

---

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

### ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ IV

1. Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια έχει παραμετρική παράσταση

$$X(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι είναι ευθιογενής επιφάνεια. (ii) Είναι αναπτυκτή; Ποιά επιφάνεια είναι αυτή;

2. Αν μια συνεκτική επιφάνεια  $S$  έχει μια οικογένεια επίπεδων ασυμπτωτικών γραμμών που δεν είναι ευθείες, τότε η  $S$  είναι τμήμα επιπέδου.
3. Έστω  $c$  ασυμπτωτική γραμμή μιας κανονικής επιφάνειας  $S$  με καμπυλότητα  $k$  παντού διάφορη του μηδενός και στρέψη  $\tau$ . Να αποδειχθεί ότι σε κάθε σημείο της  $c$  ισχύει η σχέση  $\tau^2 = -K$ , όπου  $K$  είναι η καμπυλότητα Gauss της  $S$ .
4. Συνεκτική επιφάνεια με παραμετρική παράσταση  $X(u, v)$ ,  $(u, v) \in U$ , έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $N(u, v)$  που πληροί τις σχέσεις:

$$N_u = aX_u \quad \text{και} \quad N_v = bX_v,$$

όπου  $a, b$  είναι μη μηδενικές σταθερές. Να αποδειχθεί ότι η επιφάνεια είναι τμήμα σφαίρας.

5. Έστω κανονική επιφάνεια  $S$  με μοναδιαίο κάθετο  $N$ . Αποδείξτε ότι μια κανονική επιφανειακή καμπύλη  $c(t)$  της  $S$  είναι γραμμή καμπυλότητά της, αν και μόνο αν η κανονική παραμετρική επιφάνεια

$$X(t, v) = c(t) + vN(c(t)),$$

έχει καμπυλότητα Gauss ταυτοτικά μηδέν.