
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΚΑΜΠΥΛΕΣ II

1. Δίνεται η καμπύλη

$$c(t) = (t - \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, \sqrt{3}t + \sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Εξετάστε αν είναι κανονική. Βρείτε τη συνάρτηση μήκους τόξου με αφετηρία $t_0 = 0$.

(ii) Βρείτε αναπαραμέτρηση με παράμετρο το μήκος τόξου.

(iii) Υπολογίστε τη καμπυλότητα και τη στρέψη της ως συνάρτηση του t και του μήκους τόξου.

(iv) Υπολογίστε το πλαίσιο Frenet συναρτήσει του t και του μήκους τόξου.

2. Δίνεται η καμπύλη

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, f(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

όπου $a \neq 0$ είναι πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί η f έτσι ώστε η c να είναι επίπεδη.

3. Δίνεται η καμπύλη

$$c(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι είναι καμπύλη σταθεράς κλίσης και να βρεθεί σταθερό διάνυσμα το οποίο σχηματίζει σταθερή γωνία με όλες τις εφαπτόμενες ευθείες της c .

4. Καμπύλη $c(s)$, $s \in \mathbb{R}$, του \mathbb{R}^3 με παράμετρο το μήκος τόξου, έχει παντού θετική καμπυλότητα και μοναδιαίο κάθετο

$$\vec{n}(s) = (\sin s, 0, \cos s).$$

Να αποδειχθεί ότι έχει σταθερή καμπυλότητα και σταθερή στρέψη. Να βρεθεί η καμπύλη αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c(0) = (0, 0, 0), \quad \vec{t}(0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

-
5. Να αποδειχθεί ότι οι καμπύλες

$$c(t) = (t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, \sqrt{3}t - \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, -2t), \quad t \in \mathbb{R}$$

είναι γεωμετρικώς ισότιμες.

6. Αποδείξτε ότι αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες μιας κανονικής καμπύλης διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η καμπύλη είναι τμήμα ευθείας.
7. Αποδείξτε ότι αν όλα τα κάθετα επίπεδα μιας κανονικής καμπύλης με καμπυλότητα παντού θετική διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η καμπύλη είναι σφαιρική.
8. Αποδείξτε ότι αν όλα τα επίπεδα προσκολλησεως μιας κανονικής καμπύλης με καμπυλότητα παντού θετική διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η καμπύλη είναι επίπεδη.