε πως μεταβάλλεται το εφαπτόμενο επίπεδό της. Ισοδύναμα αρκεί να δούμε πως μεταβάλλεται η απεικόνιση Gauss.

Για το σκοπό αυτό εισάγουμε την απεικόνιση Weingarten ή αλλιώς τελεστή σχήματος για κάθε κανονική και προσανατολισμένη επιφάνεια.

6.1 Απεικόνιση Weingarten

Ορισμός 6.1.1. *Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss*

$$N\colon S \to \mathbb{S}^2.$$

Ονομάζουμε **απεικόνιση Weingarten** *ή* **τελεστή σχήματος** *της επιφάνειας S στο τυχόν σημείο $p \in S$ την απεικόνιση*

$$L_p\colon T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2 \ \text{ με } \ L_p = -dN_p.$$

Τα εφαπτόμενα επίπεδα T_pS και $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ είναι παράλληλα αφού και τα δύο είναι κάθετα στο διάνυσμα $N(p)$. Επομένως μπορούμε να τα ταυτίσουμε μέσω παράλληλης μεταφοράς στον $\mathbb{R}^3$ και να θεωρήσουμε την απεικόνιση Weingarten ως μετασχηματισμό του εφαπτομένου επιπέδου T_pS, δηλαδή ως γραμμικό ενδομορφισμό

$$L_p \colon T_pS \to T_pS.$$

Αξίζει να τονιστεί ότι η απεικόνιση Weingarten αλλάζει πρόσημο αν αλλάξουμε τον προσανατολισμό (Παρατήρηση 5.2.1).

Παράδειγμα 6.1.1. Θεωρούμε το επίπεδο Π με εξίσωση

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$

και απεικόνιση Gauss (Παράδειγμα 5.2.2)

$$N \colon S \to \mathbb{S}^2 \ \text{ με } \ N(p) = \frac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}.$$

Η απεικόνιση Weingarten στο τυχόν $p \in \Pi$ είναι η απεικόνιση $L_p \colon T_pS \to T_pS$ με

$$L_p w = (N \circ c)'(0) = 0, \quad w \in T_p\Pi,$$

όπου $c(t)$ είναι καμπύλη του Π με $c(0) = p$ και $c'(0) = w$. Επομένως η απεικόνιση Weingarten του επιπέδου είναι η μηδενική απεικόνιση σε κάθε σημείο του.

Παράδειγμα 6.1.2. Ο ορθός κυκλικός κύλινδρος

$$C_r = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2 \right\}$$

του Παραδείγματος 5.2.3 είναι προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss

$$N \colon C_r \to \mathbb{S}^2 \ \text{ με } \ N(x, y, z) = -\frac{1}{r}(x, y, 0).$$

Η απεικόνιση Weingarten στο τυχόν $p \in C_r$ είναι η απεικόνιση

$$L_p \colon T_pC_r \to T_pC_r$$

με

$$L_p w = (N \circ c)'(0), \quad w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p C_r,$$

όπου $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ είναι καμπύλη του C_r με $c(0) = p$ και

$$c'(0) = w = (x'(0), y'(0), z'(0)) .$$

Επειδή είναι

$$(N \circ c)(t) = -\frac{1}{r}(x(t), y(t), 0)$$

βρίσκουμε ότι

$$L_p w = \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0), \quad w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p C_r.$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο του κυλίνδρου C_r στο σημείο του $p = (x, y, z)$ είναι

$$T_p C_r = \left\{ w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p \mathbb{R}^3 : x w_1 + y w_2 = 0 \right\} .$$

Παράδειγμα 6.1.3. Η σφαίρα

$$\mathbb{S}^2_R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \right\}$$

του Παραδείγματος 3.1.4 είναι προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss

$$N \colon \mathbb{S}^2_R \to \mathbb{S}^2 \ \text{ με } \ N(x, y, z) = -\frac{1}{R}(x, y, z).$$

Η απεικόνιση Weingarten στο τυχόν $p \in \mathbb{S}^2_R$ είναι η απεικόνιση

$$L_p \colon T_p \mathbb{S}^2_R \to T_p \mathbb{S}^2_R$$

με

$$L_p w = (N \circ c)'(0), \quad w \in T_p \mathbb{S}^2_R,$$

όπου $c(t)$ είναι καμπύλη της $\mathbb{S}^2_R$ με $c(0) = p$ και $c'(0) = w$. Επειδή είναι

$$(N \circ c)(t) = -\frac{1}{R} c(t)$$

βρίσκουμε ότι
$$L_p w = \frac{1}{R} w, \quad w \in T_p \mathbb{S}^2_R.$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας $\mathbb{S}^2_R$ στο σημείο της $p = (x, y, z)$ είναι

$$T_p \mathbb{S}^2_R = \left\{ w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p \mathbb{R}^3 : x w_1 + y w_2 + z w_3 = 0 \right\}.$$

Παρατήρηση 6.1.1. Έστω S κανονική επιφάνεια και $X\colon U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U$. Εύκολα προκύπτει ότι
$$L X_u = -(N \circ X)_u \ \text{ και } \ L X_v = -(N \circ X)_v.$$

Χάριν συντομίας θα γράφουμε

$$L X_u = -N_u \ \text{ και } \ L X_v = -N_v.$$

Πρόταση 6.1.1. *Η απεικόνιση Weingarten είναι αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός, δηλαδή για κάθε $p \in S$ και $w_1, w_2 \in T_p S$ ισχύει*
$$\langle L_p w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_1, L_p w_2 \rangle_p.$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την ανωτέρω ισότητα για τα διανύσματα μιας βάσης του εφαπτομένου επιπέδου $T_p S$. Αν $X\colon U \to S$ είναι σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U$, τότε πρέπει να δείξουμε ότι $\langle L X_u, X_v \rangle = \langle X_u, L X_v \rangle$ ή ισοδύναμα $\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle$. Όμως είναι

$$\begin{aligned} \langle N_u, X_v \rangle &= \langle N, X_v \rangle_u - \langle N, X_{uv} \rangle \\ &= -\langle N, X_{uv} \rangle. \end{aligned}$$

Όμοια έχουμε

$$\begin{aligned} \langle X_u, N_v \rangle &= \langle N, X_u \rangle_v - \langle N, X_{vu} \rangle \\ &= -\langle N, X_{uv} \rangle \end{aligned}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

6.2 Δεύτερη θεμελιώδης μορφή

Επειδή η απεικόνιση Weingarten είναι αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός, η απεικόνιση

$$T_pS \times T_pS \to \mathbb{R} \;\text{ με }\; (w_1, w_2) \mapsto \langle L_p w_1, w_2 \rangle_p$$

είναι συμμετρική διγραμμική μορφή. Συνεπώς ορίζεται η αντίστοιχη τετραγωνική της μορφή, η οποία είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή.

Ορισμός 6.2.1. *Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια. Η* **δεύτερη θεμελιώδης μορφή** II_p **της** S **στο σημείο της** p *είναι η τετραγωνική μορφή*

$$II_p \colon T_pS \to \mathbb{R} \;\text{ με }\; II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle_p.$$

Έστω $X\colon U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U$. Ο πίνακας της δεύτερης θεμελιώδους μορφής, ως τετραγωνικής μορφής ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$, είναι ο

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

όπου $e, f, g\colon U \to \mathbb{R}$ είναι οι λείες συναρτήσεις

$$\begin{aligned} e &= \langle LX_u, X_u \rangle = -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f &= \langle LX_u, X_v \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle, \\ g &= \langle LX_v, X_v \rangle = -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι γνωστές ως **θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης** της επιφάνειας ως προς το σύστημα συντaταγμένων X. Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή είναι γνωστή αν γνωρίζουμε τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης. Πράγματι αν

$$w = aX_u + bX_v \in T_pS,$$

τότε λαμβάνουμε

$$II_p(w) = ea^2 + 2fab + gb^2. \tag{6.1}$$

Σε αντίθεση με την πρώτη θεμελιώδη μορφή, η δεύτερη θεμελιώδης μορφή δεν είναι πάντα οριστική όπως φαίνεται στα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.2.1. Από το Παράδειγμα 6.1.1 γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση Weingarten στο τυχόν σημείο κάθε επιπέδου είναι η μηδενική απεικόνιση σε κάθε σημείο. Κατά συνέπεια σε κάθε σημείο p του επιπέδου είναι $II_p = 0$.

Παράδειγμα 6.2.2. Η απεικόνιση Weingarten του ορθού κυκλικού κυλίνδρου

$$C_r = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\right\}$$

του Παραδείγματος 6.1.2 στο τυχόν σημείο $p \in C_r$ είναι η απεικόνιση $L_p \colon T_pC_r \to T_pC_r$ με

$$L_p w = \frac{1}{r}\left(w_1, w_2, 0\right), \quad w = (w_1, w_2, w_3) \in T_pC_r.$$

Άρα η δεύτερη θεμελιώδης μορφή είναι

$$II_p(w) = \frac{1}{r}(w_1^2 + w_2^2).$$

Προφανώς είναι θετικώς ημιοριστική.

Παράδειγμα 6.2.3. Η απεικόνιση Weingarten της σφαίρας

$$\mathbb{S}_R^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}$$

του Παραδείγματος 3.1.4 είναι η απεικόνιση $L_p \colon T_p\mathbb{S}_R^2 \to T_p\mathbb{S}_R^2$ με

$$L_p w = \frac{1}{R}w, \quad w \in T_p\mathbb{S}_R^2.$$

Επομένως η δεύτερη θεμελιώδης μορφή είναι

$$II_p(w) = \frac{1}{R}\|w\|^2,$$

ή ισοδύναμα

$$II_p = \frac{1}{R}I_p.$$

Τι ισχύει για τις δεύτερες θεμελιώδεις μορφές γεωμετρικώς ισότιμων επιφανειών; Η απάντηση δίνεται στην ακόλουθη

Πρόταση 6.2.1. *Έστω S και $\tilde{S}$ προσανατολισμένες επιφάνειες με δεύτερες θεμελιώδεις μορφές II και $\tilde{II}$ αντίστοιχα. Αν οι S και $\tilde{S}$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες και $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ με $\tilde{S} = T(S)$, τότε ισχύει*

$$\tilde{II}_{T(p)}(dT_p(w)) = \pm II_p(w), \text{ για κάθε } p \in S,\ w \in T_pS.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.2.1 και του ορισμού της δεύτερης θεμελιώδους μορφής. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι

$$\tilde{N} \circ T = \varepsilon AN,$$

όπου A είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T και $\varepsilon = \pm 1$. Από τον ορισμό της απεικόνισης Weingarten, τον κανόνα της αλυσίδας και επειδή $dT_p = A$, λαμβάνουμε

$$d\tilde{N}_{T(p)} \circ dT_p = \varepsilon A \circ dN_p,$$

όπου N και $\tilde{N}$ είναι οι απεικονίσεις Gauss των S και $\tilde{S}$ αντίστοιχα.

Συνεπώς έχουμε για τις αντίστοιχες απεικονίσεις Weingarten

$$\tilde{L}_{T(p)} \circ dT_p = \varepsilon A \circ L_p.$$

Άρα είναι

$$\begin{aligned}
\tilde{II}_{T(p)}(dT_p(w)) &= \langle \tilde{L}_{T(p)} \circ dT_p w, dT_p(w) \rangle \\
&= \varepsilon \langle A \circ L_p w, Aw \rangle \\
&= \varepsilon \langle L_p w, w \rangle \\
&= \varepsilon II_p(w),
\end{aligned}$$

αφού $A \in O(3)$. □

6.3 Κάθετη καμπυλότητα

Ορισμός 6.3.1. *Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με δεύτερη θεμελιώδη μορφή II_p στο σημείο της p. Η* **κάθετη καμπυλότητα** $k_n(w)$ *στην εφαπτομενική της διεύθυνση $w \in T_pS \setminus \{0\}$ είναι ο αριθμός*

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}.$$

Έστω $X\colon U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U$. Αν

$$w = aX_u + bX_v,$$

τότε από τις (4.2) και (6.1) λαμβάνουμε

$$k_n(w) = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}.$$

Ειδικά, η κάθετη καμπυλότητα στη διέθυνση των παραμετρικών καμπυλών του συστήματος συνταταγμένων X είναι

$$k_n(X_u) = \frac{e}{E} \ \text{ και } \ k_n(X_v) = \frac{g}{G}.$$

Είναι φανερό ότι

$$k_n(\lambda w) = k_n(w) \ \text{ για κάθε } \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Συνεπώς, σε ότι αφορά την κάθετη καμπυλότητα, έχει νόημα να περιοριζόμαστε μόνο σε μοναδιαία εφαπτομενικά διανύσματα.

Έστω μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα $w \in T_pS$. Θεωρούμε καμπύλη c της S με παράμετρο το μήκος τόξου, $c(0) = p \in S$ και $c'(0) = w$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} II_p(w) &= \langle L_p w, w\rangle_p \\ &= -\langle dN_p(w), w\rangle_p \\ &= -\langle (N \circ c)'(0), c'(0)\rangle \\ &= \langle (N \circ c)(0), c''(0)\rangle. \end{aligned}$$

Αν επιπλέον η καμπύλη c έχει θετική καμπυλότητα και κύριο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$, τότε έχουμε

$$II_p(w) = k(0)\langle N(p), \vec{n}(0)\rangle.$$

Από αυτή προκύπτει ότι

$$k_n(w) = k(0)\cos\theta,$$

όπου θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $N(p)$ και $\vec{n}(0)$. Αν η καμπύλη c είναι η τομή της επιφάνειας με το επίπεδο που διέρχεται από το p

και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $N(p)$ και w, τότε βρίσκουμε ότι
$$k_n(w) = \pm k(0).$$
Αυτό ακριβώς δίνει τη γεωμετρική ερμηνεία της κάθετης καμπυλότητας.

Έχουμε αποδείξει το ακόλουθο

Θεώρημα 6.3.1 (Meusnier). *Όλες οι καμπύλες μιας κανονικής επιφάνειας S, οι οποίες έχουν σε ένα σημείο τους p την ίδια εφαπτόμενη ευθεία, έχουν σε αυτό το σημείο την ίδια κάθετη καμπυλότητα για την κοινή τους εφαπτομενική διεύθυνση.*

6.4 Κύριες καμπυλότητες

Ορισμός 6.4.1. *Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια και $p \in S$. Οι* **κύριες καμπυλότητες** $k_1(p), k_2(p)$ **της** S **στο σημείο της** p *είναι οι αριθμοί*
$$k_1(p) = \max\{k_n(w) : w \in T_pS \ \ \text{με} \ \ \|w\| = 1\}$$
και
$$k_2(p) = \min\{k_n(w) : w \in T_pS \ \ \text{με} \ \ \|w\| = 1\}.$$

Τονίζουμε ότι ο ανωτέρω ορισμός είναι καλός. Πράγματι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$
$$\{w \in T_pS : \ \|w\| = 1\}$$
είναι συμπαγές. Επιπλέον, η κάθετη καμπυλότητα είναι συνεχής ως συνάρτηση του w αφού αν $X\colon U \to S$ είναι σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U$ και
$$w = aX_u + bX_v,$$
τότε είναι
$$k_n(w) = ea^2 + 2fab + gb^2,$$
δηλαδή είναι συνεχής συνάρτηση των (a, b). Είναι γνωστό ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε συμπαγές σύνολο λαμβάνει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο.

Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζονται οι συναρτήσεις

$$k_1 \colon S \to \mathbb{R} \;\text{ και }\; k_2 \colon S \to \mathbb{R}$$

γνωστές ως **κύριες καμπυλότητες** της επιφάνειας S.

Γνωρίζουμε από την Πρόταση 6.1.1 ότι η απεικόνιση Weingarten είναι αυτοπροσηρτημένη. Όμως κάθε αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Το ακόλουθο θεώρημα μας επιτρέπει να δούμε τις κύριες καμπυλότητες ως ιδιοτιμές της απεικόνισης Weingarten.

Θεώρημα 6.4.1. *(i) Οι κύριες καμπυλότητες $k_1(p), k_2(p)$ της προσανατολισμένης επιφάνειας S στο σημείο της p είναι οι ιδιοτιμές της απεικόνισης Weingarten L_p.*

(ii) Υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{e_1(p), e_2(p)\}$ του εφαπτομένου επιπέδου T_pS αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης Weingarten L_p, δηλαδή

$$L_p e_1(p) = k_1(p) e_1(p) \;\text{ και }\; L_p e_2(p) = k_2(p) e_2(p).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 6.1.1 και του Θεωρήματος Δ′.0.2. □

Τα εφαπτόμενα διανύσματα $e_1(p), e_2(p)$ αναφέρονται ως **κύριες διευθύνσεις** της επιφάνειας S στο p.

Στην ακόλουθη πρόταση δίνεται ένας τρόπος υπολογισμού της κάθετης καμπυλότητας που είναι γνωστός ως τύπος του Euler.

Πρόταση 6.4.2. *Αν $k_1(p), k_2(p)$ είναι οι κύριες καμπυλότητες προσανατολισμένης επιφάνειας S στο σημείο της p, με αντίστοιχες κύριες διευθύνσεις την ορθομοναδιαία βάση $e_1(p), e_2(p)$, τότε για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_pS$ με*

$$w = \cos\theta e_1(p) + \sin\theta e_2(p),$$

ισχύει

$$k_n(w) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta.$$

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{aligned}
k_n(w) &= II_p(w)\\
&= \langle L_p(w), w\rangle\\
&= \langle \cos\theta L_p e_1(p) + \sin\theta L_p e_2(p), \cos\theta e_1(p) + \sin\theta e_2(p)\rangle\\
&= \langle k_1(p)\cos\theta e_1(p) + k_2(p)\sin\theta e_2(p), \cos\theta e_1(p) + \sin\theta e_2(p)\rangle\\
&= k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta,
\end{aligned}$$

κι αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του τύπου του Euler. □

6.5 Καμπυλότητα Gauss και μέση καμπυλότητα

Μέσω των κυρίων καμπυλοτήτων ορίζονται δύο σημαντικές καμπυλότητες για τη θεωρία των επιφανειών.

Ορισμός 6.5.1. *Η* **καμπυλότητα Gauss** *K και η* **μέση καμπυλότητα** *H μιας προσανατολισμένης επιφάνειας S είναι αντίστοιχα οι συναρτήσεις*

$$K\colon S \to \mathbb{R} \ \ \mu\varepsilon \ \ K = k_1k_2$$

και

$$H\colon S \to \mathbb{R} \ \ \mu\varepsilon \ \ H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Προφανώς για κάθε $p \in S$ έχουμε

$$K(p) = \det L_p$$

και

$$H(p) = \frac{1}{2}\mathrm{trace}\, L_p,$$

όπου L_p είναι η απεικόνιση Weingarten της επιφάνειας S στο σημείο της p. Θυμίζουμε ότι η ορίζουσα και το ίχνος είναι οι αναλλοίωτες κάθε γραμμικού ενδομορφισμού τυχόντος 2-διάστατου διανυσματικού χώρου.

Γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση Weingarten αλλάζει πρόσημο αν αλλάξει ο προσανατολισμός. Αυτό έχει ως συνέπεια η μέση καμπυλότητα επίσης να αλλάζει πρόσημο, σε αντίθεση με την καμπυλότητα Gauss που παραμένει αναλλοίωτη.

Οι κύριες καμπυλότητες κάθε επιπέδου (Παράδειγμα 6.1.1) είναι $k_1 = k_2 = 0$ παντού, οπότε η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα κάθε επιπέδου είναι $K = H = 0$.

Οι κύριες καμπυλότητες του ορθού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας r (Παράδειγμα 6.1.2) είναι $k_1 = 1/r$ και $k_2 = 0$. Η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα του ορθού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας r είναι αντίστοιχα

$$K = 0 \ \text{ και } \ H = \frac{1}{2r}.$$

Οι κύριες καμπυλότητες της σφαίρας ακτίνας R (Παράδειγμα 6.1.3) είναι $k_1 = k_2 = 1/R$. Η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα της σφαίρας ακτίνας R είναι αντίστοιχα

$$K = \frac{1}{R^2} \ \text{ και } \ H = \frac{1}{R}.$$

Πρόταση 6.5.1. *Έστω S και $\tilde{S}$ προσανατολισμένες επιφάνειες με κύριες καμπυλότητες k_1, k_2, $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$, καμπυλότητες Gauss $K, \tilde{K}$ και μέση καμπυλότητα $H, \tilde{H}$, αντίστοιχα. Αν οι S και $\tilde{S}$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες και $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι η ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ με $\tilde{S} = T(S)$, τότε ισχύει*

$$\tilde{k}_i \circ T = \varepsilon k_i, \ i = 1, 2, \quad \tilde{K} \circ T = K \ \text{ και } \ \tilde{H} \circ T = \varepsilon H,$$

όπου $\varepsilon = 1$ ή $\varepsilon = -1$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 6.2.1 και του ορισμού της δεύτερης θεμελιώδους μορφής. □

Η ακόλουθη πρόταση μας εξασφαλίζει ένα τρόπο υπολογισμού της καμπυλότητας Gauss και της μέσης καμπυλότητας.

Πρόταση 6.5.2. *Έστω $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων προσανατολισμένης επιφάνειας S με παραμέτρους $(u,v) \in U$. Η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα δίνονται από τις σχέσεις*

$$K \circ X = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{6.2}$$

και

$$H \circ X = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}. \tag{6.3}$$

Απόδειξη. Έστω $A = (a_{ij})$ ο πίνακας της απεικόνισης Weingarten ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ του εφαπτομένου επιπέδου. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} LX_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v \\ LX_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v. \end{aligned}$$

Παίρνοντας τα εσωτερικά γινόμενα με τα διανύσματα της βάσης $\{X_u, X_v\}$ του εφαπτομένου επιπέδου, βρίσκουμε ότι

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

ή ισοδύναμα

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Όμως είναι

$$K \circ X = \det L = \det A$$

και

$$H \circ X = \frac{1}{2}\operatorname{trace} L = \frac{1}{2}\operatorname{trace} A.$$

Μετά από άμεσο υπολογισμό λαμβάνουμε τις ζητούμενες ισότητες (6.2) και (6.3). □

Άμμεση συνέπεια της ανωτέρω πρότασης είναι ότι η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα είναι λείες, άρα και συνεχείς συναρτήσεις. Από τον ορισμό τους προκύπτει ότι

$$H^2 \geq K.$$

Η ισότητα ισχύει σε εκείνα τα σημεία όπου οι κύριες καμπυλότητες είναι ίσες. Επιπλέον οι κύριες καμπυλότητες δίνονται συναρτήσει της καμπυλότητας Gauss και της μέσης καμπυλότητας από τις σχέσεις

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \;\text{ και }\; k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}.$$

Είναι φανερό ότι οι κύριες καμπυλότητες είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα του γραφήματος Γ_h (Παράδειγμα 5.2.1) μιας λείας συνάρτησης $h\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι αντίστοιχα

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2}$$

και

$$H = \frac{(1 + h_y^2)h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_x^2)h_{yy}}{2(1 + h_x^2 + h_y^2)^{3/2}}.$$

Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 6.5.2, αφού τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης ως προς το σύστημα συντεταγμένων

$$X(x, y) = (x, y, h(x, y))$$

είναι αντίστοιχα

$$\begin{aligned} E &= 1 + h_x^2, \\ F &= h_x h_y, \\ G &= 1 + h_y^2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} e &= \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}, \\ f &= \frac{h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}, \\ g &= \frac{h_{yy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Το μοναδιαίο κάθετο είναι

$$N\colon \Gamma_h \to \mathbb{R}^3 \;\text{ με }\; N = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}.$$

Παράδειγμα 6.5.1 (Εκ περιστροφής επιφάνειες). Έστω $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s και

$$c(s) = (\phi(s), 0, \psi(s)), \quad s \in I,$$

τέτοια ώστε $\phi(s) > 0$ για κάθε $s \in I$. Γνωρίζουμε (Παράδειγμα 3.5.1) ότι η παραμετρική επιφάνεια επιφάνεια $X\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$X(s,\theta) = (\phi(s)\cos\theta, \phi(s)\sin\theta, \psi(s))$$

είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια. Πρόκειται για εκ περιστροφής επιφάνεια που παράγεται από περιστροφή της καμπύλης c γύρω από τον άξονα Oz.

Τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης δίνονται ως εξής

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \phi^2.$$

Η απεικόνιση Gauss είναι

$$N = \frac{X_s \times X_\theta}{\|X_s \times X_\theta\|} = \left(-\dot\psi\cos\theta, -\dot\psi\sin\theta, \dot\phi\right),$$

ενώ τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης είναι

$$e = \dot\phi\ddot\psi - \dot\psi\ddot\phi, \quad f = 0, \quad g = \phi\dot\psi.$$

Επειδή

$$\dot\phi^2 + \dot\psi^2 = 1,$$

μετά από απλές πράξεις βρίσκουμε ότι η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα είναι αντίστοιχα

$$K = -\frac{\ddot\phi}{\phi}$$

και

$$H = \frac{-\dot\psi + \phi(\dot\psi\ddot\phi - \ddot\psi\dot\phi)}{2\phi}.$$

Επιπλέον διαπιστώνουμε ότι

$$N_s = -kX_s,$$

όπου k είναι η καμπυλότητα της c ως καμπύλης του $\mathbb{R}^2$ και

$$N_\theta = -\frac{\dot{\psi}}{\phi} X_\theta.$$

Συνεπώς οι κύριες καμπυλότητες είναι οι συναρτήσεις k και $\dot{\psi}/\phi$.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε εκ περιστροφής επιφάνειες με σταθερή καμπυλότητα Gauss K. Πράγματι, αρκεί να επιλέξουμε ως συνάρτηση ϕ μια λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$\ddot{\phi} + K\phi = 0$$

και ως ψ τη συνάρτηση

$$\psi(s) = \int \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} ds.$$

Για $K = 1$, μπορούμε να επιλέξουμε $\phi(s) = \alpha \cos s$, όπου α είναι θετική σταθερά. Τότε

$$\psi(s) = \int_0^s \sqrt{1 - \alpha^2 \cos^2 \sigma} d\sigma.$$

Αν $\alpha = 1$, τότε η επιφάνεια που λαμβάνουμε είναι προφανώς η σφαίρα $\mathbb{S}^2$. Οι επιφάνειες που προκύπτουν για $\alpha \neq 1$, δεν είναι η σφαίρα $\mathbb{S}^2$, αλλά επιφάνειες τοπικά ισομετρικές με αυτή (άσκηση). Σημειώνουμε ότι αν $\alpha < 1$, τότε η καμπύλη

$$c(s) = (\phi(s), 0, \psi(s)), \quad s \in I,$$

ορίζεται για $s \in (-\pi/2, \pi/2)$, ενώ αν $\alpha > 1$, τότε $s \in (-\pi/2 + s_0, \pi/2 - s_0)$, όπου $s_0 \in (0, \pi/2)$ με $\sin s_0 = 1/\alpha$.

6.6 Ελλειπτικά-υπερβολικά-παραβολικά-ισόπεδα-ομφαλικά σημεία

Στη συνέχεια θα προβούμε στην ταξινόμηση των σημείων μιας επιφάνειας. Έστω p σημείο κανονικής επιφάνειας S. Θεωρούμε το υποσύνολο του εφαπτομένου επιπέδου

$$\mathcal{D}(p) = \{w \in T_pS : II_p(w) = \pm 1\},$$

το οποίο είναι γνωστό ως **δεικνύουσα Dupin** της S στο p. Αν $e_1(p)$, $e_2(p)$ είναι οι κύριες διευθύνσεις της επιφάνειας στο p και γράψουμε

$$w = xe_1(p) + ye_2(p),$$

τότε βρίσκουμε

$$II_p(w) = k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2.$$

Τούτο σημαίνει ότι η δεικνύουσα Dupin είναι κωνική τομή. Ανάλογα με το είδος αυτής της κωνικής τομής, ταξινομούμε τα σημεία της επιφάνειας ως ακολούθως.

Ορισμός 6.6.1. *Ένα σημείο p κανονικής επιφάνειας S καλείται*

- **Ελλειπτικό** *αν η δεικνύουσα Dupin είναι έλλειψη ή ισοδύναμα η δεύτερη θεμελιώδης μορφή II_p είναι είτε θετικά, είτε αρνητικά οριστική.*
- **Υπερβολικό** *αν η δεικνύουσα Dupin είναι υπερβολή ή ισοδύναμα αν η δεύτερη θεμελιώδης μορφή II_p είναι αόριστη.*
- **Παραβολικό** *αν η δεύτερη θεμελιώδης μορφή II_p είναι είτε θετικά, είτε αρνητικά ημιοριοριστική.*
- **Ισόπεδο** *αν η δεύτερη θεμελιώδης μορφή II_p είναι μηδέν.*
- **Ομφαλικό** *αν η πρώτη και δεύτερη θεμελιώδεις μορφή πληρούν την συνθήκη $II_p = \lambda I_p$ για $\lambda \neq 0$.*

Όλα τα σημεία κάθε επιπέδου (Παράδειγμα 6.2.1) είναι ισόπεδα, ενώ τα σημεία του ορθού κυκλικού κυλίνδρου (Παράδειγμα 6.2.2) είναι παραβολικά. Επιπλέον, όλα τα σημεία τυχούσας σφαίρας (Παράδειγμα 6.2.3) είναι ομφαλικά.

Η ακόλουθη πρόταση προκύπτει άμεσα.

Πρόταση 6.6.1. *Ένα σημείο p είναι*

- *Ελλειπτικό αν και μόνο αν $K(p) > 0$.*
- *Υπερβολικό αν και μόνο αν $K(p) < 0$.*
- *Παραβολικό αν και μόνο $K(p) = 0$ και $H(p) \neq 0$.*

- *Ισόπεδο αν και μόνο αν* $K(p) = 0 = H(p)$, *ή ισοδύναμα* $k_1(p) = 0 = k_2(p)$.
- *Ομφαλικό αν και μόνο αν* $H^2(p) = K(p) > 0$, *ή ισοδύναμα* $k_1(p) = k_2(p) \neq 0$, *ή ισοδύναμα*

$$\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} \neq 0.$$

Σημειώνουμε πως τα ομφαλικά είναι και ελλειπτικά σημεία.

Πρόταση 6.6.2. *Έστω σημείο p κανονικής επιφάνειας S.*

(i) Αν το p είναι ελλειπτικό, τότε υπάρχει περιοχή V του p στην S, τέτοια ώστε να περιέχεται σε έναν από τους δύο ημιχώρους με ακμή το εφαπτόμενο επίπεδο T_pS και $V \cap T_pS = \{p\}$.

(ii) Αν το p είναι υπερβολικό, τότε κάθε περιοχή V του p στην S περιέχει σημεία και των δύο ημιχώρων με ακμή το T_pS.

Απόδειξη. Έστω $X\colon U \to S$ σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας S με παραμέτρους $(u, v) \in U$ και $p = X(u_0, v_0)$. Θεωρούμε τη λεία συνάρτηση $h\colon U \to \mathbb{R}$ με

$$h(u, v) = \langle X(u, v) - X(u_0, v_0), N \circ X(u_0, v_0)\rangle,$$

όπου N είναι η απεικόνιση Gauss της S. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} h_u(u_0, v_0) &= \langle X_u(u_0, v_0), N \circ X(u_0, v_0)\rangle = 0, \\ h_v(u_0, v_0) &= \langle X_v(u_0, v_0), N \circ X(u_0, v_0)\rangle = 0. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι το (u_0, v_0) είναι κρίσιμο σημείο της h. Επιπλέον έχουμε

$$\begin{aligned} h_{uu}(u_0, v_0) &= \langle X_{uu}(u_0, v_0), N \circ X(u_0, v_0)\rangle = e(u_0, v_0), \\ h_{uv}(u_0, v_0) &= \langle X_{uv}(u_0, v_0), N \circ X(u_0, v_0)\rangle = f(u_0, v_0), \\ h_{vv}(u_0, v_0) &= \langle X_{vv}(u_0, v_0), N \circ X(u_0, v_0)\rangle = g(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Επομένως ο Εσσιανός πίνακας της συνάρτησης h στο (u_0, v_0) είναι ο πίνακας της δεύτερης θεμελιώδους μορφής στο p ως προς τη βάση $\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)\}$.

(i) Αν το σημείο p είναι ελλειπτικό, τότε από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι ο Εσσιανός πίνακας της h στο κρίσιμό της σημείο (u_0, v_0) είναι θετικά ή αρνητικά οριστικός. Συνεπώς η συνάρτηση h λαμβάνει τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο $h(u_0, v_0) = 0$, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

(ii) Αν το σημείο p είναι υπερβολικό, συμπεραίνουμε ότι ο Εσσιανός πίνακας της h στο (u_0, v_0) είναι αόριστος. Επομένως σε κάθε περιοχή του (u_0, v_0) υπάρχουν σημεία στα οποία η συνάρτηση h λαμβάνει τιμή μεγαλύτερη της τιμής $h(u_0, v_0) = 0$ και σημεία στα οποία λαμβάνει τιμή μικρότερη της τιμής $h(u_0, v_0) = 0$. □

Σημειώνουμε ότι δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το σχήμα της επιφάνειας κοντά σε παραβολικά ή ισόπεδα σημεία.

Είναι γνωστό ότι οι κύριες καμπυλότητες κάθε επιπέδου (Παράδειγμα 6.1.1) είναι $k_1 = k_2 = 0$ παντού, ενώ αυτές της σφαίρας ακτίνας R (Παράδειγμα 6.1.3) είναι $k_1 = k_2 = 1/R$ (ως προς το εσωτερικό της κάθετο). Το ακόλουθο θεώρημα μας λέει ότι αυτές είναι οι μόνες επιφάνειες των οποίων οι κύριες καμπυλότητες είναι ίσες ή ισοδύναμα ισχύει $H^2 = K$ παντού.

Θεώρημα 6.6.3. *Έστω S συνεκτική κανονική επιφάνεια της οποίας οι κύριες καμπυλότητες είναι ίσες. Τότε η S είναι τμήμα επιπέδου ή σφαίρας.*

Απόδειξη. Θέτουμε $\lambda = k_1 = k_2$. Τότε η απεικόνιση Weingarten είναι

$$L_p = \lambda Id_p$$

σε κάθε σημείο $p \in S$, όπου Id_p είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pS. Η συνάρτηση $\lambda\colon S \to \mathbb{R}$ είναι λεία αφού $\lambda = H/2$. Έστω $X\colon U \to S$ σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας με παραμέτρους $(u, v) \in U$ και U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} -(N \circ X)_u &= \lambda X_u \\ -(N \circ X)_v &= \lambda X_v, \end{aligned}$$

όπου N είναι η απεικόνιση Gauss της S. Επειδή είναι

$$(N \circ X)_{uv} = (N \circ X)_{vu} \;\; \text{και} \;\; X_{uv} = X_{vu},$$

τελικά βρίσκουμε ότι

$$(\lambda \circ X)_v X_u - (\lambda \circ X)_u X_v = 0 \;\; \text{στο} \;\; U,$$

ή ισοδύναμα

$$(\lambda \circ X)_v = (\lambda \circ X)_u = 0 \;\; \text{στο} \;\; U.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$d\lambda(X_u) = 0 = d\lambda(X_v)$$

και επομένως $d\lambda_p = 0$ για κάθε $p \in S$. Συνεπώς, λόγω της Πρότασης 3.4.2, η συνάρτηση λ είναι σταθερή. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

Έστω ότι $\lambda = 0$. Τότε έχουμε $dN_p = 0$ για κάθε $p \in S$. Λόγω του Πορίσματος 3.4.3, συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση Gauss N είναι σταθερή. Θεωρούμε τη λεία συνάρτηση $h \colon S \to \mathbb{R}$

$$h(p) = \langle p, N \rangle, \quad p \in S.$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι $dh_p = 0$ για κάθε $p \in S$. Λόγω της Πρότασης 3.4.2, αυτό σημαίνει ότι η h είναι σταθερή και ότι η S περιέχεται σε επίπεδο κάθετο στο σταθερό διάνυσμα N.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda \neq 0$. Θεωρούμε τη λεία απεικόνιση $\phi \colon S \to \mathbb{R}^3$ με

$$\phi(p) = N(p) + \lambda p, \quad p \in S.$$

Το διαφορικό της σε κάθε $p \in S$ είναι

$$\begin{aligned} d\phi_p &= dN_p + \lambda Id_p \\ &= -L_p + \lambda Id_p \\ &= 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, βάσει του Πορίσματος 3.4.3, η ϕ είναι σταθερή. Έστω $\phi(p) = p_0$ για κάθε $p \in S$. Τότε προφανώς είναι

$$d\left(p, -\frac{1}{\lambda} p_0\right) = \left\| \frac{1}{\lambda} N(p) \right\| = \frac{1}{|\lambda|},$$

το οποίο σημαίνει ότι η S περιέχεται σε σφαίρα κέντρου $-\frac{1}{\lambda} p_0$ και ακτίνας $1/|\lambda|$. □

6.7 Ασυμπτωτικές διευθύνσεις-ασυμπτωτικές καμπύλες

Ορισμός 6.7.1.

- *Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_pS \setminus \{0\}$ στο σημείο p της κανονικής επιφάνειας S καλείται* **ασυμπτωτική διεύθυνση** *της S στο p αν η κάθετη καμπυλότητα στη διεύθυνση w είναι $k_n(w) = 0$ ή ισοδύναμα $II_p(w) = 0$.*

- *Μια κανονική καμπύλη $c\colon I \to S$ καλείται* **ασυμπτωτική καμπύλη** *της S αν το διάνυσμα ταχύτητάς της $c'(t)$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση για κάθε $t \in I$.*

Έστω $X\colon U \to S$ σύστημα συντεταγμένων κανονικής επιφάνειας S με παραμέτρους $(u, v) \in U$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Θεωρούμε σημείο $p \in X(U)$ και

$$w = aX_u + bX_v \in T_pS \setminus \{0\}.$$

Το διάνυσμα w είναι ασυμπτωτική διεύθυνση αν $II_p(w) = 0$, ή ισοδύναμα

$$ea^2 + 2fab + gb^2 = 0, \tag{6.5}$$

όπου τα e, f, g υπολογίζονται στο $X^{-1}(p)$. Είναι φανερό ότι για να έχει λύση η εξίσωση (6.5) ως προς a, b (ή ισοδύναμα ως προς τους λόγους a/b ή b/a) πρέπει κι αρκεί $eg - f^2 \leq 0$ ή $K(p) \leq 0$. Συνεπώς αποδείξαμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πρόταση 6.7.1. *Σε ένα σημείο p κανονικής επιφάνειας S υπάρχουν ασυμπτωτικές διευθύνσεις αν και μόνο αν το σημείο είναι υπερβολικό, παραβολικό ή ισόπεδο.*

Ακριβέστερα, στο σημείο p

- υπάρχουν δύο ακριβώς ασυμπτωτικές διευθύνσεις αν και μόνο αν το p είναι υπερβολικό σημείο

- υπάρχει μία ακριβώς ασυμπτωτική διεύθυνση αν και μόνο αν το p είναι παραβολικό και

- υπάρχουν περισσότερες από δύο ασυμπτωτικές διευθύνσεις αν και μόνο αν το p είναι ισόπεδο. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε διεύθυνση είναι ασυμπτωτική διεύθυνση.

Είναι φανερό ότι η επιφανειακή καμπύλη

$$c(t) = X\left(u(t), v(t)\right), \ ; t \in I,$$

είναι ασυμπτωτική καμπύλη αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $u(t), v(t)$ πληρούν την εξίσωση

$$e(u'(t))^2 + 2fu'(t)v'(t) + g(v'(t))^2 = 0 \tag{6.6}$$

για κάθε $t \in I$, όπου χάριν συντομίας έχουμε θέσει

$$e = e\left(u(t), v(t)\right), \ \ f = f\left(u(t), v(t)\right), \ \ g = g\left(u(t), v(t)\right).$$

Πρόταση 6.7.2. *Έστω κανονική επιφάνεια S και $X \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων αυτής.*

(i) Αν οι παραμετρικές καμπύλες του συστήματος συντεταγμένων X είναι ασυμπτωτικές καμπύλες, τότε είναι

$$e = g = 0 \ \text{ στο } \ U. \tag{6.7}$$

(ii) Αν όλα τα σημεία της περιοχής συντεταγμένων $X(U)$ είναι υπερβολικά και ισχύει η (6.7), τότε οι ασυμπτωτικές καμπύλες της περιοχής $X(U)$ είναι ακριβώς οι παραμετρικές καμπύλες του συστήματος συντεταγμένων X.

Απόδειξη. (i) Η κάθετη καμπυλότητα στη διέθυνση των παραμετρικών καμπυλών του συστήματος συνταταγμένων X είναι

$$k_n(X_u) = \frac{e}{E} \ \text{ και } \ k_n(X_v) = \frac{g}{G}.$$

Αν οι παραμετρικές καμπύλες είναι ασυμπτωτικές καμπύλες, τότε τα ζεύγη των συναρτήσεων

$$u(t) = t, v(t) = v_0$$

και

$$u(t) = u_0, v(t) = t$$

είναι λύσεις της (6.8), απ' όπου άμεσα προκύπτει η (6.7).

(ii) Ας υποθέσουμε όλα τα σημεία της περιοχής συντεταγμένων $X(U)$ είναι υπερβολικά και ισχύει η (6.7). Λόγω της υπόθεσης, το θεμελιώδες ποσό δευτέρας τάξης f δεν μηδενίζεται πουθενά. Τότε από την (6.8) βρίσκουμε ότι η κανονική καμπύλη $c(t) = X\left(u(t), v(t)\right), t \in I$, είναι ασυμπτωτική καμπύλη αν $u'(t)v'(t) = 0$ ή ισοδύναμα $u'(t) = 0$ ή $v'(t) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η c είναι παραμετρική καμπύλη. □

Αναφέρουμε το ακόλουθο θεώρημα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 6.7.3. *Έστω κανονική επιφάνεια S, της οποίας όλα τα σημεία είναι υπερβολικά. Τότε για κάθε σημείο της p, υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $X\colon U \to S$ με $p \in X(U)$ του οποίου οι παραμετρικές καμπύλες είναι ασυμπτωτικές καμπύλες.*

Ένα τέτοιο σύστημα όπως στο ανωτέρω θεώρημα θα αναφέρεται συχνά ως *σύστημα ασυμπτωτικών γραμμών*.

Παράδειγμα 6.7.1. Θεωρούμε την επιφάνεια S με εξίσωση $z = x^2 - y^2$. Είναι προφανώς επιφάνεια γράφημα της συνάρτησης $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $h(x, y) = x^2 - y^2$. Τα θεμελιώδη ποσά δευτέρας τάξης ως προς το σύστημα συντεταγμένων $X\colon \mathbb{R}^2 \to S$ με

$$X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$$

είναι

$$e(u, v) = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, \quad f(u, v) = 0, \quad g(u, v) = -\frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}.$$

Η επιφανειακή καμπύλη

$$c(t) = X\left(u(t), v(t)\right), \ t \in I,$$

είναι ασυμπτωτική καμπύλη αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $u(t), v(t)$ πληρούν την εξίσωση (6.8) ή ισοδύναμα

$$(u'(t))^2 - (v'(t))^2 = 0. \tag{6.8}$$

Από αυτή βρίσκουμε ότι οι συναρτήσεις $u(t)+v(t)$ και $u(t)-v(t)$ είναι σταθερές, έστω a_1 και a_2. Τότε οι καμπύλες

$$c(t) = X(u(t), v(t)) \text{ με } u(t) = t \text{ και } v(t) = a_1 - t, \ t \in \mathbb{R}$$

και

$$c(t) = X(u(t), v(t)) \text{ με } u(t) = t \text{ και } v(t) = a_2 + t, \ t \in \mathbb{R}$$

είναι όλες οι ασυμπτωτικές καμπύλες της S. Εύκολα προκύπτει πως είναι όλες τους ευθείες (γιατί;). Θεωρούμε την απεικόνιση $\tilde{X} = X \circ \phi$, όπου $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με

$$\phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v) = \left(\frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v}), \frac{1}{2}(\tilde{u} - \tilde{v})\right).$$

Η απεικόνιση $\tilde{X}$ είναι σύστημα συντεταγμένων (γιατί;) της S. Επιπλέον, επειδή

$$u = \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v}) \text{ και } v = \frac{1}{2}(\tilde{u} - \tilde{v})$$

συμπεραίνουμε ότι το $\tilde{X}$ είναι σύστημα ασυμπτωτικών γραμμών.

6.8 Γραμμές καμπυλότητας

Ορισμός 6.8.1.
- *Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_pS \smallsetminus \{0\}$ στο σημείο p της κανονικής επιφάνειας S καλείται* **κύρια διεύθυνση** *της S στο p αν είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten L_p.*
- *Μια κανονική καμπύλη $c\colon I \to S$ καλείται* **καμπύλη καμπυλότητας (ή γραμμή καμπυλότητας)** *της S αν το διάνυσμα ταχύτητάς της $c'(t)$ είναι κύρια διεύθυνση για κάθε $t \in I$.*

Πρόταση 6.8.1. *Έστω $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων κανονικής επιφάνειας S με παραμέτρους $(u, v) \in U$ και $p \in X(U)$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα $w = aX_u + bX_v \in T_pS \smallsetminus \{0\}$ είναι κύρια διεύθυνση στο σημείο p αν και μόνο αν ισχύει*

$$\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0, \tag{6.9}$$

όπου τα E, F, G, e, f, g υπολογίζονται στο $X^{-1}(p)$.

Απόδειξη. Το εφαπτόμενο διάνυσμα $w = aX_u + bX_v \in T_pS \setminus \{0\}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten L_p αν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $L_p w = \lambda w$ ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} aa_{11} + ba_{12} &= \lambda a \\ aa_{21} + ba_{22} &= \lambda b, \end{aligned}$$

όπου $A = (a_{ij})$ είναι ο πίνακας της L_p ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$, ο οποίος δίνεται από την (6.4). Από τις δύο αυτές εξισώσεις, με απαλοιφή του λ και με τη βοήθεια της (6.4), προκύπτει η (6.9). □

Είναι φανερό ότι η επιφανειακή καμπύλη

$$c(t) = X\left(u(t), v(t)\right), \ t \in I,$$

είναι γραμμή καμπυλότητας αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $u(t), v(t)$ πληρούν την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} (v'(t))^2 & -u'(t)v'(t) & (u'(t))^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0, \tag{6.10}$$

για κάθε $t \in I$, όπου

$$E = E\left(u(t), v(t)\right), \quad F = F\left(u(t), v(t)\right), \quad G = G\left(u(t), v(t)\right)$$

και

$$e = e\left(u(t), v(t)\right), \quad f = f\left(u(t), v(t)\right), \quad g = g\left(u(t), v(t)\right).$$

Πρόταση 6.8.2. *Έστω κανονική επιφάνεια S, της οποίας οι κύριες καμπυλότητες πληρούν την ανισότητα $k_1 > k_2$ και $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων αυτής. Τότε οι παραμετρικές καμπύλες του X είναι καμπύλες καμπυλότητας αν και μόνο αν είναι*

$$F = f = 0 \ \text{ στο } \ U. \tag{6.11}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (6.11). Τότε από την (6.10) βρίσκουμε ότι η κανονική καμπύλη

$$c(t) = X\left(u(t), v(t)\right), \ t \in I,$$

είναι καμπύλη καμπυλότητας αν

$$u'(t)v'(t)(Eg - eG) = 0.$$

Ισχυριζόμαστε ότι λόγω της υπόθεσης, η συνάρτηση $Eg - eG$ δεν μηδενίζεται πουθενά. Πράγματι, αν σε κάποιο σημείο ήταν $Eg = eG$, τότε λόγω της Πρόταση 6.6.1, θα ήταν $k_1 = k_2$, άτοπο. Άρα $u'(t) = 0$ ή $v'(t) = 0$ το οποίο σημαίνει ότι η c είναι παραμετρική καμπύλη.

Αντίστροφα, αν οι παραμετρικές καμπύλες είναι καμπύλες καμπυλότητας, τότε τα ζεύγη των συναρτήσεων

$$u(t) = t, v(t) = v_0$$

και

$$u(t) = u_0, v(t) = t$$

είναι λύσεις της (6.10), απ' όπου λαμβάνουμε

$$Ef = eF \ \text{ και } \ Fg = fG.$$

Όμως επειδή τα X_u, X_v είναι κύριες διευθύνσεις, δηλαδή ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης Weingarten που αντιστοιχούν στις διαφορετικές ιδιοτιμές (Θεώρημα 6.4.1), άμεσα προκύπτει ότι $F = 0$. Οι παραπάνω σχέσεις δίνουν την (6.11). □

Αναφέρουμε το ακόλουθο θεώρημα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 6.8.3. *Έστω κανονική επιφάνεια S, της οποίας οι κύριες καμπυλότητες πληρούν την ανισότητα $k_1 > k_2$. Τότε για κάθε σημείο της p, υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $X\colon U \to S$ με $p \in X(U)$ του οποίου οι παραμετρικές καμπύλες είναι καμπύλες καμπυλότητας.*

Ένα τέτοιο σύστημα όπως στο ανωτέρω θεώρημα θα αναφέρεται συχνά ως *σύστημα γραμμών καμπυλότητας*.

Το ακόλουθο θεώρημα μας εξασφαλίζει ένα απλό κριτήριο για το πότε μια καμπύλη είναι καμπύλη καμπυλότητας.

Θεώρημα 6.8.4 (Rodrigues). *Μια κανονική καμπύλη $c\colon I \to S$, με παράμετρο $t \in I$, είναι γραμμή καμπυλότητας αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$(N \circ c)'(t) = \lambda(t)c'(t) \ \text{για κάθε} \ t \in I.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό γνωρίζουμε ότι η κανονική καμπύλη $c\colon I \to S$, με παράμετρο $t \in I$, είναι γραμμή καμπυλότητας αν και μόνο αν το διάνυσμα ταχύτητάς της $c'(t)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten $L_{c(t)}$. Αυτό είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη συνάρτησης $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$L_{c(t)}c'(t) = -\lambda(t)c'(t) \ \text{για κάθε} \ t \in I.$$

ή ισοδύναμα

$$dN_{c(t)}c'(t) = \lambda(t)c'(t) \ \text{για κάθε} \ t \in I.$$

Από τον ορισμό του διαφορικού (Ορισμός (3.4.2)) προκύπτει η ζητούμενη σχέση. □

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ του Θεωρήματος 6.8.4 είναι κύρια καμπυλότητα της S κατά μήκος της καμπύλης c.

6.9 Τρίτη θεμελιώδης μορφή

Ορισμός 6.9.1. *Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια. Η* **τρίτη θεμελιώδης μορφή** *III_p της S στο σημείο της p είναι η τετραγωνική μορφή*

$$III_p\colon T_pS \to \mathbb{R} \ \text{με} \ III_p(w) = \langle L_p w, L_p w\rangle_p.$$

Προφανώς ισχύει

$$III_p(w) = \langle dN_p(w), dN_p(w)\rangle_p = \|dN_p(w)\|^2,$$

όπου N είναι η απεικόνιση Gauss της S. Είναι φανερό πως η τρίτη θεμελιώδης μορφή είναι θετικώς ημιοριστική. Επειδή η απεικόνιση

Weingar-ten L_p είναι αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός, είναι επιπλέον

$$III_p(w) = \langle L_p^2 w, w\rangle_p,$$

όπου έχουμε θέσει $L_p^2 = L_p \circ L_p$.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει τη σχέση μεταξύ των τριών θεμελιωδών μορφών μιας επιφάνειας.

Θεώρημα 6.9.1. *Σε κάθε σημείο p προσανατολισμένης επιφάνειας S, οι τρείς θεμελιώδεις της μορφές πληρούν τη σχέση*

$$III_p - 2H(p)II_p + K(p)I_p = 0.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση Weingarten L_p πληροί

$$L_p^2 - \mathrm{trace}(L_p)L_p + \det(L_p)Id = 0,$$

όπου Id είναι η ταυτοτική απεικόνιση του εφαπτομένου επιπέδου T_pS. Από τον ορισμό της καμπυλότητας Gauss και της μέσης καμπυλότητας έχουμε

$$L_p^2 - 2H(p)L_p + K(p)Id = 0,$$

απ΄ όπου άμεσα προκύπτει το θεώρημα. □

Έστω $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$LX_u = -N_u, \quad LX_v = -N_v,$$

όπου έχουμε θέσει $N_u = (N \circ X)_u$ και $N_v = (N \circ X)_v$.

Συνεπώς ο πίνακας της τρίτης θεμελιώδους μορφής, ως τετραγωνικής μορφής ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$, είναι ο

$$\begin{pmatrix} \|N_u\|^2 & \langle N_u, N_v\rangle \\ \langle N_u, N_v\rangle & \|N_v\|^2 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, αν

$$w = aX_u + bX_v \in T_pS,$$

τότε λαμβάνουμε

$$III_p(w) = \|N_u\|^2 a^2 + 2\langle N_u, N_v\rangle ab + \|N_v\|^2 b^2. \qquad (6.12)$$

Προφανώς, γεωμετρικώς ισότιμες επιφάνειες έχουν την ίδια τρίτη θεμελιώδη μορφή. Πράγματι, έστω S και $\tilde{S}$ προσανατολισμένες επιφάνειες με τρίτες θεμελιώδεις μορφές III και $\tilde{III}$, αντίστοιχα. Αν οι S και $\tilde{S}$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες και $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι η ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ με $\tilde{S} = T(S)$, τότε ισχύει

$$\tilde{III}_{T(p)}(dT_p(w)) = III_p(w), \text{ για κάθε } p \in S \text{ και } w \in T_pS.$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της τρίτης θεμελιώδους μορφής και την Πρόταση 5.2.1.

6.10 Ελαχιστικές επιφάνειες

Μια κανονική επιφάνεια καλείται **ελαχιστική** αν η μέση καμπυλότητά της είναι $H = 0$. Από την ανισότητα

$$H^2 \geq K$$

προκύπτει ότι οι ελαχιστικές επιφάνειες έχουν καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$. Είναι φανερό πως τα σημεία κάθε ελαχιστικής επιφάνειας είναι είτε υπερβολικά είτε ισόπεδα. Παραδείγματα ελαχιστικών επιφανειών, πέραν των επιπέδων, είναι η ελικοειδής, η αλυσοειδής επιφάνεια (Παράδειγμα 4.2.2) και η επιφάνεια του Enneper (Άσκηση 5).

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.10.1. *Για κάθε σημείο p κανονικής επιφάνειας S υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ με παραμέτρους $(u, v) \in U$ τέτοιο ώστε*

$$E = G \text{ και } F = 0.$$

Ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων καλείται **ισόθερμο**.

Πρόταση 6.10.2. *Αν* $X\colon U \to S$ *είναι ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους* $(u, v) \in U$, *τότε ισχύει*

$$\Delta X = 2EHN,$$

όπου N *είναι η απεικόνιση Gauss της κανονικής επιφάνειας* S, $H = H \circ X$, $N = N \circ X$ *και*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

είναι ο Λαπλασιανός τελεστής.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \Delta X, X_u \rangle &= \langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_{vv}, X_u \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle X_u, X_u \rangle_u + \langle X_u, X_v \rangle_v - \langle X_v, X_{uv} \rangle \\ &= \frac{1}{2}E_u - \frac{1}{2}E_u \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$\langle \Delta X, X_v \rangle = 0.$$

Επομένως είναι

$$\begin{aligned} \Delta X &= \langle \Delta X, N \rangle N \\ &= (\langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_{vv}, N \rangle)N \\ &= (e+g)N. \end{aligned}$$

Από τη σχέση (6.3) έχουμε

$$H = \frac{e+g}{2E}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Το πόρισμα που ακολουθεί συσχετίζει τις ελαχιστικές επιφάνειες με τις αρμονικές συναρτήσεις και προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 6.10.2. Υπενθυμίζουμε ότι μια C^2 συνάρτηση $h\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ καλείται **αρμονική** αν ισχύει $\Delta h = 0$.

Πόρισμα 6.10.3. *Μια κανονική επιφάνεια S είναι ελαχιστική αν και μόνο αν για κάθε ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων X ισχύει*

$$\Delta X = 0.$$

Με άλλα λόγια αν

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

τότε η S είναι ελαχιστική αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της $X(u,v)$ είναι αρμονικές.

Υποθέτουμε τώρα ότι $X(u,v)$ είναι ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων μιας ελαχιστικής επιφάνειας. Θεωρούμε τις μιγαδικές συναρτήσεις

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(x_u + ix_v), \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(y_u + iy_v), \quad \phi_3 = \frac{1}{2}(z_u + iz_v).$$

Λόγω της αρμονικότητας των $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$, εύκολα προκύπτει ότι

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{\zeta}} = 0,$$

όπου $\zeta = u + iv$ και

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Αυτό σημαίνει ότι οι μιγαδικές συναρτήσεις ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 είναι ολόμορφες. Θέτοντας

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3),$$

έχουμε

$$\phi = \frac{1}{2}(X_u + iX_v) = \frac{\partial X}{\partial \zeta}.$$

Συνεπώς η επιφάνεια δίνεται ως

$$X = \mathrm{Re} \int \phi d\zeta.$$

Επιπλέον, επειδή το X είναι ισόθερμο, έχουμε

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = E - G + 2iF = 0.$$

Η ανωτέρω διαδικασία μας εξασφαλίζει μια μέθοδο κατασκευής ελαχιστικών επιφανειών με χρήση ολόμορφων συναρτήσεων. Πράγματι, για κάθε τριάδα ολόμορφων συναρτήσεων $\phi_1(\zeta), \phi_2(\zeta), \phi_3(\zeta)$ οι οποίες επιπλέον ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0,$$

θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X = \mathrm{Re} \int \phi d\zeta$$

με παραμέτρους (u, v) όπου $u + iv = \zeta$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\langle X_u, X_v \rangle = 0 \ \text{ και } \ \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle,$$

δηλαδή το X είναι ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων. Επιπλέον είναι

$$\Delta X = 0.$$

Από το Πόρισμα 6.10.3, προκύπτει ότι η επιφάνεια είναι ελαχιστική.

6.11 Ασκήσεις

1. Παραμετρική επιφάνεια έχει παραμετρική παράσταση

$$X(u, v) = (u, v, e^u + e^v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Να υπολογιστεί η πρώτη κι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή.

(ii) Να υπολογιστεί η κάθετη καμπυλότητα στη διεύθυνση $c'(1)$, όπου c είναι η επιφανειακή καμπύλη $c(t) = X(t, t^2)$.

(iii) Να υπολογίστε την κάθετη καμπυλότητα στις εφαπτομενικές διευθύνσεις των παραμετρικών καμπυλών.

2. Παραμετρική επιφάνεια έχει παραμετρική παράσταση

$$X(u, v) = \left(u, v, u^2 + v^3\right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Να βρεθούν τα ελλειπτικά, υπερβολικά, ισόπεδα, παραβολικά και ομφαλικά σημεία της.

3. Δίνεται η επιφάνεια S με εξίσωση $z = x^5 + y^5$. Αφού αποδείξτε ότι είναι προσανατολισμένη, υπολογίστε την απεικόνιση Weingarten και τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή στο σημείο της $(0, 0, 0)$.

4. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των καθέτων καμπυλοτήτων μιας κανονικής επιφάνειας σε τυχόν σημείο της p, ως προς δύο κάθετες διευθύνσεις στο p, είναι ανεξάρτητο των διευθύνσεων.

5. Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια με παραμετρική παράσταση

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2 v, u^2 - v^2\right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια.

(ii) Να υπολογιστεί η μέση καμπυλότητα, η καμπυλότητα Gauss και οι κύριες καμπυλότητες.

6. Θεωρούμε την επιφάνεια S με εξίσωση $z = x^2 + y^2/2$.

(i) Αποδείξτε ότι τα διανύσματα

$$w_1 = (0, 1, 0) \ \text{ και } \ w_2 = \left(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right)$$

ανήκουν στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο σημείο της $p = (1/2, 0, 1/4)$.

(ii) Βρείτε τις εικόνες των w_1, w_2 μέσω της απεικόνισης Weingarten.

7. Να αποδειχθεί ότι για κάθε κανονική παραμετρική επιφάνεια με παραμετρική παράσταση $X(u, v)$ ισχύουν οι ταυτότητες

$$N_u \times N_v = K X_u \times X_v$$

και

$$N_u \times X_v + X_u \times N_v = -2H X_u \times X_v.$$

8. Δίνεται κανονική παραμετρική επιφάνεια με παραμετρική παράσταση $X(u,v)$ και μοναδιαίο κάθετο $N(u,v)$. Θεωρούμε $a \in \mathbb{R}^*$ και την απεικόνιση

$$\tilde{X}(u,v) = X(u,v) + aN(u,v).$$

(i) Αποδείξτε ότι η $\tilde{X}$ είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια αν και μόνο αν ο αριθμός $1/a$ δεν είναι κύρια καμπυλότητα της X σε κανένα σημείο της. Αν είναι κανονική τότε:

(ii) Βρείτε το μοναδιαίο κάθετο $\tilde{N}$ της $\tilde{X}$.

(iii) Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss $\tilde{K}$ και η μέση καμπυλότητα $\tilde{H}$ της παραμετρικής επιφάνειας $\tilde{X}$ δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\tilde{K} = \frac{K}{1-2Ha+Ka^2}, \quad \tilde{H} = \frac{H-Ka}{1-2Ha+Ka^2}.$$

(iv) Αποδείξτε ότι για κάθε κανονική επιφάνεια με σταθερή μέση καμπυλότητα $c \neq 0$ υπάρχει επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα Gauss $4c^2$.

9. Έστω κανονική επιφάνεια S με μοναδιαίο κάθετο N. Αποδείξτε ότι μια κανονική επιφανειακή καμπύλη $c(t)$ της S είναι γραμμή καμπυλότητάς της, αν και μόνο αν η κανονική παραμετρική επιφάνεια

$$X(t,v) = c(t) + vN(c(t)),$$

έχει καμπυλότητα Gauss ταυτοτικά μηδέν.

10. Έστω c ασυμπτωτική γραμμή μιας κανονικής επιφάνειας S με καμπυλότητα k παντού διάφορη του μηδενός και στρέψη τ. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε σημείο της c ισχύει η σχέση $\tau^2 = -K$, όπου K είναι η καμπυλότητα Gauss της S.

11. Να βρεθούν οι ασυμπτωτικές γραμμές της επιφάνειας με παραμετρική παράσταση

$$X(u,v) = (a\cosh u \cos v, a\cosh u \sin v, au)$$

όπου $a \in \mathbb{R}^+$.

12. Να βρεθούν οι γραμμές καμπυλότητας της επιφάνειας με εξίσωση $z = x^2 + y^2$.

13. Αν όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα μιας κανονικής επιφάνειας S είναι παράλληλα προς σταθερή ευθεία, να αποδειχθεί ότι η καμπυλότητα Gauss της S είναι παντού μηδέν.

14. Αποδείξτε ότι αν όλες οι κάθετες ευθείες μιας κανονικής και συνεκτικής επιφάνειας S διέρχονται από κοινό σημείο, τότε η S είναι τμήμα σφαίρας.

15. Αν από σημείο p μιας κανονικής επιφάνειας διέρχονται τρείς διακεκριμμένες ευθείες που περιέχονται στην επιφάνεια, τότε αποδείξτε ότι το p είναι ισόπεδο σημείο.

16. Να αποδειχθεί ότι η ελικοειδής και η αλυσοειδής επιφάνεια (Παράδειγμα 4.2.2) είναι ελαχιστικές.

17. Αποδείξτε ότι οι εκ περιστροφής επιφάνειες του Παραδείγματος 6.5.1 με καμπυλότητα Gauss $K = 1$ είναι τοπικά ισομετρικές με τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$.

Κεφάλαιο 7

Έξοχο Θεώρημα-Θεμελιώδες Θεώρημα των επιφανειών

7.1 Έξοχο Θεώρημα

Έστω S κανονική επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N\colon S \to \mathbb{S}^2$ και $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U$. Σε κάθε σημείο της περιοχής συντεταγμένων $X(U)$ τα διανύσματα $\{X_u, X_v, N\}$ συνιστούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Αυτή η βάση αποτελεί το ανάλογο του πλαισίου Frenet για καμπύλες του $\mathbb{R}^3$, παρά το γεγονός ότι δεν είναι εν γένει ορθομοναδιαία.

Για να εξετάσουμε πως μεταβάλλεται αυτό το πλαίσιο, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους των διανυσμάτων του ως προς u, v και το αποτέλεσμα να το γράψουμε ως γραμμικό συνδυασμό του πλαισίου $\{X_u, X_v, N\}$ του $\mathbb{R}^3$. Πράγματι, υπάρχουν συναρτήσεις

$$\Gamma_{ij}^k\colon U \to \mathbb{R},\ L_{ij}\colon U \to \mathbb{R},\ b_{ij}\colon U \to \mathbb{R},\ i, j, k \in \{1, 2\},$$

τέτοιες ώστε

$$
\begin{aligned}
X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_{11} N \\
X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_{12} N \\
X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + L_{21} N \\
X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_{22} N \\
N_u &= b_{11} X_u + b_{21} X_v \\
N_v &= b_{12} X_u + b_{22} X_v,
\end{aligned}
$$

όπου

$$
(b_{ij}) = -(a_{ij}) = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \tag{7.1}
$$

και (a_{ij}) είναι ο πίνακας της απεικόνισης Weingarten ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ (βλέπε σχέση (6.4)). Οι δύο τελευταίες εξισώσεις είναι γνωστές ως **τύποι Weingarten**.

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με το N τις τέσσερεις πρώτες εξισώσεις βρίσκουμε ότι

$$
L_{11} = e, \quad L_{12} = L_{21} = f, \quad L_{22} = g
$$

και επομένως λαμβάνουμε τους λεγόμενους **τύπους του Gauss**

$$
X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \tag{7.2}
$$
$$
X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN \tag{7.3}
$$
$$
X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN \tag{7.4}
$$
$$
X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN. \tag{7.5}
$$

Οι συναρτήσεις $\Gamma_{ij}^k \colon U \to \mathbb{R}, i, j, k \in \{1, 2\}$, ονομάζονται **σύμβολα Christoffel** της S ως προς το σύστημα συντεταγμένων X. Επειδή $X_{uv} = X_{vu}$, έχουμε $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Για τον υπολογισμό τους, πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά τους τύπους του Gauss με τα X_u, X_v και λύνουμε τα γραμμικά συστήματα που προκύπτουν. Για παράδειγμα για να υπολογίσουμε τα $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$, από τον πρώτο τύπο του Gauss έχουμε το σύστημα

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle X_{uu}, X_u \rangle \\
\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle X_{uu}, X_v \rangle.
\end{aligned}
$$

Όμως είναι

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2}\langle X_u, X_u \rangle_u = \frac{1}{2}E_u$$

και

$$\langle X_{uu}, X_v \rangle = \langle X_u, X_v \rangle_u - \frac{1}{2}\langle X_u, X_u \rangle_v = F_u - \frac{1}{2}E_v.$$

Επειδή είναι $EG - F^2 > 0$, το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F &= \frac{1}{2}E_u \\ \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G &= F_u - \frac{1}{2}E_v \end{aligned}$$

με αγνώστους $\Gamma^1_{11}, \Gamma^2_{11}$ έχει μοναδική λύση η οποία εξαρτάται μόνο από τα E, F, G και τις μερικές παραγώγους των πρώτης τάξης. Εργαζόμενοι ομοίως για τα υπόλοιπα σύμβολα Christoffel, καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα. Με άλλα λόγια αποδείξαμε το ακόλουθο

Λήμμα 7.1.1. *Τα σύμβολα Christoffel είναι λείες συναρτήσεις οι οποίες εξαρτώνται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή.*

Από το Θεώρημα του Schwarz, προφανώς έχουμε

$$(X_{uu})_v = (X_{uv})_u, \quad (X_{vv})_u = (X_{uv})_v \;\text{ και }\; N_{uv} = N_{vu}.$$

Κάνοντας χρήση των τύπων Gauss και Weingarten, οι ανωτέρω ισότητες γράφονται ισοδύναμα ως

$$A_i X_u + B_i X_v + C_i N = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{7.6}$$

όπου καθένας από τους συντελεστές A_i, B_i, C_i εξαρτάται μόνο από τα σύμβολα Christoffel, τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης E, F, G, e, f, g και τις παραγώγους των πρώτης τάξης. Έτσι η σχέση

$$(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$$

γράφεται ισοδύναμα ως

$$A_1 X_u + B_1 X_v + C_1 N = 0, \tag{7.7}$$

όπου

$$B_1 = \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + eb_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - fb_{21} - (\Gamma_{12}^1)_u.$$

Από την (7.7) προκύπτει ότι $B_1 = 0$, και επομένως έχουμε

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + eb_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + fb_{21} + (\Gamma_{12}^1)_u.$$

Αντικαθιστώντας τα b_{22}, b_{21} και κάνοντας χρήση της (7.1), λαμβάνουμε μετά από πράξεις την ισότητα

$$\begin{aligned}(\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 \\ = -E\frac{eg - f^2}{EG - F^2}.\end{aligned}$$

Λόγω της Πρότασης 6.5.2 (σχέση (6.2)), τελικώς έχουμε

$$(\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 = -EK. \tag{7.8}$$

Η ανωτέρω σχέση είναι γνωστή ως **εξίσωση Gauss** και μας δίνει μια τελείως διαφορετική έκφραση για την καμπυλότητα Gauss, η οποία οδήγησε τον Gauss να διατυπώσει το Theorema Egregium!

Θεώρημα 7.1.2 (Theorema Egregium). *Η καμπυλότητα Gauss κάθε κανονικής επιφάνειας εξαρτάται μόνο από τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης και τις μερικές παραγώγους των μέχρι δευτέρας τάξης, δηλαδή εξαρτάται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή.*

Απόδειξη. Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από την εξίσωση Gauss (7.8) και το Λήμμα 7.1.1. □

Η σημασία του Θεωρήματος 7.1.2 είναι θεμελιώδης για τη Διαφορική Γεωμετρία. Ουσιαστικά μας λέει ότι η καμπυλότητα Gauss, παρότι αρχικά είχε οριστεί ως ποσότητα της έξωθεν γεωμετρίας, τελικώς είναι ποσότητα της έσωθεν γεωμετρίας. Κατά συνέπεια διατηρείται από τις ισομετρίες.

Πόρισμα 7.1.3. *Αν S και $\tilde{S}$ είναι (τοπικά) ισομετρικές επιφάνειες με καμπυλότητες Gauss K και $\tilde{K}$ αντίστοιχα, και $\phi\colon S \to \tilde{S}$ η μεταξύ τους (τοπική) ισομετρία, τότε ισχύει*

$$\tilde{K}(\phi(p)) = K(p) \ \text{ για κάθε } \ p \in S.$$

Έτσι, δύο επιφάνειες με σταθερή αλλά διαφορετική μεταξύ τους καμπυλότητα Gauss δεν μπορεί να είναι τοπικά ισομετρικές. Κατά συνέπεια καμία περιοχή σφαίρας δεν μπορεί να είναι ισομετρική με καμία περιοχή επιπέδου ή του ορθού κυκλικού κυλίνδρου.

7.2 Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρίας των επιφανειών

Από την (7.6), λαμβάνουμε $C_i = 0, i = 1,2,3$. Μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι οι τρείς αυτές εξισώσεις είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις

$$e_v - f_u = e\Gamma^1_{12} + f(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - g\Gamma^2_{11} \tag{7.9}$$

και

$$f_v - g_u = e\Gamma^1_{22} + f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - g\Gamma^2_{12}. \tag{7.10}$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως **εξισώσεις Mainardi-Codazzi**. Αυτές οι εξισώσεις μαζί με την εξίσωση Gauss (7.8) είναι ουσιαστικά σχέσεις μεταξύ πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής.

Το ακόλουθο θεώρημα, γνωστό ως Θεώρημα Bonnet, μας λέει ότι οι εξισώσεις Gauss και Mainardi-Codazzi είναι οι συνθήκες για την ολοκλήρωση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους που αποτελείται από τους τύπους Gauss και Weingarten με άγνωστο την απεικόνιση X.

Θεώρημα 7.2.1 (Θεμελιώδες Θεώρημα). *Έστω λείες συναρτήσεις*

$$E, F, G, e, f, g \colon V \to \mathbb{R}$$

με $E > 0, G > 0$ και $EG - F^2 > 0$ στο ανοικτό υποσύνολο V του $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές πληρούν τις εξισώσεις Gauss (7.8) και Mainardi-Codazzi (7.9), (7.10). Τότε για κάθε $q \in V$ υπάρχει περιοχή $U \subseteq V$ του q και λεία απεικόνιση

$$X \colon U \to \mathbb{R}^3$$

τέτοια ώστε το σύνολο $X(U)$ να είναι κανονική επιφάνεια της οποίας τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης είναι οι συναρτήσεις E, F, G και e, f, g, αντίστοιχα.

Επιπλέον αν

$$\tilde{X} \colon U \to \mathbb{R}^3$$

είναι μια άλλη τέτοια απεικόνιση, τότε οι επιφάνειες $X(U)$ και $\tilde{X}(U)$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες, δηλαδή υπάρχει ισομετρία $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$, η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό, τέτοια ώστε

$$\tilde{X} = T \circ X.$$

7.3 Ασκήσεις

1. Υπάρχει κανονική επιφάνεια τοπικά ισομετρική με τον ορθό κυκλικό κύλινδρο, της οποίας τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$e = 1,\ f = 0,\ g = -1\,;$$

2. Έστω S συνεκτική επιφάνεια με σταθερές μη μηδενικές κύριες καμπυλότητες. Αποδείξτε ότι είναι τμήμα σφαίρας.

   Υπόδειξη: Θεωρείστε σύστημα συντεταγμένων $X \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ με παραμέτρους $(u, v) \in U$, έτσι ώστε να πληρούνται οι σχέσεις:

$$N_u = aX_u \quad \text{και} \quad N_v = bX_v,$$

   όπου a, b είναι μη μηδενικές σταθερές και N είναι η απεικόνιση Gauss. Αρκεί να αποδειχθεί ότι $a = b$. Υποθέστε ότι $a \neq b$ και χρησιμοποιείστε το Έξοχο Θεώρημα για να καταλήξετε σε άτοπο.

Κεφάλαιο 8

Ευθειογενείς-Αναπτυκτές επιφάνειες

8.1 Ευθειογενείς επιφάνειες

Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με ευθειογενείς επιφάνειες, δηλαδή με επιφάνειες που παράγονται από κίνηση ευθείας. Θα μελετήσουμε δε μια ιδιαίτερη κατηγορία ευθειογενών επιφανειών, τις λεγόμενες αναπτυκτές επιφάνειες.

Έστω S κανονική επιφάνεια και $c\colon I \to S$ καμπύλη της S με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$. Η κάθετη καμπυλότητα στην εφαπτομενική διεύθυνση $\dot{c}(s)$ είναι

$$\begin{aligned} k_n(\dot{c}(s)) &= II_{c(s)}(\dot{c}(s)) \\ &= \langle L_{c(s)}\dot{c}(s), \dot{c}(s)\rangle_{c(s)} \\ &= -\langle dN_{c(s)}(\dot{c}(s)), \dot{c}(s)\rangle_{c(s)} \\ &= -\langle (N \circ c)^{\cdot}(s), \dot{c}(s)\rangle \\ &= \langle (N \circ c)(s), \ddot{c}(s)\rangle. \end{aligned}$$

Αν η καμπύλη c είναι ευθεία, τότε $\ddot{c}(s) = 0$, οπότε η διεύθυνση $\dot{c}(s)$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση. Αποδείξαμε επομένως το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πρόταση 8.1.1. *Αν μια κανονική επιφάνεια S, περιέχει καμπύλες οι οποίες είναι ευθείες (ή ευθύγραμμα τμήματα), τότε αυτές είναι ασυμπτωτικές καμπύλες της S.*

Ορισμός 8.1.1. *Μια κανονική επιφάνεια S καλείται* **ευθειογενής** *αν από κάθε σημείο της διέρχεται μια ευθεία (ή ευθύγραμμο τμήμα) που περιέχεται στην S.*

Οι ευθείες μιας ευθειογενούς επιφάνειας αναφέρονται ως **γενέτειρες** αυτής.

Από την ανωτέρω πρόταση καθώς και τις Προτάσεις 6.6.1 και 6.7.1 προκύπτει το ακόλουθο

Πόρισμα 8.1.2. *Κάθε ευθειογενής επιφάνεια έχει καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$ παντού.*

Ως παραδείγματα ευθειογενών επιφανειών μπορούμε να αναφέρουμε το επίπεδο, τον ορθό κυκλικό κύλινδρο, το ελικοειδές καθώς και το μονόχωνο υπερβολοειδές με εξίσωση (άσκηση)

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Παράδειγμα 8.1.1. Έστω $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ επίπεδη καμπύλη, με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$, η οποία περιέχεται σε επίπεδο Π το οποίο είναι κάθετο στο μοναδιαίο διάνυσμα e. Θεωρούμε την κανονική παραμετρική επιφάνεια

$$X\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \text{ με } X(s,v) = c(s) + ve.$$

Η επιφάνεια αυτή καλείται **κυλινδρική επιφάνεια** με **οδηγό καμπύλη** την c. Οι παραμετρικές της καμπύλες $s = s_0$ είναι ευθείες και επομένως πρόκειται περί ευθειογενούς επιφάνειας. Σημειώνουμε ότι όλες οι γενέτειρες είναι παράλληλες προς σταθερή διεύθυνση. Με ένα άμεσο υπολογισμό διαπιστώνουμε ότι τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης πληρούν

$$f = g = 0.$$

Συνεπώς η καμπυλότητα Gauss είναι $K = 0$.

Παράδειγμα 8.1.2. Έστω $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο $u \in I$. Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \ \text{ με } \ X(u,v) = c(u) + vw(u),$$

όπου

$$w(u) = ac(u) + p_0 \ \text{ με } \ a \neq 0 \ \text{ και } \ p_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Προφανώς πρόκειται περί ευθειογενούς επιφάνειας. Οι παραμετρικές της καμπύλες $u = u_0$ είναι ευθείες οι οποίες διέρχονται όλες από το σημείο $(-1/a)p_0$. Η επιφάνεια αυτή καλείται **κωνική επιφάνεια** με **κορυφή** το σημείο $(-1/a)p_0$ και **οδηγό καμπύλη** την c. Σημειώνουμε ότι όλες οι γενέτειρες διέρχονται από το ίδιο σημείο, την κορυφή της κωνικής επιφάνειας. Με ένα άμεσο υπολογισμό διαπιστώνουμε ότι η καμπυλότητα Gauss είναι $K = 0$, εκεί όπου η X είναι κανονική.

Παράδειγμα 8.1.3. Έστω $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με παράμετρο $u \in I$. Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \ \text{ με } \ X(u,v) = c(u) + vc'(u).$$

Η επιφάνεια αυτή καλείται **επιφάνεια εφαπτομένων** της καμπύλης c, για τον προφανή λόγο ότι οι παραμετρικές της καμπύλες $u = u_0$ είναι οι εφαπτόμενες ευθείες της c. Προφανώς πρόκειται περί ευθειογενούς επιφάνειας. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η καμπυλότητα Gauss είναι $K = 0$, εκεί όπου η X είναι κανονική.

8.2 Αναπτυκτές επιφάνειες-Επιφάνειες με καμπυλότητα Gauss $K = 0$

Γνωρίζουμε από τα Παραδείγματα 8.1.1, 8.1.2 και 8.1.3 τρείς οικογένειες επιφανειών με καμπυλότητα Gauss $K = 0$, συγκεκριμένα τις κυλινδρικές επιφάνειες, τις κωνικές επιφάνεις και τις επιφάνειες εφαπτομένων. Υπάρχουν άραγε άλλες επιφάνειες με καμπυλότητα Gauss $K = 0$; Σημειώνουμε πως τα σημεία μιας τέτοιας επιφάνειας είναι είτε παραβολικά ή ισόπεδα.

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια επιφάνειες με καμπυλότητα Gauss $K = 0$ με την υπόθεση όμως ότι δεν έχει ισόπεδα σημεία.

Έστω κανονική επιφάνεια S της οποίας όλα τα σημεία είναι παραβολικά. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $k_1 > 0$ και $k_2 = 0$. Τότε από το Θεώρημα 6.8.3 γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ με $p \in X(U)$ και παραμέτρους (u, v) του οποίου οι παραμετρικές καμπύλες είναι καμπύλες καμπυλότητας. Έστω ότι

$$LX_u = k_1 X_u \;\text{ και }\; LX_v = 0.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε ότι $N_v = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το μοναδιαίο κάθετο N είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου v, δηλαδή

$$N(u, v) = N(u).$$

Συνεπώς και το N_u είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου v. Επιπλέον, από την Πρόταση 6.8.2 είναι $f = 0$, ή ισοδύναμα

$$\langle X_v, N_u \rangle = 0.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα X_v των παραμετρικών καμπυλών $u = u_0$ είναι παράλληλο προς το $N \times N_u$, το οποίο είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου v. Με άλλα λόγια, το εφαπτόμενο διάνυσμα της παραμετρικής καμπύλης $X(u_0, v)$ σε κάθε σημείο της είναι παράλληλο προς σταθερό διάνυσμα. Οι μόνες κανονικές καμπύλες που έχουν αυτή την ιδιότητα είναι οι ευθείες (άσκηση). Συνεπώς αποδείξαμε ότι η επιφάνεια είναι ευθειογενής. Επιπλέον αποδείξαμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της κατά μήκος της κάθε γενέτειράς της παραμένει σταθερό. Τέτοιες επιφάνειες καλούνται αναπτυκτές.

Ορισμός 8.2.1. *Μια επιφάνεια καλείται* **αναπτυκτή** *αν είναι ευθειογενής και το εφαπτόμενο επίπεδό της παραμένει σταθερό κατά μήκος της κάθε γενέτειράς της.*

Συνεπώς αποδείξαμε το εξής συμπέρασμα.

Θεώρημα 8.2.1. *Κάθε επιφάνεια της οποίας όλα τα σημεία είναι παραβολικά είναι αναπτυκτή.*

Ισχύει το ακόλουθο ισχυρότερο αντίστροφο.

Θεώρημα 8.2.2. *Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια έχει καμπυλότητα Gauss* $K = 0$.

Απόδειξη. Έστω S αναπτυκτή επιφάνεια και c μια γενέτειρά της με παράμετρο $t \in I$. Τότε το μοναδιαίο κάθετο N παραμένει σταθερό κατά μήκος της c, δηλαδή είναι

$$(N \circ c)'(t) = 0 \;\text{ για κάθε }\; t \in I.$$

Όμως για τη τρίτη θεμελιώδη μορφή έχουμε

$$\begin{aligned} III_{c(t)}(c'(t)) &= \langle L_{c(t)}(c'(t)), L_{c(t)}(c'(t)) \rangle \\ &= \langle (N \circ c)'(t), (N \circ c)'(t) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 6.9.1 παίρνουμε

$$K \circ c(t) I_{c(t)}(c'(t)) = 2H \circ c(t) II_{c(t)}(c'(t))$$

ή ισοδύναμα

$$K \circ c(t) = 2H \circ c(t) k_n(c'(t)).$$

Με τη βοήθεια της Πρότασης 8.1.1, προκύπτει ότι $K(c(t)) = 0$ κι αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

8.3 Ταξινόμηση των αναπτυκτών επιφανειών

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι επιφάνειες των Παραδειγμάτων 3.1.5, 8.1.2 και 8.1.3 είναι αναπτυκτές. Είναι οι μόνες ή υπάρχουν και άλλες αναπτυκτές επιφάνειες;

Έστω $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με παράμετρο $u \in I$ και

$$w\colon I \to \mathbb{R}^3$$

λεία διανυσματική συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\|w(u)\| = 1 \;\text{ και }\; c'(u) \times w(u) \neq 0 \;\text{ για κάθε }\; u \in I. \tag{8.1}$$

Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3 \ \text{ με } \ X(u,v)=c(u)+vw(u).$$

Προφανώς πρόκειται περί ευθειογενούς επιφάνειας, αφού οι παραμετρικές της καμπύλες $u=u_0$ είναι οι ευθείες παράλληλες πρός το μοναδιαίο διάνυσμα $w(u_0)$. Αντίστροφα, είναι φανερό ότι κάθε ευθειογενής επιφάνεια δύναται να παραμετρηθεί τοπικά κατ΄ αυτόν τον τρόπο.

Έχουμε

$$X_u(u,v)=c'(u)+vw'(u) \ \text{ και } \ X_v(u,v)=w(u).$$

Λόγω της (8.1), είναι

$$X_u(u,0)\times X_v(u,0)\neq 0 \ \text{ για κάθε } \ u\in I.$$

Επομένως, για v αρκούντως μικρό, η παραμετρική επιφάνεια X είναι κανονική με μοναδιαίο κάθετο

$$N(u,v)=\frac{c'(u)\times w(u)+vw'(u)\times w(u)}{\left\|c'(u)\times w(u)+vw'(u)\times w(u)\right\|}$$

και θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης

$$f=\frac{[c',w,w']}{\left\|c'(u)\times w(u)+vw'(u)\times w(u)\right\|}, \quad g=0.$$

Αν η παραμετρική επιφάνεια X είναι αναπτυκτή, τότε σύμφωνα με την Θεώρημα 8.2.2, η καμπυλότητα Gauss είναι $K=0$ ή ισοδύναμα

$$[c',w,w']=0.$$

Αντίστροφα, αν είναι $[c',w,w']=0$, τότε έχουμε

$$\langle w',c'\times w\rangle=0.$$

Επειδή $\|w\|=1$, λαμβάνουμε

$$\langle w',w\rangle=0.$$

Συνεπώς, το w' είναι συγγραμικό με το

$$(c' \times w) \times w = \langle c', w \rangle w - c',$$

δηλαδή είναι

$$w'(u) = \mu(u)\Big(\langle c'(u), w(u) \rangle w(u) - c'(u)\Big).$$

Τότε έχουμε

$$c'(u) \times w(u) + vw'(u) \times w(u) = (1 - v\mu(u))\, c'(u) \times w(u).$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι το μοναδιαίο κάθετο είναι

$$N(u,v) = \pm c'(u) \times w(u),$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητο του v. Συνεπώς αποδείξαμε το ακόλουθο κριτήριο για το πότε μια ευθειογενής επιφάνεια είναι αναπτυκτή.

Πρόταση 8.3.1. *Η κανονική παραμετρική επιφάνεια*

$$X(u,v) = c(u) + vw(u),$$

όπου

$$\|w(u)\| = 1 \ \textit{ και } \ c'(u) \times w(u) \neq 0 \ \textit{ για κάθε } \ u \in I,$$

είναι αναπτυκτή αν και μόνο αν ισχύει

$$[c', w, w'] = 0.$$

Έστω ότι η ευθειογενής παραμετρική επιφάνεια

$$X(u,v) = c(u) + vw(u)$$

είναι αναπτυκτή. Τότε υπάρχουν λείες συναρτήσεις $a(u), b(u)$ τέτοιες ώστε

$$w' = ac' + bw.$$

Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι η επιφανειακή καμπύλη c τέμνει κάθετα τις γενέτειρες της ευθειογενούς επιφάνειας, δηλαδή είναι

$$\langle c', w \rangle = 0. \tag{8.2}$$

Αφού είναι $\|w(u)\| = 1$, συμπεραίνουμε ότι $\langle w, w' \rangle = 0$ και κατά συνέπεια βρίσκουμε $b = 0$. Δηλαδή είναι

$$w' = ac'. \tag{8.3}$$

Επειδή όμως έχουμε

$$X_u(u,v) = (1 + va(u))c'(u),$$

συνάγουμε ότι στα σημεία (u,v) όπου $1 + va(u) = 0$, η X δεν είναι κανονική.

Εξετάζουμε τις ακόλουθες τρείς περιπτώσεις:

- **Η συνάρτηση $a(u)$ είναι ταυτοτικά μηδέν σε κάποιο διάστημα** $I_0 \subseteq I$. Τότε από την (8.3) συμπεραίνουμε ότι η διανυσματική συνάρτηση $w(u)$ είναι σταθερή στο I_0. Επιπλέον, από την (8.2) προκύπτει ότι η συνάρτηση $\langle c(u), w(u) \rangle$ είναι σταθερή. Αυτό δείχνει ότι η καμπύλη c είναι επίπεδη και το επίπεδό της είναι κάθετο προς το σταθερό διάνυσμα w. Συνεπώς, πρόκειται περί κυλινδρικής επιφάνειας (βλέπε Παράδειγμα 3.1.5).

- **Η συνάρτηση $a(u)$ είναι σταθερή σε κάποιο διάστημα $I_0 \subseteq I$, αλλά όχι ταυτοτικά μηδέν.** Τότε στα σημεία $(u, -1/a)$ η παραμετρική επιφάνεια X δεν είναι κανονική. Από την (8.3) συνάγουμε ότι
$$w(u) = ac(u) + p_0, \quad \text{όπου} \quad p_0 \in \mathbb{R}^3.$$
Αυτό όμως δείχνει ότι πρόκειται περί κωνικής επιφάνειας (βλέπε Παράδειγμα 8.1.2).

- **Η συνάρτηση $a(u)$ πληροί $a(u) \neq 0$ και $a'(u) \neq 0$ για κάθε u σε κάποιο διάστημα $I_0 \subseteq I$.** Θεωρούμε τότε την καμπύλη $\tilde{c}$ με
$$\tilde{c}(u) = c(u) - \frac{1}{a(u)} w(u), \quad u \in I_0.$$
Κάνοντας χρήση της (8.3), βρίσκουμε ότι
$$\tilde{c}'(u) = \frac{a'(u)}{a^2(u)} w(u).$$

τούτο σημαίνει ότι η $\tilde{c}$ είναι κανονική και οι γενέτειρες της παραμετρικής επιφάνειας X δεν είναι παρά οι εφαπτόμενες ευθείες της καμπύλης $\tilde{c}$. Άρα η επιφάνεια είναι επιφάνεια εφαπτομένων (βλέπε Παράδειγμα 8.1.3).

Αποδείξαμε επομένως το ακόλουθο

Θεώρημα 8.3.2. *Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια είναι τοπικά κυλινδρική επιφάνεια, κωνική επιφάνεια ή επιφάνεια εφαπτομένων.*

Άμεση συνέπεια του ανωτέρου θεωρήματος και της Θεωρήματος 8.2.1 είναι το πόρισμα που ακολουθεί.

Πόρισμα 8.3.3. *Κάθε επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K = 0$, η οποία δεν περιέχει ισόπεδα σημεία, είναι τοπικά κυλινδρική επιφάνεια, κωνική επιφάνεια ή επιφάνεια εφαπτομένων.*

Γνωρίζουμε ότι ο ορθός κυκλικός κύλινδρος και το επίπεδο είναι τοπικά ισομετρικές επιφάνειες. Ισχύει το ακόλουθο γενικότερο συμπέρασμα το οποίο είναι ένα είδος μερικού αντιστρόφου του Εξόχου Θεωρήματος.

Θεώρημα 8.3.4. *Κάθε επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K = 0$, η οποία δεν περιέχει ισόπεδα σημεία, είναι τοπικά ισομετρική με το επίπεδο.*

Απόδειξη. Έστω αναπτυκτή επιφάνεια με παραμετρική παράσταση

$$X\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3 \ \text{ με } \ X(u,v)=c(u)+vw(u).$$

η οποία πληροί τις (8.1) και (8.3). Υποθέτουμε επιπλέον ότι το u είναι μήκος τόξου για την c και ότι η c τέμνει κάθετα τις γενέτειρες της ευθειογενούς επιφάνειας, δηλαδή είναι

$$\langle c', w\rangle = 0.$$

Τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της X είναι

$$E(u,v)=(1+va(u))^2,\ \ F=0,\ \ G=1.$$

Θεωρούμε μια καμπύλη $\tilde{c}(u)$ του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου και πλαίσιο Frenet $\left\{\vec{t}(u), \vec{n}(u)\right\}$. Κατάλληλα μικρό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ δύναται να παραμετρηθεί μέσω της απεικόνισης

$$\tilde{X}(u,v) = \tilde{c}(u) + v\vec{n}(u).$$

Για αρκούντως μικρά v, η παραμετρική επιφάνεια $\tilde{X}$ είναι κανονική. Κάνοντας χρήση των τύπων Frenet για την καμπύλη $\tilde{c}$, βρίσκουμε ότι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της $\tilde{X}$ είναι

$$\tilde{E}(u,v) = (1 - vk(u))^2, \quad \tilde{F} = 0, \quad \tilde{G} = 1,$$

όπου $k(u)$ είναι η καμπυλότητα της $\tilde{c}$. Λόγω του Θεωρήματος 1.6.1, μπορούμε να επιλέξουμε την καμπύλη $\tilde{c}$ έτσι ώστε να έχει καμπυλότητα $k(u) = -a(u)$. Τότε έχουμε

$$\tilde{E} = E, \quad \tilde{F} = F, \quad \tilde{G} = G.$$

Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 4.2.2. □

8.4 Ασκήσεις

1. Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια $X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με παραμετρική παράσταση

$$X(u,v) = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

   (i) Να αποδειχθεί ότι είναι ευθειογενής επιφάνεια.

   (ii) Είναι αναπτυκτή; Ποιά επιφάνεια είναι αυτή;

2. Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια $X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με

$$X(u,v) = (u - h(u - v), u, v)), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

   όπου $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι λεία συνάρτηση.

   (i) Αποδείξτε ότι όλα τα εφαπτόμενα επίπεδά της είναι παράλληλα προς σταθερή διεύθυνση.

(ii) Υπολογίστε την κάθετη καμπυλότητα σε κάθε σημείο της για την διεύθυνση του ερωτήματος (i).

(iii) Βρείτε την καμπυλότητα Gauss.

(iv) Είναι η επιφάνεια ευθειογενής;

3. Έστω $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to S$ ασυμπτωτική καμπύλη μιας κανονικής επιφάνειας S με καμπυλότητα $k > 0$ παντού και στρέψη τ. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε σημείο της c ισχύει η σχέση $\tau^2 = -K$, όπου K είναι η καμπυλότητα Gauss της S.

4. Έστω κανονική επιφάνεια S με μοναδιαίο κάθετο N. Αποδείξτε ότι μια κανονική επιφανειακή καμπύλη $c(t)$ της S είναι γραμμή καμπυλότητά της, αν και μόνο αν η κανονική παραμετρική επιφάνεια
$$X(t,v) = c(t) + vN(c(t)),$$
έχει καμπυλότητα Gauss ταυτοτικά μηδέν.

5. Αν μια συνεκτική επιφάνεια S έχει μια οικογένεια επίπεδων ασυμπτωτικών γραμμών που δεν είναι ευθείες, τότε η S είναι τμήμα επιπέδου.

6. Αποδείξτε ότι το μονόχωνο υπερβολοειδές με εξίσωση
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$
είναι ευθειογενής επιφάνεια. Είναι αναπτυκτή;

Appendices

Παράρτημα Α΄

Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε τον γνωστό μας Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$, δηλαδή τον n-διάστατο διανυσματικό χώρο

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

όπου $n \geq 1$ είναι φυσικός αριθμός, με πράξεις την πρόσθεση

$$+ \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

με

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

όπου $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό

$$\cdot \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

με

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι η

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

Προφανώς για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιάζεται με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

με

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

το οποίο πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle \\
\langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\
\langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\
\langle x, x \rangle &\geq 0 \;\text{ και }\; \langle x, x \rangle = 0 \;\text{ μόνο αν }\; x = 0.
\end{aligned}$$

Το **μήκος** τυχόντος $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ είναι ο αριθμός

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Είναι φανερό ότι

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

και

$$\|x\| = 0 \;\text{ μόνο αν }\; x = 0.$$

Επιπλέον είναι γνωστό ότι ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwarz (πότε ισχύει η ισότητα;)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

και η τριγωνική ανισότητα (ανισότητα Minkowski)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Τα διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$ καλούνται **κάθετα** (ή **ορθογώνια**) αν $\langle x, y \rangle = 0$. Ένα διάνυσμα x καλείται **μοναδιαίο** αν $\|x\| = 1$.

Μια βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ καλείται **ορθομοναδιαία** αν ισχύει

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \text{ για κάθε } 1 \leq i, j \leq n.$$

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνήθης βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$.

Κάθε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ γράφεται εύκολα ως γραμμικός συνδυασμός ορθομοναδιαίας βάσης $\{v_1, \ldots, v_n\}$, αφού είναι

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Η **γωνία** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $v, w \in \mathbb{R}^n$ είναι ο μοναδικός αριθμός $\theta \in [0, \pi]$ ο οποίος δίνεται από τη σχέση

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| ||y||}.$$

Δύο μη μηδενικά διανυσμάτα είναι κάθετα αν και μόνο αν η μεταξύ τους γωνία είναι $\pi/2$.

Η **Ευκλείδεια απόσταση** είναι η συνάρτηση

$$d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$$

με

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

όπου

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ και } y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Η απόσταση πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(y, x) \\ d(x, y) &\geq 0 \text{ και } d(x, y) = 0 \text{ μόνο αν } x = y \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Α΄.1 Προσανατολισμός στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$

Οι βάσεις του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ θεωρούνται πάντοτε ως διατεταγμένες βάσεις. Είναι γνωστό ότι αν

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ και } \tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\}$$

είναι δύο (διατεταγμένες) βάσεις, τότε υπάρχει $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας (a_{ij}), γνωστός ως πίνακας μετάβασης από τη μία βάση στην άλλη, τέτοιος ώστε

$$\tilde{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i.$$

Θα λέμε ότι η βάση $\tilde{\mathcal{B}}$ έχει τον **ίδιο προσανατολισμό** με τη βάση $\mathcal{B}$ αν ισχύει $\det(a_{ij}) > 0$. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι κατ΄ αυτόν τον τρόπο ορίζεται στο σύνολο των βάσεων του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ μια σχέση ισοτιμίας (ισοδυναμίας) η οποία διαμερίζει το σύνολο των βάσεων σε δύο κλάσεις ισοτιμίας, καθεμιά εκ των οποίων καλείται **προσανατολισμός**.

Ο προσανατολισμός στον οποίο ανήκει η συνήθης βάση καλείται **θετικός προσανατολισμός**.

Μια βάση ονομάζεται **δεξιόστροφη** αν ανήκει στον θετικό προσανατολισμό, διαφορετικά καλείται **αριστερόστροφη**.

Κάθε γραμμική απεικόνιση $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ η οποία είναι ισομορφισμός απεικονίζει κάθε βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ στη βάση

$$\tilde{\mathcal{B}} = A(\mathcal{B}) = \{\tilde{v}_1 = A(v_1), \ldots, \tilde{v}_n = A(v_n)\}.$$

Αν οι βάσεις αυτές ανήκουν στον ίδιο προσανατολισμό, τότε λέμε ότι **ο ισομορφισμός A διατηρεί τον προσανατολισμό**, ενώ στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι τον **αντιστρέφει**. Εύκολα ελέγχεται ότι ο ισομορφισμός A διατηρεί τον προσανατολισμό μόνο όταν $\det A > 0$ και τον αντιστρέφει αν $\det A < 0$.

Α′.2 Ισομετρίες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$

Ορισμός Α′.2.1. *Μια ισομετρία του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι κάθε απεικόνιση $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ η οποία διατηρεί την Ευκλείδεια απόσταση, δηλαδή*

$$d\,(T(x),T(y)) = d(x,y) \ \text{ για κάθε } \ x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Είναι φανερό ότι κάθε ισομετρία είναι 1-1 απεικόνιση. Επιπλέον η σύνθεση ισομετριών είναι ισομετρία.

Για κάθε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$T_v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ \text{ με } \ T_v(p) = p + v$$

η οποία καλείται **παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα** $v \in \mathbb{R}^n$. Είναι προφανές ότι η παράλληλη μεταφορά κατά $v = 0$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Η σύνθεση παραλλήλων μεταφορών είναι παράλληλη μεταφορά αφού

$$T_v \circ T_w = T_{v+w}$$

για κάθε $v, w \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον επειδή

$$T_v \circ T_{-v} = T_0 = T_{-v} \circ T_v,$$

κάθε παράλληλη μεταφορά T_v αντιστρέφεται με αντίστροφο

$$T_v^{-1} = T_{-v}.$$

Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού ότι κάθε παράλληλη μεταφορά είναι ισομετρία.

Μια γραμμική απεικόνιση $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ καλείται **ορθογώνιος μετασχηματισμός** (ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$) αν ισχύει

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \ \text{ για κάθε } \ x, y \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $Ax = A(x)$ είναι η εικόνα του x μέσω της απεικόνισης A.

Είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι μια γραμμική απεικόνιση $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός αν και μόνο αν ο πίνακας της ως προς μια ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνιος.

Είναι φανερό ότι κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός διατηρεί τα μήκη των διανυσμάτων, άρα και τις αποστάσεις. Κατά συνέπεια, κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός είναι ισομετρία του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$.

Είναι επίσης γνωστό ότι κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός αντιστρέφεται και ότι ο αντίστροφος του είναι επίσης ορθογώνιος μετασχηματισμός. Το σύνολο των ορθογωνίων μετασχηματισμών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται με $O(n)$. Είναι προφανές ότι η ταυτοτική απεικόνιση είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, δηλαδή $Id \in O(n)$. Επιπλέον, αν $A, B \in O(n)$, τότε $A \circ B \in O(n)$.

Όλα αυτά σημαίνουν ότι το σύνολο $O(n)$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση και ουδέτερο στοιχείο την ταυτοτική απεικόνιση Id.

Το επόμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι πέραν των παράλληλων μεταφορών, των ορθογώνιων μετασχηματισμών και τις συνθέσεις τους, δεν υπάρχουν άλλες ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα Α΄.2.1. *Κάθε ισομετρία T του $\mathbb{R}^n$ γράφεται ως σύνθεση $T = T_v \circ A$ μιας παράλληλης μεταφοράς T_v και ενός ορθογωνίου μετασχηματισμού $A \in O(n)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την παράλληλη μεταφορά T_v κατά $v = -T(0)$ ορίζουμε $S = T_v \circ T$. Προφανώς $S \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, αφού

$$d\left(S(x), S(y)\right) = d(x, y) \tag{Α΄.1}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ειδικά, επειδή $S(0) = 0$, η (Α΄.1) δίνει

$$\|S(x)\| = \|x\| \tag{Α΄.2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Θα αποδείξουμε ότι $S \in O(n)$. Η (Α΄.1) ισοδυνάμως γράφεται

$$\|(S(x) - S(y)\| = \|x - y\|$$

ή

$$\|(S(x)\|^2 - 2\langle S(x), S(y)\rangle + \|S(y)\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (Α΄.2), τελικώς βρίσκουμε ότι

$$\langle S(x), S(y)\rangle = \langle x, y\rangle \tag{Α΄.3}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Από την (Α΄.3) προκύπτει ότι

$$\langle S(e_i), S(e_j)\rangle = \delta_{ij} \text{ για κάθε } 1 \leq i, j \leq n.$$

όπου

$$\{e_1 = (1, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1)\}.$$

είναι η συνήθης βάση του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς

$$\{S(e_1), \ldots, S(e_n)\}$$

είναι ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^n$.

Κατά συνέπεια, για κάθε $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, το $S(v)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτής της βάσης ως

$$S(v) = \langle S(v), S(e_1)\rangle S(e_1) + \cdots + \langle S(v), S(e_n)\rangle S(e_n),$$

ή ισοδύναμα λόγω της (Α΄.3)

$$S(v) = v_1 S(e_1) + \cdots + v_n S(e_n),$$

απ' όπου εύκολα προκύπτει ότι η S είναι γραμμική απεικόνιση. Το ότι $S \in O(n)$ είναι άμμεση συνέπεια της (Α΄.1). □

Η παραπάνω ανάλυση είναι μοναδική και ο ορθογώνιος μετασχηματισμός A συμβολίζεται με T_* και καλείται **γραμμικό μέρος** της ισομετρίας.

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Α΄.2.1 είναι ότι κάθε ισομετρία $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της T^{-1} είναι επίσης ισομετρία. Συμβολίζουμε το σύνολο των ισομετριών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Είναι φανερό ότι έχει δομή ομάδας με πράξη τη σύνθεση και ουδέτερο στοιχείο την ταυτοτική απεικόνιση. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η ομάδα $O(n)$ αποτελεί υποομάδα της ομάδας $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

Για κάθε $A \in O(n)$ ισχύει $|\det A| = 1$. Αν $\det A = 1$, τότε ο ορθογώνιος μετασχηματισμός A διατηρεί τον προσανατολισμό, ενώ αν $\det A = -1$, τότε αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Αντίστοιχα, θα λέμε ότι μια ισομετρία $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό αν το γραμμικό της μέρος $T_* \in O(n)$ διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό, αντίστοιχα.

Α΄.2.1 Ισομετρίες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$

Ειδικά για τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^2$, η περιγραφή των ισομετριών του είναι πολύ απλή.

Για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ θεωρούμε την απεικόνιση

$$R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

η οποία είναι η **στροφή κατά γωνία** θ. Πρόκειται για τη γραμμική απεικόνιση της οποίας ο πίνακας ως προς τη συνήθη βάση

$$\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$$

του $\mathbb{R}^2$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Προφανώς $R_\theta \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, αφού ο πίνακάς της είναι ορθογώνιος.

Επιπλέον θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$K_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

της οποίας ο πίνακας ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η K_θ δεν είναι παρά ο **κατοπτρισμός ως πρός ευθεία** η οποία διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$ και σχηματίζει γωνία $\theta/2$ με το διάνυσμα $e_1 = (1, 0)$. Προφανώς πρόκειται περί ισομετρίας η οποία αντιστρέφει τον προσανατολισμό σε αντίθεση με τις στροφές που τον διατηρούν.

Η ταξινόμιση των ισομετριών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$ έχει ως εξής:

Θεώρημα Α΄.2.2. *Κάθε ισομετρία T του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$ γράφεται ως σύνθεση $T = T_v \circ A$ μιας παράλληλης μεταφοράς T_v και ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού $A \in O(2)$ ο οποίος είναι είτε στροφή R_θ είτε κατοπτρισμός K_θ για κάποια γωνία θ.*

Η στροφή $J = R_{\pi/2}$ κατά γωνία $\pi/2$ είναι η απεικόνιση

$$J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad J(v_1, v_2) = (-v_2, v_1).$$

Προφανώς πληροί την ισότητα

$$J^2 = -Id,$$

όπου $J^2 = J \circ J$, και καλείται **μιγαδική δομή** (γιατί άραγε;).

Α΄.2.2 Ισομετρίες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$

Έστω ℓ μονοδιάστατος υπόχωρος του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ και $\{v_1, v_2, v_3\}$ μια δεξιόστροφη ορθομοναδιαία βάση τέτοια ώστε ο υπόχωρος ℓ να παράγεται από το διάνυσμα v_3. Ο ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^3$ του οποίου ο πίνακας ως προς τη βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

καλείται **στροφή κατά γωνία** θ **γύρω από τον άξονα** ℓ. Προφανώς διατηρεί τον προσανατολισμό.

Ο ορθογώνιος μετασχηματισμός με πίνακα

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

καλείται **ψευδοστροφή** και είναι σύνθεση της στροφής κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα ℓ με τον κατοπτρισμό ως πρός το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $(0, 0, 0)$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα v_1, v_2. Είναι προφανές ότι αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Η ταξινόμιση των ισομετριών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ έχει ως εξής:

Θεώρημα Α΄.2.3. *Κάθε ισομετρία T του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ γράφεται ως σύνθεση $T = T_v \circ A$, όπου T_v είναι παράλληλη μεταφορά T_v και A είναι στροφή γύρω από κάποιο άξονα ή ψευδοστροφή.*

Α΄.2.3 Διανυσματικό και μικτό γινόμενο στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$

Το **εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο** $v \times w$ των διανυσμάτων $v = (v_1, v_2, v_3)$ και $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ ορίζεται ως

$$v \times w := \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} e_3,$$

ή ισοδύναμα

$$v \times w = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right).$$

Ο ακόλουθος μνημονικός κανόνας είναι χρήσιμος

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Η ακόλουθη πρόταση αποδεικνύεται με στοιχειώδεις πράξεις βάσει των ιδιοτήτων των οριζουσών.

Πρόταση Α΄.2.4. *Για τυχαία διανύσματα* $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$ *και* $w \in \mathbb{R}^3$ *ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i)

$$x \times y = -y \times x,$$

(ii)

$$\langle x \times y, z \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

(iii)

$$(x \times y) \times z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x,$$
$$x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z,$$

(iv)

$$\langle x \times y, z \times w \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, z \rangle & \langle x, w \rangle \\ \langle y, z \rangle & \langle y, w \rangle \end{vmatrix}.$$

(v) Για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό $A \in O(3)$ ισχύει

$$A(x \times y) = \varepsilon Ax \times Ay,$$

όπου $\varepsilon = 1$ αν ο A διατηρεί τον προσανατολισμό και $\varepsilon = -1$ αν τον αντιστρέφει.

Άμμεση συνέπεια της Πρότασης Α΄.2.4(ii) είναι ότι το εξωτερικό γινόμενο $v \times w$ είναι διάνυσμα κάθετο προς αμφότερα τα διανύσματα v και w. Επιπλέον από το σκέλος (iv) προκύπτει η ταυτότητα του Lagrange

$$\|v \times w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2,$$

η οποία μας δίνει μια άλλη απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwarz.

Α΄.3 Erlanger Programm-Γεωμετρική Ισοτιμία

Ο Felix Klein (1849-1925) το 1872 ανέπτυξε το περίφημο Erlanger Programm, σύμφωνα με το οποίο γεωμετρία, υπό μια πιο ευρεία έννοια, είναι η μελέτη αναλλοιώτων ομάδων μετασχηματισμών που δρούν σε γενικούς χώρους. Τέτοιες αναλλοίωτες μπορεί να είναι γωνίες, εμβαδά, αποστάσεις, καμπυλότητες κι άλλα.

Ένα παράδειγμα ομάδας μετασχηματισμών η οποία δρά στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ είναι φυσικά η ομάδα ισομετριών του $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, μετασχηματισμοί δηλαδή που διατηρούν την Ευκλείδεια απόσταση. Η γεωμετρία που παράγει η δράση αυτής της ομάδας δεν είναι άλλη από την **Ευκλείδεια Γεωμετρία**.

Στο πλαίσιο αυτό δεν έχει νόημα να διακρίνουμε σχήματα (δηλαδή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$) τα οποία διαφέρουν ως προς ισομετρία του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$. Έχει επομένως νόημα ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός Α΄.3.1. *Το σχήμα $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ καλείται* **γεωμετρικώς ισότιμο** *του σχήματος $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^n$ αν υπάρχει ισομετρία $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\tilde{\Sigma} = T(\Sigma)$.*

Είναι φανερό ότι η γεωμετρική ισοτιμία όπως ανωτέρω ορίστηκε είναι σχέση ισοτιμίας (ισοδυναμίας) στο σύνολο των σχημάτων του $\mathbb{R}^n$ αφού είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική (γιατί;).

Παράρτημα Β΄

Η τοπολογία του $\mathbb{R}^n$

Β΄.1 Ανοικτά και κλειστά υποσύνολα

Η Ευκλείδεια απόσταση

$$d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty) \ \text{ με } \ d(x,y) = \|x-y\|$$

μας επιτρέπει να δούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ ως μετρικό χώρο και να ορίσουμε τη συνήθη τοπολογία του.

Ονομάζουμε **(ανοικτή) μπάλα** στον $\mathbb{R}^n$, με κέντρο το σημείο p_0 και ακτίνα $r > 0$, το σύνολο

$$B_r(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^n : d(p,p_0) < r\}.$$

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **ανοικτό** υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ αν για κάθε σημείο $p_0 \in A$ υπάρχει μπάλα κέντρου p_0 και ακτίνας r τέτοια ώστε $B_r(p_0) \subseteq A$. Είναι γνωστό ότι η ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο, ενώ η τομή περερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι επίσης ανοικτό σύνολο.

Το υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **κλειστό** στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ αν το συμπλήρωμά του $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$.

Ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει ένα σημείο p συχνά θα αναφέρεται ως **περιοχή** του σημείου p.

Μια απεικόνιση $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, καλείται **συνεχής στο σημείο** $p_0 \in U$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$

υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } \; B_\delta(p_0) \subseteq U \; \text{ τότε } \; F(B_\delta(p_0)) \subseteq B_\varepsilon(F(p_0)).$$

Η απεικόνιση F καλείται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού U. Είναι γνωστό ότι η απεικόνιση F είναι συνεχής αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της

$$f_1, \ldots, f_m \colon U \to \mathbb{R}$$

με

$$F(p) = (f_1(p), \ldots, f_m(p)) \,, \; p = (x_1, \ldots, x_m) \in U,$$

είναι συνεχείς.

Η σύνθεση συνεχών απεικονίσεων είναι συνεχής απεικόνιση. Επιπλέον οι συνεχείς απεικονίσεις αντιστρέφουν ανοικτά σύνολα σε ανοικτά σύνολα και κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα.

Β΄.2 Επαγόμενη τοπολογία

Κάθε υποσύνολο A του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ καθίσταται τοπολογικός χώρος εφοδιασμένος με την επαγόμενη τοπολογία. Τα ανοικτά σε αυτή τη τοπολογία ορίζονται ως εξής: Ένα υποσύνολο $X \subseteq A$ καλείται **ανοικτό στο** A αν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο Y του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $X = A \cap Y$.

Είναι γνωστό ότι η ένωση ανοικτών συνόλων στο A είναι ανοικτό σύνολο στο A, ενώ η τομή περερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων στο A είναι επίσης ανοικτό σύνολο στο A. Ένα ανοικτό υποσύνολο του A που περιέχει ένα σημείο p συχνά αναφέρεται ως **περιοχή** του p στο A.

Το υποσύνολο $X \subseteq A$ καλείται **κλειστό στο** A αν το συμπλήρωμά του $X^c = A \setminus X$ είναι ανοικτό στο A.

Μια απεικόνιση $F \colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ καλείται **συνεχής στο σημείο** $p_0 \in A$ αν για κάθε περιοχή W του σημείου $F(p_0)$ στον $\mathbb{R}^m$ υπάρχει περιοχή V του σημείου p_0 στο A τέτοια ώστε

$$F(V) \subseteq W.$$

Η απεικόνιση F καλείται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού A. Είναι γνωστό ότι η απεικόνιση F είναι συνεχής αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της

$$f_1, \dots, f_m \colon A \to \mathbb{R}$$

με

$$F(p) = (f_1(p), \dots, f_m(p)), \; p = (x_1, \dots, x_m) \in A,$$

είναι συνεχείς.

Η σύνθεση συνεχών απεικονίσεων είναι συνεχής απεικόνιση. Επιπλέον οι συνεχείς απεικονίσεις αντιστρέφουν ανοικτά σύνολα σε ανοικτά σύνολα και κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα. Επίσης αν $F \colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής απεικόνιση, τότε και κάθε περιορισμός της $F|_B \colon B \subseteq A \to \mathbb{R}^m$ είναι επίσης συνεχής απεικόνιση.

Β΄.3 Ομοιομορφισμοί

Μια απεικόνιση $F \colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$ καλείται **ομοιομορφισμός** αν είναι συνεχής, 1-1, επί του B και η αντίστροφή της $F^{-1} \colon B \to A$ είναι συνεχής. Σε αυτή την περίπτωση το σύνολο A ονομάζεται **ομοιομορφικό** με το σύνολο B.

Για παράδειγμα, η σφαίρα

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

είναι ομοιομορφική με το ελλειψοειδές

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}, \quad a, b, c > 0.$$

Ο μεταξύ τους ομοιομορφισμός είναι ο περιορισμός $F|_{\mathbb{S}^2}$ της απεικόνισης

$$F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{με} \quad F(x, y, z) = (ax, by, cz).$$

Σημειώνεται ότι η αντίστροφη απεικόνιση ενός ομοιομορφισμού είναι ομοιομορφισμός καθώς και η σύνθεση ομοιομορφισμών είναι ομοιομορφισμός. Οι παράλληλες μεταφορές του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφισμοί, όπως επίσης και οι ισομετρίες του.

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **συνεκτικό** αν δεν υπάρχουν μη κενά υποσύνολα U_1 και U_2 ανοικτά στο A τέτοια ώστε

$$A = U_1 \cup U_2 \ \text{ και } \ U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Αν το σύνολο A είναι συνεκτικό, τότε τα μόνα υποσύνολά του τα οποία είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά είναι το ίδιο το σύνολο A και το κενό σύνολο $\emptyset$. Οι εικόνες συνεκτικών συνόλων μέσω συνεχών απεικονίσεων είναι συνεκτικά σύνολα. Τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{R}$ εκτός του $\emptyset$ και του $\mathbb{R}$ είναι μόνο τα διαστήματα.

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **τροχιακά συνεκτικό** αν για τυχόντα σημεία $p, q \in A$ υπάρχει συνεχής καμπύλη $c\colon [a, b] \to A$ τέτοια ώστε $c(a) = p$ και $c(b) = q$. Κάθε τροχιακά συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικό. Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **φραγμένο** αν περιέχεται σε μια μπάλα του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο A καλείται **συμπαγές** αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Ένα σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ καλείται **οριακό σημείο** του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ αν κάθε περιοχή του σημείου p στον $\mathbb{R}^n$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του συνόλου A διαφορετικό του p.

Πρόταση Β′.3.1. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές.

(ii) (Heine-Borel) Για κάθε οικογένεια $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ με

$$A \subseteq \cup_{i \in I} U_i,$$

υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος δείκτες $i_1, \ldots, i_k \in I$ τέτοιοι ώστε

$$A \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}.$$

(iii) (Bolzano-Weiestrass) Κάθε μη πεπερασμένο υποσύνολο του συνόλου A έχει ένα οριακό σημείο που ανήκει στο A.

Οι εικόνες συμπαγών συνόλων μέσω συνεχών απεικονίσεων είναι συμπαγή σύνολα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ομοιομορφισμοί διατηρούν όλες τις τοπολογικές ιδιότητες.

Παράρτημα Γ′

Διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ Ευκλειδείων χώρων

Γ′.1 Παραγώγιση διανυσματικών απεικονίσεων του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ μιας μεταβλητής

Έστω διανυσματική απεικόνιση $V \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ με συναρτήσεις συντεταγμένων

$$v_1, \ldots, v_n \colon I \to \mathbb{R}^n,$$

δηλαδή

$$V(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t)) \,, \; t \in I.$$

Είναι γνωστό ότι η απεικόνιση V είναι διαφορίσιμη αν και μόνο αν όλες οι συναρτήσεις συντεταγμένων της είναι διαφορίσιμες. Επιπλέον ισχύει

$$V'(t) = \frac{dV}{dt}(t) = (v_1'(t), \ldots, v_n'(t)) \,, \; t \in I.$$

Επίσης είναι γνωστό ότι ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες παραγώγισης: Για τυχούσες διαφορίσιμες διανυσματικές απεικονίσεις

$$V, W \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

και διαφορίσιμη συνάρτηση $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\frac{d}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{dV}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{dV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{dW}{dt}\rangle.$$

Ειδικά για $n = 3$ και για διαφορίσιμες απεικονίσεις

$$V, W, Z : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

ισχύουν επιπλέον τα ακόλουθα

$$\frac{d}{dt}(V \times W) = \frac{dV}{dt} \times W + V \times \frac{dW}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}[V, W, Z] = [\frac{dV}{dt}, W, Z] + [V, \frac{dW}{dt}, Z] + [V, W, \frac{dZ}{dt}],$$

όπου $[V, W, Z]$ είναι το μεικτό γινόμενων των διανυσματικών συναρτήσεων V, W, Z.

Γ΄.2 Διαφορίσιμες απεικονίσεις και Διαφορικό απεικόνισης

Μια απεικόνιση $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$, καλείται **διαφορίσιμη στο σημείο** $p_0 \in U$ αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε

$$\lim_{p \to p_0} \frac{F(p) - F(p_0) - L(p - p_0)}{\|p - p_0\|} = 0.$$

Αν η απεικόνιση F είναι διαφορίσιμη στο σημείο $p_0 \in U$, τότε η γραμμική απεικόνιση $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με την ανωτέρω ιδιότητα είναι μοναδική, καλείται **διαφορικό της απεικόνισης** F **στο σημείο** p_0 και συμβολίζεται με dF_{p_0}.

Η απεικόνιση F καλείται **διαφορίσιμη** αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του ανοικτού συνόλου U. Είναι γνωστό ότι η απεικόνιση

F είναι διαφορίσιμη αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της

$$f_1, \dots, f_m \colon U \to \mathbb{R}$$

με

$$F(p) = (f_1(p), \dots, f_m(p)), \; p = (x_1, \dots, x_n) \in U,$$

είναι διαφορίσιμες. Επιπλέον υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της F και είναι

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(p)\Big), \; p = (x_1, \dots, x_n) \in U.$$

Είναι γνωστό ότι κάθε διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ Ευκλειδείων χώρων είναι συνεχής.

Η απεικόνιση F καλείται τάξης $C^r, r \geq 1$, αν υπάρχουν όλες οι μερικές της παράγωγοι έως τάξης r και είναι συνεχείς. Κάθε C^1 απεικόνιση είναι διαφορίσιμη.

Ο πίνακας του διαφορικού μιας διαφορίσιμης απεικόνισης

$$F \colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

στο σημείο $p \in U$, ως προς τις συνήθεις βάσεις των Ευκλειδείων χώρων $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$, είναι ο $m \times n$ πίνακας

$$\mathrm{Jac}F(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix},$$

γνωστός ως Ιακωβιανός πίνακας της F.

Η ακόλουθη ερμηνεία του διαφορικού είναι χρήσιμη ακόμη και για υπολογισμούς.

Έστω $F \colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη απεικόνιση και σημείο $p_0 \in U$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$. Η εικόνα $dF_{p_0}(w)$ τυχόντος διανύσματος $w \in \mathbb{R}^n$ μέσω του διαφορικού dF_{p_0} βρίσκεται ως εξής: Θεωρούμε τυχούσα καμπύλη (υπάρχουν άπειρες τέτοιες!)

$$c \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \;\text{ με }\; c(0) = p_0 \;\text{ και }\; c'(0) = w.$$

Τότε ισχύει

$$dF_{p_0}(w) = \tilde{c}'(0),$$

όπου

$$\tilde{c}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$$

είναι η καμπύλη

$$\tilde{c} = F \circ c$$

η οποία προφανώς πληροί $\tilde{c}(0) = F(p_0)$.

Ακριβέστερα, αυτή η θεώρηση μας επιτρέπει να βλέπουμε το διαφορικό της απεικόνισης F στο σημείο $p_0 \in U$ ως τη γραμμική απεικόνιση

$$dF_{p_0}\colon T_{p_0}\mathbb{R}^n \to T_{F(p_0)}\mathbb{R}^m,$$

όπου με $T_p\mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε το σύνολο των διανυσμάτων του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ με αφετηρία το τυχόν σημείο $p \in \mathbb{R}^n$.

Σημειώνουμε ότι το σύνολο $T_p\mathbb{R}^n$ καθίσταται κατά φυσικό τρόπο διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι ισόμορφος με τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ μέσω παράλληλης μεταφοράς. Τούτο σημαίνει ότι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να θεωρηθεί ως βάση και του διανυσματικού χώρου $T_p\mathbb{R}^n$. Ο διανυσματικός αυτός χώρος ονομάζεται **εφαπτόμενος χώρος του Ευκλειδείου χώρου** $\mathbb{R}^n$ **στο σημείο** p.

Παράδειγμα Γ΄.2.1. Κάθε παράλληλη μεταφορά T_w είναι διαφορίσιμη απεικόνιση της οποίας το διαφορικό σε κάθε σημείο είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Επιπλέον, κάθε γραμμική απεικόνιση είναι διαφορίσιμη και το διαφορικό της σε κάθε σημείο είναι η ίδια η απεικόνιση. Ειδικά κάθε ισομετρία $T = T_w \circ A \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, όπου $A \in O(n)$, είναι διαφορίσιμη και για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ είναι

$$dT_p = A.$$

Με άλλα λόγια το διαφορικό κάθε ισομετρίας είναι το γραμμικό της μέρος.

Πρόταση Γ΄.2.1 (Κανόνας αλυσίδας). *Έστω $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $G\colon V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ διαφορίσιμες απεικονίσεις, όπου U και V είναι ανοικτά υποσύνολα των Ευκλειδείων χώρων $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα* *τέτοια ώστε $F(U) \subseteq V$. Τότε η απεικόνιση $G \circ F\colon U \to \mathbb{R}^k$ είναι διαφορίσιμη και ισχύει*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p \text{ για κάθε σημείο } p \in U.$$

Πρόταση Γ΄.2.2. *Έστω ότι $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, όπου U είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$. Αν*

$$df_p = 0 \text{ για κάθε σημείο } p \in U,$$

τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Γ΄.3 Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης

Θεώρημα Γ΄.3.1. *Έστω ότι $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μια C^1 απεικόνιση, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι για σημείο $p \in U$ το διαφορικό της $dF_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός. Τότε υπάρχει περιοχή $V \subseteq U$ του σημείου p και περιοχή $W \subseteq F(U)$ του σημείου $F(p)$ τέτοιες ώστε ο περιορισμός $F|_V\colon V \to W$ να αντιστρέφεται και η αντίστροφή της $(F|_V)^{-1}\colon W \to V$ είναι να C^1 απεικόνιση.*

Μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ καλείται **διαφορομορφισμός** αν αντιστρέφεται και η αντίστροφή της είναι επίσης διαφορίσιμη. Επειδή κάθε διαφορίσιμη απεικόνιση είναι συνεχής, είναι φανερό ότι κάθε διαφορομορφισμός είναι και ομοιομορφισμός (το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει, γιατί;).

Σημειώνεται ότι η αντίστροφη απεικόνιση ενός διαφορομορφισμού είναι διαφορομορφισμός καθώς και η σύνθεση διαφορομορφισμών είναι διαφορομορφισμός. Κάθε ισομετρία του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι διαφορομορφισμός.

Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Αντίστροφης Απεικόνισης, προκύπτει ότι κάθε C^1 απεικόνιση $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι τοπικός διαφορομορφισμός αν το διαφορικό της είναι ισομορφισμός σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Παράρτημα Δ΄

Αυτοπροσηρτημένοι γραμμικοί μετασχηματισμοί

Θυμίζουμε ότι αν V είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος διάστασης n, εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R},$$

τότε μια γραμμική απεικόνιση $A \colon V \to V$ καλείται **αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός** του διανυσματικού χώρου V αν ισχύει

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \ \text{ για κάθε } \ x, y \in V.$$

Σε κάθε αυτοπροσηρτημένο γραμμικό μετασχηματισμό A αντιστοιχεί μια απεικόνιση

$$\beta_A \colon V \times V \to \mathbb{R} \ \text{ με } \ \beta_A(x, y) = \langle Ax, y \rangle, \quad x, y \in V.$$

Προφανώς η απεικόνιση β_A είναι διγραμμική. Επειδή ο γραμμικός μετασχηματισμός A είναι αυτοπροσηρτημένος, έχουμε επιπλέον ότι

$$\beta_A(x, y) = \beta_A(y, x) \ \text{ για κάθε } \ x, y \in V.$$

Με άλλα λόγια, η απεικόνιση β_A είναι συμμετρική διγραμμική μορφή με αντίστοιχη τετραγωνική μορφή

$$Q_A \colon V \to \mathbb{R} \ \text{ με } \ Q(x) = \beta_A(x, x) = \langle Ax, x \rangle, \quad x \in V.$$

Σημειώνουμε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$\beta_A(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q_A(x+y) - Q_A(x) - Q_A(y)\right),$$

η οποία δείχνει ότι η τετραγωνική μορφή προσδιορίζει κατά μοναδικό τρόπο την συμμετρική διγραμμική μορφή.

Είναι γνωστό ότι οι αυτοπροσηρτημένοι γραμμικοί μετασχηματισμοί έχουν πραγματικές ιδιοτιμές και διαγωνιοποιούνται από ορθομοναδιαία βάση. Στη συνέχεια θα προβούμε σε μια απόδειξη αυτών των ιδιοτήτων στην περίπτωση όπου $n = 2$. Μάλιστα θα δούμε ότι οι ιδιοτιμές είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της αντίστοιχης τετραγωνικής μορφής, όταν την περιορίσουμε στον μοναδιαίο κύκλο.

Λήμμα Δ΄.0.1. *Έστω A αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός του διδιάστατου διανυσματικού χώρου V. Αν η τετραγωνική μορφή Q_A περιορισμένη στον μοναδιαίο κύκλο*

$$\{w \in V : \|w\| = 1\}$$

έχει ολικό μέγιστο $\lambda = Q_A(e)$ στο e, τότε το e είναι ιδιοδιάνυσμα του γραμμικού μετασχηματισμού A με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda = Q_A(e)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ορθομοναδιαία βάση $\{e_1 = e, e_2\}$ του διανυσματικού χώρου V. Κάθε διάνυσμα $w \in V$ με $\|w\| = 1$ γράφεται ως

$$w = \cos t e_1 + \sin t e_2, \quad \text{με} \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Από υπόθεση η συνάρτηση f με

$$\begin{aligned} f(t) &= Q_A(\cos t e_1 + \sin t e_2) \\ &= Q_A(e_1)\cos^2 t + 2\langle Ae_1, e_2\rangle \cos t \sin t + Q_A(e_2)\sin^2 t \end{aligned}$$

παρουσιάζει μέγιστο $f(0) = \lambda = Q_A(e)$ στο $t = 0$. Επειδή $f'(0) = 0$, βρίσκουμε

$$\langle Ae_1, e_2\rangle = 0.$$

Όμως τότε είναι

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \langle Ae_1, e_1\rangle e_1 + \langle Ae_1, e_2\rangle e_2 \\ &= \langle Ae_1, e_1\rangle e_1 \\ &= Q_A(e)e_1, \end{aligned}$$

κι αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το ακόλουθο

Θεώρημα Δ΄.0.2. *Έστω A αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός του διδιάστατου διανυσματικού χώρου V εφοδιασμένου με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Τότε υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{e_1, e_2\}$ του διανυσματικού χώρου V αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του γραμμικού μετασχηματισμού A, δηλαδή*

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1 \ \textit{και} \ Ae_2 = \lambda_2 e_2,$$

όπου

$$\lambda_1 = \max\{Q_A(w) : w \in V \ \textit{με} \ \|w\| = 1\}$$

και

$$\lambda_2 = \min\{Q_A(w) : w \in V \ \textit{με} \ \|w\| = 1\}.$$

Απόδειξη. Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή Q_A είναι προφανώς συνεχής, οπότε περιορισμένη στον μοναδιαίο κύκλο

$$\{w \in V : \|w\| = 1\}$$

λαμβάνει ολικό μέγιστο $\lambda_1 = Q_A(e_1)$ για κάποιο e_1 στο μοναδιαίο κύκλο. Από το Λήμμα Δ΄.0.1 γνωρίζουμε ότι το e_1 είναι ιδιοδιάνυσμα του γραμμικού μετασχηματισμού A με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda_1 = Q_A(e_1)$. Θεωρούμε μοναδιαίο διάνυσμα e_2 κάθετο στο e_1. Τότε είναι

$$\begin{aligned} Ae_2 &= \langle Ae_2, e_1 \rangle e_1 + \langle Ae_2, e_2 \rangle e_2 \\ &= \langle Ae_2, e_2 \rangle e_2 \\ &= Q_A(e_2) e_2. \end{aligned}$$

Επομένως, το διάνυσμα e_2 είναι ιδιοδιάνυσμα του γραμμικού μετασχηματισμού A με αντίστοιχη ιδιοτιμή

$$\lambda_2 = Q_A(e_2) \leq \lambda_1.$$

Μένει να δείξουμε ότι αυτή είναι η ελάχιστη τιμή της τετραγωνικής μορφής Q_A στον μοναδιαίο κύκλο. Πράγματι για τυχόν

$$w = xe_1 + ye_2 \ \text{με} \ \|w\| = 1$$

έχουμε

$$\begin{aligned} Q_A(w) &= Q_A(e_1)x^2 + 2\langle Ae_1, e_2\rangle xy + Q_A(e_2)y^2 \\ &= \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \\ &\geq \lambda_2 x^2 + \lambda_2 y^2 \\ &= \lambda_2(x^2 + y^2) \\ &= \lambda_2. \end{aligned}$$

Συνεπώς λ_2 είναι η ελάχιστη τιμή και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση Δ′.0.1. Σημειώνουμε ότι ιδιοδιανύσματα ενός αυτοπροσηρτημένου γραμμικού μετασχηματισμού που αντιστοιχούν σε διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους κάθετα.

Βιβλιογραφία

[1] Ανδρέας Αρβανιτογεώργος, *Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία*. Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα, Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2015, www.kallipos.gr.

[2] M.P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall 1976.

[3] Δημητρίου Κουτρουφιώτη, *Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία*. Πανεπιστημιακά Κείμενα, Εκδόσεις Leader Books, 2006.

[4] Sebastián Montiel and Antonio Ros, *Curves and surfaces*. Graduate Studies in Mathematics Volume 69, American Mathematical Society, 2009.

[5] Barrett O' Neil, *Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2002.

[6] Andrew Pressley, *Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2011.