ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ III

1. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των καθέτων καμπυλοτήτων μιας κανονικής επιφάνειας σε τυχόν σημείο της p, ως προς δύο κάθετες διευθύνσεις στο p, είναι ανεξάρτητο των διευθύνσεων.

2. Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια έχει παραμετρική παράσταση

$$X(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2 v, u^2 - v^2), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

   (i) Να αποδειχθεί ότι είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια. (ii) Να υπολογιστεί η μέση καμπυλότητα, η καμπυλότητα Gauss και οι κύριες καμπυλότητες.

3. Θεωρούμε την επιφάνεια S με εξίσωση $z = x^2 + y^2/2$. (i) Αποδείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{v} = (0,1,0)$ και $\vec{w} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ ανήκουν στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο σημείο της $p = (1/2, 0, 1/4)$. (ii) Βρείτε τις εικόνες των $\vec{v}, \vec{w}$ μέσω της απεικόνισης Weingarten.

4. Να αποδειχθεί ότι για κάθε κανονική παραμετρική επιφάνεια με παραμετρική παράσταση $X(u,v)$ ισχύουν οι ταυτότητες

$$N_u \times N_v = K X_u \times X_v$$

   και

$$N_u \times X_v + X_u \times N_v = -2H X_u \times X_v.$$

5. Δίνεται κανονική παραμετρική επιφάνεια με παραμετρική παράσταση $X(u,v)$ και μοναδιαίο κάθετο $N(u,v)$. Θεωρούμε $a \in \mathbb{R}^*$ και την απεικόνιση

$$\tilde{X}(u,v) = X(u,v) + aN(u,v).$$

(i) Αποδείξτε ότι η $\tilde{X}$ είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια αν και μόνο αν ο αριθμός $1/a$ δεν είναι κύρια καμπυλότητα της X σε κανένα σημείο της. Αν είναι κανονική τότε:

(ii) Βρείτε το μοναδιαίο κάθετο $\tilde{N}$ της $\tilde{X}$.

(iii) Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss $\tilde{K}$ και η μέση καμπυλότητα $\tilde{H}$ της $\tilde{X}$ δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\tilde{K} = \frac{K}{1 - 2Ha + Ka^2}, \quad \tilde{H} = \frac{H - Ka}{1 - 2Ha + Ka^2}.$$

(iv) Αποδείξτε ότι κάθε κανονική επιφάνεια με σταθερή μέση καμπυλότητα $c \neq 0$ μη μηδενική καμπυλότητα Gauss υπάρχει επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα Gauss $4c^2$.

6. Να βρεθούν οι ασυμπτωτικές γραμμές της επιφάνειας με παραμετρική παράσταση

$$X(u, v) = (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, au)$$

όπου $a \in \mathbb{R}^+$.

7. Να βρεθούν οι γραμμές καμπυλότητας της επιφάνειας με εξίσωση $z = x^2 + y^2$.